arXiv:2302.08316v1 [math.RA] 16 Feb 2023

´光滑泊松代数的庞加莱对偶与泊松上同调上的 BV结构

J. LUO、S.-Q. WANG 和 Q.-S. WU

Abstract. 与泊松几何中的模向量场类似，对于具有平凡典范丛的光滑泊松代数，可以定义模导子。通过用模导子扭曲泊松模，可以证明，取值于任意泊松模的泊松上链复形与取值于相应扭曲泊松模的泊松链复形同构。由此证明了泊松同调与上同调之间的一种扭曲版庞加莱对偶。此外，还定义了伪幺模泊松结构的概念。证明了，作为 Gerstenhaber代数的泊松上同调能够继承其某个泊松上链复形上的 Batalin-Vilkovisky 算子，当且仅当泊松结构是伪幺模的。这推广了 P. Xu 给出的几何版本。还利用 K¨ahler 微分模的对偶基描述了模导子和 Batalin-Vilkovisky 算子。

0. Introduction

泊松代数及其（上）同调理论在研究其变形量子化代数中发挥着重要作用，反之亦然。例如，一些非交换代数（如三维分次 Calabi-Yau 代数 [VdB94、Mar04、BP14] 以及四维 Sklyanin 代数 [TaP09a、TaP09b], ）的 Hochschild 同调和循环同调，便是利用泊松代数的变形理论和 Brylinski 谱序列 [Bry88]计算得到的。Dolgushev 证明了幺模泊松代数的变形量子化满足 Van den Bergh 对偶性 [Dol09]。本文第三作者与 Zhu 研究了泊松代数的滤过变形，并证明在某些温和假设下，当且仅当泊松代数是幺模的，变形代数才是 Calabi-Yau 代数 [WZ21]。Chen-Chen-Eshmatov-Yang 研究了具有幺模二次泊松结构的多项式代数的泊松同调与上同调之间的 Poincar´é 对偶性，并证明 Kontsevich 变形量子化以及 Koszul 对偶均保持相应的 Poincar´é 对偶性 [CCEY21]。

回到泊松代数这一方面，Launois-Richard [LR07] 和 Zhu [Zhu15]分别证明了具有二次和线性泊松结构的多项式泊松代数的扭曲庞加莱对偶性。在 [LWW 15], 中，我们将他们关于扭曲庞加莱对偶性的结果推广到了任意多项式泊松代数。该对偶性通过以规范方式扭曲泊松模结构实现，而这种结构

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：17B63、17B40、17B55、16E40。
Key words and phrases. 泊松代数，光滑代数，模导子，庞加莱对偶性，Batalin-Vilkovisky 代数。

由模导子构造而成 [LWW15, 定理 3.5]。后来，L¨u-Wang-Zhuang 通过泊松包络代数，重新得到了任意仿射泊松代数在其 K¨ahler 微分模自由时的对偶性 [LWZ20]。注意，如果泊松结构是幺模的，扭曲庞加莱对偶性就退化为经典的庞加莱对偶性 [Xu99, LWW15]。

本文中，对于任意具有平凡典范丛的光滑泊松代数，我们利用其 K¨ahler 微分模的对偶基描述模导子（见定理2.13），并证明这类泊松代数总是满足扭曲的 Poincar´é 对偶性（见定理 3.12）。与 Hueb- schmann 的工作 [Hue99], 相比，后者在 Lie-Rinehart 代数的框架下证明了一般的对偶定理，而本文建立的对偶性则源于泊松代数R 的泊松上链复形（取值于泊松模 M ）与 R 的泊松链复形（取值于扭曲泊松模 M_t ）之间的一个显式同构（见定理 3.11）。

Batalin-Vilkovisky（简称 BV）代数出现在 BV 形式体系的研究中；BV 形式体系是一种通用而有效的规范场量子化方法，在量子场论和弦理论中发挥着重要作用 [Mne19]。许多研究者考察了非交换代数的 Hochschild (余)同调上的 BV结构，例如 [Gin05, Tra08, KoKr14, LZZ16]。对于泊松代数，泊松 (余)同调上的 BV结构也引起了广泛关注，因为泊松 (余)同调与其变形量子化代数的 Hochschild (余)同调密切相关。对于任意具有平凡典范丛的光滑泊松代数，我们证明其泊松上链复形上存在自然的 BV 代数结构（见定理 4.12）；该结构的 BV 算子由定理 3.11 给出的扭曲 Poincar´é 对偶性，将泊松链复形上的德拉姆微分诱导而来。定理 4.15 描述了泊松上链复形上的 BV 算子。如果泊松结构是单模的，那么泊松上同调具有 BV 代数结构，其 BV 算子由泊松上链复形上的 BV 算子诱导而来（见定理 4.19）。

在本文的最后一部分，我们定义了一类伪幺模泊松结构（见定义 5.3），可将其视为幺模泊松结构的推广。对于这类泊松结构，我们证明其泊松上同调仍具有 BV 代数结构。关于 Frobenius 泊松代数， [LWW19] 证明了类似的结果。事实上，我们证明，泊松上同调能够继承其某个泊松上链复形所带有的 BV 算子，当且仅当该泊松结构是伪幺模的（见定理 5.9 和推论 5.12）。

本文组织如下。第1节汇集了关于光滑代数上的多重导子和高阶微分形式的一些事实。第2节在回顾泊松 (余)同调的定义后，证明定理2.13，该定理刻画了任意具有平凡典范丛的光滑泊松代数的模导子。第3节证明定理3.11和定理3.12，确立了具有平凡典范丛的光滑泊松代数的泊松同调与上同调之间的扭曲庞加莱对偶性。第4节研究泊松上链复形和泊松上同调上的 BV 代数结构，

并证明定理 4.12 和 4.19。最后一节引入伪单模泊松代数的概念，并证明定理 5.9 和推论 5.12；它们指出，泊松上同调具有从其泊松上链复形继承而来的 BV 算子，当且仅当该泊松代数是伪单模的。

1. 预备知识

本节汇集一些关于多重导子、高阶微分形式和收缩映射的必要事实。设 $\mathbb{K}$ 为一个域。所有向量空间和代数都定义在 $\mathbb{K}$ 上。我们将 [LPV13] 作为基本参考文献。

1.1. 导子与 K¨ahler 微分。 设 R 为一个交换代数，M 为一个 R-模。令 $\Omega^1(R)$ 表示 K¨ahler 微分模，$\mathrm{Der}(R,M)$ 表示从 R 到 M 的 $\mathbb{K}$-线性导子集合。存在一个左 R-模的典范同构

$$\mathrm{Hom}_R(\Omega^1(R),M)\to \mathrm{Der}(R,M), f\mapsto f\,\mathrm{d} \tag{1.1}$$

其逆映射为 $\xi\mapsto f_\xi$，其中 $f_\xi:\Omega^1(R)\to M$ 是映射 $a\mathrm{d}b\mapsto a\xi(b)$。有时，$\mathrm{Der}(R,M)$ 通过 (1.1) 中的同构与 $\mathrm{Hom}_R(\Omega^1(R)\ M)$ 等同。因此，当 $\xi\in\mathrm{Der}(R,M)$ 被视为 $\mathrm{Hom}_R(\Omega^1(R)\ M)$ 中的元素时，$\xi(\mathrm{d}b)=\xi(b)$；而当 $f\in\mathrm{Hom}_R(\Omega^1(R)\ M)$ 被视为 $\mathrm{Der}(R,M)$ 中的元素时，$f(b)=f(\mathrm{d}b)$。令 $\mathrm{Der}(R)=\mathrm{Der}(R,R)$。

1.2. 多重导子与高阶微分形式。 令 $\mathfrak{X}^p(M)$ 为所有取值于 M 的斜对称 p 重 $\mathbb{K}$-线性多重导子的集合，即

$$\mathfrak{X}^p(M)=\{F\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\wedge^pR,M)\mid F\text{ is a derivation in each argument}\}.$$

显然，$\mathfrak{X}^0(M)=M$ 且 $\mathfrak{X}^1(M)=\mathrm{Der}(R,M)$。$\mathfrak{X}^p(M)$ 中的元素称为从 M 到 R 的 p 重多重导子形式。令 $\mathfrak{X}^*(M)=\oplus_{p\in\mathbb{N}}\mathfrak{X}^p(M)$。

令 $\Omega^p(R)=\wedge^p_R\Omega^1(R)$ 表示 R-模 $\Omega^1(R)$ 的第 p 次楔积，其中 $p\in\mathbb{N}$；并且 $\Omega^*(R)=\oplus_{p\in\mathbb{N}}\Omega^p(R)$。$\Omega^p(R)$ 中的元素称为 R 的 K¨ahler p-形式。于是有以下更一般的事实。

引理 1.1. 设 R 是一个交换代数，M 是一个 R-模。对于任意 $p\in\mathbb{N}$,

$$\mathfrak{X}^p(M)\cong\mathrm{Hom}_R(\Omega^p(R),M). \tag{1.2}$$

证明。令 φ: $\mathfrak{X}^p(M)\to\mathrm{Hom}_R(\Omega^p(R)\ M)$ 为映射 $F\mapsto\varphi(F):\Omega^p(R)\to M$，使得对于任意 $a_0\,\mathrm{d}a_1\wedge\mathrm{d}a_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p\in\Omega^p(R)$,

$$\varphi(F)(a_0\,\mathrm{d}a_1\wedge\mathrm{d}a_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p)=a_0F(a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_p).$$

令 ψ: $\mathrm{Hom}_R(\Omega^p(R)\ M)\to\mathfrak{X}^p(M)$ 为映射 $g\mapsto\psi(g)$，使得对于任意 $a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_p\in\wedge^pR$,

$$\psi(g)(a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_p)=g(\mathrm{d}a_1\wedge\mathrm{d}a_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p).$$

于是 $\varphi(\psi(g))=g$ 且 $\psi(\varphi(F))=F$。由此可知，φ 是一个同构，其逆为 ψ。□

定义 1.2. 对任意 $F \in \mathfrak{X}^p(R)$ 和 $G \in \mathfrak{X}^q(M)$，定义乘积 $F \wedge G \in \mathfrak{X}^{p+q}(M)$：对于任意 $a_1, a_2, \cdots, a_{p+q} \in R$,

$$\begin{aligned}&(F \wedge G)(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_{p+q})\\ =&\sum_{\sigma \in S_{p,q}} \operatorname{sgn}(\sigma) F(a_{\sigma(1)} \wedge a_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge a_{\sigma(p)}) G(a_{\sigma(p+1)} \wedge a_{\sigma(p+2)} \wedge \cdots \wedge a_{\sigma(p+q)}),\end{aligned}$$

其中 $S_{p,\ q}$ 表示所有 (p, q)-洗牌的集合，即满足 $\sigma(1) < \cdots < \sigma(p)$ 且 $\sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q)$ 的置换 $\sigma \in S_{p+q}$。

容易验证：

命题 1.3. $(\mathfrak{X}^*(R), \wedge)$ 是一个分次交换 R-代数。 $\mathfrak{X}^*(M)$ 是一个分次 $\mathfrak{X}^*(R)$-模。

设 $\wedge_R^p \operatorname{Der}(R)$ 为 $\operatorname{Der}(R)$ 的 p 次楔积。存在一个自然映射

$$\alpha : \wedge_R^p \operatorname{Der}(R) \to \mathfrak{X}^p(R),\ \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_p \mapsto \alpha(\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_p), \tag{1.3}$$

其中 $\alpha(\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_p)$ 是映射 $\wedge^p R \to R$,

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_p \mapsto \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) \xi_1(a_{\sigma(1)}) \xi_2(a_{\sigma(2)}) \cdots \xi_p(a_{\sigma(p)}) = \begin{vmatrix} \xi_1(a_1) & \cdots & \xi_1(a_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_p(a_1) & \cdots & \xi_p(a_p) \end{vmatrix}.$$

容易验证， α 是良定义的。若 R 是光滑仿射的，则如下一小节所证明的那样（见推论1.5）， α 是一个同构，它诱导了从外代数 $E_R(\operatorname{Der}(R))$到$(\mathfrak{X}^*(R), \wedge)$的一个代数同构。

1.3. 光滑仿射代数与多重导子。回忆，若仿射交换代数 R 满足以下条件，则称其（在 $\mathbb{K}$ 上）是光滑的：对于任意满射态射 $\varepsilon : E \to A$，其中 $E \to A$ 是交换代数 E 与 A 之间的态射，且$(\ker \varepsilon)^2 = 0$，以及任意态射 $f : R \to A$，存在态射 $g : R \to E$，使得 $\varepsilon g = f$。事实上， R光滑当且仅当其整体维数有限；当且仅当 R 作为 R-双模的投射维数有限。若 R 是一个光滑仿射代数，则$\Omega^1(R)$是一个有限生成射影 R-模 [Wei94, 9.3]。

当 $\Omega^1(R)$ 是有限生成 R-射影时，存在一个典范同构

$$\Omega^1(R) \cong \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Der}(R), R)$$

由 (1.1) 和投射模的对偶基引理可得。事实上，根据以下引理，对于任意 $p \in \mathbb{N}$，$\Omega^p(R) \cong \operatorname{Hom}_R(\wedge_R^p \operatorname{Der}(R),\ R)$ 均成立。

引理 1.4. 设 R 为交换代数， P 为有限生成射影R-模。那么，对于任意 $p \in \mathbb{N}$, $\wedge_R^p P$ 是投射的，并且

$$\wedge_R^p \operatorname{Hom}_R(P, R) \cong \operatorname{Hom}_R(\wedge_R^p P, R). \tag{1.4}$$

证明。定义 $\alpha' : \wedge_R^p \operatorname{Hom}_R(P, R) \to \operatorname{Hom}_R(\wedge_R^p P, R)$ $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p \mapsto \alpha'(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p)$，这是映射 $\wedge_R^p P \to R$,

$$y_1 \wedge y_2 \wedge \cdots \wedge y_p \mapsto \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) f_1(y_{\sigma(1)}) f_2(y_{\sigma(2)}) \cdots f_p(y_{\sigma(p)}) = \begin{vmatrix} f_1(y_1) & \cdots & f_1(y_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_p(y_1) & \cdots & f_p(y_p) \end{vmatrix}.$$

容易验证， α' 定义良好。

设 P 的投射 R-模 P 的一组对偶基为 $\{x_i, x_i^*\}_{i=1}^r$。那么

$$\{x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_p}, \alpha'(x_{i_1}^* \wedge x_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge x_{i_p}^*)\}_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_p\le r}$$

是投射模 $\wedge_R^p P$ 的一组对偶基。

定义 $\beta'\colon \mathrm{Hom}_R(\wedge_R^p P, R) \to \wedge_R^p \mathrm{Hom}_R(P, R)$,

$$f \mapsto \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_p\le r} f(x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_p}) x_{i_1}^* \wedge x_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge x_{i_p}^*.$$

那么 α' 和 β' 互为逆映射。 □

推论 1.5. 设 R 是一个光滑代数。那么在 (1.3) 中定义的映射 α 给出一个同构 $\wedge_R^p \mathrm{Der}(R) \cong \mathfrak{X}^p(R)$, 其中 $p \in \mathbb{N}$ 任意。此外, 下图交换:

$$\begin{array}{ccc} \wedge_R^p \mathrm{Der}(R) & \xrightarrow[\cong]{by\ (1.1)} & \wedge_R^p \mathrm{Hom}_R(\Omega^1(R), R) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \cong\ by\ (1.4)} \\ \mathfrak{X}^p(R) & \xrightarrow[\cong]{by\ (1.2)} & \mathrm{Hom}_R(\Omega^p(R), R). \end{array}$$

证明。由于 R 是光滑的, $\Omega^1(R)$ 是一个有限生成射影 R-模。

设 $\{(\mathrm{d}x_i),(\mathrm{d}x_i)^*\}_{i=1}^r$ 是投射模 $\Omega^1(R)$ 的一组对偶基。那么 α 的逆为 $\mathfrak{X}^p(R) \to \wedge_R^p \mathrm{Der}(R)$, 它将 F 映射为

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_p\le r} F(x_{i_1} \wedge x_{i_2} \cdots \wedge x_{i_p})(\mathrm{d}x_{i_1})^* \wedge (\mathrm{d}x_{i_2})^* \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}x_{i_p})^*. \qquad \square$$

注记 1.6。在推论 1.5 中, 条件“R 是光滑的”可以放宽为“R 是交换代数, 且 $\Omega^1(R)$ 是有限生成射影 R- 模 ”。

定义 1.7。设 R 是一个光滑仿射代数, 且 $n \in \mathbb{N}$。若 $n = \sup\{i \in \mathbb{N} \mid \Omega^i(R) \neq 0\}$, 则称 R 是维数为 n 的光滑代数。在这种情况下, n 称为 R的光滑维数, 而 $\Omega^n(R)$ 称为 R的典范丛。此外, 若 $\Omega^n(R) \cong R$ (作为 R-模), 则称 R 的典范丛是平凡的。

1.4. 收缩映射。

设 R 是一个交换代数, M 是一个右 R-模。

定义 1.8. 对任意 $F \in \mathfrak{X}^p(M)$, 收缩映射 $\iota_F\colon \Omega^q(R) \to M \otimes_R \Omega^{q-p}(R)$ 定义如下: 当 $q < p$, $\iota_F = 0$; 当 $q \ge p$ 且 $\omega = a_0 \mathrm{d}a_1 \wedge \mathrm{d}a_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_q \in \Omega^q(R)$ 时,

$$\iota_F(\omega) = \sum_{\sigma \in S_{p,q-p}} \mathrm{sgn}(\sigma) F(a_{\sigma(1)} \wedge a_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge a_{\sigma(p)}) a_0 \otimes \mathrm{d}a_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_{\sigma(q)}.$$

注 1.9. 若 $M = R$, 则对任意 $F \in \mathfrak{X}^p(R)$, $\iota_F\colon \Omega^*(R) \to \Omega^*(R)$ 是一个次数为 $-p$ 的分次 R- 线性映射。对于 $F = a \in R = \mathfrak{X}^0(R)$, 收缩映射应理解为 $\iota_F(\omega) = a\omega$。

注记 1.10. 注意, 对于任意 $F \in \mathfrak{X}^p(R)$, 收缩映射 $\iota_F\colon \Omega^*(R) \to \Omega^*(R)$ 是一个 R-模态射。因此映射 $\mathrm{id}_M \otimes_R \iota_F\colon M \otimes_R \Omega^q(R) \to M \otimes_R$

$\Omega^{q-p}(R)$ 是良定义的。有时我们也将 $\mathrm{id}_M \otimes_R \iota_F$ 记作 ι_F，并称其为由 F 诱导的收缩映射：对于任意 $m \otimes \mathrm{d}a_1 \wedge \mathrm{d}a_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_q \in M \otimes_R \Omega^q(R)$,

$$\begin{aligned}&\iota_F(m \otimes \mathrm{d}a_1 \wedge \mathrm{d}a_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_q)\\ =&\sum_{\sigma \in S_{p,q-p}} \mathrm{sgn}(\sigma) m F(a_{\sigma(1)} \wedge a_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge a_{\sigma(p)}) \otimes \mathrm{d}a_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_{\sigma(q)}.\end{aligned}$$

命题 1.11. 对任意 $F \in \mathfrak{X}^{p_1}(M)$ 和 $G \in \mathfrak{X}^{p_2}(R)$,

$$\iota_F \iota_G = (-1)^{p_1 p_2} \iota_G \iota_F : \Omega^q(R) \to M \otimes_R \Omega^{q-p_1-p_2}(R).$$

证明。容易验证

$$\iota_F \iota_G = \iota_{G \wedge F} = (-1)^{pq} \iota_{F \wedge G} = (-1)^{pq} \iota_G \iota_F.$$

□

定义1.12. 对任意 $\omega \in \Omega^p(R)$，收缩映射 $\iota_\omega : \mathfrak{X}^*(R) \to \mathfrak{X}^*(R)$ 是一个次数为 $-p$ 的分次 R-线性映射，其定义为 $\iota_\omega : \mathfrak{X}^q(R) \to \mathfrak{X}^{q-p}(R)$：当 $q < p, \iota_\omega = 0$ 时；当 $q \geq p$ 且 $F \in \mathfrak{X}^q(R)$ 时,

$$(\iota_\omega F)(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_{q-p}) = F(\mathrm{d}a_1 \wedge \mathrm{d}a_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_{q-p} \wedge \omega),$$

其中，通过利用 (1.2) 将 $\mathfrak{X}^q(R)$ 与 $\mathrm{Hom}_R(\Omega^q(R), R)$ 视为相同对象，可将该作用理解为。

命题 1.13. [LPV13, 命题 3.4(3)] 设 R 为交换代数，且 $F \in \mathfrak{X}^p(R)$。对任意 $a \in R$ 和 $\omega \in \Omega^q(R)$,

$$\iota_F(\omega \wedge \mathrm{d}a) = \iota_F(\omega) \wedge \mathrm{d}a + (-1)^{q-p+1} \iota_{\iota_{\mathrm{d}a}(F)}(\omega). \tag{1.5}$$

1.5. 光滑情形下的收缩映射。设 R 是一个光滑代数（或一个满足 $\Omega^1(R)$ 是有限生成射影 R-模的交换代数）。那么，根据推论 1.5，$\wedge^p_R \mathrm{Der}(R) \cong \mathfrak{X}^p(R)$，并且 $\Omega^p(R)$ 可通过下式视为 $\wedge^p_R \mathrm{Der}(R)$ 的对偶模

$$\Omega^p(R) \cong \wedge^p_R \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Der}(R), R) \cong \mathrm{Hom}_R(\wedge^p_R \mathrm{Der}(R), R) \cong \mathrm{Hom}_R(\mathfrak{X}^p(R), R).$$

定义 1.14。设 R 是一个光滑代数。那么对于任意多重导子 $F \in \mathfrak{X}^p(R)$，可以定义一个自然的收缩算子

$$\iota_F : \Omega^q(R) \to \Omega^{q-p}(R), \omega \mapsto \iota_F(\omega),$$

其中 $\iota_F(\omega)$ 定义为

$$\xi_{p+1} \wedge \xi_{p+2} \wedge \cdots \wedge \xi_q \mapsto \omega(F \wedge \xi_{p+1} \wedge \cdots \wedge \xi_q)$$

对于任意 $\xi_{p+1} \wedge \xi_{p+2} \wedge \cdots \wedge \xi_q \in \mathfrak{X}^{q-p}(R)$，即，如果 $F = \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_p$,

$$\iota_F(\omega)(\xi_{p+1} \wedge \xi_{p+2} \wedge \cdots \wedge \xi_q) = \omega(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_p \wedge \xi_{p+1} \wedge \cdots \wedge \xi_q).$$

命题 1.15。备注 1.9 中的收缩映射 ι_F 与定义 1.14 中的相同，这是在典范同构 $\Omega^q(R) \cong \mathrm{Hom}_R(\wedge^q_R \mathrm{Der}(R), R)$ 下成立的。

证明。设 $\omega = a_0 \mathrm{d}a_1 \wedge \mathrm{d}a_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_q \in \Omega^q(R)$, $q \geq p$; $F = \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_p \in \mathfrak{X}^p(R)$ 和 $\xi_{p+1} \wedge \xi_{p+2} \wedge \cdots \wedge \xi_q \in \mathfrak{X}^{q-p}(R)$。根据定义 1.8 和 1.14，计算 $\iota_F(\omega)$ 有两种方法。结论由行列式的拉普拉斯展开得出。□

定义 1.16。设 R 是一个交换代数，且 $\Omega^1(R)$ 是有限生成的投射模。则对任意 $\omega \in \Omega^p(R)$，定义一个自然的收缩算子ι_ω：$\mathfrak{X}^q(R) \to \mathfrak{X}^{q-p}(R)$，$\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_q \mapsto$

$$\sum_{\sigma \in S_{q-p,p}} \operatorname{sgn}(\sigma)[(\xi_{\sigma(q-p+1)} \wedge \cdots \wedge \xi_{\sigma(q)})(\omega)]\, \xi_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \xi_{\sigma(q-p)}.$$

命题 1.17. 定义1.12中的收缩映射，在典范同构 ι_ω ($\mathfrak{X}^q$) $R\mathrm{Hom} \cong (\Omega_R^{(q)}R)$下，与定义 1.16中的收缩映射相同。

证明。证明与命题 1.15的证明类似。 □

2. Modular derivations of Smooth Poisson algebras

本节回顾泊松代数的（上）同调理论的一些内容，并给出具有平凡典范丛的光滑泊松代数的模导子的定义。最后，我们利用 K¨ahler 微分模的对偶基来描述模导子；该模是有限生成射影模。

2.1. 泊松代数与泊松模。

定义 2.1. [Lic77, Wei77] 设交换$\mathbb{K}$-代数 R 配备一个双线性映射 $\{-,-\}$：$R \times R \to R$，若满足以下条件，则称其为泊松代数：

(1) $(R, \{-,-\})$ 是一个$\mathbb{K}$-Lie代数；(2) 关于 R 的乘法，$\{-,-\}$：$R \times R \to R$ 对每个自变量都是导子。

我们称这样的双线性映射 $\pi = \{-,-\} \in \mathfrak{X}^2(R)$ 为 R 上的泊松结构。

定义 2.2. [Oh99] 泊松代数 R 上的右泊松模 M 是一个$\mathbb{K}$-向量空间 M，配备两个双线性映射 $\cdot$ 和 $\{-,-\}_M$：$M \times R \to M$，使得

(1) $(M, \cdot)$ 是交换代数 R 上的右模；(2) $(M, \{-,-\}_M)$ 是Lie代数 $(R, \{-,-\})$ 上的右Lie模；(3) 对任意 $a, b \in R$ 和 $x \in M$，
$\{xa, b\}_M = \{x, b\}_M a + x\{a, b\}$；(4) 对任意 $a, b \in R$ 和 $x \in M$，
$\{x, ab\}_M = \{x, a\}_M b + \{x, b\}_M a$。

左泊松模的定义类似。任意泊松代数 R 都自然是其自身上的右泊松模和左泊松模。

2.2. 泊松同调与上同调。设 M 是泊松代数 R 上的右泊松模。存在一个典范链复形

(2.1)

$$\cdots \longrightarrow M \otimes_R \Omega^p(R) \xrightarrow{\partial_p} M \otimes_R \Omega^{p-1}(R) \xrightarrow{\partial_{p-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} M \otimes_R \Omega^1(R) \xrightarrow{\partial_1} M \to 0$$

其中 ∂_p: $M \otimes_R \Omega^p(R) \longrightarrow M \otimes_R \Omega^{p-1}(R)$ 定义如下：

$$\begin{aligned}\partial_p(m \otimes \mathrm{d}a_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_p) = &\sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \{m, a_i\}_M \otimes \mathrm{d}a_1 \wedge \cdots \widehat{\mathrm{d}a_i} \cdots \wedge \mathrm{d}a_p \\ &+ \sum_{1 \le i < j \le p} (-1)^{i+j} m \otimes \mathrm{d}\{a_i, a_j\} \wedge \mathrm{d}a_1 \wedge \cdots \widehat{\mathrm{d}a_i} \cdots \widehat{\mathrm{d}a_j} \cdots \wedge \mathrm{d}a_p\end{aligned}$$

$\widehat{\ }$（其中 $\mathrm{d}a_i$ 表示删去 $\mathrm{d}a_i$ ）。

定义 2.3. [Mas06] 复形 (2.1) 称为R 取值于 M的泊松链复形，其第 p 阶同调称为R取值于 M的第 p 阶泊松同调，记作 $\mathrm{HP}_p(R,M)$。

在 $M=R,\partial=[\iota_\pi,\mathrm{d}]$ 的情形下，d 为德拉姆微分，而泊松同调是 Brylinski [Bry88] 给出的典范同调。

此外还有一个典范的上链复形

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{\delta^0}\mathfrak{X}^1(M)\xrightarrow{\delta^1}\cdots\xrightarrow{\delta^{p-1}}\mathfrak{X}^p(M)\xrightarrow{\delta^p}\mathfrak{X}^{p+1}(M)\longrightarrow\cdots \tag{2.2}$$

其中 $\delta^p\colon\ \mathfrak{X}^p(M)\longrightarrow\mathfrak{X}^{p+1}(M)$ 定义为 $F\mapsto\delta^p(F)$，其中

$$\begin{aligned}\delta^p(F)(a_1\wedge\cdots\wedge a_{p+1})=&\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^i\{F(a_1\wedge\cdots\widehat{a_i}\cdots\wedge a_{p+1}),a_i\}_M\\&+\sum_{1\le i<j\le p+1}(-1)^{i+j}F(\{a_i,a_j\}\wedge a_1\wedge\cdots\widehat{a_i}\cdots\widehat{a_j}\cdots\wedge a_{p+1}).\end{aligned}$$

定义 2.4. [Lic77, Hue90] 复形 (2.2) 称为 R 取值于 M的泊松上链复形，其第 p 阶上同调称为 R取值于 M的第 p 阶泊松上同调，记作 $\mathrm{HP}^p(R,M)$。

$\ker\delta^1$ 中的元素称为泊松导子，而 $\mathrm{Im}\ \delta^0$中的元素称为哈密顿导子，其形式为 $\{m,-\}_M$，其中 $m\in M$，记作 H_m。

例 2.5. $\mathrm{HP}^0(R,M)=\{m\in M\mid\{m,a\}_M=0,\forall\,a\in R\}$ 是 M中的卡西米尔元素集合；$\mathrm{HP}^1(R,M)=\{\text{泊松导子}\}/\{\text{哈密顿导子}\}$。

2.3. 模导子与模类。

定义 2.6. 设 R 是一个维数为 n 、典范丛平凡的光滑泊松代数 $\Omega^n(R)=R\mathrm{vol}$，其中 vol 是一个体积形式。$R$ 关于 vol 的模导子定义为映射 $\phi_{\mathrm{vol}}\colon\ R\to R$，使得对任意$a\in R$,

$$\phi_{\mathrm{vol}}(a)=\frac{\mathscr{L}_{H_a}(\mathrm{vol})}{\mathrm{vol}},$$

其中 $H_a=\{a,-\}\colon\ R\to R$ 是与 a 相关联的哈密顿导子，而$\mathscr{L}_{H_a}=[\mathrm{d}\ \iota_{H_a}]$ 是李导子。

事实上，模导子 ϕ_{vol} 不仅是导子，而且还是泊松导子。当体积形式改变时，例如 $\mathrm{vol}'=u\mathrm{vol}$ 对某个单位$u\in R$而言，那么相应的泊松导子 $\phi_{\mathrm{vol}'}=\phi_{\mathrm{vol}}-u^{-1}H_u$会被一个所谓的对数哈密顿导子 $u^{-1}\{-,u\}$ （见 [Dol09]）所修改。R 的模类定义为模掉对数哈密顿导子后的类 ϕ_{vol}。如果模类是平凡的，即 ϕ_{vol} 是一个对数哈密顿导子，那么就称 R 为幺模。

例 2.7. [LWW15] 设 $R=\mathbb{K}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 是一个带有泊松括号 $\{-,-\}$. 的多项式泊松代数。于是 $\Omega^1(R)=\oplus_{i=1}^n R\,\mathrm{d}x_i$ 且 $\Omega^n(R)=R\mathrm{d}x_1\wedge$

$\mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$，其中 $\mathrm{vol} = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$ 为体积形式。模导子 ϕ_{vol} 由下式给出：

$$\phi_{\mathrm{vol}}(f) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\{f, x_j\}}{\partial x_j}, \forall\, f \in R.$$

以下是一个具有平凡典范丛的光滑代数示例。

例2.8. 设 $R = \mathbb{R}[x, y, z]/(x^2+y^2+z^2-1)$。那么 R是维数为 2 的光滑代数。事实上，众所周知

$$\Omega^1(R) \cong R\,\mathrm{d}x \oplus R\,\mathrm{d}y \oplus R\,\mathrm{d}z / R(x\,\mathrm{d}x, y\,\mathrm{d}y, z\,\mathrm{d}z)$$

是一个稳定自由但非自由的射影 R-模，至少由三个元素生成（参见 [MR87, 11.2.3和 15.3.15]）。此外，

$$\Omega^2(R) = R(x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$$

是一个秩为 1 的自由 R-模，其基元素为 $\eta = x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$。注意，$x \cdot \eta = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$、$y \cdot \eta = \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$ 和 $z \cdot \eta = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

由于 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = (x^2+y^2+z^2)(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) = (x\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z) \wedge \eta = 0$, $\Omega^3(R) = R(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) = 0$. 因此，$R$是一个具有平凡典范丛的二维光滑代数，而 η 是一个体积形式。

考虑正合列

$$0 \to R(x\,\mathrm{d}x, y\,\mathrm{d}y, z\,\mathrm{d}z) \to R\,\mathrm{d}x \oplus R\,\mathrm{d}y \oplus R\,\mathrm{d}z \to \Omega^1(R) \to 0.$$

它通过分裂映射 $p\colon R\,\mathrm{d}x \oplus R\,\mathrm{d}y \oplus R\,\mathrm{d}z \to R(x\mathrm{d}x, y\,\mathrm{d}y, z\,\mathrm{d}z)$ 分裂：

$$(a\,\mathrm{d}x, b\,\mathrm{d}y, c\,\mathrm{d}z) \mapsto (ax+by+cz)(x\,\mathrm{d}x, y\,\mathrm{d}y, z\,\mathrm{d}z),$$

以及 $i : \Omega^1(R) \to R\mathrm{d}x \oplus R\,\mathrm{d}y \oplus R\,\mathrm{d}z$:

$$\begin{aligned} &a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y + c\,\mathrm{d}z \mapsto (a\,\mathrm{d}x, b\,\mathrm{d}y, c\,\mathrm{d}z) - (ax+by+cz)(x\,\mathrm{d}x, y\,\mathrm{d}y, z\,\mathrm{d}z) \\ &= ((a - x(ax+by+cz))\,\mathrm{d}x, (b - y(ax+by+cz))\,\mathrm{d}y, (c - z(ax+by+cz))\,\mathrm{d}z). \end{aligned}$$

于是，对于投射模 $\Omega^1(R)$，存在对偶基 $\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z; (\mathrm{d}x)^*, (\mathrm{d}y)^*, (\mathrm{d}z)^*\}$，其中

$$\begin{aligned} &(\mathrm{d}x)^* : \Omega^1(R) \to R, a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y + c\,\mathrm{d}z \mapsto a - x(ax+by+cz), \\ &(\mathrm{d}y)^* : \Omega^1(R) \to R, a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y + c\,\mathrm{d}z \mapsto b - y(ax+by+cz), \\ &(\mathrm{d}z)^* : \Omega^1(R) \to R, a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y + c\,\mathrm{d}z \mapsto c - z(ax+by+cz). \end{aligned}$$

因此我们有 $(\mathrm{d}x)^*(\mathrm{d}x) + (\mathrm{d}y)^*(\mathrm{d}y) + (\mathrm{d}z)^*(\mathrm{d}z) = 1 - x^2 + 1 - y^2 + 1 - z^2 = 2$. 这与引理3.1中的结论一致。

由此可知，$\mathrm{Der}(R)$ 由 $\{(\mathrm{d}x)^*, (\mathrm{d}y)^*, (\mathrm{d}z)^*\}$ 生成。对于任意 $f \in R$,

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}x)^*(f) &= (\mathrm{d}x)^*(\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z) = (1-x^2)\frac{\partial f}{\partial x} - xy\frac{\partial f}{\partial y} - xz\frac{\partial f}{\partial z}, \\ (\mathrm{d}y)^*(f) &= (\mathrm{d}y)^*(\mathrm{d}f) = -xy\frac{\partial f}{\partial x} + (1-y^2)\frac{\partial f}{\partial y} - yz\frac{\partial f}{\partial z}, \\ (\mathrm{d}z)^*(f) &= (\mathrm{d}z)^*(\mathrm{d}f) = -xz\frac{\partial f}{\partial x} - yz\frac{\partial f}{\partial y} + (1-z^2)\frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned}$$

我们将在本节末尾回到这个例子。

2.4. 模导子的描述。本小节将利用 $\Omega^1(R)$ 的对偶基，描述定理2.13中典范丛平凡的光滑泊松代数的模导子。

首先，有一个有用的引理。

引理2.9. 设 R 是一个具有 $\Omega^{n+1}(R) = 0$的交换代数，且 η 是 $\Omega^n(R)$ 中的一个n-形式。

(1) 对任意 $a \in R$ 和 $F \in \mathfrak{X}^1(R)$，有 $F(a)\eta = \mathrm{d}a \wedge \iota_F(\eta)$。(2) 进一步地，若 R 是具有泊松结构 π的泊松代数，则对任意$a \in R$，有 $\iota_{H_a}(\eta) = -\mathrm{d}a \wedge \iota_\pi(\eta)$。

证明。(1) 由于 $\iota_{\mathrm{d}a}(F) = F(a) \in R$，$\iota_{\iota_{\mathrm{d}a}(F)}(\eta) = \iota_{F(a)}(\eta) = F(a)\eta$。另一方面，$\iota_F(\eta \wedge \mathrm{d}a) = 0$。由(1.5)可得 $(-1)^{n-1}F(a)\eta = \iota_F(\eta) \wedge \mathrm{d}a$ 和$F(a)\eta = \mathrm{d}a \wedge \iota_F(\eta)$。

(2) 在等式 (1.5) 中取 $F = \pi \in \mathfrak{X}^2(R)$，则 $\iota_{\mathrm{d}a}(\pi) = \{-, a\} = -H_a \in \mathfrak{X}^1(R)$，且 $\iota_{\iota_{\mathrm{d}a}(\pi)}(\eta) = -\iota_{H_a}(\eta)$。由 $\iota_\pi(\eta \wedge \mathrm{d}a) = 0$ 和 (1.5) 可得，$\iota_\pi(\eta) \wedge \mathrm{d}a - (-1)^{n-1}\iota_{H_a}(\eta) = 0$。因此，$\iota_{H_a}(\eta) = -\mathrm{d}a \wedge \iota_\pi(\eta)$。□

以下设 R 是一个维数为 n、典范丛平凡且具有泊松结构 $\{-,-\}$ 的光滑代数。设 $\{(\mathrm{d}x_i)、(\mathrm{d}x_i)^*\}_{i=1}^r$ 是 $\Omega^1(R)$ 的一组对偶基，$\mathrm{vol} \in \Omega^n(R)$ 是一个体积形式，ϕ_{vol} 是相对于 vol 的 R 的模导子。注意，生成元的数量 r 可能大于 n。

设 $S = \{(I_1, I_2, \cdots, I_n) \mid I_1, \cdots, I_n$ 为整数，且 $1 \le I_1 < I_2 < \cdots < I_n \le r\}$。对于任意 $I = (I_1, I_2, \cdots, I_n) \in S$，为简化记号，令 $\mathrm{d}x_I$ 表示 $\mathrm{d}x_{I_1} \wedge \mathrm{d}x_{I_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{I_n}$，并令 $\mathrm{d}x_I^*$ 表示 $(\mathrm{d}x_{I_1})^* \wedge (\mathrm{d}x_{I_2})^* \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}x_{I_n})^*$。于是$\{\mathrm{d}x_I$，由引理 1.4 可知，$\mathrm{d}x_I^*\}_{I\in S}$ 是 $\Omega^n(R)$ 的对偶基。令

$$a_I = (\mathrm{d}x_I^*)(\mathrm{vol}) \quad \text{and} \quad b_I = \mathrm{vol}^*(\mathrm{d}x_I). \tag{2.3}$$

于是，根据对偶基引理，在 $\Omega^n(R)$ 中，

$$\mathrm{vol} = \sum_{I\in S} a_I\, \mathrm{d}x_I,\ \mathrm{vol}^* = \sum_{I\in S} b_I(\mathrm{d}x_I^*),\ \mathrm{d}x_I = b_I\, \mathrm{vol},\ \mathrm{d}x_I^* = a_I\, \mathrm{vol}^*. \tag{2.4}$$

容易看出 $\sum_{I\in S} a_I b_I = 1_R$.

当 $r > n$ 时，情况会变得更复杂，因为存在某个 $s(1 \le s \le r)$ 和 $I \in S$，使得对所有 $1 \le j \le n$ 都有 $s \ne I_j$。有时，如果对所有 $1 \le j \le n$ 都有 $s \ne I_j$，我们也称 $s \notin I$。于是得到以下引理。

引理 2.10. 对任意 $I = (I_1, I_2, \cdots, I_n) \in S$和 $s \notin I$,

$$\mathrm{vol}(\mathrm{d}x_I^*)(\mathrm{d}x_s)^* = \sum_{j=1}^n \mathrm{vol}(\mathrm{d}x_{I_j\to s}^*)(\mathrm{d}x_{I_j})^*,$$

其中 $\mathrm{d}x_{I_j\to s}^*$表示将 $\mathrm{d}^{x_{I_j}})^*$改为 $(\mathrm{d}x_s)^*$，置于 $\mathrm{d}x_I^* = (\mathrm{d}x_{I_1})^* \wedge (\mathrm{d}x_{I_2})^* \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}x_{I_n})^*$ 中。

证明。考虑由体积形式 $\mathrm{vol} \in \Omega^n(R)$ 给出的收缩映射 $\iota_{\mathrm{vol}}: \mathfrak{X}^{n+1}(R) \to \mathfrak{X}^1(R)$。于是，由定义 1.16,

$$\begin{aligned}&\iota_{\mathrm{vol}}\big((\mathrm{d}x_s)^* \wedge (\mathrm{d}x_{I_1})^* \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}x_{I_n})^*\big)\\ =&\,\mathrm{vol}\,\big((\mathrm{d}x_{I_1})^* \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}x_{I_n})^*\big)(\mathrm{d}x_s)^*\end{aligned}$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(-1)^j \operatorname{vol}\big((\mathrm{d}x_s)^*\wedge(\mathrm{d}x_{I_1})^*\wedge\cdots\widehat{(\mathrm{d}x_{I_j})^*}\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{I_n})^*\big)(\mathrm{d}x_{I_j})^*.$$

由于 $\mathfrak{X}^{n+1}(R)=0$,

$$\operatorname{vol}(\mathrm{d}x_I^*)(\mathrm{d}x_s)^*=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\operatorname{vol}\big((\mathrm{d}x_s)^*\wedge(\mathrm{d}x_{I_1})^*\wedge\cdots\widehat{(\mathrm{d}x_{I_j})^*}\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{I_n})^*\big)(\mathrm{d}x_{I_j})^*.$$

根据简化记号，即 $\operatorname{vol}(\mathrm{d}x_I^*)\,\mathrm{d}x_s^*=\sum_{j=1}^{n}\operatorname{vol}(\mathrm{d}x^*_{I_j\to s})(\mathrm{d}^{x_{I_j}})^*$。 □

注 2.11。引理 2.10 中的等式在将 vol 改为 $\Omega^n(R)$ 中的任意n-形式时仍然成立。此外，条件 $s\notin I$ 可以去除。

引理2.12。对于任意 $I=(I_1,I_2,\cdots,I_n)\in S$、 $a\in R$和 $F\in\mathfrak{X}^1(R)$,

$$F(a)\,\mathrm{d}x_I=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}F(x_{I_j})\,\mathrm{d}a\wedge\mathrm{d}x_{I_1}\wedge\mathrm{d}x_{I_2}\wedge\cdots\widehat{\mathrm{d}x_{I_j}}\cdots\wedge\mathrm{d}x_{I_n}.$$

证明。根据引理2.9(1)， $F(a)\,\mathrm{d}x_I=\mathrm{d}a\wedge\iota_F(\mathrm{d}x_I)$。注意

$$\iota_F(\mathrm{d}x_I)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}F(x_{I_j})\,\mathrm{d}x_{I_1}\wedge\mathrm{d}x_{I_2}\wedge\cdots\widehat{\mathrm{d}x_{I_j}}\cdots\wedge\mathrm{d}x_{I_n}.$$

因此等式成立。 □

现在我们给出关于体积形式vol的 R 的模导子的描述。

定理2.13. 设 R 是一个维数为 n 、典范丛$\Omega^n(R)=R$vol平凡的光滑代数，并带有一个泊松结构 $\{-,-\}$。那么，采用上述记号，模导子 ϕ_{vol} 由下式给出:

$$\phi_{\mathrm{vol}}(a)=\sum_{1\le s\le r}(\mathrm{d}x_s)^*(\{a,x_s\})+\sum_{I\in S}\{a,a_I\}b_I,\quad \textit{for any } a\in R,$$

其中 a_I 和 b_I 定义见(2.3)。

证明. 由(2.4)和定义1.8,

$$\begin{aligned}\iota_{H_a}(\mathrm{vol})&=\sum_{I\in S}a_I\iota_{H_a}(\mathrm{d}x_I)\\&=\sum_{I\in S}a_I\sum_{1\le j\le n}(-1)^{j-1}\{a,x_{I_j}\}\,\mathrm{d}x_{I_1}\wedge\mathrm{d}x_{I_2}\wedge\cdots\widehat{\mathrm{d}x_{I_j}}\cdots\wedge\mathrm{d}x_{I_n}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\iota_{H_a}(\mathrm{vol})=&\sum_{I\in S}\sum_{1\le j\le n}(-1)^{j-1}\{a,x_{I_j}\}\,\mathrm{d}a_I\wedge\mathrm{d}x_{I_1}\wedge\mathrm{d}x_{I_2}\wedge\cdots\widehat{\mathrm{d}x_{I_j}}\cdots\wedge\mathrm{d}x_{I_n}\\&+\sum_{I\in S}\sum_{1\le j\le n}(-1)^{j-1}a_I\,\mathrm{d}\{a,x_{I_j}\}\wedge\mathrm{d}x_{I_1}\wedge\mathrm{d}x_{I_2}\wedge\cdots\widehat{\mathrm{d}x_{I_j}}\cdots\wedge\mathrm{d}x_{I_n}\\\overset{(a)}{=}&\sum_{I\in S}\{a,a_I\}\,\mathrm{d}x_{I_1}\wedge\mathrm{d}x_{I_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{I_n}\\&+\sum_{I\in S}\sum_{1\le j\le n}a_I(\mathrm{d}x_{I_j})^*(\{a,x_{I_j}\})\,\mathrm{d}x_{I_1}\wedge\mathrm{d}x_{I_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{I_j}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{I_n}\\&+\sum_{I\in S}\sum_{1\le j\le n}\sum_{s\notin I}(-1)^{j-1}a_I(\mathrm{d}x_s)^*(\{a,x_{I_j}\})\,\mathrm{d}x_s\wedge\mathrm{d}x_{I_1}\wedge\mathrm{d}x_{I_2}\wedge\cdots\widehat{\mathrm{d}x_{I_j}}\cdots\wedge\mathrm{d}x_{I_n}.\end{aligned}$$

其中 (a) 由引理2.12 得出，且 $\mathrm{d}\{a,x_{I_j}\}=\sum_{1\le s\le r}(\mathrm{d}x_s)^*(\{a,x_{I_j}\})\,\mathrm{d}x_s$。

为了计算最后一项，考虑三元组集合 $\{(I,j,s) \mid I\in S, 1\le j\le n, s\notin I\}$ 上的一一对应，

$$(I\in S, 1\le j\le n, s\notin I)\mapsto (I'\in S, 1\le j'\le n, s'\notin I')$$

其中 $I'=(I\backslash\{I_j\})\cup\{s\}=\{I_1,\cdots,I_j,\cdots,I_n,s\}$，$j'$ 是满足 $I_{j'-1}<s<I_{j'}$（即 $I'_{j'}=s$）和 $s'=I_j$的唯一数。于是

$$\begin{aligned}
&\sum_{I\in S}\sum_{1\le j\le n}\sum_{s\notin I}(-1)^{j-1}a_I(\mathrm{d}x_s)^*(\{a,x_{I_j}\})\,\mathrm{d}x_s\wedge\mathrm{d}x_{I_1}\wedge\mathrm{d}x_{I_2}\wedge\cdots\widehat{\mathrm{d}x_{I_j}}\cdots\wedge\mathrm{d}x_{I_n}\\
=&\sum_{I'\in S}\sum_{1\le j'\le n}\sum_{s'\notin I'}\mathrm{vol}(\mathrm{d}x^*_{I'_{j'}\to s'})(\mathrm{d}x_{I'_{j'}})^*(\{a,x_{s'}\})\,\mathrm{d}x_{I'}\\
\overset{(b)}{=}&\sum_{I'\in S}\sum_{s'\notin I'}\mathrm{vol}(\mathrm{d}x^*_{I'})(\mathrm{d}x_{s'})^*(\{a,x_{s'}\})\,\mathrm{d}x_{I'}\\
=&\sum_{I\in S}\sum_{s\notin I}a_I(\mathrm{d}x_s)^*(\{a,x_s\})\,\mathrm{d}x_I,
\end{aligned}$$

其中（b）由引理 2.10 得出。因此

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\iota_{H_a}(\mathrm{vol})\\
=&\sum_{I\in S}\{a,a_I\}\,\mathrm{d}x_I+\sum_{I\in S}\sum_{1\le j\le n}a_I(\mathrm{d}x_{I_j})^*(\{a,x_{I_j}\})\,\mathrm{d}x_I+\sum_{I\in S}\sum_{s\notin I}a_I(\mathrm{d}x_s)^*(\{a,x_s\})\,\mathrm{d}x_I\\
=&\sum_{I\in S}\{a,a_I\}\,\mathrm{d}x_I+\sum_{I\in S}\sum_{1\le s\le r}a_I(\mathrm{d}x_s)^*(\{a,x_s\})\,\mathrm{d}x_I\\
=&\sum_{I\in S}\{a,a_I\}b_I\,\mathrm{vol}+\sum_{1\le s\le r}(\mathrm{d}x_s)^*(\{a,x_s\})\,\mathrm{vol}.
\end{aligned}$$

由模导子的定义可知

$$\phi_{\mathrm{vol}}(a)=\sum_{1\le s\le r}(\mathrm{d}x_s)^*(\{a,x_s\})+\sum_{I\in S}\{a,a_I\}b_I=\phi_1(a)+\phi_2(a),$$

其中 $\phi_1(a)=\sum_{1\le s\le r}(\mathrm{d}x_s)^*(\{a,x_s\})$，$\phi_2(a)=\sum_{I\in S}\{a,a_I\}b_I$。 □

注 2.14. 如果 $r=n$，集合 S仅含有一个元素 $I=(1,2,\cdots,n)$，则根据（2.4），$\mathrm{vol}=a_I\mathrm{d}x_I$和 $a_Ib_I=1_R$。因此，$\phi_2=\{-,a_I\}b_I=a_I^{-1}\{-,a_I\}$是一个对数哈密顿导子。在此情况下，$b_I\mathrm{vol}$ 也是 R 的一个体积形式，并且关于 $b_I\mathrm{vol}$ 的模导子为

$$\phi_{b_I\,\mathrm{vol}}=\phi_{\mathrm{vol}}-b_I^{-1}H_{b_I}=\phi_{\mathrm{vol}}-\phi_2=\phi_1.$$

例 2.15. 考虑例2.8中的光滑代数 R。设 $\{-,-\}$ 是 R 上的泊松结构。那么，相对于 $\eta=x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 的模导子为

$$\phi_\eta(a)=(\mathrm{d}x)^*(\{a,x\})+(\mathrm{d}y)^*(\{a,y\})+(\mathrm{d}z)^*(\{a,z\}),$$

对于任意 $a\in R$.，有 $\sum_{I\in S}\{a,a_I\}b_I=\{a,x\}x+\{a,y\}y+\{a,z\}z=0$

3. Poincaré duality for smooth Poisson algebras

如 [LWW15 命题 2.7] 所述，任何泊松模都可以用泊松导子进行扭曲。本节中，对于任意具有平凡典范丛的光滑泊松代数，我们证明，取值于任意泊松模的泊松上链复形同构于取值于相应扭曲泊松模的泊松

模。由此可推出扭曲版庞加莱对偶性，建立泊松同调与泊松上同调之间的对应关系，这推广了 [LWW15 中针对多项式泊松代数的定理 3.5] 。

3.1. 导子与 Kähler 微分之间的对偶性。本节中，设 R 是维数为 n 的光滑仿射代数，且 $\{(\mathrm{d}x_i)、(\mathrm{d}x_i)^*\}_{i=1}^r$ 是投射模 $\Omega^1(R)$ 的一组对偶基。

回忆一下，对于任意 $f_i \in \mathrm{Hom}_R(\Omega^1(R)\ R) \cong \mathfrak{X}^1(R)$，其中 $1 \leq i \leq p$，以及 $\omega = a_0\,\mathrm{d}a_1 \wedge \mathrm{d}a_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_p \in \Omega^p(R)$，根据引理 1.1 和定义 1.2，

$$(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p)(\omega) = a_0 \begin{vmatrix} f_1(\mathrm{d}a_1) & f_1(\mathrm{d}a_2) & \cdots & f_1(\mathrm{d}a_p) \\ f_2(\mathrm{d}a_1) & f_2(\mathrm{d}a_2) & \cdots & f_2(\mathrm{d}a_p) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_p(\mathrm{d}a_1) & f_p(\mathrm{d}a_2) & \cdots & f_p(\mathrm{d}a_p) \end{vmatrix}.$$

于是 $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p \in \mathfrak{X}^p(R) \cong \mathrm{Hom}_R(\Omega^p(R)\ R)$。

由于 $\{(\mathrm{d}x_i)、(\mathrm{d}x_i)^*\}_{i=1}^r$ 是 $\Omega^1(R)$ 的一组对偶基，因此 $\{(\mathrm{d}x_i)^*、(\mathrm{d}x_i)^{**}\}_{i=1}^r$ 是 $\mathrm{Hom}_R(\Omega^1(R)\ R) \cong \mathrm{Der}(R)$ 的一组对偶基，而后者是投射模。于是，对于任意 $a \in R$,

$$\mathrm{d}a = \sum_{i=1}^r (\mathrm{d}x_i)^*(\mathrm{d}a)\,\mathrm{d}x_i = \sum_{i=1}^r (\mathrm{d}x_i)^*(a)\,\mathrm{d}x_i, \tag{3.1}$$

并且对于任意 $\xi \in \mathrm{Der}(R)$,

$$\xi = \sum_{i=1}^r (\mathrm{d}x_i)^{**}(\xi)(\mathrm{d}x_i)^* = \sum_{i=1}^r \xi(\mathrm{d}x_i)(\mathrm{d}x_i)^* = \sum_{i=1}^r \xi(x_i)(\mathrm{d}x_i)^*. \tag{3.2}$$

对于任意 $F \in \mathfrak{X}^p(R)$，固定 $a_2, \cdots, a_p \in R$，定义 $\xi_{a_2,\cdots,a_p}(F) \in \mathrm{Der}(R)$ 如下：

$$\xi_{a_2,\cdots,a_p}(F)(a) \triangleq F(a \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_p).$$

于是，由 (3.2)，对于任意 $a \in R$,

$$F(a \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_p) = \sum_{i=1}^r \xi_{a_2,\cdots,a_p}(F)(x_i)(\mathrm{d}x_i)^*(a) = \sum_{i=1}^r (\mathrm{d}x_i)^*(a) F(x_i \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_p). \tag{3.3}$$

下面的引理说明，对于任意对偶基 $\{\mathrm{d}x_i; (\mathrm{d}x_i)^*\}_{i=1}^r$ of $\Omega^1(R)$,

$$\sum_{i=1}^r (\mathrm{d}x_i)^*(\mathrm{d}x_i) = n \cdot 1_R,$$

其中 n 是 R的光滑维数。

引理3.1. 设 R 是一个维数为 n 且典范丛平凡的光滑代数，并且 $\{\mathrm{d}x_i; (\mathrm{d}x_i)^*\}_{i=1}^r$ 是射影 R-模 $\Omega^1(R)$ 的一组对偶基。那么 $\sum_{i=1}^r (\mathrm{d}x_i)^*(\mathrm{d}x_i) = n \cdot 1_R$.

证明。对于任意 $f_i \in \mathrm{Hom}_R(\Omega^1(R)\ R)(1 \leq i \leq p)$ 和 $a = a_0\,\mathrm{d}a_1 \wedge \mathrm{d}a_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_p \in \Omega^p(R)$,

$$\sum_{i=1}^r (f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p \wedge (\mathrm{d}x_i)^*)(a_0\,\mathrm{d}a_1 \wedge \mathrm{d}a_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_p \wedge \mathrm{d}x_i)$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{i=1}^{r} a_0 \begin{vmatrix} f_1(\mathrm{d}a_1) & f_1(\mathrm{d}a_2) & \cdots & f_1(\mathrm{d}a_p) & f_1(\mathrm{d}x_i) \\ f_2(\mathrm{d}a_1) & f_2(\mathrm{d}a_2) & \cdots & f_2(\mathrm{d}a_p) & f_2(\mathrm{d}x_i) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ f_p(\mathrm{d}a_1) & f_p(\mathrm{d}a_2) & \cdots & f_p(\mathrm{d}a_p) & f_p(\mathrm{d}x_i) \\ (\mathrm{d}x_i)^*(\mathrm{d}a_1) & (\mathrm{d}x_i)^*(\mathrm{d}a_2) & \cdots & (\mathrm{d}x_i)^*(\mathrm{d}a_p) & (\mathrm{d}x_i)^*(\mathrm{d}x_i) \end{vmatrix} \\
&=\sum_{i=1}^{r}(-1)^p a_0(\mathrm{d}x_i)^*(\mathrm{d}a_1)(f_1\wedge f_2\wedge\cdots\wedge f_p)(\mathrm{d}a_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p\wedge\mathrm{d}x_i) \\
&\quad+\sum_{i=1}^{r}(-1)^{p+1} a_0(\mathrm{d}x_i)^*(\mathrm{d}a_2)(f_1\wedge f_2\wedge\cdots\wedge f_p)(\mathrm{d}a_1\wedge\mathrm{d}a_3\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p\wedge\mathrm{d}x_i) \\
&\quad+\cdots \\
&\quad+\sum_{i=1}^{r}(-1)^{2p-1} a_0(\mathrm{d}x_i)^*(\mathrm{d}a_p)(f_1\wedge f_2\wedge\cdots\wedge f_p)(\mathrm{d}a_1\wedge\mathrm{d}a_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_{p-1}\wedge\mathrm{d}x_i) \\
&\quad+\sum_{i=1}^{r} a_0(\mathrm{d}x_i)^*(\mathrm{d}x_i)(f_1\wedge f_2\wedge\cdots\wedge f_p)(\mathrm{d}a_1\wedge\mathrm{d}a_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p) \\
&\overset{(a)}{=}-pa_0(f_1\wedge f_2\wedge\cdots\wedge f_p)(\mathrm{d}a_1\wedge\mathrm{d}a_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p) \\
&\quad+\sum_{i=1}^{r} a_0(\mathrm{d}x_i)^*(\mathrm{d}x_i)(f_1\wedge f_2\wedge\cdots\wedge f_p)(\mathrm{d}a_1\wedge\mathrm{d}a_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p) \\
&=a_0(\sum_{i=1}^{r}(\mathrm{d}x_i)^*(\mathrm{d}x_i)-p\cdot 1_R)(f_1\wedge f_2\wedge\cdots\wedge f_p)(\mathrm{d}a_1\wedge\mathrm{d}a_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p),
\end{aligned}
$$

其中，(a) 由 (3.3) 得出。因此

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{r}(f_1\wedge f_2\wedge\cdots\wedge f_p\wedge(\mathrm{d}x_i)^*)(a_0\,\mathrm{d}a_1\wedge\mathrm{d}a_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p\wedge\mathrm{d}x_i) \\
=&a_0(\sum_{i=1}^{r}(\mathrm{d}x_i)^*(\mathrm{d}x_i)-p\cdot 1_R)(f_1\wedge f_2\wedge\cdots\wedge f_p)(\mathrm{d}a_1\wedge\mathrm{d}a_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p).
\end{aligned}
$$

取 $p=n$。注意到 $\Omega^{n+1}(R)=0$，于是可得

$$
(\sum_{i=1}^{r}(\mathrm{d}x_i)^*(\mathrm{d}x_i)-n\cdot 1_R)(f_1\wedge f_2\wedge\cdots\wedge f_n)=0.
$$

由于 $\Omega^n(R)\cong R$, $\sum_{i=1}^{r}(\mathrm{d}x_i)^*(\mathrm{d}x_i)=n\cdot 1_R$。 □

推论 3.2. 对任意 $f\in \mathrm{Hom}_R(\Omega^p(R),R)$ 和 $\omega\in\Omega^p(R)$,

$$
f(\omega)=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{n-p}\le r}(f\wedge(\mathrm{d}x_{i_1})^*\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{i_{n-p}})^*)(\omega\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_{n-p}})
$$

证明。由引理3.1的证明可知,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_{n-p}\le r}(f\wedge(\mathrm{d}x_{i_1})^*\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{i_{n-p}})^*)(\omega\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_{n-p}}) \\
=&\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_{n-p-1}\le r}(f\wedge(\mathrm{d}x_{i_1})^*\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{i_{n-p-1}})^*)(\omega\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_{n-p-1}}) \\
=&2!\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_{n-p-2}\le r}(f\wedge(\mathrm{d}x_{i_1})^*\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{i_{n-p-2}})^*)(\omega\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_{n-p-2}}) \\
=&\cdots
\end{aligned}
$$

$$=(n-p)!f(\omega).$$

另一方面,

$$\sum_{1\leq i_1,i_2,\cdots,i_{n-p}\leq r}(f\wedge(\mathrm{d}x_{i_1})^*\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{i_{n-p}})^*)(\omega\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_{n-p}})$$
$$=(n-p)!\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_{n-p}\leq r}(f\wedge(\mathrm{d}x_{i_1})^*\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{i_{n-p}})^*)(\omega\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_{n-p}}).$$

证明完成。 □

接下来，我们利用缩并映射，为典范丛平凡的任意光滑代数建立导子与 Kähler 微分之间的对偶性。

定理 3.3. 设 R 是一个维数为 n 且典范丛平凡的光滑代数。设 $\mathrm{vol}\in\Omega^n(R)$ 是 R 的一个体积形式。则下述典范映射是 R- 模的同构:

$$\ddagger_R^p:\mathfrak{X}^p(R)\to\Omega^{n-p}(R),\ F\mapsto\iota_F(\mathrm{vol}).$$

证明. 用对偶基表示,

$$\begin{aligned}&\iota_F(\mathrm{vol})\\=&\sum_{1\leq j_{p+1}<\cdots<j_n\leq r}((\mathrm{d}x_{j_{p+1}})^*\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{j_n})^*)[\iota_F(\mathrm{vol})]\,\mathrm{d}x_{j_{p+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_n}\\=&\sum_{1\leq j_{p+1}<\cdots<j_n\leq r}[\iota_F(\mathrm{vol})]((\mathrm{d}x_{j_{p+1}})^*\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{j_n})^*)\ \mathrm{d}x_{j_{p+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_n}\\=&\sum_{1\leq j_{p+1}<\cdots<j_n\leq r}(F\wedge(\mathrm{d}x_{j_{p+1}})^*\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{j_n})^*)(\mathrm{vol})\ \mathrm{d}x_{j_{p+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_n}.\end{aligned}$$

考虑映射 $\flat_R^{n-p}:\Omega^{n-p}(R)\to\mathfrak{X}^p(R)$ $\omega\mapsto\iota_\omega$(体积形式*)。用对偶基表示,

$$\begin{aligned}&\iota_\omega(\mathrm{vol}^*)\\=&\sum_{1\leq j_1<\cdots<j_p\leq r}\iota_\omega(\mathrm{vol}^*)(\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_p})\,(\mathrm{d}x_{j_1})^*\wedge(\mathrm{d}x_{j_2})^*\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{j_p})^*\\=&\sum_{1\leq j_1<\cdots<j_p\leq r}\mathrm{vol}^*(\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_p}\wedge\omega)\,(\mathrm{d}x_{j_1})^*\wedge(\mathrm{d}x_{j_2})^*\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{j_p})^*.\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}&(\ddagger_R^p\flat_R^{n-p})(\omega)\\=&\sum_{1\leq j_1<\cdots<j_p\leq r}\ \sum_{1\leq l_{p+1}<\cdots<l_n\leq r}\mathrm{vol}^*(\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_p}\wedge\omega)\\&\quad((\mathrm{d}x_{j_1})^*\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{j_p})^*\wedge(\mathrm{d}x_{l_{p+1}})^*\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{l_n})^*)(\mathrm{vol})\ \mathrm{d}x_{l_{p+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{l_n}\\=&\sum_{1\leq l_{p+1}<\cdots<l_n\leq r}\ \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_p\leq r}((\mathrm{d}x_{j_1})^*\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{j_p})^*\wedge(\mathrm{d}x_{l_{p+1}})^*\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{l_n})^*)\\&\quad(\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_p}\wedge\omega)\ \mathrm{d}x_{l_{p+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{l_n}\\=&\sum_{1\leq l_{p+1}<\cdots<l_n\leq r}((\mathrm{d}x_{l_{p+1}})^*\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{l_n})^*)(\omega)\ \mathrm{d}x_{l_{p+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{l_n}\\=&\omega.\end{aligned}$$

倒数第二个等式由推论 3.2 得出。另一方面，

$$\begin{aligned}
&(\flat_R^{n-p}\sharp_R^p)(F)\\
=&\sum_{1\leq j_{p+1}<\cdots<j_n\leq r}\ \sum_{1\leq l_1<\cdots<l_p\leq r}(F\wedge(\mathrm{d}x_{j_{p+1}})^*\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{j_n})^*)(\mathrm{vol})\\
&\quad\mathrm{vol}^*(\mathrm{d}x_{l_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{l_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_{p+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_n})\,(\mathrm{d}x_{l_1})^*\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{l_p})^*\\
=&\sum_{1\leq l_1<\cdots<l_p\leq r}F(\mathrm{d}x_{l_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{l_p})\,(\mathrm{d}x_{l_1})^*\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{l_p})^*\\
=&F.
\end{aligned}$$

因此， $\sharp_R^p$ 是一个同构，其逆为 $\flat_R^{n-p}$ 。 □

定理 3.4。设 R 是一个维数为 n 且具有平凡典范丛的光滑代数，$\mathrm{vol}\in\Omega^n(R)$是 R 的一个体积形式。则对于任意 R-模 M 和$p\in\mathbb{N}$，典范映射

$$\sharp_M^p:\mathfrak{X}^p(M)\to M\otimes_R\Omega^{n-p}(R),\ F\mapsto\iota_F(\mathrm{vol})$$

是下列典范同构的复合

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X}^p(M)&\cong\mathrm{Hom}_R(\Omega^p(R),M)\cong M\otimes_R\mathrm{Hom}_R(\Omega^p(R),R)\\
&\cong M\otimes_R\mathfrak{X}^p(R)\overset{\mathrm{id}_M\otimes\sharp_R^p}{\cong}M\otimes_R\Omega^{n-p}(R).
\end{aligned}$$

证明。由于 $\Omega^p(R)$ 是一个有限生成射影 R-模，典范映射 $\mathrm{Hom}_R(\Omega^p(R)\ M\to M\otimes_R\mathrm{Hom}_R(\Omega^p(R)\ R)$,

$$g\mapsto\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq r}g(\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p})\otimes(\mathrm{d}x_{i_1})^*\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{i_p})^*$$

由对偶基引理知其为同构。于是，该复合映射为

$$F\mapsto\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq r}F(x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_p})\otimes\iota_{(\mathrm{d}x_{i_1})^*\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{i_p})^*}(\mathrm{vol}).$$

对于任意 n-形式 $\mathrm{d}a_1\wedge\mathrm{d}a_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_n\in\Omega^n(R)$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq r}F(x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_p})\otimes\iota_{(\mathrm{d}x_{i_1})^*\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{i_p})^*}(\mathrm{d}a_1\wedge\mathrm{d}a_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_n)\\
=&\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq r}F(x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_p})\otimes\sum_{\sigma\in S_{p,n-p}}\mathrm{sgn}(\sigma)\\
&\quad\big((\mathrm{d}x_{i_1})^*\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{i_p})^*\big)(\mathrm{d}a_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_{\sigma(p)})\ \mathrm{d}a_{\sigma(p+1)}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_{\sigma(n)}\\
=&\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq r}\ \sum_{\sigma\in S_{p,n-p}}\mathrm{sgn}(\sigma)F(\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p})\\
&\quad\big((\mathrm{d}x_{i_1})^*\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{i_p})^*\big)(\mathrm{d}a_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_{\sigma(p)})\otimes\mathrm{d}a_{\sigma(p+1)}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_{\sigma(n)}\\
=&\sum_{\sigma\in S_{p,n-p}}\mathrm{sgn}(\sigma)\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq r}\\
&\quad F[\big((\mathrm{d}x_{i_1})^*\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{i_p})^*\big)(\mathrm{d}a_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_{\sigma(p)})\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}]\\
&\qquad\otimes\mathrm{d}a_{\sigma(p+1)}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_{\sigma(n)}\\
=&\sum_{\sigma\in S_{p,n-p}}\mathrm{sgn}(\sigma)F(\mathrm{d}a_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_{\sigma(p)})\otimes\mathrm{d}a_{\sigma(p+1)}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_{\sigma(n)}\\
=&\iota_F(\mathrm{d}a_1\wedge\mathrm{d}a_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_n).
\end{aligned}$$

由此可得

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le r} F(x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_p})\otimes \iota_{(\mathrm{d}x_{i_1})^*\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x_{i_p})^*}(\mathrm{vol}) = \iota_F(\mathrm{vol}).$$

因此， $\ddagger_M^p$ 是上述同构的复合。

$\ddagger_M^p$ 的逆映射由以下复合给出

$$M\otimes_R\Omega^{n-p}(R)\to M\otimes_R\mathfrak{X}^p(R)\to\mathfrak{X}^p(M),$$

$$m\otimes\omega\mapsto m\otimes\iota_\omega(\mathrm{vol}^*)\mapsto[a_1\wedge\cdots\wedge a_p\mapsto m\cdot\mathrm{vol}^*(\mathrm{d}a_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_p\wedge\omega)].$$

□

3.2. 泊松同调与上同调之间的庞加莱对偶性。假设 R 是维数为 n 且具有平凡典范丛的光滑泊松代数。根据 [LWW15，命题2.7]，，任意泊松模都可以通过泊松导子进行扭曲。本节的主要结果是，对于任意泊松 R-模 M，存在扭曲的庞加莱对偶性 $\mathrm{HP}^*(R,M)\cong\mathrm{HP}_{n-*}(R,M_t)$，其中$M_t$ 是由 R的模导子扭曲后的 M 的扭曲泊松模。这推广了 [LR07、Zhu15、LWW15、LWZ20]中的主要结果。如果 R 的泊松结构是幺模的，则可化为经典的庞加莱对偶性 $\mathrm{HP}^*(R,M)\cong\mathrm{HP}_{n-*}(R,M)$，适用于任意泊松 R-模 M。

为避免混淆，令 ∂^M 和 δ_M 分别表示 R 取值于 M 的泊松上链复形和泊松链复形的微分。为简化记号，令 $\partial=\partial^R$ 和 $\delta=\delta_R$。

引理3.5. 设 M 是一个右泊松 R模。对于任意 $F\in\mathfrak{X}^p(R)$，

$$\iota_F\partial^M-(-1)^p\partial^M\iota_F=\iota_{\delta F}:M\otimes_R\Omega^*(R)\to M\otimes_R\Omega^{*-p-1}(R).$$

证明。若 $q\le p$，那么显然，对于任意 $\omega\in M\otimes_R\Omega^q(R)$， $\iota_F(\partial^M\omega)$ $\partial^M(\iota_F\omega)$ 和 $\iota_{\delta F}(\omega)$ 都为 0。现在假设 $q>p$ 且 $\omega=m\otimes\mathrm{d}a_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_q$。于是，

$$\begin{aligned}
&\iota_F(\partial^M\omega)\\
=&\iota_F(\sum_{i=1}^{q}(-1)^{i-1}\{m,a_i\}_M\otimes\mathrm{d}a_1\wedge\cdots\widehat{\mathrm{d}a_i}\cdots\wedge\mathrm{d}a_q)\\
&+\iota_F(\sum_{1\le i<j\le q}(-1)^{i+j}m\otimes\mathrm{d}\{a_i,a_j\}\wedge\mathrm{d}a_1\wedge\cdots\widehat{\mathrm{d}a_i}\cdots\widehat{\mathrm{d}a_j}\cdots\wedge\mathrm{d}a_q)\\
=&\sum_{\sigma\in S_{1,p,q-p-1}}\mathrm{sgn}(\sigma)\{m,a_{\sigma(1)}\}_MF(a_{\sigma(2)}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(p+1)})\otimes\mathrm{d}a_{\sigma(p+2)}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_{\sigma(q)}\\
&-\sum_{\sigma\in S_{2,p-1,q-p-1}}\mathrm{sgn}(\sigma)\,mF(\{a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)}\}\wedge a_{\sigma(3)}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(p+1)})\otimes\\
&\qquad\mathrm{d}a_{\sigma(p+2)}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_{\sigma(q)}\\
&-\sum_{\sigma\in S_{p,2,q-p-2}}(-1)^p\,\mathrm{sgn}(\sigma)\,mF(a_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(p)})\otimes\\
&\qquad\mathrm{d}\{a_{\sigma(p+1)},a_{\sigma(p+2)}\}\wedge\mathrm{d}a_{\sigma(p+3)}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_{\sigma(q)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\partial^M(\iota_F\omega)\\
=&\partial^M\big(\sum_{\sigma\in S_{p,q-p}}\mathrm{sgn}(\sigma)\,mF(a_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(p)})\otimes\mathrm{d}a_{\sigma(p+1)}\wedge\mathrm{d}a_{\sigma(p+2)}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_{\sigma(q)}\big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma\in S_{p,1,q-p-1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\{mF(a_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(p)}), a_{\sigma(p+1)}\}_M \otimes \mathrm{d}a_{\sigma(p+2)}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}a_{\sigma(q)}\\
&\quad - \sum_{\sigma\in S_{p,2,q-p-2}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, mF(a_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(p)})\otimes\\
&\qquad \mathrm{d}\{a_{\sigma(p+1)}, a_{\sigma(p+2)}\}\wedge \mathrm{d}a_{\sigma(p+3)}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}a_{\sigma(q)}\\
&= \sum_{\sigma\in S_{p,1,q-p-1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, m\{F(a_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(p)}), a_{\sigma(p+1)}\}\otimes \mathrm{d}a_{\sigma(p+2)}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}a_{\sigma(q)}\\
&\quad + \sum_{\sigma\in S_{p,1,q-p-1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\{m, a_{\sigma(p+1)}\}_M F(a_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(p)})\otimes \mathrm{d}a_{\sigma(p+2)}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}a_{\sigma(q)}\\
&\quad - \sum_{\sigma\in S_{p,2,q-p-2}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, mF(a_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(p)})\otimes\\
&\qquad \mathrm{d}\{a_{\sigma(p+1)}, a_{\sigma(p+2)}\}\wedge \mathrm{d}a_{\sigma(p+3)}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}a_{\sigma(q)}\\
&=(-1)^p \sum_{\sigma\in S_{1,p,q-p-1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, m\{F(a_{\sigma(2)}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(p+1)}), a_{\sigma(1)}\}\otimes \mathrm{d}a_{\sigma(p+2)}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}a_{\sigma(q)}\\
&\quad + (-1)^p \sum_{\sigma\in S_{1,p,q-p-1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\{m, a_{\sigma(1)}\}_M F(a_{\sigma(2)}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(p+1)})\otimes\\
&\qquad \mathrm{d}a_{\sigma(p+2)}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}a_{\sigma(q)}\\
&\quad - \sum_{\sigma\in S_{p,2,q-p-2}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, mF(a_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(p)})\otimes\\
&\qquad \mathrm{d}\{a_{\sigma(p+1)}, a_{\sigma(p+2)}\}\wedge \mathrm{d}a_{\sigma(p+3)}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}a_{\sigma(q)},
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\iota_{\delta F}(\omega)\\
&= \sum_{\sigma\in S_{p+1,q-p-1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, m(\delta F)(a_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(p+1)})\otimes \mathrm{d}a_{\sigma(p+2)}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}a_{\sigma(q)}\\
&= - \sum_{\sigma\in S_{1,p,q-p-1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, m\{F(a_{\sigma(2)}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(p+1)}), a_{\sigma(1)}\}\otimes \mathrm{d}a_{\sigma(p+2)}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}a_{\sigma(q)}\\
&\quad - \sum_{\sigma\in S_{2,p-1,q-p-1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, mF(\{a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}\}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(p+1)})\otimes \mathrm{d}a_{\sigma(p+2)}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}a_{\sigma(q)}.
\end{aligned}
$$

由此可得，对于任意 $\omega\in M\otimes_R\Omega^q(R)$，$\iota_F(\partial^M\omega) - (-1)^p\partial^M(\iota_F\omega) = \iota_{(\delta F)}\omega$。□

类似地，以下引理成立。

引理 3.6. 设 M 是一个右 Poisson R模。对于任意 $F\in\mathfrak{X}^p(M)$,

$$\iota_F\partial - (-1)^p\partial^M\iota_F = \iota_{\delta_M F} : \Omega^*(R)\to M\otimes_R\Omega^{*-p-1}(R).$$

引理 3.7. 设 M 是一个右 Poisson R模。那么对于任意 $F\in\mathfrak{X}^p(R)$ 和$G\in\mathfrak{X}^q(M)$,

$$\delta_M(F\wedge G) = \delta F\wedge G + (-1)^p F\wedge\delta_M G.$$

证明。根据定义不难验证。读者也可参阅 [LPV13，命题 3.7] 了解更多细节。□

注 3.8. 根据引理 3.7，$\wedge$ 在 $\mathrm{HP}^*(R)$ 上是良定义的。因此，$(\mathrm{HP}^*(R),\wedge)$ 是一个分次交换代数，而 $(\mathrm{HP}^*(R,M),\wedge)$ 是一个 $(\mathrm{HP}^*(R),\wedge)$-模。

引理3.9. [LWW19，引理 3] 设 M 是一个右泊松 R-模，且 M_ϕ 是由泊松导子 ϕ 扭曲的 M 的扭曲泊松模，即对于任意 $m \in M$ 和 $a \in R$，有 $\{m,a\}_{M_\phi} = \{m,a\}_M + m\cdot\phi(a)$（参见 [LWW15，命题 2.7]）。那么

$$\delta_{M_\phi} = \delta_M - (\phi \wedge \text{-}) \quad and \quad \partial^{M_\phi} = \partial^M + \iota_\phi.$$

证明直接由泊松（上）链复形和扭曲模结构的定义得到。

命题3.10. 设（R,π）是一个维数为 n 且具有平凡典范丛的光滑泊松代数，$\mathrm{vol} \in \Omega^n(R)$ 是一个体积形式，ϕ_{vol} 是相对于 vol 的模导子。设 R_t 是由 ϕ_{vol} 扭曲的 R 扭曲泊松模。那么，vol 是取值于模 R_t 的 R 的泊松复形中的一个泊松循环，即 $\partial\mathrm{vol} = -\iota_{\phi_{\mathrm{vol}}}\mathrm{vol}$。

证明. 根据引理3.9，$\partial^{R_t} = \partial + \iota_{\phi_{\mathrm{vol}}} = [\iota_\pi, \mathrm{d}] + \iota_{\phi_{\mathrm{vol}}}$. 于是 $\partial^{R_t}(\mathrm{vol}) = -\mathrm{d}\,\iota_\pi(\mathrm{vol}) + \iota_{\phi_{\mathrm{vol}}}(\mathrm{vol}) \in \Omega^{n-1}(R)$。根据定理 3.3，只需证明 $\iota_{\mathrm{d}\,\iota_\pi(\mathrm{vol})}\,\mathrm{vol}^* = \phi_{\mathrm{vol}} \in \mathfrak{X}^1(R)$。

对于任意的 $a \in R$，由引理2.9，$\iota_{H_a}(\mathrm{vol}) = -\mathrm{d}a \wedge \iota_\pi(\mathrm{vol})$。于是 $\mathrm{d}\,\iota_{H_a}(\mathrm{vol}) = \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}\,\iota_\pi(\mathrm{vol})$。因此

$$\begin{aligned}
(\iota_{\mathrm{d}\,\iota_\pi(\mathrm{vol})}\,\mathrm{vol}^*)(a)\,\mathrm{vol} &= \mathrm{vol}^*(\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}\,\iota_\pi(\mathrm{vol}))\,\mathrm{vol} \text{（由定义1.12）}\\
&= \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}\,\iota_\pi(\mathrm{vol})\\
&= \mathrm{d}\,\iota_{H_a}(\mathrm{vol})\\
&= \phi_{\mathrm{vol}}(a)\,\mathrm{vol}. \qquad \text{(by Definition 2.6)}
\end{aligned}$$

因此 $(\iota_{\mathrm{d}\,\iota_\pi(\mathrm{vol})}\,\mathrm{vol}^*)(a) = \phi_{\mathrm{vol}}(a)$。由于 a 是任意的，$\iota_{\mathrm{d}\,\iota_\pi(\mathrm{vol})}\,\mathrm{vol}^* = \phi_{\mathrm{vol}}$，证毕。□

定理 3.11. 设 R 是一个维数为 n 且具有平凡典范丛的光滑泊松代数，$\mathrm{vol} \in \Omega^n(R)$ 是一个体积形式，ϕ_{vol} 是相对于 vol 的 R 的模导子。设 M 是一个泊松 R-模，M_t 是由 ϕ_{vol} 扭曲的 M 的扭曲泊松模，即，

$$\{m,a\}_{M_t} = \{m,a\}_M + m\cdot\phi_{\mathrm{vol}}(a),\ \forall\, m \in M, a \in R. \tag{3.4}$$

那么下图

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{X}^p(M) & \xrightarrow{\delta_M} & \mathfrak{X}^{p+1}(M)\\
\downarrow{\scriptstyle \dagger^p_M}\ \cong & & \cong\ \downarrow{\scriptstyle \dagger^{p+1}_M}\\
M_t \otimes_R \Omega^{n-p}(R) & \xrightarrow{\partial^{M_t}} & M_t \otimes_R \Omega^{n-p-1}(R)
\end{array}$$

是交换的，其中 $\dagger^p_M = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}\ddagger^p_M$，且 $\ddagger^p_M$是定理 3.4 中的同构。

证明。对于任意 $F \in \mathfrak{X}^p(M)$、$\ddagger^p_M(F) = \iota_F$体积形式，

$$\begin{aligned}
&\partial^{M_t}(\iota_F \text{ 体积形式})\\
=&\partial^M(\iota_F \text{ 体积形式}) + \iota_{\phi_{\mathrm{vol}}}(\iota_F \text{ 体积形式}) && \text{(by Lemma 3.9)}\\
=&(-1)^p\big(\iota_F(\partial\,\mathrm{vol}) - \iota_{(\delta_M F)}\,\mathrm{vol}\big) + \iota_{\phi_{\mathrm{vol}}}(\iota_F\,\mathrm{vol}) && \text{(by Lemma 3.6)}
\end{aligned}$$

$=(-1)^{p-1}\iota_F(\iota_{\phi_{\mathrm{vol}}}$体积形式$)+(-1)^{p-1}\iota_{(\delta_M F)}$ 体积形式 (by Lemma 3.10)
$+\iota_{\phi_{\mathrm{vol}}}(\iota_F$体积形式$)=(-1)^{p-1}\iota_{(\delta_M F)}$ 体积形式$=(-1)^{p-1}\dagger_M^p(\delta_M F)$。 (by Proposition 1.11)

□

下面的定理可直接由定理 3.4 和定理 3.11 得出。

定理 3.12. 设 R 是维数为 n 且典范丛平凡的光滑泊松代数，M 是一个泊松 R-模，M_t 是由模导子扭曲的 M 的扭曲泊松模。那么对于任意 $p\in\mathbb{N}$,

$$\mathrm{HP}_p(R,M_t)\cong\mathrm{HP}^{n-p}(R,M).$$

注 3.13. 对于幺模泊松代数 R，其模导子 ϕ_{vol} 可能不为零，而是一个对数哈密顿导子。此时，我们可以选取另一体积形式 $\mathrm{vol}'\in\Omega^n(R)$，使得 R 关于 vol' 的模导子为零。因此，在这种情况下，图表

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{X}^p(M) & \xrightarrow{\delta_M} & \mathfrak{X}^{p+1}(M)\\ \downarrow{\scriptstyle \dagger'^p_M}\cong & & \cong\downarrow{\scriptstyle \dagger'^{p+1}_M}\\ M\otimes_R\Omega^{n-p}(R) & \xrightarrow{\partial^M} & M\otimes_R\Omega^{n-p-1}(R)\end{array}$$

是交换的，其中 $\dagger'_M$ 由 vol' 诱导。由此可得

$$\mathrm{HP}_p(R,M)\cong\mathrm{HP}^{n-p}(R,M)$$

对于任意 $p\in\mathbb{N}$。

4. Batalin-Vilkovisky structure on Poisson cohomology

本节研究泊松上链复形及其上同调上的 Batalin-Vilkovisky 代数结构，其中 Batalin-Vilkovisky 算子是通过庞加莱对偶性，由泊松链复形上的德拉姆微分诱导得到的。我们首先列出关于 Gerstenhaber 代数和 Batalin-Vilkovisky 代数的一些定义。

4.1. Gerstenhaber 代数与 Batalin-Vilkoviksy 代数。

定义 4.1. Gerstenhaber 代数是一个分次交换代数 $(G=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}G_i,\cdot)$，并配有一个括号

$$[-,-]:G\times G\to G,$$

称为 G 的 Gerstenhaber 括号，满足

(1) 移位 $G(1)$ 是一个次数为 0 的分次李代数；

(2) 对任意齐次元素 a、b、$c\in G$,

$$[a,b\cdot c]=[a,b]\cdot c+(-1)^{(|a|-1)|b|}b\cdot[a,c]. \tag{4.1}$$

例4.2. 对任意交换代数 R，$(\mathfrak{X}^*(R)\wedge,[-,-]_{\mathbf{SN}})$ 是一个 Gerstenhaber 代数（参见 [LPV13，命题 3.7]），其中 $[-,-]_{\mathbf{SN}}$：$\mathfrak{X}^p(R)\times\mathfrak{X}^q(R)\to\mathfrak{X}^{p+q-1}(R)$ 是 Schouten-Nijenhuis 括号：对于任意 $P\in\mathfrak{X}^p(R)$ 和 $Q\in\mathfrak{X}^q(R)$,

$[P,Q]_{\mathbf{SN}}(a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_{p+q-1})$

$$=(-1)^{(p-1)(q-1)}\sum_{\sigma\in S_{q,p-1}}\operatorname{sgn}(\sigma)P(Q(a_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(q)})\wedge a_{\sigma(q+1)}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(p+q-1)})$$
$$-\sum_{\sigma\in S_{p,q-1}}\operatorname{sgn}(\sigma)Q(P(a_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(p)})\wedge a_{\sigma(p+1)}\wedge\cdots\wedge a_{\sigma(p+q-1)}).$$

对于代数 R，回顾一下，元素 $\pi\in\mathfrak{X}^2(R)$ 是泊松括号，当且仅当 $[\pi,\pi]_{\mathbf{SN}}=0$。泊松上同调微分 δ 由肖滕括号 $[\pi,-]_{\mathbf{SN}}$ 给出。因此，可以得到以下结论。

例 4.3.（[LPV13，命题 4.9]）对于任意泊松代数 R，其泊松上同调 $(\mathrm{HP}^*(R),\wedge,[-,-]_{\mathbf{SN}})$ 也是一个 Gerstenhaber代数。

例 4.4. 设 R 是一个交换代数。那么 $(\wedge_R^*(\mathrm{Der}(R)),\wedge,[-,-])$ 是一个 Gerstenhaber代数（参见 [Gin05，第 6.1] 节），其中 $[-,-]$ 定义如下：对于任意 $p,q\in\mathbb{N}$,

$$[-,-]:\wedge_R^p\operatorname{Der}(R)\times\wedge_R^q\operatorname{Der}(R)\to\wedge_R^{p+q-1}\operatorname{Der}(R),$$
$$[\xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_p,\eta_1\wedge\cdots\wedge\eta_q]\triangleq\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(-1)^{i+j}[\xi_i,\eta_j]\wedge\xi_1\cdots\widehat{\xi_i}\cdots\wedge\xi_p\wedge\eta_1\cdots\widehat{\eta_j}\cdots\wedge\eta_q.$$

注 4.5. 假设 R 是一个光滑代数。那么

$$(\mathfrak{X}^*(R),\wedge,[-,-]_{\mathbf{SN}})\cong(\wedge_R^*(\mathrm{Der}(R)),\wedge,[-,-])$$

作为 Gerstenhaber代数，其中同构 α 在推论 (1.5) 中定义。此外，如果 $\pi\in\mathfrak{X}^2(R)$ 是一个泊松括号，那么下图

$$\begin{array}{ccc}\wedge_R^p\operatorname{Der}(R) & \xrightarrow{[\pi,-]} & \wedge_R^{p+1}\operatorname{Der}(R)\\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha}\\ \mathfrak{X}^p(R) & \xrightarrow{\delta^p=[\pi,-]_{\mathbf{SN}}} & \mathfrak{X}^{p+1}(R)\end{array}$$

对于任意 $p\in\mathbb{N}$，它都是交换的。

定义 4.6. 设 $(V,\cdot)$ 是一个分次交换分次代数。V 上的 Batalin-Vilkovisky 算子 Δ 是一个算子 $\Delta:V\to V$，其次数为 -1，满足 $\Delta^2=0$，且 Δ 成为分次导子的障碍

$$[a,b]\triangleq(-1)^{|a|}(\Delta(a\cdot b)-\Delta(a)\cdot b-(-1)^{|a|}a\cdot\Delta(b)) \tag{4.2}$$

是一个分次导子，即式 (4.1) 成立。三元组 $(V,\cdot,\Delta)$ 称为 Batalin-Vilkovisky 代数（简称 BV代数）。

注 4.7. 若按式 (4.2) 定义 Gerstenhaber 括号，则任意 BV代数都是一个 Gerstenhaber代数。若一个带有括号 $[-,-]$ 的 Gerstenhaber代数可以配备一个次数为 -1 的算子 Δ，使得 $\Delta^2=0$，且 $[-,-]$ 衡量了 Δ 偏离导子的程度，即式 (4.2) 成立，则该 Gerstenhaber代数是一个 BV代数（或称为 exact）。

下文中，我们将重点讨论泊松上同调上的 BV 代数结构。

4.2. $\mathfrak{X}^*(R)$ 上的 BV结构。若 R 是具有平凡典范丛的光滑代数，即 R 满足定理 3.11 的条件，则可定义一个由德拉姆微分 d 在 $\mathfrak{X}^*(R)$ 上诱导的算子 Δ，如下所示：

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}^p(R) & \xrightarrow{\Delta} & \mathfrak{X}^{p-1}(R) \\ \downarrow{\scriptstyle \dagger_R^p} & & \uparrow{\scriptstyle (\dagger_R^{p-1})^{-1}} \\ \Omega^{n-p}(R) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^{n-p+1}(R). \end{array} \tag{4.3}$$

则 Δ 的次数为 -1，且 $\Delta^2=0$。为了证明 Δ 是 $\mathfrak{X}^*(R)$上的 BV 算子，只需验证当 $[-,-]$ 为例 4.4 中定义的 Gerstenhaber 括号时，恒等式 (4.2) 成立。这可由以下引理 4.8 至 4.11 得出。

引理 4.8. 若 $P\in\mathfrak{X}^p(R)$、$Q\in\mathfrak{X}^q(R)$ 且 $\omega\in\Omega^{p+q-1}(R)$，则在 $\mathfrak{X}^1(R)$ 中，

$$\iota_\omega(P\wedge Q)=(-1)^{(p-1)q}\iota_\alpha(P)+(-1)^p\iota_\beta(Q),$$

其中 $\alpha=\iota_Q(\omega)$、$\beta=\iota_P(\omega)$。

证明. 不失一般性，设 $\omega=a_0\,\mathrm{d}a_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_{p+q-1}\in\Omega^{p+q-1}(R)$。根据定义直接计算即可得出该等式。□

引理 4.9. 若 $\omega\in\Omega^p(R)$ 且 $\xi_1,\cdots,\xi_{p+1}\in\mathfrak{X}^1(R)$，则

$$\begin{aligned}(\xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_{p+1})(\mathrm{d}\,\omega)=&\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}\xi_i\big((\xi_1\wedge\cdots\widehat{\xi_i}\cdots\wedge\xi_{p+1})(\omega)\big)\\&+\sum_{1\le i<j\le p+1}(-1)^{i+j}([\xi_i,\xi_j]\wedge\xi_1\wedge\cdots\widehat{\xi_i}\cdots\widehat{\xi_j}\cdots\wedge\xi_{p+1})(\omega).\end{aligned}$$

证明。假设 $\omega=a_1\,\mathrm{d}a_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_{p+1}\in\Omega^p(R)$。那么，根据定义，

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}\xi_i\big((\xi_1\wedge\cdots\widehat{\xi_i}\cdots\wedge\xi_{p+1})(\omega)\big)\\=&\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}\xi_i(a_1)\big((\xi_1\wedge\cdots\widehat{\xi_i}\cdots\wedge\xi_{p+1})(a_2\wedge\cdots\wedge a_{p+1})\big)\\&+\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}a_1\xi_i\big((\xi_1\wedge\cdots\widehat{\xi_i}\cdots\wedge\xi_{p+1})(a_2\wedge\cdots\wedge a_{p+1})\big)\\=&(\xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_{p+1})(\mathrm{d}a_1\wedge\mathrm{d}a_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_{p+1})\\&+\sum_{1\le j<i\le p+1}(-1)^{i-1}a_1\big((\xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_i\xi_j\wedge\cdots\widehat{\xi_i}\cdots\wedge\xi_{p+1})(a_2\wedge\cdots\wedge a_{p+1})\big)\\&+\sum_{1\le i<j\le p+1}(-1)^{i-1}a_1\big((\xi_1\wedge\cdots\widehat{\xi_i}\cdots\wedge\xi_i\xi_j\wedge\cdots\wedge\xi_{p+1})(a_2\wedge\cdots\wedge a_{p+1})\big)\\=&(\xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_{p+1})(\mathrm{d}\,\omega)-\sum_{1\le i<j\le p+1}(-1)^{i+j}([\xi_i,\xi_j]\wedge\xi_1\wedge\cdots\widehat{\xi_i}\cdots\widehat{\xi_j}\cdots\wedge\xi_{p+1})(\omega).\end{aligned}$$

□

引理 4.10. 若 $P\in\mathfrak{X}^p(R)$ $Q\in\mathfrak{X}^q(R)$ 且 $\omega\in\Omega^{p+q-1}(R)$，则

$$\iota_{[P,Q]}(\omega)=(-1)^{(p-1)(q-1)}\iota_P(\mathrm{d}\,\iota_Q(\omega))-\iota_Q(\mathrm{d}\,\iota_P(\omega))+(-1)^p\iota_{P\wedge Q}(\mathrm{d}\,\omega). \tag{4.4}$$

证明. 不失一般性，假设 $P=\xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_p$, $Q=\eta_1\wedge\cdots\wedge\eta_q$。则

$$
\begin{aligned}
&(-1)^p\iota_{P\wedge Q}(\mathrm{d}\,\omega)\\
=&(-1)^p(\xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_p\wedge\eta_1\wedge\cdots\wedge\eta_q)(\mathrm{d}\,\omega)\\
=&\sum_{i=1}^{p}(-1)^{p+i-1}\xi_i\big((\xi_1\wedge\cdots\widehat{\xi_i}\cdots\wedge\xi_p\wedge\eta_1\wedge\cdots\wedge\eta_q)(\omega)\big) \qquad \text{(by Lemma 4.9)}\\
&+\sum_{i=1}^{q}(-1)^{i-1}\eta_i\big((\xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_p\wedge\eta_1\wedge\cdots\widehat{\eta_i}\cdots\wedge\eta_q)(\omega)\big)\\
&+\sum_{1\leq i<j\leq p}(-1)^{p+i+j}([\xi_i,\xi_j]\wedge\xi_1\wedge\cdots\widehat{\xi_i}\cdots\widehat{\xi_j}\cdots\wedge\xi_p\wedge\eta_1\wedge\cdots\wedge\eta_q)(\omega)\\
&+\sum_{1\leq i<j\leq q}(-1)^{p+i+j}([\eta_i,\eta_j]\wedge\xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_p\wedge\eta_1\wedge\cdots\widehat{\eta_i}\cdots\widehat{\eta_j}\cdots\wedge\eta_q)(\omega)\\
&+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(-1)^{i+j}([\xi_i,\eta_j]\wedge\xi_1\wedge\cdots\widehat{\xi_i}\cdots\wedge\xi_p\wedge\eta_1\wedge\cdots\widehat{\eta_j}\cdots\wedge\eta_q)(\omega)\\
=&-(-1)^{(p-1)(q-1)}\iota_P(\mathrm{d}\,\iota_Q(\omega))+\iota_Q(\mathrm{d}\,\iota_P(\omega))\\
&+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(-1)^{i+j}([\xi_i,\eta_j]\wedge\xi_1\wedge\cdots\widehat{\xi_i}\cdots\wedge\xi_p\wedge\eta_1\wedge\cdots\widehat{\eta_j}\cdots\wedge\eta_q)(\omega)\\
=&-(-1)^{(p-1)(q-1)}\iota_P(\mathrm{d}\,\iota_Q(\omega))+\iota_Q(\mathrm{d}\,\iota_P(\omega))+\iota_{[P,Q]}(\omega) \qquad \text{(see Example 4.4).}
\end{aligned}
$$

□

引理4.11. 若 $P\in\mathfrak{X}^p(R)$ 且 $\omega\in\Omega^{p-1}(R)$，则

$$\iota_\omega(\Delta P)=\Delta(\iota_\omega(P))+\iota_{\mathrm{d}\omega}(P).$$

证明. 根据定理 3.3，$P=\iota_\alpha(\mathrm{vol}^*)$，其中某个 $\alpha\in\Omega^{n-p}(R)$。

$$
\begin{aligned}
\Delta(\iota_\omega(P))&=\Delta(\iota_{\omega\wedge\alpha}(\mathrm{vol}^*)) && \text{（根据定义1.12）}\\
&=-\iota_{\mathrm{d}(\omega\wedge\alpha)}(\mathrm{vol}^*) && \text{(by (4.3))}\\
&=-\iota_{\mathrm{d}\omega\wedge\alpha}(\mathrm{vol}^*)+(-1)^p\iota_{\omega\wedge\mathrm{d}\alpha}(\mathrm{vol}^*)\\
&=-\iota_{\mathrm{d}\omega}(P)+\iota_\omega(\Delta P).
\end{aligned}
$$

□

引理4.11的几何版本，参见 [Xu99，引理3.5]。

定理 4.12. 设 R 是一个典范丛平凡的光滑泊松代数。三元组 $(\mathfrak{X}^*(R)\ \wedge,\Delta)$ 是一个BV代数，其 BV 算子 Δ 由式（4.3）给出。

证明。只需证明，对于任意 $P\in\mathfrak{X}^p(R)$、$Q\in\mathfrak{X}^q(R)$，

$$[P,Q]=(-1)^p(\Delta(P\wedge Q)-\Delta P\wedge Q-(-1)^pP\wedge\Delta Q).$$

对于任意 $\omega\in\Omega^{p+q-1}(R)$，由引理4.11可知，

$$\iota_\omega(\Delta(P\wedge Q))=\Delta(\iota_\omega(P\wedge Q))+\iota_{\mathrm{d}\omega}(P\wedge Q).$$

如果我们取 $\alpha=\iota_Q(\omega)$ 和 $\beta=\iota_P(\omega)$，那么再次由引理4.11，

$$
\begin{aligned}
\iota_\omega(\Delta P\wedge Q)&=(-1)^{(p-1)q}\iota_\omega(Q\wedge\Delta P)\\
&=(-1)^{(p-1)q}\iota_\alpha(\Delta P)
\end{aligned}
$$

$$= (-1)^{(p-1)q}\Delta(\iota_\alpha(P)) + (-1)^{(p-1)q}\iota_{\mathrm{d}\alpha}(P).$$

类似地,

$$\iota_\omega(P \wedge \Delta Q) = \Delta(\iota_\beta(Q)) + \iota_{\mathrm{d}\beta}(Q).$$

因此,

$$\begin{aligned}
&\iota_\omega[(-1)^p\Delta(P\wedge Q) - (-1)^p\Delta P\wedge Q - P\wedge\Delta Q)]\\
=&(-1)^p\Delta(\iota_\omega(P\wedge Q)) - (-1)^{p+(p-1)q}\Delta(\iota_\alpha(P)) - \Delta(\iota_\beta(Q))\\
&+(-1)^p\iota_{\mathrm{d}\omega}(P\wedge Q) - (-1)^{p+(p-1)q}\iota_{\mathrm{d}\alpha}(P) - \iota_{\mathrm{d}\beta}(Q)\\
=&(-1)^p\iota_{\mathrm{d}\omega}(P\wedge Q) - (-1)^{p+(p-1)q}\iota_{\mathrm{d}\alpha}(P) - \iota_{\mathrm{d}\beta}(Q) \qquad \text{(by Lemma 4.8)}\\
=&\iota_\omega([P,Q]). \qquad \text{(by Lemma 4.10)}
\end{aligned}$$

证明完成。 □

由 $\mathfrak{X}^*(R)$ 上的 BV 代数结构可以得到一些有趣的结果。根据 [LWW19，引理 5]），对于任意 $P \in \mathfrak{X}^p(R)$ 和 $Q \in \mathfrak{X}^q(R)$,

$$\Delta([P,Q]) = [\Delta(P), Q] - (-1)^p[P, \Delta(Q)].$$

特别地，对于 $P, Q \in \mathfrak{X}^1(R)$,

$$\Delta([P,Q]) = P(\Delta(Q)) - Q(\Delta(P)).$$

此外，根据 [LWW19，命题 5]），对于任意 $P \in \mathfrak{X}^p(R)$,

$$(\Delta\delta + \delta\Delta)(P) = [\Delta(\pi), P]. \tag{4.5}$$

命题 4.13. 设 R 是具有平凡典范丛的光滑泊松代数，ϕ_{vol} 是其模导子，且 Δ 是式（4.3）中给出的算子。则

(1) $\phi_{\mathrm{vol}} = \Delta(\pi)$; (2) 对任意 $P \in \mathfrak{X}^p(R)$，$(\Delta\delta + \delta\Delta)(P) = [\phi_{\mathrm{vol}}, P]$.

证明。(1) 根据模导子的定义，对任意 $a \in R$，$\phi_{\mathrm{vol}}(a) = \iota_{\mathrm{d}\iota_{H_a}(\text{体积形式})}$ 体积形式 *. 由 Δ 的定义可知，$\phi_{\mathrm{vol}}(a) = -\Delta(H_a)$。

根据 (4.5)，$(\Delta\delta + \delta\Delta)(a) = [\Delta(\pi)\ a]$. 注意到 $\delta(a) = -H_a$ 且 $\Delta(a) = 0$，因此 $-\Delta(H_a) = [\Delta(\pi)\ a] = \Delta(\pi)(a)$。因此，对任意$a \in R$，有 $\phi_{\mathrm{vol}}(a) = -\Delta(H_a) = \Delta(\pi)(a)$，即 $\phi_{\mathrm{vol}} = \Delta(\pi)$。

(2) 由 (4.5) 可得。 □

推论4.14. 假设和记号同命题 4.13。则

(1) 对任意泊松导子 $P \in \mathfrak{X}^1(R)$，$\Delta(P)$ 是卡西米尔元，当且仅当 $[\phi_{\mathrm{vol}}, P] = 0$;
(2) 对任意卡西米尔元 $a \in R$，$\phi_{\mathrm{vol}}(a) = 0$.

证明. (1) 由于 P 是泊松导子，$\delta(P) = 0$. 因此，由命题 4.13,

$$\Delta(P) \text{是卡西米尔元} \Leftrightarrow \delta(\Delta(P)) = 0 \Leftrightarrow (\Delta\delta + \delta\Delta)(P) = 0 \Leftrightarrow [\phi_{\mathrm{vol}}, P] = 0.$$

(2) 对任意 $a \in R$, $\Delta(a) = 0$. 由于 a 是卡西米尔元，$\delta(a) = 0$. 因此，根据命题 4.13，$\phi_{\mathrm{vol}}(a) = [\phi_{\mathrm{vol}}, a] = (\Delta\delta + \delta\Delta)(a) = 0$. □

4.3. $\mathfrak{X}^*(R)$ 上的 BV 算子。本小节将精确描述上一小节中给出的 BV 算子Δ 。记号与第2节.4相同。

定理4.15. 设 R 是具有平凡典范丛的光滑泊松代数，且 Δ 是式 (4.3) 中给出的算子。那么对每个 $P \in \mathfrak{X}^p(R)$,

$$\begin{aligned}\Delta(P)(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_{p-1}) =&(-1)^p \sum_{1\le l\le r} (\mathrm{d}x_l)^*\big(P(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_{p-1} \wedge x_l)\big)\\ &+ (-1)^p \sum_{I\in S} P(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_{p-1} \wedge a_I) b_I.\end{aligned}$$

证明. 由于 $\mathrm{vol} = \sum_{I\in S} a_I \mathrm{d}x_I$, $\iota_P(\mathrm{vol}) = \sum_{I\in S} a_I \iota_P(\mathrm{d}x_I)$，并且

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\iota_P(\mathrm{vol})\\ =&\sum_{I\in S} \mathrm{d}a_I \wedge \iota_P(\mathrm{d}x_I) + \sum_{I\in S} a_I\, \mathrm{d}\iota_P(\mathrm{d}x_I)\\ \overset{(a)}{=}&\sum_{I\in S}(-1)^{n-p}\big(\iota_P(\mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}a_I) - (-1)^{n-p+1}\iota_{\iota_{\mathrm{d}a_I}P}(\mathrm{d}x_I)\big)\\ &+\sum_{I\in S}\sum_{\sigma\in S_{p,n-p}} \mathrm{sgn}(\sigma) a_I\, \mathrm{d}P(x_{I_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge x_{I_{\sigma(p)}}) \wedge \mathrm{d}x_{I_{\sigma(p+1)}} \wedge \mathrm{d}x_{I_{\sigma(p+2)}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{I_{\sigma(n)}}\\ =&\sum_{I\in S} \iota_{\iota_{\mathrm{d}a_I}P}(\mathrm{d}x_I)\\ &+\sum_{I\in S}\sum_{\sigma\in S_{p,n-p}} \mathrm{sgn}(\sigma) a_I \sum_{1\le l\le r} (\mathrm{d}x_l)^*(P(x_{I_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge x_{I_{\sigma(p)}}))\\ &\quad \mathrm{d}x_l \wedge \mathrm{d}x_{I_{\sigma(p+1)}} \wedge \mathrm{d}x_{I_{\sigma(p+2)}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{I_{\sigma(n)}}\\ =&\sum_{I\in S} \iota_{\iota_{\mathrm{d}a_I}P}(\mathrm{d}x_I) \qquad \text{(denoted by } U\text{)}\\ &+\sum_{I\in S}\sum_{\sigma\in S_{p,n-p}} \mathrm{sgn}(\sigma) a_I \sum_{1\le l\le n} (\mathrm{d}x_{\sigma(l)})^*(P(x_{I_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge x_{I_{\sigma(p)}}))\\ &\quad \mathrm{d}x_{\sigma(l)} \wedge \mathrm{d}x_{I_{\sigma(p+1)}} \wedge \mathrm{d}x_{I_{\sigma(p+2)}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{I_{\sigma(n)}} \qquad \text{(denoted by } V\text{)}\\ &+\sum_{I\in S}\sum_{\sigma\in S_{p,n-p}} \mathrm{sgn}(\sigma) a_I \sum_{l\notin I} (\mathrm{d}x_l)^*(P(x_{I_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge x_{I_{\sigma(p)}}))\\ &\quad \mathrm{d}x_l \wedge \mathrm{d}x_{I_{\sigma(p+1)}} \wedge \mathrm{d}x_{I_{\sigma(p+2)}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{I_{\sigma(n)}} \qquad \text{(denoted by } W\text{)}\end{aligned}$$

其中 (a) 由命题 1.13 得出，即方程 (1.5):

$$\iota_F(\omega \wedge \mathrm{d}a) = \iota_F(\omega) \wedge \mathrm{d}a + (-1)^{q-p+1}\iota_{\iota_{\mathrm{d}a}(F)}(\omega)$$

对任意 $a \in R$, $F \in \mathfrak{X}^p(R)$ 和 $\omega \in \Omega^q(R)$。

接下来，我们分别计算各项 V 和 W 。

$$\begin{aligned}V =&\sum_{I\in S}\sum_{\sigma\in S_{p,n-p}} \mathrm{sgn}(\sigma) a_I \sum_{1\le l\le p} (\mathrm{d}x_{\sigma(l)})^*(P(x_{I_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge x_{I_{\sigma(p)}}))\\ &\quad \mathrm{d}x_{\sigma(l)} \wedge \mathrm{d}x_{I_{\sigma(p+1)}} \wedge \mathrm{d}x_{I_{\sigma(p+2)}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{I_{\sigma(n)}}\\ \overset{(b)}{=}&\sum_{I\in S}\sum_{\tau\in S_{p-1,n-p+1}} \mathrm{sgn}(\tau) a_I \sum_{p\le j\le n} (\mathrm{d}x_{\tau(j)})^*(P(x_{I_{\tau(1)}} \wedge \cdots \wedge x_{I_{\tau(p-1)}} \wedge x_{I_{\tau(j)}}))\\ &\quad \mathrm{d}x_{I_{\tau(p)}} \wedge \mathrm{d}x_{I_{\tau(p+1)}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{I_{\tau(n)}}\\ =&\sum_{I\in S}\sum_{\tau\in S_{p-1,n-p+1}} \mathrm{sgn}(\tau) a_I \sum_{1\le j\le n} (\mathrm{d}x_{\tau(j)})^*(P(x_{I_{\tau(1)}} \wedge \cdots \wedge x_{I_{\tau(p-1)}} \wedge x_{I_{\tau(j)}}))\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}x_{I_{\tau(p)}}\wedge\mathrm{d}x_{I_{\tau(p+1)}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{I_{\tau(n)}}$$

其中，(*b*) 由一一对应关系得出

$$\{(\sigma,l)\mid\sigma\in S_{p,n-p},1\le l\le p\}\to\{(\tau,j)\mid\tau\in S_{p-1,n-p+1},p\le j\le n\}.$$

$$\begin{aligned}
W=&\sum_{I\in S}\sum_{\sigma\in S_{p,n-p}}\operatorname{sgn}(\sigma)a_I\sum_{l\notin I}(\mathrm{d}l)^*(P(x_{I_{\sigma(1)}}\wedge\cdots\wedge x_{I_{\sigma(p)}}))\\
&\mathrm{d}x_l\wedge\mathrm{d}x_{I_{\sigma(p+1)}}\wedge\mathrm{d}x_{I_{\sigma(p+2)}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{I_{\sigma(n)}}\\
\overset{(c)}{=}&\sum_{I\in S}\sum_{\sigma\in S_{p,n-p}}\sum_{l\notin I}\sum_{1\le j\le n}\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{vol}(\mathrm{d}x^*_{I_j\to l})(\mathrm{d}x_{I_j})^*(P(x_{I_{\sigma(1)}}\wedge\cdots\wedge x_{I_{\sigma(p)}}))\\
&\mathrm{d}x_l\wedge\mathrm{d}x_{I_{\sigma(p+1)}}\wedge\mathrm{d}x_{I_{\sigma(p+2)}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{I_{\sigma(n)}}\\
=&\sum_{I\in S}\sum_{\sigma\in S_{p,n-p}}\sum_{l\notin I}\sum_{1\le j\le p}\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{vol}(\mathrm{d}x^*_{I_{\sigma(j)}\to l})(\mathrm{d}x_{I_{\sigma(j)}})^*(P(x_{I_{\sigma(1)}}\wedge\cdots\wedge x_{I_{\sigma(p)}}))\\
&\mathrm{d}x_l\wedge\mathrm{d}x_{I_{\sigma(p+1)}}\wedge\mathrm{d}x_{I_{\sigma(p+2)}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{I_{\sigma(n)}}\qquad\text{(denoted by } W_1)\\
+&\sum_{I\in S}\sum_{\sigma\in S_{p,n-p}}\sum_{l\notin I}\sum_{p+1\le j\le n}\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{vol}(\mathrm{d}x^*_{I_{\sigma(j)}\to l})(\mathrm{d}x_{I_{\sigma(j)}})^*(P(x_{I_{\sigma(1)}}\wedge\cdots\wedge x_{I_{\sigma(p)}}))\\
&\mathrm{d}x_l\wedge\mathrm{d}x_{I_{\sigma(p+1)}}\wedge\mathrm{d}x_{I_{\sigma(p+2)}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{I_{\sigma(n)}}\qquad\text{(denoted by } W_2)
\end{aligned}$$

其中，(*c*) 由引理 2.10 得出。为了计算 W_1，考虑集合 $\{(I,l,\sigma,j)\mid I\in S,l\notin I,\sigma\in S_{p,\ n-p},1\le j\le p\}$ 到$\{(I,l,\tau,j)\mid I\in S,l\notin I,\tau\in S_{p-1,\ n-p+1},p\le j\le n\}$的一一对应：

$$(I,l,\sigma,1\le j\le p)\mapsto(I',l',\tau,p\le j'\le n),$$

其中 $I'=(I\backslash\{I_{\sigma(j)}\})\cup\{l\}=\{I_1,\cdots,I_{\sigma(j)},\cdots,I_n,l\}$, $l'=I_{\sigma(j)}$,

$$\{I'_{\tau(1)},I'_{\tau(2)},\cdots,I'_{\tau(p-1)}\}=\{I_{\sigma(1)},\cdots,\widehat{I_{\sigma(j)}},\cdots,I_{\sigma(p)}\},$$

$$\{I'_{\tau(p)},I'_{\tau(p+1)},\cdots,I'_{\tau(n)}\}=\{I_{\sigma(p+1)},I_{\sigma(p+2)},\cdots,I_{\sigma(n)},l\},$$

并且 j' 是满足 $I'_{\tau(j')}=l$ 的唯一数。于是

$$\begin{aligned}
W_1=&\sum_{I\in S}\sum_{\sigma\in S_{p,n-p}}\sum_{l\notin I}\sum_{1\le j\le p}\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{vol}(\mathrm{d}x^*_{I_{\sigma(j)}\to l})(\mathrm{d}x_{I_{\sigma(j)}})^*(P(x_{I_{\sigma(1)}}\wedge\cdots\wedge x_{I_{\sigma(p)}}))\\
&\mathrm{d}x_l\wedge\mathrm{d}x_{I_{\sigma(p+1)}}\wedge\mathrm{d}x_{I_{\sigma(p+2)}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{I_{\sigma(n)}}\\
=&\sum_{I'\in S}\sum_{\tau\in S_{p-1,n-p+1}}\sum_{l'\notin I'}\sum_{p\le j'\le n}\operatorname{sgn}(\tau)a_{I'}(\mathrm{d}x_{l'})^*(P(x_{I'_{\tau(1)}}\wedge\cdots\wedge x_{I'_{\tau(p-1)}}\wedge x_{l'}))\\
&\mathrm{d}x_{I'_{\tau(p)}}\wedge\mathrm{d}x_{I'_{\tau(p+1)}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{I'_{\tau(n)}}\\
=&(n-p+1)\sum_{I\in S}\sum_{\tau\in S_{p-1,n-p+1}}\sum_{l\notin I}\operatorname{sgn}(\tau)a_I(\mathrm{d}x_l)^*(P(x_{I_{\tau(1)}}\wedge\cdots\wedge x_{I_{\tau(p-1)}}\wedge x_l))\\
&\mathrm{d}x_{I_{\tau(p)}}\wedge\mathrm{d}x_{I_{\tau(p+1)}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{I_{\tau(n)}}.
\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}
W_2=&\sum_{I\in S}\sum_{\sigma\in S_{p,n-p}}\sum_{l\notin I}\sum_{p+1\le j\le n}\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{vol}(\mathrm{d}x^*_{I_{\sigma(j)}\to l})(\mathrm{d}x_{I_{\sigma(j)}})^*(P(x_{I_{\sigma(1)}}\wedge\cdots\wedge x_{I_{\sigma(p)}}))\\
&\mathrm{d}x_l\wedge\mathrm{d}x_{I_{\sigma(p+1)}}\wedge\mathrm{d}x_{I_{\sigma(p+2)}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{I_{\sigma(n)}}\\
=&\sum_{I'\in S}\sum_{\sigma'\in S_{p,n-p}}\sum_{l'\notin I'}\sum_{p+1\le j'\le n}(-1)\operatorname{sgn}(\sigma')\operatorname{vol}(\mathrm{d}x_{I'})(\mathrm{d}x_{l'})^*(P(x_{I'_{\sigma'(1)}}\wedge\cdots\wedge x_{I'_{\sigma'(p)}}))\\
&\mathrm{d}x_{l'}\wedge\mathrm{d}x_{I'_{\sigma'(p+1)}}\wedge\mathrm{d}x_{I'_{\sigma'(p+2)}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{I'_{\sigma'(n)}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -(n-p)\sum_{I\in S}\sum_{\sigma\in S_{p,n-p}}\sum_{l\notin I}\operatorname{sgn}(\sigma)a_I(\mathrm{d}x_l)^*(P(x_{I_{\sigma(1)}}\wedge\cdots\wedge x_{I_{\sigma(p)}}))\\
&\qquad \mathrm{d}x_l\wedge\mathrm{d}x_{I_{\sigma(p+1)}}\wedge\mathrm{d}x_{I_{\sigma(p+2)}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{I_{\sigma(n)}}\\
&= -(n-p)W.
\end{aligned}
$$

由此可得 $W = W_1 + W_2 = W_1 - (n-p)W$ 和 $W_1 = (n-p+1)W$。因此

$$
\begin{aligned}
W =&\sum_{I\in S}\sum_{\tau\in S_{p-1,n-p+1}}\sum_{l\notin I}\operatorname{sgn}(\tau)a_I(\mathrm{d}x_l)^*(P(x_{I_{\tau(1)}}\wedge\cdots\wedge x_{I_{\tau(p-1)}}\wedge x_l))\\
&\mathrm{d}x_{I_{\tau(p)}}\wedge\mathrm{d}x_{I_{\tau(p+1)}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{I_{\tau(n)}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V+W =&\sum_{I\in S}\sum_{\tau\in S_{p-1,n-p+1}}\sum_{1\le l\le r}\operatorname{sgn}(\tau)a_I(\mathrm{d}x_l)^*(P(x_{I_{\tau(1)}}\wedge\cdots\wedge x_{I_{\tau(p-1)}}\wedge x_l))\\
&\mathrm{d}x_{I_{\tau(p)}}\wedge\mathrm{d}x_{I_{\tau(p+1)}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{I_{\tau(n)}}.
\end{aligned}
$$

注意，$\sum_{1\le l\le r}(\mathrm{d}x_l)^*[P(-\wedge\cdots\wedge-\wedge x_l)]$ 是一个（$p-1$）重多重导子，并且

$$
\begin{aligned}
V+W =&\sum_{I\in S}\iota_{\left(\sum_{1\le l\le r}(\mathrm{d}x_l)^*[P(-\wedge\cdots\wedge-\wedge x_l)]\right)}(a_I\,\mathrm{d}x_I)\\
=&\iota_{\left(\sum_{1\le l\le r}(\mathrm{d}x_l)^*[P(-\wedge\cdots\wedge-\wedge x_l)]\right)}(\mathrm{vol}).
\end{aligned}
$$

Then

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\iota_P(\mathrm{vol})\\
=&\sum_{I\in S}\iota_{\iota_{\mathrm{d}a_I}P}(\mathrm{d}x_I)+\iota_{\left(\sum_{1\le l\le r}(\mathrm{d}x_l)^*[P(-\wedge\cdots\wedge-\wedge x_l)]\right)}(\mathrm{vol})\\
=&\sum_{I\in S}b_I\iota_{\iota_{\mathrm{d}a_I}P}(\mathrm{vol})+\iota_{\left(\sum_{1\le l\le r}(\mathrm{d}x_l)^*[P(-\wedge\cdots\wedge-\wedge x_l)]\right)}(\mathrm{vol}).
\end{aligned}
$$

根据 BV 算子 Δ的定义，

$$
\begin{aligned}
\Delta(P)(a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_{p-1}) =&(-1)^p\sum_{1\le l\le r}(\mathrm{d}x_l)^*\big(P(a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_{p-1}\wedge x_l)\big)\\
&+(-1)^p\sum_{I\in S}P(a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_{p-1}\wedge a_I)b_I.
\end{aligned}
$$

□

注 4.16。对于 $P\in\mathfrak{X}^1(R)$，$\Delta P = -\sum_{1\le l\le r}(\mathrm{d}x_l)^*\big(P(x_l)\big) - \sum_{I\in S}P(a_I)b_I$。对于 $P\in\mathfrak{X}^2(R)$，$(\Delta P)(a) = \sum_{1\le l\le r}(\mathrm{d}x_l)^*\big(P(a\wedge x_l)\big)+\sum_{I\in S}P(a\wedge a_I)b_I$.。特别地，$\phi_{\mathrm{vol}} = \Delta(\pi)$ 由定理2.13得出，这与命题 4.13一致。

例 4.17. 设 $R = \mathbb{K}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 是一个多项式代数。三元组 $(\mathfrak{X}^*(R)\ \wedge, \Delta)$ 是一个BV代数，其中

$$
\Delta(P)(a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_{p-1}) = (-1)^p\sum_{1\le l\le n}\frac{\partial}{\partial x_l}\big(P(a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_{p-1}\wedge x_l)\big)
$$

对于任意 $P\in\mathfrak{X}^p(R)$ 和 $a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}\in R.$，若 $P = a\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\wedge\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x_{i_p}}$，则

$$
\Delta(P) = \sum_{j=1}^{p}(-1)^j\frac{\partial a}{\partial x_{i_j}}\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\wedge\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\wedge\cdots\widehat{\frac{\partial}{\partial x_{i_j}}}\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x_{i_p}}.
$$

4.4. 幺模泊松代数的泊松上同调上的 BV结构。现在考虑具有平凡典范丛的光滑泊松代数 R。我们将研究泊松结构为幺模时，其泊松上同调上的 BV结构。

引理 4.18。以下图表是反交换的

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \Omega^q(R) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^{q+1}(R) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \partial} & & \downarrow{\scriptstyle \partial} & & \\
\cdots & \longrightarrow & \Omega^{q-1}(R) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Omega^q(R) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

证明。对于任意 $a_0\,\mathrm{d}a_1\wedge\mathrm{d}a_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_q\in\Omega^q(R)$，根据定义，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\,\partial(a_0\,\mathrm{d}a_1\wedge\mathrm{d}a_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_q)\\
=&\sum_{1\le i\le q}(-1)^{i-1}\,\mathrm{d}\{a_0,a_i\}\wedge\mathrm{d}a_1\wedge\cdots\widehat{\mathrm{d}a_i}\cdots\wedge\mathrm{d}a_q\\
&+\sum_{1\le i,j\le q}(-1)^{i+j}\,\mathrm{d}a_0\wedge\mathrm{d}\{a_i,a_j\}\wedge\mathrm{d}a_1\wedge\cdots\widehat{\mathrm{d}a_i}\cdots\widehat{\mathrm{d}a_j}\cdots\wedge\mathrm{d}a_q\\
=&-\partial(\mathrm{d}a_0\wedge\mathrm{d}a_1\wedge\mathrm{d}a_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_q)\\
=&-\partial\,\mathrm{d}(a_0\,\mathrm{d}a_1\wedge\mathrm{d}a_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_q).
\end{aligned}$$

□

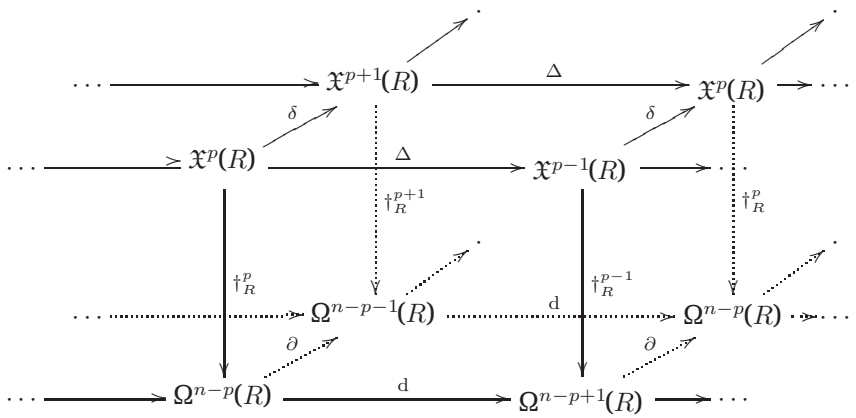
定理 4.19。如果 R 是幺模泊松代数，则其泊松上同调 $\mathrm{HP}^*(R)$具有一个 BV 代数结构，该结构由定理 4.12 中在 $\mathfrak{X}^*(R)$ 上给出的 BV 代数结构诱导而来。

证明。根据引理 3.7，乘积

$$\wedge:\mathrm{HP}^p(R)\times\mathrm{HP}^q(R)\to\mathrm{HP}^{p+q}(R),\ \overline{F}\times\overline{G}\mapsto\overline{F\wedge G}$$

是良定义的。

注意，根据引理 4.18，$\partial\mathrm{d}+\mathrm{d}\partial=0$。结论可直接由注 3.13、定理 4.12 以及下面的（反）交换图得到，该图表明算子 Δ 也可以通过上同调微分 δ 作用于其上同调群。



□

5. BV structure for pseudo-unimodular Poisson algebras

本节给出伪单模泊松代数的概念，并为任意伪单模泊松代数上的泊松上同调构造一个 BV 算子。首先回顾两个有用的结果。

引理 5.1. [LWW19，引理 2] 设 $\varpi \in \Omega^1(R)$ 为一个 1-形式，且 $\mathrm{d}' = \varpi \wedge -$。设 $\mathrm{d}_t = \mathrm{d} - \mathrm{d}'$。那么，$\mathrm{d}_t^2 = 0$ 当且仅当 ϖ 是一个德拉姆 1- 余循环。

命题5.2. [LWW19，命题 3] 设 R 是一个具有泊松结构 π 的泊松代数，且 $\varpi \in \Omega^1(R)$ 是一个德拉姆1-余循环。那么

(1) $\phi = \iota_\varpi \pi \in \mathfrak{X}^1(R)$ 是一个泊松导子。(2) $\partial_t = [\iota_\pi, \mathrm{d}_t]$，其中 $\partial_t = \partial^{R_\phi}$，$\mathrm{d}_t = \mathrm{d} - \mathrm{d}'$ 且 $\mathrm{d}' = \varpi \wedge -$。(3) $\partial_t \mathrm{d}_t + \mathrm{d}_t \partial_t = 0$.

具有平凡典范丛的光滑代数上的伪幺模泊松结构，定义方式与 Frobenius 泊松代数上的类似 [LWW19，定义10]。

定义 5.3. 设 (R, π) 是一个具有平凡典范丛的光滑泊松代数。若存在一个德拉姆1-余循环 $\varpi \in \Omega^1(R)$，使得 $\iota_\varpi \pi$ 是 R 的模导子，则称 R 为伪幺模。

注 5.4. 若泊松代数 R 是幺模的，即其模导子是某个可逆元 $u \in R$ 的对数哈密顿导子 $u^{-1}\{-, u\}$，则$u^{-1}\{-, u\} = \iota_{u^{-1}\mathrm{d}u}\pi$，且 $\mathrm{d}(u^{-1}\mathrm{d}u) = 0$。因此 R 是伪幺模的。

例 5.5. 若泊松代数 R 的模导子是一个哈密顿导子，例如 $\{u, -\}$，则 $\{u, -\} = -\iota_{\mathrm{d}u}\pi$。因此， R 也是伪幺模的（参见 [LWW15，例 2.5] 中的一个例子）。

注 5.6. 对于多项式泊松代数，任何德拉姆1-余循环都必是恰当 1-形式。因此，多项式泊松代数是伪幺模的，当且仅当其模导子是一个哈密顿导子。

下文中，设 R 为具有平凡典范丛的伪幺模光滑泊松代数。根据命题5.2，我们可以利用德拉姆1-余循环扭曲德拉姆微分，使得扭曲德拉姆微分 d_t 与扭曲泊松微分 ∂_t （关于模导子）反交换。然后，我们定义由扭曲德拉姆微分 d_t 诱导的、作用于 $\mathfrak{X}^*(R)$上的扭曲微分算子 Δ_t ：

$$
\begin{array}{ccc}
\mathfrak{X}^p(R) & \xrightarrow{\Delta_t} & \mathfrak{X}^{p-1}(R) \\
{\scriptstyle \dagger_R^p}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle (\dagger_R^{p-1})^{-1}} \\
\Omega^{n-p}(R) & \xrightarrow{\mathrm{d}_t} & \Omega^{n-p+1}(R).
\end{array} \tag{5.1}
$$

容易看出 $\Delta_t = \Delta - \Delta'$，其中 $\Delta' = (\dagger_R^{*-1})^{-1}\mathrm{d}'\dagger_R^*$，且 $\mathrm{d}' = \varpi \wedge -$。我们断言，$\Delta'$ 是一个超导子。

沿用上述记号，我们有如下关于伪单模泊松代数的引理。

引理 5.7. 对任意 $P \in \mathfrak{X}^p(R)$ 和 $\omega \in \Omega^{p-1}(R)$, $\iota_\omega(\Delta'(P)) = \Delta'(\iota_\omega P)$。

证明。根据定理 3.3, $P = \iota_\alpha(\mathrm{vol}^*)$, 其中某个 $\alpha \in \Omega^{n-p}(R)$。于是

$$\begin{aligned}
\Delta'(\iota_\omega(P)) &= \Delta'(\iota_\omega(\iota_\alpha(\mathrm{vol}^*))) \\
&= \Delta'(\iota_{\omega\wedge\alpha}(\mathrm{vol}^*)) && \text{(by Definition 1.12)} \\
&= -\iota_{\mathrm{d}'(\omega\wedge\alpha)}(\mathrm{vol}^*) && \text{(by the definition of } \Delta') \\
&= (-1)^p \iota_{\omega\wedge\mathrm{d}'\alpha}(\mathrm{vol}^*) && \text{(by the definition of } \mathrm{d}') \\
&= \iota_\omega((-1)^p \iota_{\mathrm{d}'\alpha}(\mathrm{vol}^*)) \\
&= \iota_\omega(\Delta'(P)) && \text{(by the definition of } \Delta')
\end{aligned}$$

□

命题 5.8。算子 Δ' 是分次代数$\mathfrak{X}^*(R)$上的超导子, 也就是说, 对于任意 $P \in \mathfrak{X}^p(R)$ 和 $Q \in \mathfrak{X}^q(R)$,

$$\Delta'(P \wedge Q) = \Delta'(P) \wedge Q + (-1)^p P \wedge \Delta'(Q).$$

证明。对于任意 $\omega \in \Omega^{p+q-1}(R)$, 由引理 5.7 $\iota_\omega(\Delta'(P \wedge Q)) = \Delta'(\iota_\omega(P \wedge Q))$。若设 $\alpha = \iota_Q(\omega)$, 则再次由引理 5.7,

$$\begin{aligned}
\iota_\omega(\Delta'(P) \wedge Q) &= (-1)^{(p-1)q} \iota_\omega(Q \wedge \Delta'(P)) \\
&= (-1)^{(p-1)q} \iota_\alpha(\Delta'(P)) \\
&= (-1)^{(p-1)q} \Delta'(\iota_\alpha(P)).
\end{aligned}$$

若设 $\beta = \iota_P(\omega)$, 则 $\iota_\omega(P \wedge \Delta'(Q)) = \Delta'(\iota_\beta(Q))$。由引理 4.8,

$$\iota_\omega(P \wedge Q) = (-1)^{(p-1)q} \iota_\alpha(P) + (-1)^p \iota_\beta(Q).$$

因此

$$\begin{aligned}
\iota_\omega(\Delta'(P \wedge Q)) =& \Delta'(\iota_\omega(P \wedge Q)) \\
=& (-1)^{(p-1)q} \Delta'(\iota_\alpha(P)) + (-1)^p \Delta'(\iota_\beta(Q)) \\
=& \iota_\omega(\Delta'(P) \wedge Q) + (-1)^p \iota_\omega(P \wedge \Delta'(Q)) \\
=& \iota_\omega\big(\Delta'(P) \wedge Q + (-1)^p P \wedge \Delta'(Q)\big).
\end{aligned}$$

证明至此结束。 □

回顾定理 4.12, 它表明三元组 $(\mathfrak{X}^*(R), \wedge, \Delta)$ 是一个 BV代数。对于任意 $P \in \mathfrak{X}^p(R)$ 和 $Q \in \mathfrak{X}^q(R)$,

$$[P, Q] = (-1)^p(\Delta(P \wedge Q) - \Delta P \wedge Q - (-1)^p P \wedge \Delta Q).$$

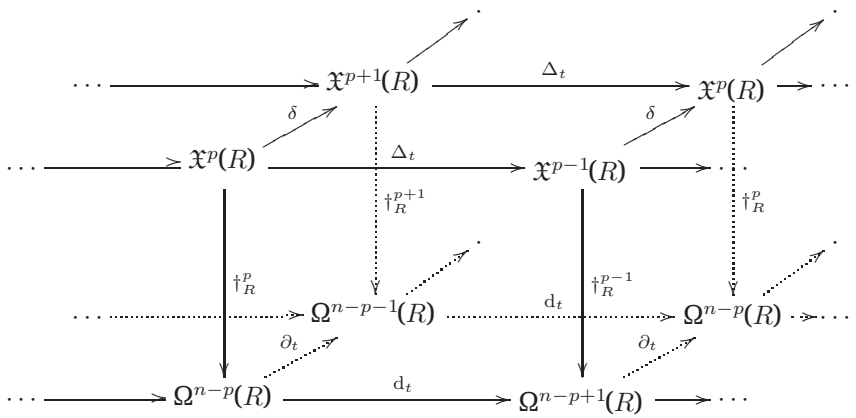
由命题 5.8 可得

$$[P, Q] = (-1)^p(\Delta_t(P \wedge Q) - \Delta_t P \wedge Q - (-1)^p P \wedge \Delta_t Q),$$

其中 $\Delta_t = \Delta - \Delta'$。因此 $(\mathfrak{X}^*(R), \wedge, \Delta_t)$ 也是一个 BV代数。

定理 5.9. 若 (R, π) 是伪单模泊松代数, 则 $(\mathrm{HP}^*(R), \wedge, \Delta_t)$ 是一个 BV代数。

证明. 由于泊松结构是伪幺模的，存在一个德拉姆1-余循环 $\varpi \in \Omega^1(R)$，使得其模导子 $\phi_{\mathrm{vol}} = \iota_\varpi \pi$。考虑以下（反）交换图表:



其中 $\mathrm{d}_t = \mathrm{d} - \mathrm{d}'$，且 $\mathrm{d}' = \varpi \wedge -$，$\partial_t = \partial_{R_t}$ 是取值于 R_t 的泊松微分，其中 R_t 是由模导子ϕ_{vol}扭曲的扭曲泊松模。根据命题5.2，$\partial_t \mathrm{d}_t + \mathrm{d}_t \partial_t = 0$。于是，由引理 3.7 和定理 3.11 可知，算子 $\wedge$、Δ_t 可以越过上同调微分 δ，作用于其上同调群 $\mathrm{HP}^*(R)$。因此，BV代数（$\mathfrak{X}^*(R)$ $\wedge$，Δ_t）在 $\mathrm{HP}^*(R)$ 上诱导出 BV 代数结构。□

注 5.10. 对任意 $P \in \mathfrak{X}^p(R)$，$\Delta'(P) = (-1)^p \iota_\varpi P$。事实上，根据 Δ'的定义，下面的图表

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}^p(R) & \xrightarrow{\Delta'} & \mathfrak{X}^{p-1}(R) \\ \downarrow{\scriptstyle \dagger_R^p} & & \uparrow{\scriptstyle (\dagger_R^{p-1})^{-1}} \\ \Omega^{n-p}(R) & \xrightarrow{\varpi\wedge -} & \Omega^{n-p+1}(R) \end{array} \tag{5.2}$$

是交换的。回想一下，$\dagger_R^p(P) = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \iota_P$(体积形式)，并且

$$(\dagger_R^{p-1})^{-1}(\varpi \wedge (\dagger_R^p(P))) = (-1)^{\frac{(p-1)p}{2}} \iota_{\varpi\wedge(\dagger_R^p(P))} \mathrm{vol}^* = (-1)^p \iota_{\varpi\wedge(\iota_P(\mathrm{vol}))} \mathrm{vol}^* .$$

对于任意 $\eta \in \Omega^{p-1}(R)$,

$$\begin{aligned} \iota_{\varpi\wedge(\iota_P(\mathrm{vol}))} \mathrm{vol}^*(\eta) &= \mathrm{vol}^* \left(\eta \wedge \varpi \wedge (\iota_P \mathrm{vol})\right) \\ &= [\iota_{\iota_P(\mathrm{vol})} \mathrm{vol}^*](\eta \wedge \varpi) \\ &= P(\eta \wedge \varpi) \qquad \text{(by Theorem 3.3)} \\ &= (\iota_\varpi P)(\eta), \end{aligned}$$

即，$\Delta'(P) = (-1)^p \iota_\varpi P$。

命题 5.11。对于满足 $\Omega^n(R) \cong R$ 的光滑代数 R，在 $\mathfrak{X}^*(R)$ 上的任意 BV 算子（生成 Schouten-Nijenhuis 括号）都具有形式 $\Delta - (-1)^{|\,|} \iota_\varpi$，其中 Δ 是 (4.3) 中定义的算子，$|\,|$ 表示齐次元素的次数，并且 $\varpi \in \Omega^1(R)$ 满足 $\mathrm{d}(\varpi) = 0$。

证明。由定理 4.12，Δ 是R上的一个 BV 算子，生成 Schouten-Nijenhuis 括号。对于任意其他 BV 算子 Δ_t，根据 BV 算子的定义

(4.2)， $\Delta-\Delta_t$ 是一个超导子。因此 $(\Delta-\Delta_t)|_{\mathfrak{X}^1(R)}$ 是一个 R-模态射。于是

$$(\Delta-\Delta_t)\,|_{\mathfrak{X}^1(R)}\in \mathrm{Hom}_R(\mathfrak{X}^1(R),R)\cong\Omega^1(R).$$

因此存在 $\varpi\in\Omega^1(R)$，使得对于任意 $F\in\mathfrak{X}^1(R)$，

$$(\Delta-\Delta_t)(F)=F(-\varpi)=(-1)\iota_\varpi F.$$

由于 $\Delta-\Delta_t$ 是 $\mathfrak{X}^*(R)$ 上的超导子 $\cong\wedge_R^*(\mathrm{Der}(R))=\wedge_R^*(\mathfrak{X}^1(R))$（推论 1.5），容易验证

$$(\Delta-\Delta_t)(P)=(-1)^p\iota_\varpi P$$

对于任意 $P\in\mathfrak{X}^p(R)$。因此 $\Delta_t=\Delta-(-1)^{|\,|}\iota_\varpi$。

由庞加莱对偶性（注 5.10）可知， Δ_t 对应于 $\Omega^*(R)$ 上的微分 $d_t=\mathrm{d}-(\varpi\wedge-)$。根据引理 5.1， $d_t^2=0$ 当且仅当 $\mathrm{d}\varpi=0$。证明完成。□

推论 5.12. 设 R 是一个典范丛平凡的光滑泊松代数。若其泊松上同调存在一个由 $\mathfrak{X}^*(R)$ 上的 BV 算子诱导的 BV 算子，则 R 是伪幺模的。

证明. 设 Δ_t 是 $\mathfrak{X}^*(R)$ 上的一个 BV 算子，它诱导出泊松上同调上的一个 BV 算子。于是，根据命题 5.11， $\Delta_t=\Delta-(-1)^{|\,|}\iota_\varpi$，其中 $\varpi\in\Omega^1(R)$，且 $\mathrm{d}(\varpi)=0$。由 (4.5)，对于任意 $x\in R$，

$$(\Delta_t\delta+\delta\Delta_t)(x)=[\Delta_t(\pi),x],$$

也就是说，

$$\Delta_t\delta(x)=\Delta_t(\pi)(x).$$

由于 Δ_t 在泊松上同调上诱导出一个微分，且 $\delta(x)$ 是一个 1-上边界，因此，对于任意 $x\in R.$， $\Delta_t(\overline{\delta(x)})=0\in\mathrm{HP}^0(R)$。于是 $\Delta_t(\pi)=0$，也就是说，$\Delta(\pi)-\iota_\varpi(\pi)=0$。由命题 4.13（或注 4.16）， $\phi_{\mathrm{vol}}=\Delta(\pi)=\iota_\varpi(\pi)$，且 R 是伪幺模的。□

Acknowledgments

J. Luo 获国家自然科学基金资助（项目编号：11901396）。S.-Q. Wang 获国家自然科学基金资助（项目编号：11771085）。Q.-S. Wu 获国家重点研发计划（项目编号：2020YFA0713200）和国家自然科学基金（项目编号：11771085）资助。

References

[BP14] R. Berger、A. Pichereau，《作为泊松代数变形的 Calabi-Yau 代数》，《代数表示论》17（2014），735–773。[Bry88] J. L. Brylinski，《泊松流形上的一个微分复形》，微分几何杂志 28（1988），93–114。[CCEY21] X. Chen、Y. Chen、F. Eshmatov、S. Yang，《泊松上同调、Koszul 对偶与 Batalin-Vilkovisky 代数》，非交换几何杂志 15（2021），889–918。[Dol09] V. A. Dolgushev，《Van den Bergh 对偶与泊松簇的模对称性》，数学精选 14（2009），199–228。[Gin05] V. Ginzburg，《非交换几何讲义》，arXiv: math. AG/0506603。[Hue90] J. Huebschmann，《泊松上同调与量子化》，纯粹与应用数学杂志 408（1990），57–113。[Hue99] J. Huebschmann，《Lie-Rinehart 代数的对偶性与模类》，纯粹与应用数学杂志 510（1999），103–159。

[KoKr14] N. Kowalzig 和 U. Kr¨ahmer, 《Ext 与 Tor 上的 Batalin-Vilkovisky 结构》, 纯粹与应用数学杂志 697（2014）, 159-219。[LR07] S. Launois、L. Richard, 《某些二次泊松代数的扭曲 Poincar´e 对偶性》, 《数学物理通讯》79（2007）, 161–174。[Lic77] A. Lichnerowicz, 《泊松簇及其相关李代数》（法文）, 《微分几何杂志》12（1977）, 253–300。[LPV13] C. Laurent-Gengoux、A. Pichereau、P. Vanhaecke, 《泊松结构》, Springer, 柏林, 2013。[LWW15] J. Luo、S.-Q. Wang、Q.-S. Wu, 《泊松同调与泊松上同调之间的扭曲 Poincar´e 对偶性》, 《代数学》442（2015）, 484–505。[LWW19] J. Luo、S.-Q. Wang、Q.-S. Wu, 《Frobenius 泊松代数》, 《中国数学前沿》14（2019）, 395–420。[LWZ20] J. L¨u、X. Wang、G. Zhuang, 《关于泊松同调与上同调之间对偶性的注记》, 《代数学通讯》48（2020）, 4170–4175。[LZZ16] T. Lambre、G. Zhou 和 A. Zimmermann, 《具有半单 Nakayama自同构的 Frobenius 代数的 Hochschild上同调环是一个 Batalin-Vilkovisky 代数》, 《代数学》446（2016）, 103-131。[Mar04] N. Marconnet, 《三次 Artin-Schelter 正则代数的同调》, 《代数学》278（2004）, 638–665。[Mas06] T. Maszczyk, 《极大交换子代数、泊松几何与 Hochschild 同调》, arXiv: math.KT/0603386。[Mne19] P. Mnev, 《量子场论：Batalin–Vilkovisky 形式及其应用》, 大学讲座丛书, 第72卷（2019）, 美国数学学会。[MR87] J. C. McConnell、J. C. Robson, 《非交换诺特环》, Wiley, 奇切斯特, 1987。[Oh99] S. Q. Oh, 《泊松包络代数》, 《代数学通讯》27（1999）, 2181–2186。[TaP09a] S. R. Tagne Pelap, 《椭圆Sklyanin代数的 Hochschild 同调》, 《数学物理通讯》87（2009）, 267–281。[TaP09b] S. R. Tagne Pelap, 《四维多项式泊松代数的泊松 (余)同调：Sklyanin 情形》, 《代数学》322（2009）, 1151–1169。[Tra08] T. Tradler, 《由无穷内积诱导的 Hochschild上同调上的 Batalin-Vilkovisky 代数》, 《傅里叶研究所年刊》58（2008）, 2351-2379。[VdB94] M. Van den Bergh, 《某些三维量子空间的非交换同调》, K-理论 8（1994）, 213–230。[Wei77] 29, 1977 A. Weinstein, 《辛流形讲义》, CBMS 数学会议丛书。[Wei94] C. Weibel, 《同调代数导论》, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1994。[WZ21] Q.-S. Wu、R.-P. Zhu, 《滤过变形中的 Nakayama自同构与模导子》, 《代数学》572（2021）, 381–421。[Xu99] P. Xu, 《泊松几何中的 Gerstenhaber代数与 BV代数》, 《数学物理通讯》200（1999）, 545–560。[Zhu15] C. Zhu, 《仿射泊松代数的泊松同调与上同调的扭曲 Poincar´e 对偶性》, 《美国数学学会会刊》143（2015）, 1957–1967。

Mathematics and Science College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China*Email address*: luojuan@shnu.edu.cnSchool of Mathematics, East China University of Science and Technology, Shanghai200237, China*Email address*: sqwang@ecust.edu.cnSchool of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China*Email address*: qswu@fudan.edu.cn