arXiv:2302.08340v1 [math.CO] 16 Feb 2023

团因子的击中时刻

Annika Heckel* Marc Kaufmann† Noela Müller‡ Matija Pasch§2023年2月16日

摘要

在 [16], 中，Kahn 对自 20 世纪 70 年代末以来一直悬而未决的 Shamir问题给出了最强的肯定回答：设 $r \geqslant 3$，且设 n 可被 r整除。那么，在包含 n 个顶点的随机r-均匀超图过程中，一旦最后一个孤立顶点消失，就会出现一个完美匹配。在本文中，我们将这一命中时间结果推广到随机图过程中的团因子情形：当最后一个顶点加入一个完全图 K_r的副本时，随机图过程中包含一个 K_r-因子。我们的证明借助了一系列新颖的耦合，扩展了 Riordan [26] 和第一作者 [12] 所采用的技术。对于 s-均匀超图过程中的团因子，也证明了类似结果（$s \geqslant 3$）。

1 引言

我们何时能够用一个小子图的互不同构副本覆盖一个图的顶点？对这一问题的研究至少可以追溯到 1891 年；当时，Julius Petersen 在其《正则图论》 [23], 中给出了图包含完美匹配的充分条件，也就是说，图中存在一个由两两不相交的边组成的顶点覆盖。在随机（超）图领域，这类条件最好用边概率来表述。设 $H_r(n, \pi)$ 为定义在顶点集 $V = [n]$ 上的随机 r-均匀超图，其中 $N_r = \binom{n}{r}$ 条可能的大小为 r 的超边中的每一条都以概率 π独立地出现。用这一符号表示，二项随机图就是 $G(n, p) = H_2(n, p)$。1979 年，Shamir 提出了如下自然问题，Erdős [9]对此进行了报道：

问题 1.1。 $\pi = \pi(n)$ 需要多大，才能使 $H_r(n, \pi)$ 以高概率包含一个完美匹配[1], ，即由 n/r 条顶点不相交的超边组成的集合?

在此处及下文中，我们默认在必要时假设 $n \in r\mathbb{Z}_+$。Ruciński [27] 以及 Alon 和 Yuster [1], 提出了一个密切相关的问题：

*乌普萨拉大学数学系，瑞典乌普萨拉 Box 480，邮编 751 06。电子邮箱：annika.heckel@math.uu.se。促成本研究成果的经费来自欧洲研究委员会（ERC）资助协议 772606–PTRCSP，以及瑞典研究理事会（登记号：2022-02829）。

†苏黎世联邦理工学院理论计算机科学研究所，瑞士苏黎世。电子邮箱： marc.kaufmann@inf.ethz.ch。作者谨此感谢瑞士国家科学基金会的支持， [资助编号为 200021_192079]。

‡埃因霍温理工大学数学与计算机科学系，荷兰埃因霍温 PO Box 513，邮编 5600 MB。电子邮箱：n.s.muller@tue.nl。本研究获 NWO Gravitation 项目 NETWORKS 资助，项目编号为 024.002.003§慕尼黑路德维希-马克西米利安大学数学研究所，德国慕尼黑 Theresienstr. 39，邮编 80333。电子邮箱： pasch@math.lmu.de。促成本研究成果的经费来自欧洲研究委员会（ERC）资助协议 772606–PTRCSP。[1]若事件序列 $(E_n)_{n\geqslant 1}$ 满足 $P(E_n) \to 1$ 当 $n \to \infty$ 时以高概率成立（whp），则称该事件序列以高概率成立。

问题 1.2. 对于哪些 $p = p(n)$，随机图 $G(n,p)$ 以高概率包含一个 K_r-因子?

也就是说，对于哪些 $p(n)$， $G(n,\ p)$ 才包含一组大小为 r 的两两顶点不相交的团，也称为完美 r-团铺砌? 下文中，我们也将 K_r 的一个副本称为一个 r-团。对于 $r = 2$，这两个问题是相同的——多亏 Erdős 和 Rényi [8], ，我们自 1966 年起便知道，完美匹配的存在具有一个尖锐阈值[2] ，其位置为 $p_0 = \log_n{}^n$ 。其下界显而易见：在 $p = (1-\varepsilon)p_0$ 时，图中仍有一些顶点是孤立的，因此不可能存在完美匹配。上界则依赖于 Tutte 定理，但目前尚无已知的超图类比。

因此，在 $r \geqslant 3$ 的情形下，这些问题一直是随机（超）图论中最受关注的开放问题之一。关于随机 r-均匀超图中的完美匹配，Schmidt 和 Shamir [28] 最初取得了一些结果——证明期望度为 $\omega(\sqrt{n})$ 的超图存在完美匹配；Frieze 和 Janson [11] 将其改进至 $\omega(n^{\frac{1}{3}})$，随后 Kim [18] 又进一步改进至 $\omega\left(n^{1/(5+2/(r-1))}\right)$ 。对于团因子，即使是三角形因子这一特殊情形，也很难确定；尽管 Alon 和 Yuster [1], 、Ruciński [27] 以及 Krivelevich [19] 已取得部分结果。

最后，Johansson、Kahn 和 Vu 在其开创性论文 [14] 中，将这两个问题的答案都确定到了常数因子范围内。长期以来，人们一直认为，与 $r = 2$ 中的情形一样，在 $H_r(n,\ \pi)$ 中寻找完美匹配的主要障碍是孤立顶点，也就是不包含在任何超边中的顶点。在团因子情形中，与孤立顶点相对应的障碍是不包含在任何 r-团中的顶点。令

$$\pi_0 = \pi_0(r) = \frac{\log n}{\binom{n-1}{r-1}} \quad \text{and} \quad p_0 = p_0(r) = \pi_0^{1/\binom{r}{2}};$$

则已知 π_0 和 p_0 分别是 $H_r(n,\ \pi)$ 中“最小度至少为 1”这一性质，以及 $G(n,\ p)$ 中“每个顶点都被一个 r-团覆盖”这一性质的尖锐阈值 [5, 13]。Johansson、Kahn 和 Vu [14] 证明， π_0 和 p_0 确实分别是 $H_r(n,\ \pi)$ 中存在完美匹配，以及 $G(n,\ p)$ 中存在 r-团因子的（弱）阈值。

最近，Kahn [15] 证明， π_0 实际上是 $H_r(n,\ \pi)$ 中存在完美匹配的尖锐 阈值。事实上，他证实了这样一个猜想：孤立顶点本质上是唯一的障碍，从而以最强的可能形式回答了 Shamir 的问题：

设 $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_{N_r}$ 为 $\binom{V}{r}$ 中超边的均匀随机顺序，则 *random r-uniform hypergraph process* $(H_t^r)_{t=0}^{N_r}$ 定义如下：

$$H_t^r = \{\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_t\}.$$

Let

$$T_H = \min\{t : H_t^r \text{ has no isolated vertices}\}$$

称为超边覆盖命中时刻，即最后一个孤立顶点因被包含在某条超边中而“消失”的时刻 t 。在图的情形 $r = 2$，Bollobás 和 Thomason [3] 于 1985年 证明，该命中时间以高概率与完美匹配的命中时间重合；这表明，一旦最后一个顶点被某条边覆盖，以高概率就存在完美匹配。Kahn [16] 证明，当 $r \geqslant 3$ 时，情况确实也是如此：

定理1.3 ([16])。 设 $r \geqslant 3$ 和 $n \in r\mathbb{Z}_+$，则以高概率 $H_{T_H}^r$ 具有完美匹配。

[2]回顾一下，若对所有固定的 $\varepsilon > 0$，当 $p(n) < (1-\varepsilon)p^*(n)$ 时， $G(n,p) \notin \mathrm{P}$ 以高概率成立；而当 $p(n) > (1+\varepsilon)p^*(n)$ 时， $G(n,p) \in \mathrm{P}$ 以高概率成立，则称序列 $p^* = p^*(n)$ 对图性质 P 具有尖锐阈值。对于（弱）阈值，相应条件分别变为 $p = o(p^*)$ 和 $p^* = o(p)$。

我们能否对团因子问题给出同样有力的答案? 对于 $r = 3$, 随机图过程中一旦每个顶点都被一个三角形覆盖，是否存在三角形因子这一问题，在 [4, §5.4] 中被归因于 Erdős 和 Spencer。这个问题似乎比其 Shamir对应版本困难得多，因为与随机超图中的超边不同，团并不是彼此独立出现的。然而，对于尖锐阈值，确实可以利用 Riordan（针对 $r \geqslant 4$）和第一作者（针对 $r = 3$）的以下耦合结果，将团因子问题归约为完美匹配问题:

定理 *1.4*（[12, 26]）。设 $r \geqslant 3$。存在常数 $\varepsilon(r)$ $\delta(r) > 0$，使得对于任意 $p = p(n) \leqslant n^{-2/r+\varepsilon}$, 令 $\pi = p\binom{r}{2}(1 - n^{-\delta})$，我们可以将随机图 $G = G(n, p)$ 与随机 r-均匀超图 $H = H_r(n, \pi)$ 耦合，使得以高概率，对于 H 中的每条超边，都存在 G 中一个顶点集相同的 K_r 副本。[3]

共 同 Kahn 的尖锐阈值结果 [15], , 以下推论可直接得出 .

推论*1.5*。 *</style}*存在一个尖锐阈值，使得 p_0 时存在 K_r-因子。

同样地，我们希望将 Kahn 的命中时间定理定理1.3直接推广到随机图过程的情形，从而证明其团因子类似结果。人们曾认为，从其 Shamir对应版本推出因子版本的结果难以企及——Kahn 在[15] 中指出，对于定理1.3，“似乎几乎不可能得到任何类似结果”；并在 [16]中指出，因子版本与该结果的Shamir版本之间的联系“似乎不可能推广到”定理1.3。

造成这种情况的一个重要原因是，原始耦合仅提供了一个单向界。虽然它保证对于每个 h in $H = H_r(n, \pi)$，在相同的顶点集上都存在 K_r in $G = G(n, p)$ 的一个副本，但正如 Riordan [26], 所指出的，我们不能指望对于 G 中每个 K_r 都能找到相应的 H 超边，因为在那里，我们会发现大约有 $n^{2r-2}p^{\binom{r}{2}-1}$ 对共享两个顶点的 K_r，这远多于预期的 H 中共享两个顶点的超边对数 $n^{2r-2}\pi^2$。第二个障碍是，每当我们在 H 中确实有这样一对重叠超边时， G 中相应的团在相关的随机图过程中并不会彼此独立地出现——例如，共享边可能是最后出现的，于是这些团便会在随机图过程中同时出现。事实上，额外团和重叠团对确实构成了挑战；但正如我们随后将要证明的，它们不会出现在那些可能属于最后一批被团覆盖的候选顶点附近。

现在，令

$$(G_t)_{t=0}^{N_2}$$

为随机图过程，它是随机 r-均匀超图过程在特殊情形 $r = 2$ 下的情形。定义

$$T_G = \min\{t : \text{ every vertex in } G_t \text{ is contained in at least one } r\text{-clique}\}$$

为一个 r-团覆盖的命中时间。于是，为了将 Kahn 的命中时间结果推广到团因子的情形，我们需要在 G_{T_G} 的团中找到 $H^r_{T_H}$ 的一个副本。这一点可以做到，且正是我们的主要结果:

定理 1.6. 设 $r \geqslant 3$。我们可以将随机图过程 $(G_t)_{t=0}^{N_2}$ 与随机 r-均匀超图过程 $(H^r_t)_{t=0}^{N_r}$ 耦合，使得以高概率， $H^r_{T_H}$ 中的每条超边都对应于G_{T_G} 中顶点集相同的一个团。

[3]在 [12, 26], 中，定理 1.4 的表述以一个未指明的 $o(1)$ 项取代了 $n^{-\delta}$；上述表述见 [26] 中的注 4，而在 $r = 3$ 的情形下，则见 [12] 末尾附近一条未编号的注释。

推论 1.7. 设 $r \geqslant 3$ 和 $n \in r\mathbb{Z}_+$，则以高概率 G_{T_G} 包含一个 K_r-因子 $r.$

注释 1.8. 有人可能会想知道，定理 1.6 中的耦合构造是否保证：在时刻 T_H 和 T_G之前，随机超图过程中出现的超边，其顺序与随机图过程中出现的 r-团的顺序相同。答案是“几乎如此”：在 $H^r_{T_H}$ 中，与另一条超边共享两个顶点的超边，可能会在对应的 r-团出现之后才出现；不过，以高概率， $H^r_{T_H}$中这样的超边大约只有 $\log^2 n$ 条，因此我们可以将其余所有超边与对应的团按顺序一一匹配。

本文结构如下。第 2 节介绍一些预备知识，随后在第 3–7 节证明定理 1.6。第 2.5 节概述证明思路。第 8 节阐述并证明定理 1.6 的超图类比。由此可立即推出，在随机 s-均匀超图过程中，一旦每个顶点都被一个 r-团覆盖（其中 $r > s \geqslant 3$），以高概率就存在一个 r-(超)团因子。

2 预备知识

2.1 符号

在本文余下部分中，我们固定 $r \geqslant 3$，并且通常在符号中省略对 r 的依赖。例如，我们简单地写作 H_t，而不写 H^r_t，依此类推。设 $M = N_r = \binom{n}{r}$ 和 $N = N_2 = \binom{n}{2}$。

对于顶点集 $V = [n]$ 上的 r-均匀超图 H，我们指的是 $\binom{V}{r}$ 的一个子集；$\binom{V}{r}$ 是 V 的所有 r-子集构成的集合。也就是说，为了方便记号，我们将 H 视为一个集合（由大小为 r 的顶点集组成）。对于顶点集 $V = [n]$ 上的超图 H，若 $v \in [n]$，我们用 $d(v)$ 表示 v 在 H 中的度。在图 G 中，r-团 是一个由 r 个顶点构成的团。我们用 $\mathrm{cl}(G)$ 表示来自 $\binom{V}{r}$ 、并在 G 中张成 r-团的顶点集所构成的集合（因此，$\mathrm{cl}(G)$ 按上述意义是一个 r-均匀超图）。

对于两个函数 $a = a(n)$、 $b = b(n)$，若 a 渐近至多为 b，记作$a \lesssim b$，则 $a(n) \leqslant (1 + o(1))b(n)$，当 $n \to \infty$ 时成立。

在全文中，我们固定一个满足以下条件的任意函数 $g(n)$

$$g(n) = o\big(\log n/\log\log n\big) \quad \text{and} \quad g(n) \to \infty. \tag{1}$$

2.2 概率工具

我们将用到以下标准概率工具。

定理 2.1 （Chernoff界，[13, 式 2.4，定理 2.1]）。对于 $X \sim \mathrm{Bin}(n,\ p)$ 我们有

$$P(X \geqslant np + t) \leqslant \left(\frac{np}{np+t}\right)^{np+t}\left(\frac{n-np}{n-np-t}\right)^{n-np-t} \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{2(np+t/3)}\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant n - np,$$

$$P(X \leqslant np - t) \leqslant \left(\frac{np}{np-t}\right)^{np-t}\left(\frac{n-np}{n-np+t}\right)^{n-np+t} \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{2np}\right), \qquad 0 \leqslant t \leqslant np.$$

定理 2.2 (Harris 不等式，[2, §2，Le. 3])。设 $n \in \mathbb{Z}_+$, $p_1, \ldots, p_n \in [0,1]$，并考虑乘积概率空间 $\Omega = \prod_{i=1}^n \Omega_i$，其中每个 Ω_i 都取值于 $\{0,1\}$，并服从参数为 p_i 的伯努利分布。若事件 $A \subseteq \Omega$ 满足：只要 $\omega \in A$，且 ω' 是通过将 ω 的一个连通分量从 0 改为 1得到的，就有 $\omega' \in A$，则称其为上集 。若$\Omega \setminus A$ 是上集，则称 A 为下集 。

a) 若 A和 B 均为上集或均为下集，则

$$P(A\cap B)\geqslant P(A)P(B).$$

b) 若 A 是一个上集且 B 是一个下集，则

$$P(A\cap B)\leqslant P(A)P(B).$$

2.3 标准耦合与临界窗口

有时，我们会用到以下标准方法，它可以方便地将所有 $\pi\in[0,1]$ 对应的随机超图 $H(n,\ \pi)$ 与随机超图过程耦合起来。

定义 2.3（标准耦合）。对每个 $h\in\binom{V}{r}$，令 U_h 为一个独立随机变量，在 $[0,1]$ 上均匀分布。令

$$H_\pi=(V,\{h:U_h\leqslant\pi\}).$$

那么 $H_\pi\sim H(n,\ \pi)$。此外，几乎必然地，所有值 U_h、$h\in\binom{V}{r}$ 都互不相同。若它们互不相同，则可以按一种自然的方式得到随机超图过程 $(H_t)_{t=0}^M$，即按 U_h 的升序添加超边。

在证明的大部分内容中，我们将在以下临界窗口内进行分析：通过令以下表达式成立来定义 π_- 和 π_+

$$\pi_\pm=\frac{\log n\pm g(n)}{\binom{n-1}{r-1}},\tag{2}$$

其中 $g(n)$是式 (1) 中全局固定的函数，并令

$$p_\pm=\left(\pi_\pm/(1-n^{-\delta})\right)^{1/\binom{r}{2}},\tag{3}$$

其中 δ 是定理 1.4 中的常数。注意，当 n 足够大时，我们有 $p_+\leqslant n^{-2/r+\varepsilon}$，其中 ε 是定理 1.4 中的常数，因此稍后可以在 $p=p_+$ 和 $\pi=\pi_+$的条件下应用定理 1.4。

众所周知，$(\pi_-,\ \pi_+)$ 是随机 r-均匀超图中最后一个孤立顶点消失的“临界窗口”（见 [5, 引理 5.1(a)]），因此根据定理1.3，这也是完美匹配出现的临界窗口：以高概率，$H(n,\ \pi_-)$ 不包含完美匹配，而 $H(n,\ \pi_+)$ 以高概率包含完美匹配。类似地，$(p_-,\ p_+)$ 是随机图中最后一个未被 r-团覆盖的顶点消失的临界窗口（见 [13, 定理 3.22]）。因此，若按定义 2.3 进行耦合，则以高概率有

$$G_{p_-}\subset G_{T_G}\subset G_{p_+}\quad\text{ and }\quad H_{\pi_-}\subset H_{T_H}\subset H_{\pi_+}.\tag{4}$$

2.4 坏事件

在本节中，我们陈述某些不良性质，并证明 $H\sim H(n,\ \pi_+)$以高概率不具有这些性质。我们首先需要一些术语。对于一个 r-均匀超图 H，令

$$n(H)=(r-1)e(H)+c(H)-v(H)$$

为 H 的零度，其中 $e(H)$、$c(H)$、$v(H)$ 分别表示 H 的超边数、连通分量数和顶点数。

定义 2.4 （[26, 定义 11]）。我们称一个连通的 r-均匀超图 H （至多有 2^{r+1} 条超边，且满足 $n(H) \geqslant 2$ ）为可避免构型。

定义 2.5。我们称一个含有 n 个顶点的超图中的顶点 v 为低度顶点，如果$d(v) \leqslant 7g(n)$，其中 $g(n)$ 是我们在式 (1) 中全局固定的函数。

定义 2.6。如果两个超边恰好共享两个顶点，我们就称它们为伙伴超边 。

现在我们可以陈述坏事件了。前两个本质上是 [26] 中的坏事件。请注意，事件 B_1 =$\mathrm{B}_1(\pi)$ 取决于 π 的选择。

B_1：存在一个度大于 $\binom{n-1}{r-1}\pi + \max(\binom{n-1}{r-1}\pi, 3\log\ n)$ 的顶点。B_2：H 包含一个可避免构型。B_3：低度顶点超过 $(\log n)^{8g(n)}$ 个。B_4：伙伴超边对超过 $\log^3 n$ 对。B_5：存在一个孤立顶点。

令 $\mathrm{B}\ = \mathrm{B}_1(\pi_+) \cup \mathrm{B}_2 \cup \mathrm{B}_3 \cup \mathrm{B}_4 \cup \mathrm{B}_5$.

引理 2.7。令 $H \sim H(n,\pi)$ 满足 $\pi \leqslant n^{1-r+o(1)}$，则以高概率 $H \notin \mathcal{B}_1(\pi) \cup \mathcal{B}_2$。若进一步 $\pi = \pi_+$, 则以高概率 $H \notin \mathcal{B}$。

证明。B_1 和 B_3 分别由 Chernoff界（定理 2.1）以及并集界和马尔可夫不等式推出；注意给定顶点的期望度为 $n^{r-1}\pi$ 量级。对于 B_4, ，注意到 $H(n,\pi_+)$ 中伙伴超边对的期望数量为 $\log^2 n$ 量级，然后应用马尔可夫不等式。文献 [26, 中的引理 12] 已证明，以高概率 B_2 不成立。最后，前文 §2.3 已提及 B_5 ，并指出 π_+ 是“临界窗口”的终点，此时最后一个孤立顶点消失。

□

注 2.8。注意，两个在三个或更多顶点上重叠的超边构成一个可避免构型。此外，拥有多个伙伴超边的超边构成一个可避免构型。再者，共享一个顶点的两对伙伴超边构成一个可避免构型。因此，如果 $H \notin \mathrm{B}$，则任意两个超边至多共享两个顶点，每条超边至多有一个伙伴超边，并且所有伙伴超边对均为顶点不相交的。

我们还需要以下技术引理，其证明见附录。

引理 2.9。设 K 是一个固定的超图，满足 $E[X_K] \leqslant n^{o(1)}$，其中 X_K 表示 K 在 $H = H(n,\pi_+)$ 中的副本数。那么，以高概率， H 的低度顶点不包含于 K的副本中。

2.5 证明概述

定义 p_+， π_+，如方程 (2) 和 (3) 所示。我们的出发点是定理 1.4 给出的 $G \sim G(n,\ p_+)$ 与 $H \sim H(n,\ \pi_+)$ 的耦合。我们将在 §3–3.2 回顾这一耦合，然后在 §3.3–3.5 对其进行更深入的分析。与 [12, 26], 一样， $r = 3$ 需要特殊处理；读者或许可以先关注 $r \geqslant 4$ 的情形，并略过与 $r = 3$ 相关的部分（ §3.2 和 §3.4 ）。§3 的目标是证明，以高概率， G 不存在任何与低度顶点关联的“额外” r-团，也就是说，不存在未由 H 中的超边表示的团。这将

确保在之后构造耦合过程时， G 中的“额外”团不会影响命中时间 T_G。

在第4节（这是证明的核心部分）中，我们取耦合的 $G \sim G(n,\ p_+)$ 和 $H \sim H(n,\ \pi_+)$，并通过仔细耦合 G 的边与 H的超边的均匀次序来推进论证。由于 p_+和 π_+ 分别是相应临界窗口的上端（见第2.3节），以高概率，这便耦合了停止图过程 G_{T_G} 和停止超图过程 H_{T_H}的（副本）。我们将证明，这种耦合几乎实现了我们的目标：对于除小例外集 E 中元素外的所有超边 $h \in H_{T_H}$，在 G_{T_G} 中同一顶点集上都存在一个 r-团。此外，我们还将证明，以高概率，所有 $h \in$ E 中的元素都有一条配对超边，该超边出现于时间 T_H 和时间 $T_H + \lfloor g(n)n \rfloor$之间。

为证明定理 1.6，我们现在只需证明：去除 E 中的超边后，仍能得到停止的随机超图过程的一个实例。为此，在第5节中，我们证明以高概率可以将 E 嵌入二项式随机子集 R $\subset H_{T_H}$，其中每条超边 $h \in H_{T_H}$ 都以较小概率独立地被纳入。在第6节中，我们证明，若从截至时间 T_H的超图过程中移除 R 中的超边，以高概率这基本不会改变命中时间 T_H；特别地，以高概率 $H_{T_H} \setminus$ R 仍是停止的随机超图过程的一个实例。

在 §7 中，我们将所有不同的部分组合起来，沿着耦合链逐步构造定理 1.6 中的耦合。

3 G（n，p）与 H（n，π）的耦合

本节首先在 §3.1 中简要回顾定理 1.4 中针对 $r \geqslant 4$ 的 Riordan 的耦合。我们的描述和符号基本沿用 [26]，中的做法，并根据我们的需要略作调整。在 §3.2 中，我们介绍第一作者在 [12]，中对 Riordan 的耦合所作的修改，并确立一些基本性质。在 §3.3—§3.5 中，我们将更深入地分析 G 中的“额外” r-团；这些团并未由 H 中的超边表示。具体来说，在引理 3.5（针对 $r \geqslant 4$）和引理 3.6（针对 $r = 3$）中，我们给出一个上界，用以限制给定的 r 个顶点组成的集合（该集合在 H 中不是超边）在 G 中张成一个 r-团的概率。对于构造 [26]，中的单侧耦合，这样的界并不重要，但对于耦合的命中时间版本却至关重要。回顾一下，若顶点 v 满足 $d(v) \leqslant 7g(n)$，则称其为低度顶点。下面的结果将在 §3.5 中证明。

引理 3.1. 通过 *§3.1–3.2* 中描述的耦合，将 $G \sim G(n, p_+)$ 与 $H \sim H(n, \pi_+)$ 耦合。我们将 $\mathrm{cl}(G) \setminus H$额外团中的超边称为额外团。于是，以高概率， H 中没有低度顶点与 G中的任何额外团关联。

稍后将用这个引理证明，随机图过程中的额外团不会影响命中时间 T_G，因为它们都不与任何候选顶点关联，而这些候选顶点是最后被 r-团覆盖的顶点。

与 [12, 26]，中一样，我们令

$$p = p(n) \leqslant n^{-2/r + o(1)}$$

为简化计算，尽管仔细检查后可知， $o(1)$ 项可以用一个较小的常数 $\varepsilon = \varepsilon(r)$ 替代。我们令

$$\pi = (1 - n^{-\delta}) p^{\binom{r}{2}},$$

其中 δ 是定理 1.4 中的常数。§3 中的大部分内容都适用于这些一般的 p 和 π，但 §3.5 中引理 3.1 的证明除外，在那里我们令 $p = p_+$ 和 $\pi = \pi_+$。

与 [12, 26], 一样， $r = 3$ 这一情形需要投入大量额外工作，因为所谓的“干净三环”会带来复杂情况。因此，或许可以先关注 $r \geqslant 4$ 这一情形，并跳过与 $r = 3$ 这一情形相关的 §3.2 和 §3.4。

3.1 $r \geqslant 4$ 的耦合算法

以任意方式将 $M = \binom{n}{r}$ 个潜在超边排序为 h_1、.....、h_M。对于 $1 \leqslant j \leqslant M$，令 A_j 表示在 $G \sim G(n,\ p)$ 中，顶点集为 h_j 的部分包含一个 r 团这一事件。我们逐步构造 $G \sim G(n,\ p)$ 与 $H \sim H(n,\ \pi)$ 的耦合；在第 j 步，揭示$h_j \in H$是否成立，以及有关 A_j 的一些信息。

耦合算法：对每个 j，从 1 到 M:

- 计算 π_j，即在目前为止揭示的所有信息条件下， A_j 的条件概率。
- 如果 $\pi_j \geqslant \pi$，则掷一枚正面朝上的概率为 π/π_j 的硬币，且该结果与其他一切独立。如果硬币正面朝上，则检验 A_j 是否成立（其成立概率恰好为 π_j）。当且仅当硬币正面朝上且 A_j 成立时，才将超边 h_j 纳入 H。（注意，纳入 h_j 的概率恰好为 $\pi/\pi_j \cdot \pi_j = \pi$。）
- 如果 $\pi_j < \pi$，则抛一枚硬币，其正面朝上的概率为 π （且独立于其他所有情况），当且仅当硬币正面朝上时，才将 h_j 声明为存在于 H 中。如果这对任意 j 都会发生，我们就说耦合失败了。

经过步骤 $j = 1$、.....、M 后，我们已经确定了 H 的所有超边，并揭示了关于 G 的事件 A_1、.....、A_M 的信息。现在，根据已揭示的关于事件 A_j 的信息，选择 G。显然，该算法生成了 $H(n,\ \pi)$ 和 $G(n,\ p)$ 的正确分布；并且文献 [26] 证明，对于适当选取的常数 $\varepsilon(r)$ $\delta(r) > 0$，该算法以高概率不会失败。如果它确实失败，那么

$$H \in \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \quad \big(= \mathcal{B}_1(\pi) \cup \mathcal{B}_2 \big).$$

如果算法成功，就会为每个 h_j 生成是/否答案；对于 A_j，则会生成是/否/$*$答案，其中 $*$ 表示我们没有确定 A_j。后一种情况发生于以下两种情形之一： $\pi_j \geqslant \pi$ 且硬币反面朝上，或 $\pi_j < \pi$。

因此，对于 $0 \leqslant j \leqslant M$，令 $\mathbf{Y}j$、$\mathbf{N}j$、$\mathbf{S}_j \subset [j]$ 分别表示对于事件 A_i，算法给出“是”、“否”和 $*$ 答案的指标集合 $i \leqslant j$。注意，这些集合两两不相交，且它们的并集为 $[j]$。

特别地，在我们决定超边 h_j 和事件 A_j之前，关于 G，我们掌握的信息恰好是 $\bigcap_{i\in\mathbf{Y}_{j-1}} A_i \cap \bigcap_{i\in\mathbf{N}_{j-1}} A_i^c$，因此

$$\pi_j = P\Big(A_j \mid \bigcap_{i\in\mathbf{Y}_{j-1}} A_i \cap \bigcap_{i\in\mathbf{N}_{j-1}} A_i^c\Big).$$

此外，注意，如果耦合没有失败，那么我们有

$$\mathbf{Y}_j = \{i \leqslant j : h_i \in H\} \quad \text{and} \quad \mathbf{Y}_M = \{i : h_i \in H\}.$$

Let

$$\mathbf{Hist}_j = (\mathbf{Y}_j, \mathbf{N}_j, \mathbf{S}_j),$$

其中编码了截至时间 j（包括该时刻）的算法相关历史记录 .

$r = 3$ 的修改后的耦合算法

Riordan 的证明无法推广到 $r = 3$ 的情形，因为存在一种棘手的超边构型：干净三环——其零度为 1，因此不构成可避免构型。

定义 3.2。 一个干净 *3*-圈 是由三个 3-均匀超边组成的集合，其中每一对超边恰好交于一个彼此不同的顶点。稍微滥用一下符号，我们也将图中一种边构型称为干净 3-圈，其中每个这样的超边都被一个三角形所替代。在这种边构型中，我们将由三条超边相交处的三个顶点所张成的 K_3 副本称为干净 3-圈的中间三角形 。

从 [12] 开始的修改后的耦合中的关键观察是，在 H 和 G中，干净三环的数量都非常少，并且它们的分布实质上相同；这正是下面引理3.3的内容。因此，可以先选出并匹配 H 和 G 中的干净三环，然后在给定这一干净三环选择的条件下运行 Riordan 的耦合算法（这样，在算法执行过程中就不会再出现其他干净三环，从而规避了 Riordan 证明中针对 $r = 3$情形的具体问题）。

引理3.3 ([12, 引理。 4])。 对于 $p \leqslant n^{-2/3+o(1)}$ 和 $\pi = (1 - n^{-\delta})p^3$ ，与之前一样，设$\mathcal{C}_G$ 和$\mathcal{C}_H$分别为随机图 $G \sim G(n,p)$ 和随机超图$H \sim H_3(n,\pi)$中的干净 *3*-圈集合族。那么我们可以将$\mathcal{C}_G$和$\mathcal{C}_H$耦合起来，使得以高概率，$\mathcal{C}_G = \mathcal{C}_H$。

修改后的耦合算法：

- 选择 G中和 H中的干净 3-圈集合族 C_G 和 C_H ，按照引理 3.3 进行耦合，使得以高概率

$$\mathcal{C}_G = \mathcal{C}_H.$$

  如果 $\mathsf{C}_G \neq \mathsf{C}_H$，我们就称耦合失败。

  设 U_G 和 U_H 为如下事件（它们是上集）： G 和 H 分别包含 C_G 和 C_H中包含的边和超边。设 D_G 和 D_H 为如下事件（它们是下集）： G 和 H 不包含其他干净 3-圈。

  现在和之前一样，我们以任意顺序排列剩余的潜在超边 $M\prime = \binom{n}{3} - |\{h \in c\colon\ c \in \mathsf{C}_H\}|$，记为 $h_1, \ldots, h_{M'}$；对于 $1 \leqslant j \leqslant M\prime$，我们令 A_j表示在 $G \sim G(n,p)$中，顶点集为 h_j的三角形存在这一事件。

  现在，对从 1 到 M'的每个 j：

- 计算π_j，即在给定 U_G、D_G 以及截至目前在 G上揭示的所有信息的条件下， A_j 的条件概率。

- 计算 $\pi\prime_j$，即在给定 U_H、D_H 以及截至目前在 H 上揭示的所有信息的条件下，超边 h_j出现在 H 中的条件概率。

- 情况 1： $\pi_j \geqslant \pi\prime_j$。如果 $\pi_j = \pi\prime_j = 0$，那么我们不将 h_j 纳入 H，并判定 A_j不成立。否则，我们有 $\pi_j > 0$；在这种情况下，我们抛掷一枚硬币，该硬币以 $\pi\prime_j/\pi_j$ 的概率落为正面，且与其他一切独立地进行。如果硬币落为正面，则检验 A_j 是否成立（其成立的概率恰好为 π_j）。当且仅当硬币落为正面且 A_j 成立时，才将超边 h_j 纳入 H。（注意，纳入 h_j的概率恰好为 $\pi\prime_j/\pi_j \cdot \pi_j = \pi_{\prime j}$。）

- 情况 2： $\pi_j < \pi\prime_j$。抛掷一枚硬币，该硬币以 $\pi\prime j$ 的概率落为正面（与其他一切独立地进行），并且当且仅当硬币落为正面时，声明 h_j 存在于 H 中。如果对于任何 j都发生这种情况，我们就说耦合失败了。

经过步骤 $j = 1$、.....、M' 后，我们已经确定了 H 的所有超边，并揭示了关于 G 的事件 A_1、.....、$A_{M'}$ 的信息。现在根据已揭示的事件 A_j 的信息以及 C_G 和 D_G，选择 G。显然，该算法生成了正确的分布$H \sim H_3(n,\ \pi)$ 和 $G \sim G(n,\ p)$，并且在 [12] 中证明，对于常数$\varepsilon,\ \delta > 0$ 的适当取值，以高概率该算法不会失败。如果失败，那么

$$\mathcal{C}_G \neq \mathcal{C}_H \text{ or } H \in \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2.$$

与 §3.1 类似，我们令

$$\mathbf{Hist}_j = (\mathbf{Y}_j, \mathbf{N}_j, \mathbf{S}_j)$$

表示截至并包括时刻 j 的算法历史，其中 $\mathbf{Y}j$ 和 $\mathbf{N}j$ 分别是针对事件 A_i 收到“是”和“否”答复的所有 $i \in [j]$ 的集合，而$\mathbf{S}_j = [j]\setminus(\mathbf{Y}_j \cup \mathbf{N}j)$。那么，在决定 h_j 和 A_j 时，我们掌握的关于 H 和 G 的信息由 **历史记录** $_{j-1}$ 以及 C_G、C_H 给出，对应的事件为

$$\mathcal{U}_G, \mathcal{U}_H, \mathcal{D}_G, \mathcal{D}_H$$

C_G 和 C_H 中存在干净三环，除此之外没有其他干净三环。因此

$$\pi_j = P\Big(A_j \Big| \mathcal{U}_G \cap \mathcal{D}_G \cap \bigcap_{i\in\mathbf{Y}_{j-1}} A_i \cap \bigcap_{i\in\mathbf{N}_{j-1}} A_i^c\Big) \tag{5}$$

并且，令 $B_j =\{h_j \in H\}$，除非耦合在较早的步骤中失败，

$$\pi'_j = P\Big(B_j \Big| \mathcal{U}_H \cap \mathcal{D}_H \cap \bigcap_{i\in\mathbf{Y}_{j-1}} B_i \cap \bigcap_{i\in\mathbf{N}_{j-1}\cup\mathbf{S}_{j-1}} B_i^c\Big). \tag{6}$$

我们在下面的引理中作出若干观察，该引理已在附录中证明。

引理 3.4. 假设在针对 $\pi = (1-n^{-\delta})p^3$ 的耦合算法中，我们处于时刻 j，尚未对 $h_j \in H$ 和 A_j 作出决定，并且 $H \notin \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2,$，其中 H 是恰好包含超边 $\{h_i :\ i \in \mathbf{Y}j-1\}$ 以及来自 $\mathcal{C}_H$ 中干净 3-圈的超边的超图。那么以下各项均成立。

a) 若 $\pi'_j = 0$，则 $\pi_j = 0$。

b) $\pi'_j \leqslant \pi$。

c) 假设 $\pi_j > \pi'_j$，则

$$\pi'_j = \pi(1 + n^{-1+o(1)}).$$

d) 如果 $\pi_j < \pi'_j$，那么 $\pi_j = 0$。

3.3 额外团，$r \geqslant 4$

如果在 H 中不存在顶点集相同的超边，我们就称 G 的一个 r-团为额外团 。因此，额外团恰好是 $\mathrm{cl}(G) \setminus H$ 的元素。在下面的引理中，我们将界定

给定的 h_j 所对应的团在 $r \geqslant 4$ 中成为 G 的额外团的概率。情形 $r = 3$ 将在 §3.4 中单独处理。

引理 3.5。假设 $r \geqslant 4$，令 $\pi = (1 - n^{-\delta})p\binom{r}{2}$，$j \in [M]$，并令 H_0 为一个超图，使得 $h_j \notin H_0$ 且 $H_0 \notin \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$。设

$$\pi_j^* = P(A_j \mid \bigcap_{i:h_i \in H_0} A_i).$$

那么，如果定理 *1.4* 中的耦合生成了超图 $H = H_0$，我们可以对顶点集 h_j 上的团是 G 中额外团的概率给出如下界：

$$P(A_j \mid H = H_0) \leqslant \frac{\pi_j^* - \pi}{1 - \pi}.$$

证明。以 $H = H_0$ 为条件。首先注意到，由于 $H_0 \notin \mathrm{B}_1 \cup \mathrm{B}_2$, ，耦合不会失败。考虑耦合算法：此时我们已经确定了最终超边 h_M（也可能还确定了 A_M），但尚未生成最终图 G。特别地，我们知道 $H = H_0$，并且（由于耦合没有失败）有 $\mathbf{Y}_M = Y_M := \{i : h_i \in H_0\}$。我们还知道，对所有 $0 \leqslant i \leqslant M$，都有 $\mathbf{Y}_i = Y_i := Y_M \cap [i]$。然而，仅凭信息 $H = H_0$，我们并不知道集合 $\mathbf{N}_i$ 和 $\mathbf{S}_i$ 分别是什么，$0 \leqslant i \leqslant M$。接下来，我们希望找到对这些集合所有可能取值都成立的界，因此用 S_i 和 N_i 表示随机集合的特定取值。换言之，对所有 $0 \leqslant i \leqslant M$，我们考虑不相交的集合 S_i 和 N_i，它们的并集为 $[i] \setminus Y_i$，并令 $\mathrm{Hist}_i = (Y_i, N_i, S_i)$。

我们首先观察到，对于给定的历史记录$_M$，

$$\begin{aligned} P(A_j \mid \mathbf{Hist}_M = \mathrm{Hist}_M) &= P(A_j \mid \bigcap_{i \in Y_M} A_i \cap \bigcap_{i \in N_M} A_i^c) \\ &\leqslant P(A_j \mid \bigcap_{i \in Y_M} A_i) = \pi_j^*, \end{aligned} \tag{7}$$

其中，不等式由 Harris 引理（定理 2.2）推出，因为 A_j 是一个上集，$\bigcap_{i \in N_M} A_i^c$ 是一个下集，并且在主上集 $\bigcap_{i \in Y_M} A_i$ 条件下，$G(n, p)$仍然是一个乘积概率空间。

由于上述不等式对每一种可能的历史记录$_M$都成立，因此仅对部分信息**历史记录**$_{j-1}$ = 历史记录$_{j-1}$、$\mathbf{S}_j = S_{j-1} \cup \{j\}$和 $H = H_0$ 进行条件化时（因为我们可以考虑这些$\mathbf{Y}_{j-1}$、$\mathbf{N}_{j-1}$、$\mathbf{S}_j$ 的所有可能延续，直至形成一条历史记录$_M$），该不等式也成立[4]：

$$P(A_j | \mathbf{Hist}_{j-1} = \mathrm{Hist}_{j-1}, \mathbf{S}_j = S_{j-1} \cup \{j\}, H = H_0) \leqslant \pi_j^*. \tag{8}$$

此外，给定一条固定的历史记录$_{j-1}$，类似于上述推导可得

$$\pi_j = P(A_j | \bigcap_{i \in Y_{j-1}} A_i \cap \bigcap_{i \in N_{j-1}} A_i^c) \leqslant P(A_j | \bigcap_{i \in Y_{j-1}} A_i) \leqslant P(A_j | \bigcap_{i \in Y_M} A_i) = \pi_j^*, \tag{9}$$

其中，第二个不等式由以下事实推出：$Y_{j-1} \subset Y_M$。

用 π_j^* 对 (8)、(9) 中的两个概率进行界定的优点是，π_j^* 只依赖于 H_0，而非完整的历史记录 $_{j-1}$ 或历史记录 $_M$。

[4]具体而言，公式 (7) 蕴含公式 (8)，原因如下。设 A，B为一些事件，且 $c \in [0, 1]$。那么，若对于 B的某个可数划分$B = \bigcup_i B_i$，每个 i都满足 $P(A \mid B_i) \leqslant c$，则 $P(A \cap B)$ $= \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(B_i) P(A \mid B_i) \leqslant c \sum_i P(B_i) = cP(B)$ $P(A \mid B) \leqslant c$ ( ) ( ) ( ) ( ) ( )，所以 ( )。

在最终图 G 中，事件 A_j 只有在 $j \in S_M$ 时才可能成立，因为 $j \notin Y_M$，而 $h_j \notin H_0$；若 j 位于 N_M 中，则 A_j^c 会成立。这意味着 $\mathbf{S}_j = \mathbf{S}_{j-1} \cup \{j\}$。考虑某个历史记录 $_{j-1}$，并假设历史记录 $_{j-1}$ 满足 $\pi_j \geqslant \pi$。那么，当且仅当算法第 j 步中抛出的硬币正面朝下时，我们有 $\mathbf{S}_j = \mathbf{S}_{j-1} \cup \{j\}$。因此，结合 (9)，得到

$$P(\mathbf{S}_j = S_{j-1} \cup \{j\} \mid \mathbf{Hist}_{j-1} = \mathrm{Hist}_{j-1}, H = H_0) = \frac{1 - \pi/\pi_j}{1 - \pi} \leqslant \frac{1 - \pi/\pi_j^*}{1 - \pi}, \tag{10}$$

因为 $1 - \pi/\pi_j$ 是硬币落在反面上的概率，而 $1 - \pi$ 是不将 h_j 添加到 H的总概率；我们在 $H = H_0$ 中以此为条件（注意，根据算法的构造，针对 $i > j$ 的 $h_i \in H$ 决策与算法第 j 步及之前发生的事情相互独立，因此对于事件 $\mathbf{S}_j = S_{j-1} \cup \{j\}$，只有条件化于 $H = H_0$ 所得的 $h_j \notin H$ 信息是相关的）。

因此，给定某个满足 $\pi_j \geqslant \pi$的历史记录 Hist_{j-1}，利用 (8) 和 (10) 可得

$$\begin{aligned} P\left(A_j \mid \mathbf{Hist}_{j-1} = \mathrm{Hist}_{j-1}, H = H_0\right) &= P\left(A_j \cap \{\mathbf{S}_j = S_{j-1} \cup \{j\}\} \mid \mathbf{Hist}_{j-1} = \mathrm{Hist}_{j-1}, H = H_0\right) \\ &= P\left(\mathbf{S}_j = S_{j-1} \cup \{j\} \mid \mathbf{Hist}_{j-1} = \mathrm{Hist}_{j-1}, H = H_0\right) \\ &\quad \cdot P\left(A_j \mid \mathbf{Hist}_{j-1} = \mathrm{Hist}_{j-1}, \mathbf{S}_j = S_{j-1} \cup \{j\}, H = H_0\right) \\ &\leqslant \frac{1 - \pi/\pi_j^*}{1 - \pi} \cdot \pi_j^* = \frac{\pi_j^* - \pi}{1 - \pi}. \end{aligned} \tag{11}$$

此外，注意 (11) 对任何满足 $\pi_j < \pi$的历史记录 Hist_{j-1} 也成立：在这种情况下，根据 [26], 中方程 (7) 后不久的一条说明，我们有 $\pi_j = 0$。这意味着 (11) 左侧的概率为 0（在以 **历史记录** $_{j-1} =$ Hist_{j-1}为条件后，事件 A_j 的概率就已经为 0），而 (11) 右侧非负，因为 $\pi_j^* \geqslant P(A_j) = p\binom{r}{2} \geqslant \pi$。因此，由于 (11) 在以每一种可能的 **历史记录**$_{j-1} = \mathrm{Hist}_{j-1}$为条件时都成立，所以仅以 $H = H_0$为条件时也成立：

$$P(A_j \mid H = H_0) \leqslant \frac{\pi_j^* - \pi}{1 - \pi}.$$

□

3.4 额外团，$r = 3$

与之前一样，我们令 $p \leqslant n^{-2/3+o(1)}$，并设 $\pi = p\binom{r}{2}(1 - n^{-\delta(3)})$。下述引理对应于 $r \geqslant 4$ 情形下的引理 3.5。

引理 3.6。设 $r = 3$，令 $j \in [M']$，并令 H_0 为一个超图，使得 $h_j \notin H_0$，且$H_0 \notin \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$。设

$$\pi_j^* = P(A_j \mid \bigcap_{i : h_i \in H_0} A_i),$$

令 $\mathcal{F}$ 表示定理 *1.4* 中针对 $r = 3$ 的耦合在第一步骤失败的事件（即$\mathcal{C}_G \neq \mathcal{C}_H$）。那么，若 $\mathcal{F}$ 不发生且该耦合产生超图 $H = H_0$，我们可以对 A_j 是 G中的一个额外团的概率作如下界定：

$$P\left(A_j \mid H = H_0\,,\, \mathcal{F}^c\right) \leqslant \frac{\pi_j^* - \pi}{1 - \pi} + n^{-3+o(1)}$$

证明。首先请注意，$\{H = H_0\} \cap \mathrm{F}^c$意味着耦合不会失败，因为 $H_0 \notin \mathrm{B}_1 \cup \mathrm{B}_2$。令 K_G 和 K_H 分别表示如下事件： G 和 H 恰好包含 H_0的干净三环。于是

耦合的设置使得在给定 $H = H_0$ 和 F^c的条件下， G的分布与在给定 $H = H_0$ 和 K_G 的条件下， G 的分布相同（注意， $H = H_0$ 意味着 K_H）。特别地，

$$P(A_j \mid H = H_0\,,\, \mathcal{F}^c) = P(A_j \mid H = H_0\,,\, \mathcal{K}_G). \tag{12}$$

与引理 3.5 的证明一样，我们将考虑过程的不同历史记录 $\mathbf{Hist}_i = \mathrm{Hist}_i = (Y_i, N_i, S_i)$，这些历史记录与结果 $H = H_0$相容。由于耦合没有失败，我们有$\mathbf{Y}_{M'} = Y_{M'} := \{i\colon\ h_i \in H_0\}$，由此可得 $\mathbf{Y}_i = Y_i := Y_{M'} \cap [i]$ 对所有 $0 \leqslant i \leqslant M'$均成立。仅给定结果 $H = H_0$（以及 F^c），我们并不知道集合$\mathbf{N}_i$和$\mathbf{S}_i$是什么， $0 \leqslant i \leqslant M\prime$，因此我们将考虑对这些随机集合的所有可能取值都成立的界，并用 S_i 和 N_i表示这些集合的具体取值。换言之，对于所有 $0 \leqslant i \leqslant M'$，我们固定一些互不相交的集合 S_i和 N_i，它们的并集为 $[i] \setminus Y_i$，并令 $\mathrm{Hist}_i = (Y_i, N_i, S_i)$。

注意，如果历史记录$_{j-1}$ 满足 $\pi_j < \pi'_j$，那么根据引理 3.4， $\pi_j = 0$ ，因此在算法的第 $j-1$ 步之后， A_j的概率为 0，由此可得 $P(A_j \mid H = H_0,\ \mathrm{F}^{\,c},\ \pi_j < \pi'_j) = 0$。因此，接下来我们可以假设 $\pi_j \geqslant \pi'_j$。此外，注意如果 $\pi_j = \pi'_j$，那么在算法的第 j 步中，我们判定 $h_j \notin H$ 当且仅当 $j \in N_j$ （也就是说，我们判定 A_j 不成立）。因此，由于 $h_j \notin H$，我们有 $P(A_j \mid H = H_0,\ \mathrm{F}^c,\ \pi_j = \pi'_j) = 0$。所以，实际上我们只需要界定 $P(A_j \mid H = H_0,\ \mathrm{F}^c,\ \pi_j > \pi'_j)$，在证明的其余部分中，我们只考虑满足 $\pi_j > \pi'_j$的历史记录 Hist_{j-1}。

令 U_G、D_G 分别表示 G 包含 H_0的干净 3-圈，且不包含其他干净 3-圈的事件，因此 $\mathrm{K}_G = \mathrm{U}_G \cap \mathrm{D}_G$。与 (7) 类似，我们观察到

$$\begin{aligned} P(A_j \mid \mathcal{K}_G\,,\, \mathbf{Hist}_{M'} = \mathrm{Hist}_{M'}) &= P\Big(A_j \mid \mathcal{U}_G \cap \mathcal{D}_G \cap \bigcap_{i \in Y_{M'}} A_i \cap \bigcap_{i \in N_{M'}} A_i^c\Big) \\ &\leqslant P\Big(A_j \mid \bigcap_{i\colon h_i \in H_0} A_i\Big) = \pi_j^* \end{aligned}$$

（注意 $\mathrm{U}_G \cap \bigcap_{i \in Y_{M'}} A_i = \bigcap_{i\colon\ h_i \in H_0} A_i$ 是一个主上集）。由于这个界对每个可能的历史记录 $\mathrm{Hist}_{M'}$都成立，因此在仅对部分信息进行条件化时也成立（与 (8) 类似）：

$$P(A_j | \mathcal{K}_G, \mathbf{Hist}_{j-1} = \mathrm{Hist}_{j-1}, \mathbf{S}_j = S_{j-1} \cup \{j\}, H = H_0) \leqslant \pi_j^*. \tag{13}$$

类似地，给定一个固定的历史记录 Hist_{j-1},

$$\pi_j = P\Big(A_j | \mathcal{U}_G \cap \mathcal{D}_G \cap \bigcap_{i \in Y_{j-1}} A_i \cap \bigcap_{i \in N_{j-1}} A_i^c\Big) \leqslant P\Big(A_j | \mathcal{U}_G \cap \bigcap_{i \in Y_{j-1}} A_i\Big) \leqslant P\Big(A_j | \bigcap_{i\colon h_i \in H_0} A_h\Big) = \pi_j^*, \tag{14}$$

与情形 $r \geqslant 4$ 下的 (9) 类似。要得到类似于 (10) 的结论，我们还需要多做一些工作。为此，我们首先将超图 $H = H_0$ 按时间 j划分为过去、现在和未来。过去由 **历史记录**$_{j-1}$ =Hist_{j-1}覆盖，现在是事件 $\{h_j \notin H\}$ =$\{j \notin \mathbf{Y}_j\}$，而我们用 $\mathrm{H_f}$表示未来，即对于所有 $i > j$，都有$h_i \in H$ 当且仅当 $h_i \in H_0$这一事件。因此我们有

$$P(j \in \mathbf{S}_j | \mathcal{K}_G, \mathbf{Hist}_{j-1} = \mathrm{Hist}_{j-1}, H = H_0) = P(j \in \mathbf{S}_j | \mathcal{K}_G, \mathbf{Hist}_{j-1} = \mathrm{Hist}_{j-1}, h_j \notin H, \mathcal{H}_\mathrm{f}). \tag{15}$$

令 E =$\mathrm{K}_H \cap \mathrm{K}_G \cap$ {**历史记录**$_{j-1}$ =历史记录$_{j-1}$，$h_j \notin H$} 且 E' =E $\cap$ {$j \in \mathbf{S}j$}。那么，注意到

$\{H = H_0\} \subseteq \mathrm{K}_H$，利用 (15) 和贝叶斯定理，我们得到

$$P(j \in \mathbf{S}_j | \mathcal{K}_G, \mathbf{Hist}_{j-1} = \mathrm{Hist}_{j-1}, H = H_0) = P(j \in \mathbf{S}_j | \mathcal{E}, H_{\mathrm{f}}) = \frac{P(\mathcal{H}_{\mathrm{f}} | \mathcal{E}')}{P(\mathcal{H}_{\mathrm{f}} | \mathcal{E})} P(j \in \mathbf{S}_j | \mathcal{E}).$$

现在，回顾 (6)，注意到未来超边的决策仅取决于 $j \in \mathbf{S}j$ ，因为这意味着 $h_j \notin H$：根据算法的构造，未来针对超边的决策概率对于 $h_i, i > j$ 仅取决于关于 H 已揭示的信息。但 $h_j \notin H$ 已经被 E 覆盖，因此我们有 $P(\mathrm{H_f}|\mathrm{E}') = P(\mathrm{H_f}|\mathrm{E})$，于是

$$P(j \in \mathbf{S}_j | \mathcal{K}_G, \mathbf{Hist}_{j-1} = \mathrm{Hist}_{j-1}, H = H_0) = P(j \in \mathbf{S}_j | \mathcal{K}_G, \mathcal{K}_H, \mathbf{Hist}_{j-1} = \mathrm{Hist}_{j-1}, h_j \notin H). \quad (16)$$

注意，K_G、K_H、**历史记录**$_{j-1}$ =历史记录$_{j-1}$ 恰好是算法在时间 j 可获得的关于 G 和 H 的信息（在决定 $h_j \in H$ 和 A_j之前）。回顾一下，我们假设 $\mathbf{Hist}_{j-1}$ 满足 $\pi_j > \pi'_j$。然后类似于 (10)，利用 (14) 我们可以界定

$$P(j \in \mathbf{S}_j \mid \mathcal{K}_G, \mathcal{K}_H, \mathbf{Hist}_{j-1} = \mathrm{Hist}_{j-1}, h_j \notin H) = \frac{1 - \pi'_j/\pi_j}{1 - \pi'_j} \leqslant \frac{1 - \pi'_j/\pi^*_j}{1 - \pi'_j},$$

因为 $1 - \pi'_j/\pi_j$ 是算法第 j 步骤中硬币落为反面的概率（因此我们将 j 加入 $\mathbf{S}j$），而 $1 - \pi'_j$ 是在我们已知条件 $h_j \notin H$ 下，不将 j 加入 $\mathbf{Y}j$ 的总体概率（即 $h_j \notin H$）。因此结合 (16) 可得

$$P(j \in \mathbf{S}_j \mid \mathcal{K}_G, \mathbf{Hist}_{j-1} = \mathrm{Hist}_{j-1}, H = H_0) \leqslant \frac{1 - \pi'_j/\pi^*_j}{1 - \pi'_j}.$$

结合 (13)，得到

$$P(A_j \mid \mathcal{K}_G, \mathbf{Hist}_{j-1} = \mathrm{Hist}_{j-1}, H = H_0) \leqslant \frac{\pi^*_j - \pi'_j}{1 - \pi'_j}.$$

利用引理 3.4 c) 对 π'_j 进行界定，可得

$$P(A_j \mid \mathcal{K}_G, \mathbf{Hist}_{j-1} = \mathrm{Hist}_{j-1}, H = H_0) \leqslant \frac{\pi^*_j - \pi}{1 - \pi} + n^{-3+o(1)}. \quad (17)$$

由于界 (17) 对于满足 $\pi_j > \pi'_j$的每个可能的 Hist_{j-1} 都成立，因此仅对 K_G、 $H = H_0$ 和 $\pi_j > \pi'_j$ 进行条件化时同样成立；结合 (12) 即得结论。 □

3.5 引理 3.1 的证明

我们需要下面这个引理，它在 [26] （针对 $r \geqslant 4$）中是引理 13，在 [12]（针对 $r = 3$）中是引理 3。

引理 3.7 ([12, 26])。 固定 $r \geqslant 3$，设 H 是一个 r-均匀超图， G 是通过将 H 的每条超边替换为一个 r- 团而得到的简单图。假设 G 包含一个位于 r 个顶点集合上的 r- 团 T，且对应的超边不在 H 中。

a) 如果 $r \geqslant 4$，那么 H 包含一个可避免构型。

b) 如果 $r = 3$，那么 T 是 H的一个干净 3-圈的中间三角形，或者 H 包含一个可避免构型。

□

现在考虑与 $p = p_+$ 和 $\pi = \pi_+$耦合的 G 和 H。对某个超图 $H_0 \notin \mathrm{B}$，给定 $H = H_0$。那么特别地， H_0中至多有 $(\log n)^{8g(n)} = n^{o(1)}$ 个低度顶点。对于 $r = 3$，根据引理 2.9，以高概率 H中没有低度顶点包含于干净 3-圈的中间三角形中，因为它们的期望数量为 $\log^3 n$的量级，以下对此作此假设。设 v 为一个低度顶点。如果 $r \geqslant 4$，那么根据引理 3.5，'额外'团v 在 G 中得到的期望数量至多为

$$\sum_{\substack{j: v\in h_j \\ h_j\notin H_0}} \frac{\pi_j^* - \pi_+}{1-\pi_+} \sim \sum_{\substack{j: v\in h_j \\ h_j\notin H_0}} (\pi_j^* - \pi_+) = \sum_{\substack{j: v\in h_j \\ h_j\notin H_0}} (\pi_j^* - p_+^{\binom{r}{2}}) + \sum_{\substack{j: v\in h_j \\ h_j\notin H_0}} (p_+^{\binom{r}{2}} - \pi_+), \tag{18}$$

其中，求和范围为包含 v 且不属于 H_0 的超边（或潜在团）。由于 $\pi_+ = p^{\binom{r}{2}} + (1 - n^{-\delta})$，第二个和可由 n^{-c} 上界，其中 $c > 0$ 是某个较小的常数。

现在，对于 $r = 3$，我们可以用与引理 3.6 相同的方法，界定 v 在 G 中获得的"额外"团的期望数量，只是会多出一项 $\sum_{h:\ v\in h} n^{-3+o(1)}$。不过，这一项$h\notin H_0$
是 $n^{-1+o(1)}$阶的，因为求和中只出现了 n^2 阶的超边 h。

因此，对于 $r = 3$ 和 $r \geqslant 4$，只需界定式 (18) 中的第一个和。粗略地说，这个和表示：若对与 H_0 中超边相对应的团已存在这一条件进行条件化，与不作任何条件化相比，我们预期在 G 中会得到多少个包含 v 的额外团。在下面的引理中，我们将证明第一个和也很小 —— 由该引理和我们先前的观察可知，包含 v 的额外团的期望数量可由 n^{-c} 上界，其中 $c > 0$ 是某个较小的常数。由于 $H = H_0$ 中只有 $n^{o(1)}$ 个低度顶点，以高概率不存在这样的顶点，由此完成引理 3.1 的证明。

引理 3.8。设 $H_0 \notin \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, , 并分别按照引理 *3.5*（对于 $r \geqslant 4$）和引理 *3.6*（对于 $r = 3$）定义 π_j^*。令 $s = \min(\frac{2}{r}, 1 - \frac{2}{r}) > 0$。设 v 是任意一个顶点；在 $r = 3$ 的情况下，假设 v 不是 H_0 中一个干净 3-圈的中间三角形的端点。则

$$\sum_{\substack{j: v\in h_j \\ h_j\notin H_0}} (\pi_j^* - p_+^{\binom{r}{2}}) \leqslant n^{-s+o(1)}. \tag{19}$$

引理 *3.8* 的证明。令 G_0 为这样得到的图：将 H_0 中的每条超边替换为一个 r-团。于是，对 $\bigcap_{i:\ h_i\in H_0} A_i$ 进行条件化，与对 G_0 的所有边均存在这一事件进行条件化是相同的。

由于 $H_0 \notin \mathrm{B}_1$, , G_0 的最大度为 $n^{o(1)}$。固定某个顶点 v，我们希望计算出现在式（19）求和中的所有可能超边 h_j，并估计它们对式（19）的贡献。令 C_{h_j} 为与超边 h_j 对应的团。对于给定的 $h_j \notin H_0$，满足 $v \in h_j$，设 G_0 中由 h_j 诱导的子图的各连通分量分别具有 c_1、.....、c_t 个顶点，从而 $\sum_{i=1}^t c_i = r$。如果 $c_1 = c_2 = \cdots = c_t = 1$，则 C_{h_j} 的边均尚未作为 G_0 中的边出现，因此 $\pi_j^* = p^{\binom{r}{2}} +$。所以，这类超边 h_j 对式（19）的贡献为 0；下文中我们只考虑那些 h_j（以及相应的 C_{h_j}），其中至少有一个 i 满足 $c_i \geqslant 2$。

给定一个固定序列 $c_1, \ldots, c_t$，至多有

$$n^{t-1+o(1)} \tag{20}$$

种方法来选取 cl ique C_{h_j}（即超边 h_j）：由于我们已经有了 v，因此我们做出一个选择 e

（从 n 个顶点中）为其他 $t-1$ 个连通分量各选取第一个顶点；而对于每个$r-t$ 剩余顶点，由于 G_0 的最大度为 $n^{o(1)}$，因此只有 $n^{o(1)}$ 种选择。

特别地，如果 $c_1 = r$ （因此 $t = 1$），那么 C_{h_j} 只有 $n^{o(1)}$ 种选择。团 C_{h_j} 中的边不可能已经全部包含在 G_0 中，否则 H_0 将包含一个可避免构型——根据引理 3.7 可知这一点；注意，在 $r = 3$ 的情况下，v 不在 H_0 中某个干净 3-圈的中间三角形内——因此 B_2 将成立。所以，在 $c_1 = r$ 的情况下，我们有

$$\pi_j^* \leqslant p_+ = n^{-2/r+o(1)},$$

这意味着，来自满足 $c_1 = r$ 的超边 h_j 对 (19) 的总贡献至多为 $n^{-2/r+o(1)} \leqslant n^{-s+o(1)}$。

因此，接下来我们只考虑满足对所有 i 都有 $c_i < r$ 的序列 $c_1, \ldots, c_t$。在对 G_0 中的边均存在这一条件进行条件化后，一个可能的团 C_{h_j} 缺少（至少）所有不同连通分量之间的边，因此

$$\pi_j^* \leqslant p_+^{\binom{r}{2}-\sum_{i=1}^t \binom{c_i}{2}}.$$

结合 (20)，给定一个固定序列 $c_1, \ldots, c_t$（其中 $c_i < r$ 对所有 i 都成立，且 $c_i \geqslant 2$ 至少对一个 i 成立），与该序列对应的超边 h_j（以及团 C_{h_j}）对 (19) 的贡献至多为

$$\begin{aligned} n^{t-1+o(1)} p_+^{\binom{r}{2}-\sum_{i=1}^t \binom{c_i}{2}} &= \left(n^{r-1} p_+^{\binom{r}{2}}\right) n^{-r+t+\frac{2}{r}\sum_{i=1}^t \binom{c_i}{2}+o(1)} = n^{-\sum_{i=1}^t (c_i-1)+\frac{1}{r}\sum_{i=1}^t c_i(c_i-1)+o(1)} \\ &= n^{o(1)-\sum_{i=1}^t (c_i-1)(1-c_i/r)}. \end{aligned}$$

注意，指数中求和的所有项均非负。此外，至少存在一个 i_0 满足 $c_{i_0} \geqslant 2$，并且由于对所有 i 都有 $c_i < r$，因此有 $(c_{i_0} - 1)(1 - c_{i_0}/r) \geqslant 1 - 2/r$（对 c_{i_0} 的所有可能取值 $2, \ldots, r-1$ 取最小值）。所以，上述指数中的和至少为 $1 - 2/r$，因此我们可以将与固定序列 $c_1, \ldots, c_t$ 对应的所有超边 h_j 对 (19) 的贡献上界为

$$n^{-1+2/r+o(1)} \leqslant n^{-s+o(1)}.$$

由于潜在序列 $c_1, \ldots, c_t$ 只有有限多个，这就完成了该引理的证明，也就完成了引理 3.1 的证明。□

□

4 过程耦合——步骤 1

在 §3 中，我们重新审视并分析了定理 1.4 中 $G \sim G(n,\ p)$ 与 $H \sim H(n,\ \pi)$ 的耦合。在此耦合的基础上，我们现在开始将随机图过程与随机超图过程进行耦合的第一步。

第4节的目的是证明命题 4.1。粗略地说，该命题指出，我们可以将随机图过程与随机超图过程耦合，使得在 G_{T_G} 的 r-团中几乎存在一个H_{T_H} 的副本：对于 H_{T_H} 中除集合 E（即例外超边）以外的所有超边，其同一顶点集上都存在一个 r-团，位于 G_{T_G} 中。此外，E 中所有例外超边都会在时间 T_H 之后的一个较短时间窗口内获得一条配对超边（这使我们能够在耦合的下一步骤中识别并处理它们）。

命题 4.1. 我们可以将随机图过程 $(G_t)_{t=0}^N$ 与随机超图过程 $(H_t)_{t=0}^M$ 耦合，使得以高概率，以下结论成立。存在一个超边集合 $\mathcal{E} \subset H_{T_H}$，使得

a) $H_{T_H} \setminus \mathcal{E} \subset \mathrm{cl}(G_{T_G})$, *and*

b) 对每个 $h_1 \in \mathcal{E}$，存在一个 $h_2 \in H_{T_H+\lfloor g(n)n \rfloor} \setminus H_{T_H}$，使得 $|h_1 \cap h_2| = 2$。

第4节余下部分将用于证明命题 4.1。在 §4.1.1 中，我们从$G \sim G(n,p_+)$ 和 $H \sim H(n,\pi_+)$ 出发，回顾 (2) 和 (3) 中的 p_+, π_+，并按照定理 1.4 将它们耦合。随后，我们为 G 和 H 的边和超边分别赋予（适当耦合的）均匀次序 σ_G、σ_H。

显然（例如，采用定义 2.3 中的标准方法），给 G 配上 σ_G，就能得到随机图过程 $(G_t)_{t=0}^N$ 中最初的 $|G|$ 个图。同理，H 配上 σ_H 后，可以嵌入随机超图过程 $(H_t)_{t=0}^M$，成为最初的 $|H|$ 个超图。此外，注意到以高概率，在 G 中每个顶点都包含于一个 r-团中；并且以高概率，H 的最小度至少为 1。因此，以高概率，这些图过程和超图过程的初始序列涵盖了 T_G 和 T_H。由此，σ_G, σ_H 的耦合将诱导出 G_{T_G} 和 H_{T_H} 的耦合。此外，由 (4) 可知，以高概率 $|H| - T_H \leqslant (1+o(1))(\pi_+ - \pi_-)\binom{n}{r} \sim 2g(n)n/r < \lfloor g(n)n \rfloor$。因此，要证明命题 4.1，只需证明以下陈述。

命题 4.2. 我们可以构造一个耦合$(G, \sigma_G, H, \sigma_H)$，使得以下条件全部成立。

a) 我们有 $G \sim G(n, p_+)$，且 σ_G 是 G 的边的均匀随机顺序。

b) 我们有 $H \sim H(n, \pi_+)$，且 σ_H 是 H 的超边的均匀随机顺序。

c) 令 $e_{\sigma_G(1)} \cdots, e_{\sigma_G(|G|)}$ 为由 σ_G 给出的边顺序，并令 $h_{\sigma_H(1)} \cdots, h_{\sigma_H(|H|)}$ 为由 σ_H 给出的超边顺序。对于 $t \in \mathbb{N}_0$，设

$$G_t^* = \{e_{\sigma_G(1)}, \ldots, e_{\sigma_G(t)}\} \text{ and } H_t^* = \{h_{\sigma_H(1)}, \ldots, h_{\sigma_H(t)}\}$$

并定义

$$T_G^* = \min\{t : \text{ every vertex of } G_t^* \text{ is in an } r\text{-clique }\},$$
$$T_H^* = \min\{t : \ H_t^* \text{ has minimum degree } 1\};$$

那么，以高概率 T_G^*, T_H^* 是有限的。此外，以高概率存在一个集合$\mathcal{E} \subset H_{T_H^*}^*$，使得

$$H_{T_H^*}^* \setminus \mathcal{E} \subset \mathrm{cl}(G_{T_G^*}^*), \tag{21}$$

并且对于每个 $h_1 \in \mathcal{E}$，都存在一个 $h_2 \in H \setminus H_{T_H^*}^*$，使得

$$|h_1 \cap h_2| = 2.$$

4.1 命题 4.2 的证明

我们从定理 1.4 中的耦合 G, H 开始，其中 $p = p_+$ 和 $\pi = \pi_+$。在 § 4.1.1 中，我们定义 G 的边与 H 的超边的耦合均匀次序 σ_G 和 σ_H。随后，我们证明命题 4.2 的 c) 项成立。

耦合的思路如下。若我们给 G 的边设定一个均匀顺序，那么对于任意一个由 r-团组成的边不相交集合，它们在随机图

过程中出现的诱导顺序由对称性可知是均匀的。因此，唯一的“障碍”是 H 中成对的伙伴超边，以及 G 中相应的边重叠团；它们共享两个顶点（以高概率不存在更高阶重叠）。对于每一对伙伴超边，我们加入一条“虚拟边”，并为所有边和虚拟边选取一个均匀顺序。对于超边（团），我们采用诱导顺序，其中每对伙伴超边中的两个伙伴各使用一条不同的边（或虚拟边）；由对称性可知，该顺序是均匀的。下文将对此作更精确的说明。

4.1.1 σ_G 和 σ_H的辅助时间与构造

接下来，我们将比较图过程与超图过程中各事件发生的时间，例如，检查图与超图的命中时间是否以某种自然的方式以高概率相匹配，或是否“同时发生”。为了便于界定“同时发生”的含义，我们会对时间进行适当缩放，引入区间 $[0,1]$内的辅助时间 （下文将对此作更精确的说明）。我们将为每条边 $e \in G$ 和每条超边 $h \in H$ 在区间 $[0,1]$, 内分别指定一个时间 τ（e）和 τ（h），使得 σ_G 是按照 τ（e）升序排列边后得到的边序，而 σ_H 是按照 τ（h）升序排列超边后得到的超边序。这个辅助时间将使我们能够比较图过程与超图过程中各事件发生的时间。

现在我们描述 σ_H, σ_G 的构造。注意，以高概率， H 与 G 的耦合不会失败，并且我们有 $H \notin$B。特别地，以高概率我们有 $H \subset$ cl(G)， H 中任意两条超边的交集都不包含三个或更多顶点，没有超边拥有多个配对超边，并且配对超边对的总数至多为 $\log^3 n$ （见注 2.8）。由于这些性质以高概率成立，只需在这些性质成立时说明 σ_G 和 σ_H 的构造；从现在起我们假设这些性质成立。

因此，将 H 的配对超边对按任意顺序记为 (u_1, v_1) ..... , (u_k, v_k)，其中 $k \leqslant \log^3 n$。令

$$S_1 = \{u_1, \ldots, u_k\} \quad \text{and} \quad S_2 = \{v_1, \ldots, v_k\}.$$

对每个 $h \in H$，令 $E(h) \subset G$ 表示 G 中顶点集相同的团的边集。对于$i = 1$, ..., k, 令 e_i^* 表示配对超边 (u_i, v_i) 的共享边，也就是说，$\{e_i^*\} = E(u_i) \cap E(v_i)$。现在，为了构造均匀次序，令

$$\{\xi_e : e \in G\} \cup \{\xi_i' : 1 \leqslant i \leqslant k\}$$

在 $[0,1]$, 上取彼此独立且与其他所有内容独立的均匀随机变量。几乎必然地，它们的取值互不相同，以下我们假设这一点成立。

对于 $e \in G$, 令

$$\tau(e) = \xi_e \in [0,1]$$

为 e 的辅助时间，并按照 G 中各边的 $\tau(e)$ 值升序排列。这就定义了次序 σ_G；显然，由对称性可知，该次序是均匀的。

对于 $h \in H \setminus S_2$, 令

$$\tau(h) = \max\{\xi_e : e \in E(h)\}$$

对于 $h = v_i \in S_2$, 令

$$\tau(v_i) = \max\left(\{\xi_e : e \in E(v_i) \setminus e_i^*\} \cup \{\xi_i'\}\right).$$

现在按照辅助时间 $\tau(h)$ 的大小以递增顺序排列 H 的超边，定义顺序 σ_H。由于时间 $\tau(h)$ 各自仅依赖于互不相交的 $\binom{r}{2}$ 个独立同分布随机变量 ξ_e，根据对称性， σ_H 是均匀的。

4.1.2 诱导团序与超边序

图过程中的边顺序诱导出团的边集 $\{E(h):\ h\in H\}$ 的一个（部分）顺序，该顺序由辅助时间给出

$$\tau(E(h)) := \max\{\tau(e) : e \in E(h)\} \in [0,1].$$

对于配对超边 u_i，v_i，相应的团可能会同时出现$\tau(E(u_i)) = \tau(E(v_i))$ —— 当共享边 e_i^*最后出现时就会发生这种情况，即当 $\tau(e_i^*)$ $=\max\{\tau(e):\ e\in E(u_i)\cup E(v_i)\}$ 时。

根据定义显然，对于所有 $h\in H\setminus S_2$，我们有

$$\tau(h) = \tau(E(h)), \tag{22}$$

因此，h 及其对应的团会在相同的（辅助）时间出现。然而，对于 $h\in S_2$，$\tau(h)$ 与 $\tau(E(h))$ 并不总是一致，因此 H 的超边序与 G 中的诱导团序略有不同。

我们构造的关键性质是，我们能够在一定程度上控制配对超边对何时出现；我们将以下关键观察表述为一个引理。

引理 4.3. 对于所有 $i=1,\dots,k$,

$$\max(\tau(E(u_i)),\tau(E(v_i))) \leqslant \max(\tau(u_i),\tau(v_i)).$$

也就是说，如果 u_i 和 v_i 都出现在超图过程中，那么对应的、边集为 $E(u_i)$ $E(v_i)$ 的两个团也都出现在耦合图过程中（按照由 $\tau(\cdot)$给出的辅助时间对应关系）。

□

4.1.3 耦合命中时间的分析

本节将证明，在辅助时间下，图过程和超图过程的命中时间以高概率一致。首先注意，根据我们对 $p=p_+$ 和 $\pi=\pi_+$的选择，以高概率，命题 4.2 的 c) 中定义的命中时间 T_G^*, T_H^*是有限的（因为 p_+,π_+位于"临界窗口"的末端，见 §2.3）。现在，对于 $t\in[0,1]$，令

$$H(t) = \{h\in H : \tau(h)\leqslant t\} \tag{23}$$

and

$$G(t) = \{e\in G : \tau(e)\leqslant t\}, \tag{24}$$

并定义

$$t_G = \inf\{t\in[0,1] : \text{in } G(t) \text{ every vertex is contained in at least one } r\text{-clique}\}, \tag{25}$$
$$t_H = \inf\{t\in[0,1] : H(t) \text{ has minimum degree at least } 1\}. \tag{26}$$

于是w hp t_G和 t_H是有限的，事实上 $G(t_G)$ 和 $H(t_H)$ 恰好分别是 $G^*_{T_G^*}$和 $H^*_{T_H^*}$.

引理 4.4. 以高概率，$t_G = t_H$。

引理 *4.4* 的证明。总体策略如下：我们首先定义一个辅助时间 $t_-\in[0,1]$，使得 $H_-:=H(t_-)$ 基本上服从分布 $H(n,\ \pi_-)$。回想一下，π_- 定义于

(2) 中，表示 H 的最小度至少为 1 的“临界窗口”的起点。特别地，以高概率 $H(n,\ \pi_-)$，因此 H_- 至少有一个孤立顶点，所以 $t_- < t_G$。

接着，我们考虑 H_- 的孤立顶点集合 I $\neq \emptyset$，并证明以高概率，(a) I 正好是 G_- 中未包含在任何 r-团内的顶点集合：$= G(t_-)$；以及 (b) I 中的所有顶点在 $[0,1]$ 的同一辅助时间获得它们的第一条超边（在超图过程中）和它们的第一个 r-团（在图过程中）。这意味着 $t_G = t_H$。

转向具体细节，令 $F(y) = P(Y \leqslant y)$ 表示随机变量$Y = \max_{1 \leqslant i \leqslant \binom{r}{2}} U_i$的分布函数，其中随机变量 U_i、$1 \leqslant i \leqslant \binom{r}{2}$ 在 $[0,1]$ 上相互独立且均匀分布。令

$$t_- = F^{-1}(\pi_-/\pi_+), \quad \text{and} \quad H_- = H(t_-).$$

然后，根据辅助时间以及图 $H(t)$、$t \in [0,1]$ 的构造，给定某个 $H = H(1) \notin$B，任意超边 $h \in H$ 也以恰好为 π_-/π_+ 的概率属于 H_-。因此，由于 $H \sim H(n,\ \pi_+)$ 且以高概率 $H \notin$ B，实质上 H_- 的分布为 $H(n,\ \pi_-)$。更具体地说，可以将 H_- 与超图 $H'_- \sim H(n,\ \pi_-)$ 耦合，使得

$$H_- = H'_- \text{ whp.} \tag{27}$$

特别地，以高概率，H_- 包含孤立顶点，因此以高概率 $t_- < t_G$。令

$$\mathcal{I} = \{v \mid v \text{ is an isolated vertex in } H_-\},$$

那么以高概率 I $\neq \emptyset$。

考虑以下两个引理。它们的证明是对一阶矩方法的常规应用，将在附录中给出。回想一下，我们称超图中的一个顶点为低度顶点，当且仅当 $d(v) \leqslant 7g(n)$（其中 $g(n)$是式 (2) 中的函数，我们在全文中固定使用该函数）。令 S 为 H 中具有伙伴超边的超边集合（即与其恰好在两个顶点上重叠的另一条超边）。因此，按 §4.1.1 中的符号，我们有 $S = S_1 \cup S_2$。

引理 4.5。以高概率，H_- 中的所有孤立顶点都是 H中的低度顶点。

引理 4.6。以高概率，H_- 中的所有非孤立顶点都与 H_-中的至少一条来自$H \setminus S$ 的超边关联。

假设引理 3.1、4.5 和 4.6 中的高概率陈述均成立，且 $H \notin$ B。此外，注意由引理 2.9 可知，以高概率，H 中没有低度顶点与来自 S的任何超边关联；在 $r = 3$ 的情形下，也没有低度顶点与任何干净三环关联，因为伙伴超边对和干净 3-圈的期望数量分别为 $\Theta(\log^2 n)$和 $\Theta(\log^3 n)$——因此，假设这些高概率陈述也成立。

那么，对于任意 $v \in$ I，以下结论成立。根据引理 4.5，v 是 H中的一个低度顶点。根据引理 3.1，在耦合图 G中，v 未包含于任何额外团中，因此包含 v 的任意 r-团都由 H中的超边表示。此外，根据引理 2.9，v 不包含于任何具有配对超边的超边中。回顾 §4.1.1 中的构造，H 中任何不 具有配对超边的超边，都被赋予与 G 中相应 r-团相同的辅助时间（见式 (22)）。因此，与 v 关联的所有超边，都具有与 G中相应 r-团相同的辅助时间。特别地，v 不包含于 $G_- = G$ 中的任何 r-团内（t_-）。

因此，I 中没有任何顶点属于 G_- 中的任何 r-团；并且对于任何与 I 相交的超边 $h \in H$，$\tau(h) = \tau(E(h))$。此外，G_- 不含 I 中的任何其他顶点 $v \notin$

不属于任何 r-团：根据引理 4.6 的以高概率陈述，任何 $v \notin$I 都与一条超边 $h \in H_- \setminus S$ 关联，这意味着 $\tau(h) = \tau(E(h))$，因此 v 属于 G_- 中的团 $E(h)$。

总之，I 正好是不包含在 G_- 中任何 r-团内的顶点集合；对于任何与 I 相交的超边 $h \in H$， $\tau(h) = \tau(E(h))$。这意味着 $t_G = t_H$。 □

4.1.4 完成命题 4.2 的证明

命题 4.2 现在可由 §4.1.1 中 σ_G 和 σ_H 的构造以及引理 4.4 轻易得到：令

$$\mathcal{E} = H^*_{T^*_H} \setminus \mathrm{cl}(G^*_{T^*_G}) = H(t_H) \setminus \mathrm{cl}(G(t_G)), \tag{28}$$

于是根据定义，E 满足 (21)。由引理 4.4，以高概率 $t_H = t_G$，以下我们均作此假设；特别地，E $= H(t_H) \setminus$ cl$(G(t_H))$。由 (22) 可知，对于所有 $h \in H(t_H) \setminus S_2$，我们有

$$\tau(h) = \tau(E(h)),$$

因此，对于任意这样的 h，边集为 $E(h)$ 的相应团存在于 $G(t_H)$ 中。故有 E $\subset S_2$。

因此，设超边 $v_i \in S_2$ 属于 E，并令 $u_i \in S_1$ 为 v_i 的配对超边。为证明 c)，我们需要证明 $u_i \in H \setminus H(t_H)$。假设情况并非如此，即假设 $u_i \in H(t_H)$。但此时 u_i 和 v_i 均属于 $H(t_H)$，这意味着

$$\max(\tau(u_i), \tau(v_i)) \leqslant t_H = t_G.$$

由引理 4.3 可知

$$\tau(E(v_i)) \leqslant \max\left(\tau(E(u_i)), \tau(E(v_i))\right) \leqslant \max(\tau(u_i), \tau(v_i)) \leqslant t_G,$$

这意味着 $v_i \in$cl$(G(t_G))$。但 $v_i \in$ E，因此这与 E 的定义 (28) 矛盾。由此可得 $u_i \in H \setminus H(t_H)$，即 c)。至此，命题 4.2 的证明完成。 □

5 过程耦合——步骤 2

本节旨在说明，以高概率，我们可以将命题 4.1 中的“例外”超边集合 E 嵌入随机集合 R；该集合以较小的概率独立地包含每个 $h \in H_{T_H}$。

命题 5.1。 我们可以将随机 r-均匀超图过程 $(H_t)_{t=0}^M$ 与超边集合$\mathcal{R} \subset \binom{[n]}{r}$ 耦合，使得以下两个性质均成立。

a) 有 $\mathcal{R} \subseteq H_{T_H}$，并且（仅给定 H_{T_H} 时）每条超边 $h \in H_{T_H}$都以概率$\mathcal{R}$ 独立地包含在其中，概率为

$$\pi_{\mathcal{R}} = \frac{10r^4 g(n)}{n}. \tag{29}$$

b) 令 $\mathcal{F} \subset H_{T_H}$ 为 H_{T_H} 中具有配对超边的超边集合

$$H_{T_H + \lfloor g(n)n \rfloor} \setminus H_{T_H}.$$

那么，以高概率，

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{R}. \tag{30}$$

证明。 我们照常构造随机超图过程 $H_0, H_1, \dots, H_{T_H}$，直到命中时间 T_H。对于每个 $h \in H_{T_H}$，至多有

$$\binom{r}{2}\binom{n-r}{r-2}$$

可能成为 h 的伙伴、且未出现在 H_{T_H}中的潜在超边。在这些潜在伙伴超边中，可能有一些

同时会成为另一条超边 $h' \in H_{T_H}$的伙伴。

令 X_h 为潜在的专属伙伴超边集合，其中 h 不会与 H_{T_H}中的任何其他超边共享这些超边，并令

$$x_h = |\mathcal{X}_h| \leqslant \binom{r}{2}\binom{n-r}{r-2} \leqslant \frac{r(r-1)}{2(r-2)!}n^{r-2}. \tag{31}$$

我们首先定义一个辅助随机超边集 I，并利用它构造剩余的超图过程和 R。设 I 为一个超边集，其中以概率独立地包含每个 $h \notin H_{T_H}$

$$\pi_I = \frac{10g(n)r!}{n^{r-1}}.$$

我们通过对 I 中的超边赋予均匀顺序，并按该顺序将它们纳入随机超图过程（得到$H_{T_H+1}, \dots, H_{T_H+|I|}$），从而实现随机超图过程的其余部分，随后再以均匀顺序纳入剩余的超边。根据对称性，整体超边顺序是均匀的。

现在我们转向 R 的构造。令

$$\mathcal{R}' = \{h \in H_{T_H} \mid \mathcal{X}_h \cap I \neq \emptyset\} \tag{32}$$

为在 I 中拥有专属伙伴超边的超边集合。注意，由 (31) 可知，每个 $h \in H_{T_H}$ 都独立地以恰好为

$$\pi_h = 1 - (1-\pi_I)^{x_h} \sim \pi_I x_h \leqslant 5r^2(r-1)^2 g(n)/n, \tag{33}$$

的概率被纳入 R′，且这一事件独立于其他超边。注意，根据 (29)，$\pi_h \leqslant \pi_{\mathcal{R}}$，因此要从 R′ 构造集合 R，我们只需略微提高纳入每个 h 的概率。我们采用一种标准方法：对于每个 $h \in H_{T_H}$：

- 若 $h \in$R′（这种情况发生的概率为 π_h），则将 h 纳入 R。
- 若 $h \notin$R′，则以概率 π'_h 将 h 纳入 R，其中该概率定义为

$$\pi'_h = \frac{\pi_{\mathcal{R}} - \pi_h}{1-\pi_h}$$

且这一过程独立于其他所有事件。

因此，每个 $h \in H_{T_H}$ 都以恰好为 $\pi_{\mathcal{R}}$ 的概率独立地包含在 R 中。

只需证明以高概率（30）成立。首先注意到，由于以高概率 $T_H = O(n\log n)$，$|I| \sim \mathrm{Bin}(\binom{n}{r} - T_H, \pi_I)$ 的期望为 $(1+o(1))10g(n)n \to \infty$，因此以高概率 $|I| \geqslant ng(n)$。于是根据超图过程的构造，以高概率

$$H_{T_H+\lfloor g(n)n \rfloor} \setminus H_{T_H} \subseteq I. \tag{34}$$

此外，以高概率 $H_{T_H} \cup I = H_{T_H+|I|}$ 不包含可避免构型，因此特别不包含带有两个（或更多）伙伴超边的超边。[5] 所以以高概率 I 不包含任何非专属伙伴超边，也就是说，以高概率

$$\{h' \in I : h \in H_{T_H}, |h \cap h'| \geqslant 2\} \subset \bigcup_{h \in H_{T_H}} \mathcal{X}_h. \tag{35}$$

现在假设 (34) 和 (35) 成立。如果 $h \in \mathrm{F}$，那么 h 有一个配对超边 h' i n

$$\{h' \in H_{T_H+\lfloor g(n)n \rfloor} \setminus H_{T_H} : |h' \cap h| \geqslant 2\} \subseteq \{h' \in I : h \in H_{T_H}, |h \cap h'| \geqslant 2\} \subseteq \bigcup_{h \in H_{T_H}} \mathcal{X}_h.$$

这个配对超边 h' 不可能属于某个 $\mathrm{X}_{h''}$（其中 $h'' \neq h$），因为这样它就不会是 h''的专属伙伴超边。因此可知 $h' \in \mathrm{X}_h$，从而 $h' \in \mathrm{X}_h \cap I$。但由 (32) 可得 $h \in \mathrm{R}'$。由于 $h \in \mathrm{F}$ 是任意的且 $\mathrm{R}' \subseteq \mathrm{R}$，因此 $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{R}$。

□

6 过程耦合——步骤 3

作为拼图的最后一块，我们证明：从 H_{T_H} 中以较小的概率独立地删除每条超边后，以高概率仍然得到一个停止的随机超图过程的实例。

命题 6.1。设 H_{T_H} 是停止的随机超图过程，并令 $\mathcal{R} \subset H_{T_H}$ 为超边的一个子集，其中每条 $h \in H_{T_H}$ 都以概率独立地

$$\pi_{\mathcal{R}} = \frac{10r^4 g(n)}{n}.$$

我们可以将 H_{T_H} 与 $\mathcal{R}$ 和停止的随机超图过程的另一个实例 $H'_{T'_H}$ 耦合，使得以高概率，

$$H_{T_H} \setminus \mathcal{R} = H'_{T'_H}.$$

证明。给定 H_{T_H} 以及完整的随机超图过程 $(H_t)_{t=0}^M$，其中超边按均匀顺序出现

$$h_1, h_2, \ldots, h_M.$$

现在以概率 $\pi_{\mathcal{R}}$ 独立地从该序列中移除每条超边，得到一个稀疏化序列

$$h'_1, h'_2, \ldots, h'_{M-k},$$

其中 $k \sim \mathrm{Bin}(M, \pi_{\mathcal{R}})$ 是被移除的超边数。注意，每条可能的超边h 都以概率 $1 - \pi_{\mathcal{R}} = 1 - o(1)$ 独立地出现在这个稀疏化序列的某处，并且稀疏化序列中的超边仍按均匀顺序排列。给定 k，这描述了随机超图序列中前 $M - k$ 个超图的一个实例。

考虑 H_{T_H}，我们以概率 $\pi_{\mathcal{R}}$ 各自独立地移除一组超边 R，从而得到稀疏化序列中的某个超图 H'_{t_0}。剩下要证明的是，以高概率 $t_0 = T_{\prime H}$。我们

[5]更详细地说：注意，由于以高概率 $T_H + |I| = O(n \log\ n + \pi_I n^{r-1}) = O(n \log\ n)$，根据 §2.3 中的标准耦合，$H_{T_H+|I|}$ 以高概率可嵌入 $H' \sim H(n, \pi')$，其中某个 $\pi' = n^{1-r+o(1)}$，并且根据引理 2.7，H' 不含可避免构型。

显然有 $t_0 \leqslant T\prime_H$，因为我们只移除了超边，所以最小度不可能比之前更早达到 1。因此，我们需要证明 $T'_H \leqslant t_0$ 以高概率成立，也就是说，以高概率 H'_{t_0} 没有孤立顶点。

这很容易由以下观察得出：

1. 令 T_1, T_2 与其他所有变量相互独立，且 $T_1 \sim \mathrm{Bin}\left(M, \pi_-\right)$ 和 $T_2 \sim \mathrm{Bin}\left(M, \pi_+\right)$。那么 $H_{T_1} \sim H(n, \pi_-)$ 和 $H_{T_2} \sim H(n, \pi_+)$。此外，以高概率 $T_1 \leqslant T_H \leqslant T_2$，因此 $H_{T_1} \subseteq H_{T_H} \subseteq H_{T_2}$ 以高概率成立。这就是广为人知的临界窗口，参见 (2)。

2. 以高概率，在 H_{T_H} 中，没有顶点与 R 中多于一条超边关联。

   为此，考虑超图 H_{T_2}。在 H_{T_2} 中出现、但随后以概率 $\pi_{\mathcal{R}}$ 被移除且至少有一个顶点重叠的超边对的期望数量为 $n^{2r-1}\pi_+^2\pi_{\mathcal{R}}^2 = O(\log(n)^2 g(n)^2/n) = o(1)$ 量级。因此，以高概率，H_{T_2} 中不存在这样的两条超边，$H_{T_H} \subseteq H_{T_2}$ 中也不存在。

3. 以高概率，不存在某个顶点在 H_{T_H} 中恰好关联 R 中的一条超边，且在 H_{T_1} 中不关联任何其他超边。

   若 $H_{T_1} \subseteq H_{T_H} \subseteq H_{T_2}$（这以高概率成立），则这样的顶点必定关联一条超边 $h \in H_{T_2}$，而这条超边会在稀疏化过程中被移除；并且在 H_{T_1} 中，它不会关联其他超边。发生这种情况的概率为

$$O\left(n^{r-1}\pi_+\pi_{\mathcal{R}}(1-\pi_-)^{\binom{n-1}{r-1}-1}\right) = O\left(\log n g(n) e^{g(n)}/n^2\right) = o(1/n).$$

   所以，以高概率不存在这样的顶点。

由于 H_{T_H} 没有孤立顶点，根据第二和第三条观察，我们可知 $H_{T_H} \setminus \mathrm{R} = H'_{t_0}$ 也以高概率没有孤立顶点。因此，$T'_H \leqslant t_0$ 以高概率成立，正如所需。 □

7 定理 1.6 的证明

现在万事俱备。结合命题 4.1、5.1 和 6.1，我们得到一系列耦合，以高概率将停止的超图过程嵌入停止图过程的团中：

$$H'_{T'_H} \overset{\text{whp}}{=} H_{T_H} \setminus \mathcal{R} \overset{\text{whp}}{\subseteq} H_{T_H} \setminus \mathcal{F} \overset{\text{whp}}{\subseteq} \mathrm{cl}(G_{T_H})$$

更详细地说：首先请注意，我们可以通过粘合引理（在这个有限情形下显然成立）将不同的耦合组合起来。我们从一个停止的超图过程中开始，根据命题 6.1 将其与一个停止的超图过程以及一个集合 R 耦合，其中每条超边都以概率 $\pi_{\mathcal{R}}$ 独立地被纳入，因此以高概率

$$H'_{T'_H} = H_{T_H} \setminus \mathcal{R}.$$

接着，利用命题 5.1，我们将 H_{T_H} 嵌入完整超图过程 $(H_t)_{t=0}^M$，使得以高概率 F $\subset$ R，其中 F 是 $H_{T_H+\lfloor ng(n)\rfloor} \setminus H_{T_H}$ 中所有具有配对超边的 $h \in H_{T_H}$ 所构成的集合。因此，以高概率

$$H_{T_H} \setminus \mathcal{R} \subseteq H_{T_H} \setminus \mathcal{F}.$$

[6]给定 X 与 Y 的耦合，以及 Y 与 Z 的耦合，即 (X, Y) 和 (Y, Z) 的目标分布，我们通过从 Y 开始构造 (X, Y, Z)；给定 Y 的取值后，分别取 X 和 Z 的适当条件分布——例如令它们条件独立。

最后，利用命题 4.1，将 $(H_t)_{t=0}^{M}$ 与随机图过程 $(G_t)_{t=0}^{N}$ 耦合。根据命题 4.1 的 b) 部分，我们有 E $\subset$ F，因此以高概率

$$H_{T_H} \setminus \mathcal{F} \subseteq H_{T_H} \setminus \mathcal{E} \subset \mathrm{cl}(G_{T_G}).$$

沿着这一系列耦合进行下去，我们已将 $H'_{T'_H}$ 和 G_{T_G} 耦合起来，使得以高概率，

$$H'_{T'_H} \subseteq \mathrm{cl}(G_{T_G}).$$

□

8 随机 s 均匀超图中 $K_r^{(s)}$ 因子的命中时间

下文中，对于 $r > s \geqslant 3$，令 $K_r^{(s)}$ 表示顶点数为 r 的完全 s 均匀超图。通过改编定理 1.6 的证明，可以直接证明关于 $K_r^{(s)}$ 因子的相应结果。为强调与定理 1.6 的类比，令 $(G_t)_{t=1}^{N_s} = (H_t^s)_{t=1}^{N_s}$ 和

$$T_G = \min\{t : \text{ every vertex in } G_t \text{ is contained in at least one } K_r^{(s)}\}$$

表示 $K_r^{(s)}$ 覆盖的命中时间。最后，对于一个 s 均匀超图 G，令 cl(G) 为来自 $\binom{V}{r}$ 的顶点集，这些顶点集在 G 中张成 $K_r^{(s)}$ 的副本；这样，cl(G) 又是通常意义下的一个 r 均匀超图。事实上，以下结论成立：

定理 8.1。设 $r > s \geqslant 3$。我们可以对停止的随机 r-均匀超图过程H_{T_H} 和停止的随机 s-均匀超图过程 G_{T_G} 进行耦合，使得以高概率，

$$H_{T_H} \subseteq \mathrm{cl}(G_{T_G}).$$

也就是说，以高概率，于 H_{T_H} 中的每条超边，在 G_{T_G} 中同一顶点集上都存在一个 $K_r^{(s)}$的副本。
对

T定理 1.3 和定理 8.1 的结合立即推出以下 :

推论 8.2。设 $r > s \geqslant 3$ 和 $n \in r\mathbb{Z}_+$，则以高概率 G_{T_G} 有一个 $K_r^{(s)}$-因子。

定理 8.1 的证明完全沿用主定理定理 1.6 的证明思路，因此我们只指出下文所需的修改。此外，由于有一项重大简化——以高概率，$H_r(n, \pi_+)$中没有两条超边在三个或更多顶点上重叠（见注 2.8）——其证明实际上比定理 1.6 的证明更简洁。因此，不存在相应的 $K_r^{(s)}$不会独立出现的“伙伴超边”，在过程耦合中，我们可以直接采用均匀次序，而无需使用虚拟边。相应地，只要证明命题 4.2 的对应版本，定理 8.1 就得证。

8.1 术语与临界窗口

在定理 8.1 的整个证明过程中，为了说明与 $s = 2$ 情形的类比，我们经常将超图 $K_r^{(s)}$ 或 s 的边称为“团”，用来指代基数为 s 的超边。

我们从 Riordan 的耦合定理 1.4 的以下推广开始：

定理 *8.3*（[26, 定理 5]）。设 $r > s$，其中 $s \geqslant 2$ 且 $r \geqslant 4$。存在常数 $\varepsilon(s,r)$ $\delta(s,r) > 0$，使得对于任意 $p = p(n) \leqslant n^{-(r-1)/\binom{r}{s}+\varepsilon}$，以下结论成立。令 $\pi = (1-n^{-\delta})p^{\binom{r}{s}}$，我们可以将随机 s-均匀超图 $G = H_s(n,p)$ 与随机超图 $H = H_r(n,\pi)$ 耦合起来，使得以高概率，H 中的每条超边都对应于 G 中同一顶点集上的 $K_r^{(s)}$ 的一个副本。[7]

定理 8.3 的耦合与第 3.1 节中介绍的耦合完全相同，只需在过程中将每个“r-团”替换为“ $K_r^{(s)}$ 的副本”。

对于如 (2) 中的 π_-，π_+ 以及定理 8.3 中的常数 δ，令

$$p_\pm = p_\pm(s) = (\pi_\pm/(1-n^{-\delta}))^{1/\binom{r}{s}}. \tag{36}$$

注意，当 n 足够大时，我们有 $p_+ \leqslant n^{-(r-1)/\binom{r}{s}+\varepsilon}$，因此稍后可以将定理 8.3 应用于$p = p_+$ 和 $\pi = \pi_+$。

8.2 $H_s(n,\ p)$ 与 $H_r(n,\ \pi)$的耦合

定理 8.1 中的过程耦合与之前完全相同：给定 $G \sim H_s(n,\ p_+)$ 与 $H \sim H_r(n,\ \pi_+)$ 的精细耦合后，我们为 G 和 H 各自的超边配备适当耦合的均匀次序$\sigma_G,\ \sigma_H$。本节将说明过程版本所需的耦合 $(G,\ H)$ 的主要特征。

本节的目标是证明，以高概率，在定理 8.3 的耦合中，$G \sim H_s(n,\ p_+)$ 不含任何与 $H \sim H_r(n,\ \pi_+)$ 的低度顶点关联的额外团。换言之，我们旨在证明引理 3.1 的以下类似结论：

引理 8.4. 通过 *§3.1* 中描述的耦合，将 $G \sim H_s(n,p_+)$ 与 $H \sim H_r(n,\pi_+)$ 耦合。我们将 $\mathrm{cl}(G)\setminus H$ 中的超边称为额外团。那么，以高概率，H 的任何低度顶点都不与 G 中的任何额外团关联。

注意，引理 3.5 无需修改即可推广到当前情形。此外，s-均匀超图的引理 3.7 的类似结论已在 [26, Le. 13] 中证明：设 H 是一个 r-均匀超图，$r \geqslant 4$，并令 G 为由 H 得到的 s-均匀超图，其中将每条超边替换为 $K_r^{(s)}$ 的一个副本（必要时合并多重边）。如果 G 在一个顶点集上包含 $K_r^{(s)}$ 的副本，且该顶点集不是 H 中的一条超边，那么 H 就包含一个可避免构型。

引理 *8.4* 的证明。考虑将 G 和 H 与 $p = p_+$ 和 $\pi = \pi_+$ 耦合，并以 $H = H_0$ 为条件，其中 $H_0 \notin$ 属于 B。特别地，H_0 中至多有 $(\log n)^{8g(n)} = n^{o(1)}$ 个低度顶点。设 v 是一个低度顶点。与 $s = 2$ 的情形一样，根据引理 3.5，v 在 G 中获得的“额外”团的期望数量至多为

$$\sum_{\substack{j:v\in h_j\\ h_j\notin H_0}} \frac{\pi_j^* - \pi_+}{1-\pi_+} \sim \sum_{\substack{j:v\in h_j\\ h_j\notin H_0}} (\pi_j^* - \pi_+) = \sum_{\substack{j:v\in h_j\\ h_j\notin H_0}} (\pi_j^* - p_+^{\binom{r}{s}}) + \sum_{\substack{j:v\in h_j\\ h_j\notin H_0}} (p_+^{\binom{r}{s}} - \pi_+). \tag{37}$$

由于 $\pi_+ = p^{\binom{r}{s}} + (1-n^{-\delta})$，第二个求和可以界定为 n^{-c}，其中 $c > 0$ 是某个较小的常数；同样，接下来只需界定式 (37) 中的第一个求和。在接下来的引理 8.5 中（该引理对应于引理 3.8），我们将证明第一个求和也很小。因此，根据引理 8.5 和我们之前的观察，包含 v 的额外团的期望数量可以

[7]同样，在 [26]，中，定理 8.3 给出的形式包含一个未具体说明的 $o(1)$ 项，而非 $n^{-\delta}$。与 $s = 2$ 的情形一样，仔细考察 [26，定理 5] 的证明即可得到上述表述。

界定为 n^{-c}，其中 $c>0$ 是某个较小的常数。由于 $H=H_0$ 中只有 $n^{o(1)}$ 个低度顶点，以高概率不存在这样的顶点，由此完成引理 8.4 的证明。 □

引理 8.5。设 $H_0 \notin \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$，，并按照引理 *3.5* 定义 π_j^*。令 $k=\min\big((r-1)/\binom{r}{s}, s-1-s/r\big)>0$。令 v 为任意一个顶点。则

$$\sum_{\substack{j:v\in h_j\\ h_j\notin H_0}} (\pi_j^* - p_+^{\binom{r}{s}}) \leqslant n^{-k+o(1)}. \tag{38}$$

引理 *8.5* 的证明。我们仿照引理 3.8 的证明，并在适当之处将其简化。令 G_0 为这样得到的 s-均匀超图：将 H_0 中的每条超边替换为一个 $K_r^{(s)}$。

由于 $H_0 \notin \mathsf{B}_1$，G_0 的最大度为 $n^{o(1)}$。固定某个顶点 v，我们希望计算出所有可能出现在式 (38) 的求和中的超边 h_j，并界定它们对式 (38) 的贡献。令 C_{h_j} 为与超边 h_j 对应的团。对于给定的 h_j，使得 $v\in h_j$，由 h_j 在 G_0 中诱导的子图的连通分量分别具有 $c_1,\dots,c_t$ 个顶点，从而 $\sum_{i=1}^t c_i = r$。

同样，包含 $h_j$with $c_1=c_2=\cdots=c_t=1$ 的超边对 (38) 中的求和贡献为 0，因此接下来我们只需考虑满足以下条件的 h_j：至少对一个 i，有 $c_i\geqslant s$。

与之前一样，给定一个固定序列 $c_1,\dots,c_t$，至多有 $n^{t-1+o(1)}$ 种方式选取团C_{h_j}。如果 $c_1=r$，那么 C_{h_j} 只有 $n^{o(1)}$ 种选择，并且

$$\pi_j^* \leqslant p_+ = n^{-(r-1)/\binom{r}{s}+o(1)}.$$

这意味着，来自 with 的部分对 (

$$38 \qquad h_j \qquad c_1=r \qquad\qquad n^{-(r-1)/\binom{r}{s}+o(1)} \leqslant)$$

的总贡献至多为 () 。

$n^{-k+o(1)}$

因此，接下来我们只考虑满足对所有 i 都有 $c_i<r$ 的序列 $c_1,\dots,c_t$。在条件化于 s-边 E_0 均存在之后，潜在的团 C_{h_j} 至少缺少了不同连通分量之间的所有 s-边，因此

$$\pi_j^* \leqslant p_+^{\binom{r}{s}-\sum_{i=1}^t\binom{c_i}{s}}.$$

总体而言，给定一个固定序列 $c_1,\dots,c_t$，其中对所有 i 都有 $c_i\leqslant r-t+1$，并且对至少一个 i 有 $c_i\geqslant s$，则与该序列对应的超边 h_j 对 (38) 的贡献至多为

$$n^{t-1+o(1)}p_+^{\binom{r}{s}-\sum_{i=1}^t\binom{c_i}{s}} \overset{\text{Lemma } A.1}{\leqslant} n^{t-1+o(1)}p_+^{\binom{r}{s}-\binom{r-t+1}{s}} = n^{o(1)+t-r+(r-1)\binom{r-t+1}{s}/\binom{r}{s}}$$
$$\overset{\text{Lemma } A.2}{\leqslant} n^{o(1)+1-s+\frac{s}{r}}.$$

在上文中，我们使用了两个将在附录中证明的分析引理。由于潜在的序列 $c_1,\dots,c_t$ 只有有限多个，这就完成了证明。 □

8.3 过程耦合

为了证明定理 8.1，只需证明以下命题：

命题 8.6. 我们可以构造一个耦合 (G,σ_G,H,σ_H)，使得以下各项均成立。

- ***a)*** $G\sim H_s(n,p_+)$，且 σ_G 是 G 的 s-边的一个均匀随机顺序。
- ***b)*** $H\sim H_r(n,\pi_+)$，且 σ_H 是 H 的超边的均匀随机顺序 .

c) 设 $e_{\sigma_G(1)} \cdots, e_{\sigma_G(|G|)}$ 是由 σ_G 给出的 s-边顺序，而 $h_{\sigma_H(1)} \cdots, h_{\sigma_H(|H|)}$ 是由 σ_H 给出的超边顺序。对于 $t \in \mathbb{N}_0$，令

$$G_t^* = \{e_{\sigma_G(1)}, \ldots, e_{\sigma_G(t)}\} \text{ and } H_t^* = \{h_{\sigma_H(1)}, \ldots, h_{\sigma_H(t)}\}$$

并定义

$$T_G^* = \min\{t : \text{ every vertex of } G_t^* \text{ is in an } r\text{-clique}\},$$
$$T_H^* = \min\{t : H_t^* \text{ has minimum degree } 1\}.$$

那么，以高概率 T_G^*, T_H^* 是有限的。此外，以高概率有

$$H_{T_H^*}^* \subset \mathrm{cl}(G_{T_G^*}^*). \tag{39}$$

本节余下部分将说明命题 8.6 证明中所需的步骤。

过程耦合按第4.1.1节中的方式进行：给定定理 8.3 中的耦合 $G \sim H_s(n, p_+)$ 和 $H \sim H_r(n, \pi_+)$，我们的目标是为 G 和 H 各自的超边配备恰当耦合的均匀次序 σ_G, σ_H。不过这一次，由于 $s \geqslant 3$，我们可以利用一个重要的简化：以高概率，H 中任意两条超边都不会在 $s \geqslant 3$ 个顶点上重叠，因为这会形成一个可避免构型（见注 2.8）。因此，无需使用虚拟（s-）边。由于 $H \notin \mathrm{B}$ 以高概率成立，对于这种情况，只需再次说明 σ_G, σ_H 的构造；以下均假设这一点。

在当前的扩展中，过程耦合具有以下简单形式：设 $\{\xi_e : e \in G\}$ 是取值于 $[0,1]$，上、彼此独立且与其他所有因素独立的均匀随机变量。对于 $e \in G$，令

$$\tau(e) = \xi_e \in [0,1]$$

为 e 的辅助时间，并按照 s-边在 G 中的 $\tau(e)$ 大小递增排列。这就定义了顺序 σ_G；根据对称性，该顺序仍是均匀的。

对于 $h \in H$，令 $E(h) \subset G$ 为同一顶点集上 G 中 $K_r^{(s)}$ 的 s-边集，并设

$$\tau(h) = \max\{\xi_e : e \in E(h)\}.$$

现在，按照辅助时间 $\tau(h)$ 的值递增排列 H 的超边，从而定义顺序 σ_H。由于 H 的任意两条超边的交集都少于 $s \geqslant 3$ 个顶点，因此 H 中任意两条不同的超边都依赖于来自族 $\{\xi_e : e \in G\}$ 的 $\binom{r}{s}$ 个不同的、因而相互独立的随机变量。因此，根据对称性，σ_H 是均匀的。

如 § 4.1.2 所示，σ_G 为 $K_r^{(s)}$-边集 $\{E(h) : h \in H\}$ 规定了一个次序，使得对所有 $h \in H$，都有 $\tau(h) = \tau(E(h))$，因此任意超边 h 及其对应的团都出现在同一辅助时间。按照 (23)-(26) 定义 $(G(t))_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ 和 $(H(t))_{0 \leqslant t \leqslant 1}$，以及时间 t_G, t_H。在当前耦合中，我们有 $t_G \leqslant t_H$；由于 t_H 以高概率有限，因此 t_G 也以高概率有限。由此得到以下恒等式：

引理 8.7。以高概率，$t_G = t_H$。

证明。证明过程与引理 4.4 的证明完全相同，因此这里只作简要概述。按照引理 4.4 的证明定义超图 H_- 和 G_-，并令 I 表示 H_- 中孤立顶点的集合。假设引理 8.4 和 4.5 中以高概率成立的陈述均成立，并且 $H \notin$B。

那么，I 恰好是不包含在 $K_r^{(s)}$ 中任何团里的顶点集合：首先，G_- 中没有任何其他顶点 $v \notin$I 未被团包含，因为 H_- 的所有超边都作为团出现在 G_- 中。但也有可能，I 中的某个顶点 $v \in$ 被一个额外的

团包含在 G_- 中。为排除这种可能性，注意到引理 4.5 意味着 $v \in$I 中的所有顶点在 H 中都成为低度顶点。根据引理 8.4，在耦合后的超图 G 中，I 中没有任何顶点被包含在额外团中。特别地，I 中没有任何顶点 $v \in$ 被 G_- 中的额外团覆盖。最后，覆盖顶点 $v \in$I 的所有团都以与相应超边相同的顺序出现。这证明了 $t_H = t_G$ 这一断言。 □

命题 *8.6* 的证明。 根据引理 8.7，以高概率有 $t_G = t_H$ ，此外， $G(t_G) = G^*_{T^*_G}$ 以及 $H(t_H) = H^*_{T^*_H}$。利用对于所有 $h \in H(t_H)$ 都有 $\tau(h) = \tau(E(h))$，结论得证。 □

开放问题

在其突破性论文中， [14], Johansson、Kahn 和 Vu 不仅找到了完美匹配和 r-团因子的阈值，还找到了 F-因子的阈值，其中 F 是一个固定的严格平衡图。对于存在 F-因子，是否有可能得到尖锐 阈值，甚至得到一个命中时间结果？Riordan 的耦合结果 [26] 可以从 $F = K_r$ 的情形推广到某些具有便利性质的良好 图F（见 [26] 中的定义 9）。因此，对于这些 F，可以通过这一耦合，利用 Kahn 关于完美匹配的尖锐阈值结果 [15]，得到 F-因子的尖锐阈值。基于 Riordan 的耦合，本文的方法或许可以推广到这些良好的 F，从而得到一个命中时间结果——或者，在这种情形下，可能还需要一些额外约束才能使证明顺利进行。然而，对于那些严格平衡但并不良好的 F ，目前尚不清楚该如何推进。

人们还可以研究其他超图性质的阈值和命中时间，并通过与本文类似的方法将相关结论推广到图的情形。关于 r均匀超图中完美匹配的命中时间结果，即定理1.3，是对 [3] 中相应经典结果的推广：在该结果中，顶点覆盖、完美匹配和连通性的存在命中时间以高概率一致。关于连通性阈值的命中时间结果在 [25], 中被推广到了超图，因此我们知道，最小度为 1、连通性以及完美匹配存在性的命中时间一致。 [3]中的另一项经典结果指出，最小度为 2、2-连通性以及哈密顿圈存在性的命中时间以高概率一致。前述结果在推广到超图时的等价性已在[25]中得到证明。哈密顿圈的概念无法自然地推广到超图。对于其中一种形式——松散哈密顿圈，关于其阈值 [6, 7, 10, 24], 已经取得了重大进展，但其精确位置和命中时间版本仍有待解决。

类似地，我们可以考虑 2-因子，即 2-正则生成子超图，尤其是连通 2-因子。与松散哈密顿圈不同，在松散哈密顿圈中，每条超边所关联的 2-度顶点中，除两个以外，其余顶点的度均为 1；而连通 2-因子中的所有顶点的度均为 2。对于正则均匀超图，Panagiotou 和 Pasch 最近在 [22] 中确定了 2-因子存在的阈值位置，此前 [21] 中给出了较弱的结果。

与完美匹配的存在密切相关的一个问题是精确覆盖的存在性。这里，我们要选取一组顶点，使每条超边恰好关联其中一个顶点。对于均匀随机的正则 r-均匀超图，其阈值已在 [20], 中确定；而在二项随机 r-均匀超图中确定这一问题的阈值，目前仍未解决 [17]。

致谢

本项目始于2021年8月在Buchboden举行的Angelika Steger课题组研究研讨会。我们感谢Oliver Riordan参与了富有帮助的讨论。

参考文献

[1] Noga Alon 和 Raphael Yuster。 H因子的阈值函数。组合概率与计算，2(2):137–144，1993年。[2] Béla Bollobás 和 Oliver Riordan。渗流。剑桥大学出版社，2006年。[3] Béla Bollobás 和 Andrew Thomason。小阶随机图。载于随机图 *'83*（波兹南，*1983*），第118卷，北荷兰数学研究丛书，第47–97页。北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1985年。[4] Fan Chung 和 Ron Graham。*Erdős*论图：他留下的未解难题。AK Peters/CRC出版社，1998年。[5] Pat Devlin 和 Jeff Kahn。 k-出超图中的完美分数匹配。组合电子期刊，24(3):论文编号3.60，共12页，2017年。[6] Andrzej Dudek 和 Alan Frieze。随机均匀超图中的松散哈密顿圈。组合电子期刊，18(1):论文48，共14页，2011年。[7] Andrzej Dudek、Alan Frieze、Po-Shen Loh 和 Shelley Speiss。随机超图中松散哈密顿圈的最优整除条件。组合电子期刊，19(4):论文44，共17页，2012年。[8] Pál Erdős 和 Alfréd Rényi。关于连通随机图中一度因子的存在性。匈牙利科学院数学学报，17:359–368，1966年。[9] Pál Erdős。关于我最希望得到解决的组合问题。组合学，1(1):25–42，1981年。[10] Asaf Ferber。弥合随机图和超图中与哈密顿圈有关问题的差距。组合电子期刊，22(1):论文1.61，共7页，2015年。[11] Alan Frieze 和 Svante Janson。随机 s-均匀超图中的完美匹配。随机结构与算法，7(1):41–57，1995年。[12]Annika Heckel。随机图中的随机三角形。随机结构与算法，59(4):616–621，2021年。[13] Svante Janson、Tomasz Łuczak 和 Andrzej Ruciński。随机图。Wiley-Interscience离散数学与优化丛书。Wiley-Interscience，纽约，2000年。[14] Anders Johansson、Jeff Kahn 和 Van Vu。随机图中的因子。随机结构与算法，33(1):1–28，2008年。[15] Jeff Kahn。Shamir问题的渐近分析。*arXiv:1909.06834*，2019年。[16] Jeff Kahn。Shamir问题的命中时间。美国数学会汇刊，375(1):627–668，2022年。[17] Vamsi Kalapala 和 Cris Moore。精确覆盖中的相变。芝加哥理论计算机科学期刊，第5篇文章，共9页，2008年。

[18] 金正汉 Kim。随机均匀超图中的完美匹配。随机结构与算法，23(2):111–132，2003。[19] 迈克尔·克里韦列维奇。随机图中的三角形因子。组合学、概率与计算，6:337–347，1997。[20] 克里斯托弗·摩尔。随机正则精确覆盖中的相变。亨利·庞加莱研究所年刊 *D*，3(3):349–362，2016。[21] 康斯坦丁诺斯·帕纳约图和 Matija Pasch。正则占位问题的可满足性阈值。载于第*46*届自动机、语言与程序设计国际研讨会，第132卷，*LIPIcs.* 莱布尼茨国际信息学论文集，第90篇论文，14页。达格施图尔城堡。莱布尼茨信息中心，瓦德恩，2019。[22] 康斯坦丁诺斯·帕纳约图和 Matija Pasch。正则占位问题的可满足性阈值。*arXiv:1811.00991*，2023。[23] Julius Petersen。《正则图论》。数学学报，15:193–220，1891。[24] 卡利娜·彼得罗娃和米洛什·特鲁伊奇。随机三均匀超图中松散哈密顿圈的迁移，2022。[25] 丹尼尔·普尔。随机超图连通性的强度。电子组合学杂志，22(1):论文 1.69，16页，2015。[26] Oliver Riordan。随机图中的随机团，以及 F-因子的尖锐阈值。随机结构与算法，61(4):619–637，2022。[27] Andrzej Ruciński。通过给定图的副本匹配和覆盖随机图的顶点。离散数学，105(1-3):185–197，1992。[28] 珍妮特·施密特和埃利·沙米尔。随机 d-纯超图中完美匹配的阈值。离散数学，45(2):287–295，1983。

A 附录

引理 2.9 的证明

设 k 为 K中的顶点数，并固定 K 中度为 d （在 K中）的一个顶点 v 。记 Y为 H中根超图 $(v,\ K)$ 的副本数（$v',\ K'$），其中 v'是一个低度顶点。于是有 $E[Y] \leqslant kE[X_K]P(D \leqslant 7g(n) - d)$，其中 D服从参数为 $\binom{n-1}{r-1} - d$ 和 π_+的二项分布。由于 $\mathbb{E}[D] = \Theta(\log n)$，Chernoff界和定理 2.1 给出$P(D \leqslant 7g(n) - d) \leqslant e^{-\Theta(\log n)} = n^{-\Theta(1)}$，因此 $E[Y] = n^{-\Theta(1)}$使用 $E[X_K] \leqslant n^{o(1)}$。所以，以高概率， H 中不存在任何低度顶点属于 H中 K 的副本。 □

引理 3.4 的证明

对于 a)，考虑到 (6)，只有当 h_j 是禁 3-圈中最后一条缺失的超边，而该禁 3-圈在事件 D_H 中被排除时，才可能有 $\pi'_j = 0$ 。但此时， G 中对应的三角形就是禁 3-圈中最后一个缺失的三角形，而该禁 3-圈在事件 D_G 中被排除，因此由 (5) 可得 $\pi_j = 0$。

现在令

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_H \cap \bigcap_{i \in Y_{j-1}} B_i$$
$$\mathcal{D} = \bigcap_{i \in N_{j-1} \cup S_{j-1}} B_i^c.$$

于是我们有

$$\pi'_j = P(B_j \mid \mathcal{U} \cap \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_H). \tag{40}$$

对于 b)，考虑辅助随机超图 H'，其中超边 h_i、$i \in \mathbf{Y}_{j-1}$均确定存在，来自 C_H 中干净 3-圈的所有超边也都确定存在（因此 U_H 成立），其余超边则独立地以概率 π抽取。由于 $\mathsf{D} \cap \mathsf{D}_H$ 是一个下集，我们可以对 H'应用 Harris 不等式，得到

$$\pi'_j = P(B_j \mid \mathcal{U} \cap \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_H) \leqslant P(B_j \mid \mathcal{U}) = \pi.$$

对于 c)，假设 $\pi_j > \pi'_j$。由 b) 可知 $\pi'_j \leqslant \pi$，因此我们只需从下方界定 π'_j。首先注意到 $\pi_j > \pi'_j \geqslant 0$，由 a) 可推出

$$\pi'_j > 0. \tag{41}$$

特别地，$P(B_j \mid \mathsf{U} \cap \mathsf{D}) = \pi > 0$，并且进一步有 $P(\mathsf{D}_H \mid \mathsf{U} \cap \mathsf{D}) > 0$ [8]。因此，对 $P(\cdot \mid \mathsf{U} \cap \mathsf{D})$ 应用贝叶斯定理可得

$$\pi'_j = \frac{P(\mathcal{D}_H \mid B_j \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{D}) \cdot P(B_j \mid \mathcal{U} \cap \mathcal{D})}{P(\mathcal{D}_H \mid \mathcal{U} \cap \mathcal{D})} = \frac{P(\mathcal{D}_H \mid B_j \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{D})}{P(\mathcal{D}_H \mid \mathcal{U} \cap \mathcal{D})} \pi.$$

接下来我们进一步拆分事件 D_H，区分包含 h_j 的干净 3-圈与不包含它的干净 3-圈。令 $\mathsf{D}_{H,1}$ 表示 H 不含任何包含 h_j 的禁干净三环；令 $\mathsf{D}_{H,0}$ 表示 H 不含任何不包含 h_j 的禁干净三环，于是我们有

$$\mathcal{D}_H = \mathcal{D}_{H,0} \cap \mathcal{D}_{H,1}.$$

将其代入上式，可得

$$\begin{aligned}\pi'_j &= \frac{P(\mathcal{D}_{H,0} \cap \mathcal{D}_{H,1} \mid B_j \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{D})}{P(\mathcal{D}_{H,0} \cap \mathcal{D}_{H,1} \mid \mathcal{U} \cap \mathcal{D})} \pi = \frac{P(\mathcal{D}_{H_0} \mid B_j \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{D}) \cdot P(\mathcal{D}_{H,1} \mid \mathcal{D}_{H,0} \cap B_j \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{D})}{P(\mathcal{D}_{H_0} \mid \mathcal{U} \cap \mathcal{D}) \cdot P(\mathcal{D}_{H,1} \mid \mathcal{D}_{H,0} \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{D})} \pi \\ &= \frac{P(\mathcal{D}_{H,1} \mid \mathcal{D}_{H,0} \cap B_j \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{D})}{P(\mathcal{D}_{H,1} \mid \mathcal{D}_{H,0} \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{D})} \pi,\end{aligned} \tag{42}$$

因为 $P(\mathsf{D}_{H_0} \mid B_j \cap \mathsf{U} \cap \mathsf{D}) = P(\mathsf{D}_{H_0} \mid \mathsf{U} \cap \mathsf{D})$，这是因为这两个事件 $B_j \cap \mathsf{U} \cap \mathsf{D}$ 和 $\mathsf{U} \cap \mathsf{D}$ 只涉及从 H 中包含或排除某些超边，而 D_{H_0} 中的禁干净三环不包含 h_j，因此它们的存在与 $B_j = \{h_j \in H\}$ 相互独立。

为了给 π'_j 一个下界，我们只需将 (42) 中的分母向上界定为 1，但是

[8] 由于 D_H 是不存在其他干净 3-圈的事件，它与 U_H 中的干净 3-圈相容；并且，如果事件 $\mathsf{U}_H \cap \bigcap_{i \in Y_{j-1}} B_i$ 中的任何超边子集包含一个禁干净三环，那么该子集中的最后一个指标 i 就不会被添加到 Y_{j-1}，因为这样 $\pi'_i = 0$。

我们需要为分子找到一个有用的下界。为此，利用并集界，我们写出

$$P(\mathcal{D}_{H,1} \mid \mathcal{D}_{H,0} \cap B_j \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{D}) = 1 - P(\mathcal{D}_{H,1}^{c} \mid \mathcal{D}_{H,0} \cap B_j \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{D}) \geqslant 1 - \sum_{\substack{c=\{h_j,h_i,h_k\} \\ \text{clean 3-cycle, } c \notin \mathcal{C}_H}} P(c \subseteq H \mid \mathcal{D}_{H,0} \cap B_j \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{D}) \tag{43}$$

其中求和遍历所有包含 h_j 的潜在干净三环 $c = \{h_j,\ h_i,\ h_k\}$。

若 $\{i,\ k\} \cap (\mathbf{N}_{j-1} \cup \mathbf{S}^{j-1}) \neq \emptyset$，则 $\{c \subseteq H\}$ 的条件概率显然为 0，因此我们假设该交集为空。根据已知存在的超边数量 $a = |\{i,\ j,\ k\} \cap \mathbf{Y}_{j-1}|$，我们分别计算 $c = \{h_j,\ h_i,\ h_k\}$ 的贡献。显然不可能有 $a = 3$，因为 $j \notin \mathbf{Y}^{j-1}$。但 $a = 2$ 也不可能成立：由 (41)，(42) 中的分子为正；但如果存在禁 3-圈 $c \in \mathrm{D}_{H,\,1}$，且只有 h_j 缺失，那么分子就会为 0，因为我们以 $B_j = \{h_j \in H\}$ 为条件。

因此，我们只需计算 $a \in \{0,\ 1\}$ 时，$c = \{h_j,\ h_i,\ h_k\}$ 对 (43) 的贡献。我们先考虑 $a = 1$ 的情形，设 $i \in Y_{j-1}$。假设 h_j 由三个顶点 v_1，v_2，v_3 组成，那么不失一般性，可以假设 $h_j \cap h_i = \{v_1\}$（因为这只会使我们的界相差一个因子 3）。由于 $\tilde{H} \notin \mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2$,，有 $d_{\tilde{H}}(v_1) = n^{o(1)}$，因此 h_i 有 $n^{o(1)}$ 种选择；固定 h_j，h_i 后，补上缺失顶点以完成 h_k 至多有 n 种选择，从而满足 $a = 1$ 的 c 有 $O(n^{1+o(1)})$ 种可能选择。

另一方面，令 $\mathrm{E} = \mathrm{D}_{H,\,0} \cap B_j \cap \mathrm{U} \cap \mathrm{D}$，则有 $P(c \subseteq H | \mathrm{E}) = P(h_k \in H | \mathrm{E})$。使用辅助超图，将事件 $\{B_j \cap \mathrm{U}\}$ 中的超边确定性地包含在内，其余超边以概率 π 独立地抽取，由 Harris 不等式和独立性可得

$$P(c \subseteq H \mid \mathcal{E}) \leqslant P(c \subseteq H \mid B_j \cap \mathcal{U}) = \pi.$$

因此，总体上，(43) 中来自 c with $a = 1$ 的和的贡献为 $O(n^{1+o(1)}\pi) = n^{-1+o(1}$).

对于 $a = 0$，我们选择干净 3-圈 c 中剩余的三个顶点，从而为 $c = \{h_j,\ h_i,\ h_k\}$ 提供 $O(n^3)$ 个选择，其中 $a = 0$。以与上述相同的方式，我们得到 $P(c \subseteq H | \mathrm{E}) \leqslant \pi^2$。因此，(43) 中来自 c with $a = 0$ 的和的总体贡献为 $O(n^3\pi^2) = n^{-1+o(1)}$。综上，由 (43) 可得

$$P(\mathcal{D}_{H,1} \mid \mathcal{D}_{H,0} \cap B_j \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{D}) \geqslant 1 - n^{-1+o(1)},$$

将其代入 (42) 并将分母上界估计为 1，即可得到所需的下界π'_j，从而完成 c）部分的证明。

最后，d）部分可类似地由 Riordan 的证明中相应的观察 [26], 得出，也就是公式 (7) 下方段落中的备注。为简洁起见（但代价是不提供自洽的论述），我们仅描述所需的修改，因此请回顾 [26, 12], 中的证明，尤其是相对误差

$$Q = Q_j = \sum_{i \in N_1} p^{|E_i \setminus (E_j \cup R)|}$$

由 [26], 中的公式（4）以及 [12], 第 620 页上的第一个方程可得 $\pi_j \geqslant p\binom{r}{2}(1 - Q)$。回忆一下，在 [26], 中，集合 N_1 包含超边 h_i、 $i < j$ 的指标；我们在此处判定 A_i 不成立，因此相应团的边集 E_i 与 $E_j \setminus R$ 重叠（其中 R 是算法在时刻 j 已知存在的边）。在 [12] 中，集合 $N_1 = N_{\mathrm{e}} \cup N_{\mathrm{c}}$ 包含指标 N_{e}，对应于这样的团边集 E_i；还包含指标 N_{c}，对应于已知不存在的干净 3-圈的此类重叠边集 E_i。在这两种情况下，令 D_j 为指标 $i \in N_1$ 的集合，使得 $E_i \subset E_j \cup R$。

[26] 中的要点是，如果 $\mathsf{B}_1 \cup \mathsf{B}_2$ 不成立，那么对于所有满足 $D_j = \emptyset$ 的 j，我们都有 $Q_j = o(1)$。因此，可以选取一个函数 $\pi \sim p(\binom{r}{2})$，使得对于所有这样的 j，都有 $\pi_j \geqslant p^3(1-Q) \geqslant \pi$——因此耦合不会在这样的步骤中失败。由此，特别地，$\pi_j < \pi$ 仅在 $\mathsf{B}_1 \cup \mathsf{B}_2$ 成立，或 $D_j \neq \emptyset$ 时才可能发生。但后一种情况蕴含 $\pi_j = 0$，因为先前已判定边集 E_i 在 G 中并非完全存在，而 $E_i \subset E_j \cup R$ 和 A_j 将意味着 $E_j \cup R$ 在 G 中存在。

在我们的设定下，即 [12],，也可以采用同样的论证：假设 $\mathsf{B}_1 \cup \mathsf{B}_2$ 不成立，且 $D_j = \emptyset$——我们的目标是用 $o(1)$ 对 Q 给出界。与 [26], 中完全相同，N_{e} 对 Q 的贡献可以用 $o(1)$ 给出界，因此我们只考虑 N_{c} 对 Q 的贡献。除非存在边集为 E_i 的干净 3-圈，使得 $k = 0, e_i = 0$（k, e_i 的定义见 [12]），否则，这一贡献可由 [12], 第 620 页最后一个方程中的 $o(1)$ 给出界。但在后一种情况下可知 $E_i \subseteq E_j \cup R$（如 [12, 第 620] 页所述），因此 $D_j \neq \emptyset$。于是，我们可以选择 $\pi \sim p(\binom{r}{2})$，使得对于所有满足 $D_j = \emptyset$ 的 j，都有 $\pi_j \geqslant p^3(1-Q) \geqslant \pi \geqslant \pi'_j$。因此，只有当 $D_j \neq 0$ 时才可能有 $\pi_j < \pi'_j$，而在这种情况下，$\pi_j = 0$ 可完全按照上文的方式推出。至此，d）部分的证明完成。

引理 4.5 的证明

令 $d \geqslant 0$ 为一个整数。我们的目标是证明，在 H_-中孤立且在 H中的度为 $d > 7g(n)$ 的顶点的期望数量为 $o(1)$。

因此，令 $d > 0$ 为一个整数，v 为一个顶点。令 $n_r = \binom{n-1}{r-1}$，则 v 在 $H \sim H(n, \pi_+)$ 中的度恰好为 d 的概率为

$$\binom{n_r}{d}\pi_+^d(1-\pi_+)^{n_r-d} \lesssim \left(\frac{en_r\pi_+}{d}\right)^d \exp\left(-n_r\pi_+\right) \lesssim \left(\frac{en_r\pi_+}{d}\right)^d n^{-1}.$$

给定 H，根据 (27)，我们通过以恰好为 π_-/π_+ 的概率独立地保留 H 中的每条超边，得到 H_-（只要 $H \notin \mathsf{B}$；否则我们无法定义该构造）。更准确地说，$H_- = H'_-$ 以高概率成立，其中 H'_- 是通过以概率 π_-/π_+ 独立地保留 H 中的每条超边得到的（无论 $H \in \mathsf{B}$ 与否）。因此，给定 v 在 H中的度为 d，v 在 H'_- 中孤立的概率恰好为 $(1-\pi_-/\pi_+)^d$。所以，v 在 H 中的度为 d 但在 H'_- 中孤立的概率渐近至多为

$$\left(\frac{en_r(\pi_+ - \pi_-)}{d}\right)^d n^{-1} = \left(\frac{2eg(n)}{d}\right)^d n^{-1} \leqslant \left(\frac{6g(n)}{d}\right)^d n^{-1}.$$

现在注意到，当 $g(n) \to \infty$ 时，H 中度为 $d > 7g(n)$ 且在 H'_- 中孤立的顶点的期望数量有界于

$$n \sum_{d > 7g(n)} \left(\frac{6g(n)}{d}\right)^d n^{-1} = o(1).$$

因此，以高概率不存在这样的顶点，并且由于以高概率 $H_- = H'_-$，证明完毕。 □

引理 4.6 的证明

根据 (27)，只需证明 $H'_- \sim H(n, \pi_-)$ 时的该命题即可。因此，令 S 为 H'_- 中伙伴超边对的集合。

以高概率，S 中的所有伙伴超边对都是顶点不相交的（见注 2.8）。因此，

只需证明，以高概率不存在这样的顶点：它包含在一对伙伴超边中，且除此之外是孤立的。此类顶点的期望数量有如下界：

$$\binom{n}{r}\binom{r}{2}\binom{n-r}{r-2}\cdot(2r-2)\cdot\pi_-^2(1-\pi_-)^{\binom{n-1}{r-1}-2}=O\big(n^{2r-2}\pi_-^2e^{-\pi_-\binom{n-1}{r-1}}\big)=$$
$$=O(\log^2 n\cdot e^{-(\log n-g(n))})=n^{-1+o(1)}.$$

应用一阶矩方法即可完成证明。 □

第 8 节中两个分析引理的证明

引理 A.1. 设 $t\in\{2,\dots,r-s+1\}$. 对任意 $c_1,\dots,c_t\in\{1,\dots,r-t+1\}$ 满足 $\sum_{i=1}^t c_i=r$,

$$\sum_{i=1}^t\binom{c_i}{s}\leqslant\binom{r-t+1}{s}. \tag{44}$$

A.1 的证明。 要证明的是，式 (44) 中的和在某个 c_i 取最大值$r-t+1$、其余各项均为 1 时达到最大。为证明这一结论，不妨考虑一个非增序列 $(c_1,\dots,c_t)\in\{1,\dots,r-t+1\}^t$，满足 $\sum_{i=1}^t c_i=r$ 且不同于$c^*:=(r-t+1,1,\dots,1)$，特别地满足 $c_1\leqslant r-t$。

由于 $c_1\leqslant r-t$，$c_1\geqslant c_2\geqslant\dots\geqslant c_t$和 $\sum_{i=1}^t c_i=r$这一事实，因此必须满足 $c_2>1$。定义$c_1':=c_1+1, c_2':=c_2-1$ 和 $c_i':=c_i$，其中 $i\geqslant 3$。此操作只会增大引理中的二项式和：

$$\sum_{i=1}^t\binom{c_i}{s}\leqslant\sum_{i=1}^t\binom{c_i'}{s}. \tag{45}$$

根据构造，(45) 可归结为证明

$$\binom{c_1}{s}+\binom{c_2}{s}\leqslant\binom{c_1+1}{s}+\binom{c_2-1}{s}, \tag{46}$$

这等价于

$$\binom{c_2-1}{s-1}\leqslant\binom{c_1}{s-1}. \tag{47}$$

由于 $c_2\leqslant c_1$，(47) 得以满足。相应地，任何非递增配置 $(c_1,\dots,c_t)\neq c^*$都可以通过一系列步骤变为 c^*，且这些步骤不会使二项式和减小。证明完毕。

□

引理 A.2. 考虑函数 $w\colon[2,r-s+1]\to\mathbb{R}, w(t):=t-r+(r-1)\binom{r-t+1}{s}/\binom{r}{s}$。那么

$$\max_{t\in[2,r-s+1]}w(t)=w(2)=1-s+\frac{s}{r}<0.$$

引理 *A.2* 的证明。 我们证明，w 在 $[2,r-s+1]$、$w(2)=1-s+s/r$ 上严格凸，并且

$w(r-s+1) = 1-s+(r-1)/\binom{r}{s} \leqslant w(2)$。为此，我们计算

$$w'(t) = 1 - \frac{r-1}{\binom{r}{s}s!} \sum_{j=0}^{s-1} \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq j}}^{s-1} (r-t-\ell+1)$$

and

$$w''(t) = \frac{r-1}{\binom{r}{s}s!} \sum_{j_1=0}^{s-1} \sum_{\substack{j_2=0 \\ j_2 \neq j_1}}^{s-1} \prod_{\ell \notin \{j_1, j_2\}}^{s-1} (r-t-\ell+1).$$

特别地，$w''(t) > 0$ 在 $[2, r-s+1]$ 上，而 w 是严格凸的。$w(2)$ $w(r-s+1)$ 的计算很直接。要证明 $w(2) \geqslant w(r-s+1)$，只需证明 $s\binom{r}{s} \geqslant r(r-1)$，或者等价地证明 $(r-2)\cdot\ldots\cdot(r-s+1) \geqslant (s-1)!$。然而，左侧关于 r 递增，且 $r \geqslant s+1$。代入 $r = s+1$ 即可得证。

□