arXiv:2302.08344v1 [math.PR] 16 Feb 2023

正则扩展图上的偏置共识动力学

O. Deb* 和 A. Mukhopadhyay†

*物理系，贾达普大学
†计算机科学系，华威大学

摘要

共识协议在分布式算法研究中发挥着重要作用。本文研究偏置对两种流行共识协议的影响，即 *voter rule* 和 *2-choices rule*。这些规则的经典版本假定个体的行为不依赖于其当前所处的状态。然而，在社交网络等许多应用中，往往存在内在优势状态，个体会对这些状态表现出某种偏置。本文特别关注个体的状态或意见为二元且取自集合 $\{0,1\}$的情形。我们假设，意见为 1 的个体更新其意见的概率 q_1 严格小于意见为 0 的个体更新意见的概率 q_0 。我们将意见 1 称为优势意见，并关注网络在何种条件下会就这一意见达成共识。我们假设个体位于一个具有 n 个顶点的正则扩展图上。这是一类范围广泛的图，既包括稀疏图（度有界），也包括稠密图（度无界）。我们证明，对于投票者规则，如果系统初始时有 $\Omega(\log\ n)$ 个个体持有优势意见，那么以高概率，系统将在 $O(\log n)$ 时间内就优势意见达成共识。这一结果与经典投票者规则显著不同；在经典规则下，系统在 $O(n)$ 时间内达成共识，且就任一特定意见达成共识的概率与持有该意见的个体初始数量成正比。对于双选择规则，我们证明，当持有优势意见的个体初始比例高于某个阈值时，以高概率，系统将在 $O(\log n)$ 时间内就优势意见达成共识。我们明确刻画了该阈值与偏置强度及图的谱性质之间的函数关系。我们证明，对于双选择规则的偏置版本，该阈值可以显著低于同一规则无偏版本的阈值。我们的方法运用关于漂移的精细概率界来刻画系统的马尔可夫动力学。

1 引言

群体协议在《分布式计算》和统计物理领域得到了广泛研究，用于探究群体中的个体所遵循的局部交互规则如何影响群体动力学。共识协议是一组专门设计的交互规则，旨在使所有个体就某个共同意见达成一致。研究共识达成的速度以及最终达成何种共同意见颇有意义。

近年来，由于共识协议在社交网络中的应用，对其研究受到了广泛关注。这里，人们主要关注的是：社交个体能否通过与邻居互动，学习更好的技术或形成更好的意见。另一个动机来自分布式系统中的协调问题，在这类问题中，自主智能体试图通过遵循

与邻居沟通的简单规则来达成共识。这些规则必须易于实施、具备容错能力，并且应能迅速促成共识。

在这一背景下，已得到研究的最简单规则之一是投票者规则。在该规则中，网络中的每个个体都会通过复制随机抽取的一位邻居的意见来更新自己的意见。由于投票者规则具有鞅性质，并且与合并随机游走存在对偶性，其动力学已得到广泛研究 [1, 2, 3, 4, 5]。研究表明，若所有个体在每个时间步都同步更新，那么对于具有 n 个个体和两种相互竞争意见的网络，在包括正则扩展图在内的许多图类中，投票者规则会在 $O(n)$ 步内达成共识。此外，研究还表明，最终达成某一意见共识的概率，与最初持有该意见的个体的体积（度之和）成正比。

文献中另一种得到广泛研究的规则是双选择规则 [6, 7, 8]。在该规则中，个体不再只抽取一位邻居，而是从邻居中均匀随机地抽取两位，并在这两位邻居和个体自身的意见中采取多数意见。研究表明，该规则比投票者规则更快地达成共识。具体而言，对于正则扩展图，若每个时间步都同步更新，则该规则以高概率在 $O(\log n)$ 步内达成共识。然而在这种情况下，以高概率达成共识的意见，是初始时被多数个体采纳的意见。

现有关于投票者规则和双选择规则在两种相互竞争的意见下的研究，大多假设这些意见无法区分，即个体的行为不取决于其当前持有的意见。然而，在社交网络场景中，一种意见可能代表更优选项，例如更新的技术，或针对某种疾病更有效的药物。在这种情况下，已经持有优势意见的个体比持有另一种意见的个体更不容易更新自己的选择。为对此类场景建模，我们在经典投票规则和双选择规则中引入偏置。具体而言，我们将意见表示为0和1，并假设（不失一般性）持有意见 1 的个体更新其意见的概率为 q_1，严格低于持有意见0的个体更新其意见的概率 q_0。我们假设每一轮中，所有更新都按照投票者规则或双选择规则同步进行。由于持有意见 1 的个体在每一步中更新的可能性低于持有意见0的个体，我们称意见 1 为优势意见，并称群体偏向这一优势意见。

这种偏置模型最近在 [9, 10] 中被提出。在这里，作者假设底层图是完全图，研究有偏投票者规则和有偏双选规则下的动力学。他们的结果表明，在有偏投票者规则下，最终达成共识的意见是优势意见的概率会随着网络规模的增大而趋于零 n，而达到共识所需的期望时间则按 $O(\log n)$ 增长。这与无偏置投票规则显著不同：在该规则下，收敛到共识所需的时间仅随网络规模线性增长，而且对任意给定意见达成共识的概率始终有一个与零保持正距离的下界。对于有偏双选规则，他们的结果表明，平均而言，达成共识需要 $O(\log n)$ 时间。尽管这与无偏置双选择规则相似，但如今，达成优势意见共识所需的阈值由偏置参数 q_0 和 q_1 决定。具体而言，研究表明，如果持有优势意见的个体初始比例高于 $q_1/(q_0+q_1)$ $(<1/2)$，那么网络就会以高概率收敛到优势意见共识。因此，即使优势意见最初仅由少数群体持有，网络最终仍会在优势意见上达成共识。这些论文还通过数值模拟研究了更一般图类上的动力学，并猜想类似结果也适用于随机正则图。然而，对一般图的解析研究仍是一个开放问题。

我们的贡献：本文解决了这一开放问题。具体而言，我们分析偏置投票者规则和有偏双选择规则的动力学，并假设底层图

属于一个顶点数量不断增加的正则图扩展图族。为简便起见，我们将这类图族中的成员称为正则扩展图。正则扩展图是一类图，其中每个顶点的度都相同（记为 $d(n)$），且其导通率（记为 ϕ_n）在所有网络规模下都与零保持正距离，即对于所有 n， $\phi_n \geq \phi > 0$，其中 ϕ 为某个常数。另一种等价的扩展图定义方式，是使用其缩放邻接矩阵的第二大（按绝对值计）特征值 λ_n。对于一个扩展图序列， $\lambda_n \leq \lambda < 1$ 对所有 n 均成立。直观地说，上述性质意味着任意较大的节点子集都通过大量边与网络其余部分相连； ϕ 越大，或谱隙 $1-\lambda$ 越大，要断开给定规模的节点子集就需要移除更多边。

扩展图是一大类在文献中经常研究的重要图。它既包括 $d(n) = O(1)$ 的稀疏图，也包括 $d(n) = \omega(1)$ 的稠密图。在此类图上分析共识动力学，远比分析完全图上的动力学困难。这是因为描述系统演化的马尔可夫链具有更高维的状态空间，且其转移取决于图的结构性质。与无偏模型相比，有偏模型缺乏对称性，使分析进一步复杂化。例如，有偏模型的动力学不再满足鞅性质，也不再具有与合并随机游走之间的对偶性。为分析此类马尔可夫链，我们使用漂移，其定义为每一步中持有优势意见的个体数量的增加量。通过获得漂移的精确概率下界，我们证明了以下结果：

- 对于有偏投票者规则，我们证明：如果初始时持有优势意见的个体数量为 $\Omega(\log n)$，则网络以至少 $1 - O(\log\ n/n^{\gamma})$ 的概率，在 $O(\log\ n)$ 步内就会在优势意见上达成共识，其中 γ 为某个正常数。因此，即使初始时持有优势意见的个体数量非常少（相对于网络规模仅为对数级），网络仍以高概率迅速在优势意见上达成共识。我们的分析还表明，从持有意见 1 的个体占固定比例开始时，达成共识的速度会更快，且概率更高。因此，我们的结果大幅推广了 [9, 10] 完全图上获得的结果。

- 对于有偏双选规则，我们证明，若图的扩展图族满足 $\lambda_n^2 \leq q_0/(q_0+q_1) - c$ 对每个 n 均成立，其中某个正常数为 c；且持有优势意见的个体的初始比例大于 $q_1/(q_0+q_1)+\max\left(\lambda_n^2, \sqrt{\log\ n/4n}\right)$，则以至少 $1-O(1/n)$ 的概率，在 $O(\log n)$ 时间内即可就优势意见达成共识。请注意，对于度为 $d(n) = \omega(1)$ 的随机正则图， $\lambda_n = o(1)$ 以高概率成立。因此，条件 $\lambda_n^2 \leq q_0/(q_0+q_1) - c$ 对所有 n 均以高概率成立。在这种情况下，我们得到了 [9, 10] 中证明的完全图结果。对于度为常数 d 的随机正则图，当 d 足够大时，同一条件以高概率成立（例如，若 $d > 4/(q_0/(q_0+q_1) - c)$）。因此，我们的结果适用于稠密图和稀疏图。

这里还值得一提的是，即使允许对手在每个时间步重新分配意见，只要不改变持有各类意见的个体总数，我们的结果仍然成立。

2 相关文献

意见动力系统多年来一直是研究课题。最简单且最为人熟知的模型是投票者规则，最早由 [1] 和 [2]分别独立研究。

他们发现了动力学的鞅性质及其与合并随机游走的对偶性。利用这些性质，投票者模型已应用于研究许多重要类别的图，包括随机 d-正则图 [11], Erd˝os-R´enyi 图 [5], 和正则格 [3]。利用鞅性质可以证明，对于任意连通图，最终达到某一特定意见共识的概率，与持有该意见的节点的初始体积（度数之和）成正比 [12]。此外，利用与合并随机游走的对偶性，已有研究证明，在随机 d-正则图上，以高概率可在 $\Theta(n)$ 时间内达成共识 [11] 。

本文研究的双选择规则最初在 [6] 中作为投票者规则的一种更快替代方案提出。在该研究中，研究者考察了随机正则图和扩展图上的这一规则。研究表明，如果两种意见之间的初始不平衡度足够大，那么以高概率，在 $O(\log n)$ 个时间步内即可达成初始多数意见共识。这些结果随后在 [7] 中被进一步推广到不具备任何正则性的非齐次图。物理学文献 [8, 13, 14] 中也研究了双选择规则的变体。在这些变体中，每个时间步都会形成智能体群组，群组中的所有个体都采纳该群组内的多数意见。研究表明，这些模型的共识收敛速度与之相近。 [15] 分析了双选择规则的一种推广形式：更新智能体从其邻域中抽取 m 个智能体，并且只有当抽取的智能体中有 d 个或更多与更新智能体意见不同时，才会改变自己的意见。 [16] 还研究了随机 d-正则图上的类似规则。研究结果表明，当每个个体至少从网络中抽取另外五个个体并采纳多数意见时，可在 $O(\log \log n)$ 时间内达成共识。

关于偏置对意见动力学模型影响的研究见近期文献 [10, 9, 17, 18]。本文所研究的模型最早由 [10, 9] 进行研究。在那里，作者研究了该模型的连续版本，其中每个个体在与自身关联的泊松过程的各个时刻异步更新。尽管这与本文考虑的同步离散时间模型不同，但他们的结果很容易推广到本文所考虑的情形。这些论文的分析主要聚焦于完全图，而其他图则通过数值模拟进行研究。本文将这些论文的结果推广到正则扩展图，这类图涵盖了大量图，包括稀疏图和稠密图。 [17, 18] 考虑了一种更强形式的偏置。在这种设定下，假设个体无论当前意见及其邻居的意见如何，都能以概率 α 采纳优势意见。在这种强偏置下，共识只有可能形成于优势意见。 [17] 分析了投票者规则和多数规则下这种偏置形式的收敛速度。 [19] 分析了这种偏置形式下的双选择规则。研究发现，收敛速度会随着参数 α 的取值以及持有优势意见的个体的初始比例不同而发生显著变化。

组织结构：本文其余部分安排如下。第3节介绍本文研究的模型。第4节讨论主要结果及其推论，并简要概述证明思路。第5节和第6节分别对偏置投票者规则和双选择规则进行详细分析。最后，我们在第7节总结全文。

3 模型

本节介绍本文研究的模型。该模型由 n 个相互连接的个体组成；这些个体之间的连接关系由无向图 $G_n = (V_n, E_n)$（其中 $|V_n| = n$）描述，其中每个顶点或节点 $v \in V_n$ 代表一个个体，而每条边 $(u, v) \in E_n$ 代表两个个体 u, v之间的连接。对于每个个体 $u \in V_n$，我们定义 $N_u = \{v : (u, v) \in E_n\}$ 为

u 的邻居集合。

假设时间是离散的，并且在每个离散时间步 $t \in \mathbb{Z}_+$，每个个体的意见都属于集合 $\{0,1\}$。我们将个体 u 在时间 t 的意见记为 $X_u^n(t) \in \{0,1\}$。在任意时间 $t \geq 0$，网络的整体状态都可以表示为向量 $\mathbf{X}^n(t) = (X_u^n(t)\ u \in V_n)$，其中包含所有个体的意见。定义在状态空间$\{0,1\}^n$上的过程 $\mathbf{X}^n = (\mathbf{X}^n(t)\ t \geq 0)$描述了系统随时间的演化。

偏置：我们假设在每个离散时间步，每个个体都有可能更新自己的意见，且个体更新意见的概率取决于其当前意见。更具体地说，如果某个个体当前的意见为 $i \in \{0,1\}$，那么它以概率q_i 更新意见，并以概率 $1-q_i$选择不更新意见。为刻画偏置，我们假设$q_0 > q_1$，也就是说，意见为 1 的个体比意见为 0 的个体更不容易更新意见。这是为了刻画这样一种情况：已经拥有更优选项的个体不太可能改变自己的选择。

更新规则：如果某个个体在给定步骤更新其意见，则该更新按照特定的更新规则进行。我们考虑两种常见的更新规则，即投票者规则和双选择规则。

投票者规则：根据投票者规则，每个个体从其邻域中均匀随机地选择另一个个体，并在下一步复制其意见。因此，对于在时间 t持有意见 $i \in \{0,1\}$ 的每个个体 $u \in V_n$，其在时间 $t+1$ 的意见为

$$X_u^n(t+1) = \begin{cases} i & \text{with probability } 1-q_i, \\ X_N^n(t) & \text{with probability } q_i, \end{cases} \tag{1}$$

其中，$N \in N_u$ 表示从 N_u中均匀随机抽取的一个个体。

双选择规则：根据双选择更新规则，每个个体均匀随机地抽取两个邻居（允许重复），并更新为抽取的两个个体与其自身三者中的多数意见。因此，对于在时间 t持有意见 $i \in \{0,1\}$ 的每个个体 $u \in V_n$，其在时间 $t+1$ 的意见为

$$X_u^n(t+1) = \begin{cases} i & \text{with probability } 1-q_i, \\ M(u,N_1,N_2,t) & \text{with probability } q_i, \end{cases} \tag{2}$$

其中，N_1 和 N_2 表示从 N_u中均匀随机抽取的两个邻居，而 $M(u,N_1,N_2,t) = \mathbb{I}\big(X_u^n(t) + X_{N_1}^n(t) + X_{N_2}^n(t) \geq 2\big)$ 表示在时间 t时，u 的两个随机抽取的邻居 N_1 和 N_2 以及个体 u 自身之间的多数意见。

图结构：全文中，我们假设对于每个 n，图 G_n 都是 d_n-正则的，即对于所有 $u \in V_n$，$|N_u| = d_n$。此外，我们假设图 G_n 属于一个序列$\{G_n\}_n$，该序列满足以下性质：

$$\phi_n \geq \phi > 0, \forall n, \tag{3}$$

其中，ϕ_n 表示 G_n 的导通率，$\phi > 0$ 是一个独立于 n的常数。回顾一下，G_n 的导通率 ϕ_n 定义如下：

$$\phi_n = \min_{S \subseteq V_n : |S| \leq n/2} \frac{E(S,S^c)}{d_n|S|} = \min_{S \subseteq V_n} \frac{E(S,S^c)}{d_n \min\left(|S|,|S^c|\right)}, \tag{4}$$

其中，对于 G_n 的任意节点子集 $S \subseteq V_n$，$E(S,S^c) = |\{(u,v) \in E_n :\ u \in S, v \in S^c\}|$ 表示连接 S 中某个节点与 $S^c = V - S$ 中某个节点的边数。直观而言，由

(3) 给出的性质意味着，对于序列中的每个图 G_n ，任意较大的节点子集都通过大量边与网络其余部分相连。常数 ϕ 的值越大，连通性越好。满足上述两个性质的图序列 $\{G_n\}_n$ 称为 ϕ-扩展正则图族。扩展图也可以通过其谱性质来刻画。具体来说，如果 λ_n 表示 G_n 的缩放邻接矩阵的第二大特征值（按绝对值计），并且对于某个固定常数 $\lambda \in \in(0, 1)$ 以及所有 n，都有 $\lambda_n \leq \lambda < 1$ ，那么图序列 $(G_n)_n$ 称为 λ-扩展图族。这两个定义的等价性可由 Cheeger不等式看出，该不等式指出 $\sqrt{2(1-\lambda_n)} \geq \phi_n \geq (1-\lambda_n)/2$。

吸收态：在上述假设下，对于每个 n，过程 $\mathbf{X}^n$ 是定义在 $\{0,1\}^n$ 上的马尔可夫链。此外，由于每个图都是扩展图，序列 $\{G_n\}_n$ 中的每个图 G_n 都是连通图（因为对于每个 n，$\phi_n \geq \phi > 0$ 都成立）。这意味着马尔可夫链 $\mathbf{X}^n$ 只有两个吸收态 0 和 1，分别对应于所有个体的意见都是意见 0 和意见 1。此外，由于 G_n 连通，从任意非吸收态出发，都可以在有限步内到达任一吸收态。因此，链 $\mathbf{X}^n$ 以概率 1 在有限时间内被吸收到状态 0 或状态 1。我们有时将吸收时间称为共识时间。我们的分析主要旨在找出在偏好意见 1 上达成共识的条件，并刻画共识时间如何随网络规模 n、网络拓扑（由 ϕ 或 λ 描述）、偏置参数（q_0 和 q_1）以及由 $\mathbf{X}(0)$ 给出的系统初始状态而变化。

记号：在整个分析过程中，我们用 $A_t = A(\mathbf{X}^n(t))$（分别用 $B_t = B(\mathbf{X}^n(t))$）表示时间 t意见为 1 （分别为意见 0 ）的个体数量。稍微滥用一下记号，我们也用 A_t （分别用 B_t ）表示时间 t 意见为 1（分别为意见0）的个体集合。我们用 $\Delta_{BA}(t)$（分别用 $\Delta_{AB}(t)$）表示从时间步 t到 $t+1$，意见从 0（分别从 1）转变为意见 1（分别转变为意见 0）的个体数量。此外， $\Delta(t) = A_{t+1} - A_t = B_t - B_{t+1}$表示从时间步 t 到 $t+1$，意见为 1 的个体数量的增量。除非另有说明，所有期望和概率均以过程 $\mathbf{X}^n$的当前状态为条件。

4 主要结果

本节总结我们的主要发现及其影响，并讨论证明这些结果所用的核心思路。技术细节将在后续章节中给出。

对于偏置投票模型，我们的主要结果如下定理所述：

定理1. 设 $\{G_n\}_n$ 是一个 ϕ-扩展图族，由正则图构成。那么，存在一个常数$\gamma \equiv \gamma(q_0, q_1, \phi) \in (0, 1)$，使得在偏置投票者规则下，若 $A(0) = \Omega(\log n)$，则以至少 $1 - O(\log n/n^{\gamma})$ 的概率，优势意见 1 将在

$$O\left(\frac{\log n}{\log\left(1+\frac{q_0-q_1}{2}\phi\right)}\right) + O\left(\frac{\log n}{\log\left(\frac{1}{1-(q_0-q_1)\phi}\right)}\right)$$

时间步。

请注意，在上述定理中，共识时间表达式中的每一项都按$O(\log n)$增长。然而，它们的主导常数各不相同，且取决于扩展参数ϕ。它们还对应动力学中的两个不同阶段（如分析部分所述）。因此，我们在定理中将它们保留为独立的项。该定理表明，即使优势意见的初始个体数仅为网络规模的对数级，偏置投票模型仍能在 $O(\log n)$步内以高概率使优势意见达成共识

当优势意见的个体初始数量仅为网络规模的对数级时也是如此。这与经典投票规则形成鲜明对比：后者以高概率需要 $O(n)$步才能达成共识。此外，该结果对所有正参数 ϕ均成立。这意味着，即使对于扩展性质较差的扩展图（即 ϕ 接近0），也能在 $O(\log n)$时间内达成共识。还请注意，共识速度取决于偏置参数 q_0和 q_1 之差。只要该差严格为正，就能在对数时间内达成共识。

对于二选模型，我们的主要结果总结如下定理：

定理 2. 设 $\{G_n\}_n$ 是一族 λ-扩展正则图，且对于某个正常数 $c \in$，有 $\lambda^2 \leq q_0/(q_0+q_1) - c$。此外，设 $\gamma \leq c$ 为正常数。若 $(1-\gamma) \geq A(0)/\underline{n \geq q_1}/(q_0+q_1) + \max\left(\lambda_n^2, \sqrt{\log n/4n}\right)$，则存在正常数 $\alpha = \alpha(q_0, q_1, \gamma, c) \in (0,1)$，使得以至少 $1 - O(1/n^\alpha)$ 的概率，经过

$$O\left(\frac{\log n}{\log \frac{1}{(1-q_1 c(q_0/(q_0+q_1)-\gamma))}}\right)$$

时间步。

我们首先指出，条件 $\lambda^2 \leq q_0/(q_0+q_1) - c$ 意味着扩展图必须具有足够大的谱隙，才能在有偏双选规则下于对数时间内达成共识。然而，对于稠密图，该条件显然成立，因为当 $d(n) = \omega(1)$ 时，这类图有 $\lambda_n = o(1)$。当 d 足够大时（例如， $d \geq 4/(q_0/(q_0+q_1) - c)$），随机 d-正则图也以高概率满足定理 2 的条件。这是因为对于这类图，任意 $\epsilon > 0$ 均有 $\lambda \leq (2\sqrt{d-1} + \epsilon)/d$，且该结论以高概率成立。因此，定理 2 的结果适用于一大类图，包括稠密图和稀疏图。此外，该定理还表明，要在对数时间内达成共识，初始时拥有优势意见的个体比例必须高于某个阈值。尽管该阈值取决于图的谱隙，但对于稠密图（即 $d_n = \omega(1)$），由于这类图满足 $\lambda_n = o(1)$，只要令 n 足够大，该阈值就可以任意接近 $q_1/(q_0+q_1)$。注意， $q_1/(q_0+q_1)$ 已被证明是完全图的渐近阈值，见 [10, 9]。因此，我们的结果恢复了关于完全图的已知结果。根据定理 2，常数 c 越大，共识时间越短。注意，只有当 λ 较小时， c 才可能取较大的值；也就是说，图具有良好的扩展性质。这印证了一种自然直觉：在扩展性质更好的图上，动力学预期会更快收敛。

证明上述定理的关键在于分析漂移 $\Delta(t)$，它刻画了每个时间步意见为意见 1 的个体数量的增加。若要使优势意见快速达成共识，大多数时间步的漂移都应为非负。为此，我们基本上分三步进行。第一步，求出期望漂移的一个非负下界。第二步，利用集中不等式证明每一步的漂移以高概率集中在其均值附近。因此，结合前两步，我们得到一个以高概率成立的漂移下界。最后一步是在动力学的每个时间步递归地利用这个下界，直至达成共识。具体做法是将动力学分为两个阶段。第一阶段使持有优势意见的个体比例超过某个阈值。第二阶段进一步增加持有优势意见的个体数量，最终达成共识。

5 偏置投票者规则的分析

本节证明偏置投票模型的主要结果。如前所述，关键在于分析马尔可夫链 $\mathbf{X}^n$ 在每一步的漂移 $\Delta(t)$。本节中，我们假设图序列 $\{G_n\}_n$ 是一个 ϕ-扩展图族。我们首先将漂移表示为网络当前状态的函数。

引理1. 对于偏置投票模型，以下结论成立。

$$\mathbb{E}\left[\Delta_{BA}(t)\right] = q_0 \frac{E(A_t, B_t)}{d_n}, \tag{5}$$

$$\mathbb{E}\left[\Delta_{AB}(t)\right] = q_1 \frac{E(A_t, B_t)}{d_n}, \tag{6}$$

$$\mathbb{E}\left[\Delta(t)\right] = (q_0 - q_1) \frac{E(A_t, B_t)}{d_n}. \tag{7}$$

证明. 对于每个个体 $i \in B(t)$，令 $Z_i(t)$表示一个伯努利随机变量：当个体 i 在时间 $t+1$ 改变为意见 1 时取值为 1，否则取值为 0。于是，$\mathbb{E}\left[\Delta_{BA}(t)\right] = \sum_{i \in B_t} \mathbb{E}\left[Z_i(t)\right]$。此外，在偏置投票者规则下，$\mathbb{E}\left[Z_i(t)\right] = \mathbb{P}\left(Z_i(t) = 1\right) = q_0(d_i^A(t)/d_n)$，其中 $d_i^A(t)$表示个体 i 在集合 A中的邻居数。因此，

$$\mathbb{E}\left[\Delta_{BA}(t)\right] = q_0 \sum_{i \in B(t)} (d_i^A(t)/d_n) = q_0 E(A_t, B_t)/d_n,$$

其中，在最后一个等式中，我们利用了 $E(A_t, B_t) = \sum_{i \in B_t} d_i^A(t)$这一事实。这就证明了（5）。(6) 的证明类似。最后，结合（5）、（6），并利用 $\Delta(t) = \Delta_{BA}(t) - \Delta_{AB}(t)$这一事实，我们得到（7）。

□

前一个引理表明，每一步的期望漂移均非负。现在我们将证明，过程 $\mathbf{X}^n$ 的漂移不仅在期望意义下非负，而且以高概率沿着样本路径也非负。

引理 2. 对于偏置投票模型，以下结论对每个 $t \geq 0$ 都成立。

$$\mathbb{P}\left(\Delta(t) \leq \frac{q_0 - q_1}{2}\ \phi\ \min(A_t, B_t)\right) \leq 2e^{-\gamma \min(A_t, B_t)} \tag{8}$$

其中 $\gamma \equiv \gamma(q_0, q_1, \phi) \in (0, 1)$ 是一个仅取决于 q_0、q_1 和 ϕ 的常数。

证明。我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\Delta(t) \leq \frac{q_0 - q_1}{2}\phi \min(A_t, B_t)\right) \leq \mathbb{P}\left(\Delta_{BA}(t) - \Delta_{AB}(t) \leq \frac{q_0 - q_1}{2}\ \frac{E(A_t, B_t)}{d_n}\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\Delta_{BA}(t) \leq (1 - \epsilon_1) q_0 \frac{E(A_t, B_t)}{d_n}\right) + \mathbb{P}\left(\Delta_{AB}(t) \geq (1 + \epsilon_2) q_1 \frac{E(A_t, B_t)}{d_n}\right)
\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $\epsilon_1 = (q_0 - q_1)/4q_0 \in (0, 1)$，且 $\epsilon_2 = (q_0 - q_1)/4q_1 > 0$。在第一个不等式中，我们使用了图的扩展性质；在第二个不等式中，我们使用了并合界。

现在，我们将对式（9）右侧出现的每一项进行界定。为此，我们将使用以下 Chernoff–Hoeffding不等式：设 $Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N$ 为相互独立的随机

变量 $0 \leq Y_i \leq 1$、 $i = 1$、2、.....、 N之和。那么，对于任意 $0 \leq \epsilon_1 \leq 1$和任意 $\epsilon_2 > 0$，以下不等式成立：

$$\mathbb{P}\left(Y \leq (1-\epsilon_1)\mathbb{E}\left[Y\right]\right) \leq \exp\left(-\epsilon_1^2 \mathbb{E}\left[Y\right]/3\right), \tag{10}$$

$$\mathbb{P}\left(Y \geq (1+\epsilon_2)\mathbb{E}\left[Y\right]\right) \leq \left(\frac{e^{\epsilon_2}}{(1+\epsilon_2)^{1+\epsilon_2}}\right)^{\mathbb{E}[Y]}. \tag{11}$$

我们之前已经证明， Δ_{BA} 和 Δ_{AB} 都可以表示为相互独立的伯努利随机变量之和。因此，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\Delta_{BA}(t) \leq (1-\epsilon_1) q_0 \frac{E(A_t, B_t)}{d_n}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\Delta_{BA}(t) \leq (1-q_0)\mathbb{E}\left[\Delta_{BA}\right]\right) \leq \exp\left(-\frac{\epsilon_1^2}{3}\,\mathbb{E}\left[\Delta_{BA}\right]\right) \leq \exp\left(-\frac{\epsilon_1^2}{3} q_0 \phi \min(A_t, B_t)\right)
\end{aligned} \tag{12}$$

其中 $\epsilon_1 = \frac{q_0 - q_1}{4q_0} \in \in$(0,1)。上式中，第一行由 (5) 得出，第二行由 (10) 得出，最后一行用到了 (5) 以及图的扩展性质。

类似地，利用 (6)、(11) 以及图的扩展性质，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\Delta_{AB}(t) \geq \left(q_1 \frac{E(A_t, B_t)}{d_n} + \frac{q_0 - q_1}{4}\frac{E(A_t, B_t)}{d_n}\right)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\Delta_{AB}(t) \geq \mathbb{E}\left[\Delta_{AB}\right]\left(1 + \frac{q_0 - q_1}{4q_1}\right)\right) \\
&\leq \left(\frac{e^{\epsilon_2}}{(1+\epsilon_2)^{1+\epsilon_2}}\right)^{\mathbb{E}[\Delta_{AB}]} \\
&= \exp\left(-\epsilon_3 \mathbb{E}\left[\Delta_{AB}\right]\right) \\
&\leq 2\exp\left(-\epsilon_3 q_1 \phi\ \min(A_t, B_t)\right),
\end{aligned} \tag{13}$$

其中 $\epsilon_2 = \frac{q_0 - q_1}{4q_1} > 0$ 和 $\epsilon_3 = -$满足 $\log \frac{e^{\epsilon_2}}{(1+\epsilon_2)^{1+\epsilon_2}} > 0$。利用 (12)、(13) 和 (9)，我们得到引理的结论，其中 $\gamma = \phi \geqslant \min(\frac{\epsilon_1^2}{3} q_0,\ \epsilon_3 q_1)$，且 $\in \in$(0, 1)。 □

引理 3. 对任意 $i \leq n/2$ ，我们有

$$\mathbb{P}\left(B_{t+1} > n/2 | B_t = i\right) \leq 2\exp\left(-\frac{(q_0 - q_1)^2 \phi^2}{2} n\right) \tag{14}$$

证明。令 $C(t)$ 表示在时间 t 持有相反意见的邻居的节点集合。此外，对于 $v \in B(t) \cap C(t)$，令 $Y_v(t) \in \{0, 1\}$ 表示伯努利随机变量，当且仅当节点 v 在时间 t 将其意见从 0 改为 1 时取值为 1。类似地，对于 $v \in A(t) \cap C(t)$，令 $Y_v \in \{-1, 0\}$ 为伯努利随机变量，当且仅当节点 v 在时间 t 将其意见从 1 改为 0 时取值为 -1 。于是，我们可以将漂移表示为 $\Delta(t) = \sum_{v \in C(t)} Y_v$。

现在我们使用以下版本的切尔诺夫–霍夫丁不等式：若 Y_l、$l = 1\ 2\ \ldots\ N$ $a_l \leq Y_l \leq b_l$ $\eta > 0$ 、.....是相互独立的随机变量，且满足 $Y = \sum_{l=1}^{N} Y_l$ 以及，则

$$\mathbb{P}\left(|Y - \mathbb{E}\left[Y\right]| \geq \eta\right) \leq 2\exp\left(-2\eta^2 / \sum_{l=1}^{N} (b_l - a_l)^2\right). \tag{15}$$

将上述切尔诺夫–霍夫丁不等式应用于 $Y = \Delta(t)$，可得

$$\mathbb{P}\left(|\Delta(t) - \mathbb{E}\left[\Delta(t)\right]| \geq \eta\right) \leq 2\exp\left(-2\eta^2/|C(t)|\right) \leq 2\exp\left(-2\eta^2/n\right), \tag{16}$$

其中，最后一个不等式成立是因为 $|C(t)| \leq n$。

现在注意到，对于任意 $i \leq n/2$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(B_{t+1} > n/2 | B_t = i\right) &= \mathbb{P}\left(\Delta(t) \leq -(n/2 - i) | B_t = i\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\Delta(t) - \mathbb{E}\left[\Delta(t)\right] \leq -(n/2 - i) - (q_0 - q_1)\phi i | B_t = i\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(|\Delta(t) - \mathbb{E}\left[\Delta(t)\right]| \geq n/2 - (1 - (q_0 - q_1)\phi)i | B_t = i\right) \\
&\leq 2\exp\left(-2(n/2 - (1 - (q_0 - q_1)\phi)i)^2/n\right) \\
&\leq 2\exp\left(-\frac{(q_0 - q_1)^2\phi^2}{2}n\right),
\end{aligned}$$

其中，第二行由（7）以及对于 $i \leq n/2$ 有 $E(A_t, B_t) \geq d_n\phi i$这一事实得出；第四行由（16）得出；最后一行成立是因为 $(n/2 - (1 - (q_0 - q_1)\phi)i)$ 在范围 $i \leq n/2$ 内于 $i = n/2$ 时取最小值。 □

在接下来的分析中，我们将系统的演化划分为两个阶段。第一阶段在意见 1 为少数意见时开始，并在意见 1 的个体数量首次超过 $n/2$ 时结束。第二阶段在意见 1 已经成为多数意见时开始，并在就意见 1 达成共识时结束。接下来的几个引理刻画了每个阶段所经历的时间。

引理4。定义 $T_1 = \lceil \log \frac{n}{2A_0} / \log(1 + \frac{q_0 - q_1}{2}\phi) \rceil$。在偏置投票者规则下，从 $A_0 < n/2$ 开始，意见 1 首次成为多数意见所需的时间步数为 T_1 的概率至少为 $1 - 2T_1 e^{-\gamma A_0}$，其中 γ 的定义见引理 2。

证明。令 $r = (1 + \frac{q_0 - q_1}{2}\phi) > 1$。注意到 T_1 的定义意味着 $r^{T_1}A_0 \geq \frac{n}{2}$。因此，若将事件 F 和 G 定义为 $F = \{\exists t \in \{0, 1, ..., T_1 - 1\}$ 使得 $A_{t+1} < rA_t\}$ 和 $G = \left\{A_t < \frac{n}{2}\ \forall t \in \{0, \ldots, T_1\}\right\}$，则 $F^c \subseteq G^c$ 或 $G \subseteq F$。现在，对每个 $\tau \in \{0, 1, \ldots, T_1 - 1\}$，定义$F_\tau = \{A_{\tau+1} < rA_\tau$ 和 $A_{t+1} \geq rA_t,\ \forall t \in \{0, 1, \ldots, \tau - 1\}\}$ 和 $G_\tau = \left\{A_t < \frac{n}{2}\ \forall t \in \{0, 1 \ldots, \tau\}\right\}$。显然，$F = \cup_{\tau=0}^{T_1-1} F_\tau$ 和 $G \subseteq G_\tau$。因此，我们有

$$\mathbb{P}\left(G | A_0\right) = \mathbb{P}\left(G \cap F | A_0\right) = \sum_{\tau=0}^{T_1-1} \mathbb{P}\left(G \cap F_\tau | A_0\right) \leq \sum_{\tau=0}^{T_1-1} \mathbb{P}\left(G_\tau \cap F_\tau | A_0\right). \tag{17}$$

但我们注意到

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(G_\tau \cap F_\tau | A_0\right) &\leq \mathbb{P}\left(A_{\tau+1} \leq rA_\tau \middle| A_0, rA_t < A_{t+1} < \frac{n}{2}\ \forall t \in \{0, \ldots, \tau - 1\}\right) \\
&= \frac{\sum_{(\mathbf{x}(\tau), \ldots, \mathbf{x}(0)) \in H} \mathbb{P}\left(A_{\tau+1} \leq rA_\tau | \mathbf{X}^n(\tau) = \mathbf{x}(\tau)\right) \mathbb{P}\left(\mathbf{X}^n(\tau) = \mathbf{x}(\tau), \ldots, \mathbf{X}^n(0) = \mathbf{x}(0)\right)}{\mathbb{P}\left((\mathbf{X}^n(\tau), \ldots, \mathbf{X}^n(0)) \in H\right)}
\end{aligned} \tag{18}$$

其中 $H = \left\{A(\mathbf{x}(0)) = A_0, rA(\mathbf{x}(t)) < A(\mathbf{x}(t+1)) < \frac{n}{2}\ \forall t \in \{0, \ldots, \tau - 1\}\right\}$。这里，第二行的等式由过程 $\mathbf{X}^n$ 的马尔可夫性质得出。现在由引理 2 可得

$$\mathbb{P}\left(A_{\tau+1} \leq rA_\tau | \mathbf{X}^n(\tau) = \mathbf{x}(\tau)\right) \leq 2\exp\left(-\gamma A(\mathbf{x}(\tau))\right) \leq 2\exp\left(-\gamma A(\mathbf{x}(0))\right) = 2\exp\left(-\gamma A_0\right)$$

对于满足 $(\mathbf{x}(\tau) \ldots, \mathbf{x}(0)) \in H$ 的每个 $\mathbf{x}(\tau)$，将其代入 (18)，并结合 (17)，可得 $\mathbb{P}(G|A_0) \leq 2T_1\exp(-\gamma A_0)$，从而完成引理的证明。 □

上述引理表明，当 A_0 足够大时，第一阶段将在 T_1 时间内以高概率结束。特别地，对于 $A_0 = \Omega(\log n) \leq n/2$，我们得到以下推论。

推论 1. 如果 $A_0 = \Omega(\log n) \leq n/2$，则第一阶段以至少 $1 - O(\log n/n^{\gamma})$ 的概率在 $O(\log n/\log(1 + \frac{q_0 - q_1}{2}\phi))$ 个时间步内完成，其中 γ 的定义见引理 2。

下一个引理刻画了完成第二阶段所需的时间。

引理 5. 定义 $T_2 = \lceil \frac{2\log n \log\frac{1}{\epsilon}}{(q_0 - q_1)\phi} \rceil$。在偏置投票者规则下，从 $B_0 \leq n/2$ 开始，以至少 $1 - O(1/n)$ 的概率在 T_2 个时间步内就意见 1 达成共识。

证明。如果在任意时间 t，我们有 $B_t \leq \frac{n}{2} \leq A_t$，那么由式（8）可得，

$$\mathbb{P}\left(\Delta(t) \leq \frac{q_0 - q_1}{2}\ \phi\ B_t \middle| B_t \leq n/2\right) = \mathbb{P}\left(B_{t+1} \geq (1 - \frac{q_0 - q_1}{2}\ \phi)\ B_t \middle| B_t \leq n/2\right) \leq 2e^{-\gamma B_t}.$$

现在，我们观察到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[B_{T_2} | B_0 \leq n/2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[B_{T_2} \cdot \left(\mathbb{I}\left(B_{T_2-1} \leq \frac{n}{2}\right) + \mathbb{I}\left(B_{T_2-1} > \frac{n}{2}\right)\right) \middle| B_0 \leq \frac{n}{2}\right] \\
&\leq \left(\sum_{i \leq \frac{n}{2}} \mathbb{E}\left[B_{T_2} \cdot \mathbb{I}(B_{T_2-1} = i) | B_0 \leq \frac{n}{2}\right]\right) + n\mathbb{E}\left[\mathbb{I}\left(B_{T_2-1} > \frac{n}{2}\right) | B_0 \leq \frac{n}{2}\right] \\
&= \left(\sum_{i \leq \frac{n}{2}} \mathbb{E}\left[B_{T_2} | B_{T_2-1} = i\right] \cdot \mathbb{P}\left(B_{T_2-1} = i | B_0 \leq \frac{n}{2}\right)\right) + n\mathbb{P}\left(B_{T_2-1} > \frac{n}{2} | B_0 \leq \frac{n}{2}\right) \qquad (19)
\end{aligned}$$

我们还可以将最后一个不等式右侧第二项中的概率进一步分解如下。

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(B_{T_2-1} > \frac{n}{2} | B_0 \leq \frac{n}{2}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(B_{T_2-1} > \frac{n}{2}, B_{T_2-2} \leq \frac{n}{2} | B_0 \leq \frac{n}{2}\right) + \mathbb{P}\left(B_{T_2-1} > \frac{n}{2}, B_{T_2-2} > \frac{n}{2} | B_0 \leq \frac{n}{2}\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(B_{T_2-1} > \frac{n}{2}, B_{T_2-2} \leq \frac{n}{2} | B_0 \leq \frac{n}{2}\right) + \mathbb{P}\left(B_{T_2-2} > \frac{n}{2} | B_0 \leq \frac{n}{2}\right) \\
&\leq \sum_{t=0}^{T_2-2} \mathbb{P}\left(B_{t+1} > \frac{n}{2}, B_t \leq \frac{n}{2} | B_0 \leq \frac{n}{2}\right) \\
&\leq \sum_{t=0}^{T_2-2} \mathbb{P}\left(B_{t+1} > \frac{n}{2} | B_0 \leq \frac{n}{2}, B_t \leq \frac{n}{2}\right). \qquad (20)
\end{aligned}$$

因此，利用（19）中的最后一个不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[B_{T_2} | B_0 \leq n/2\right] \leq &\left(\sum_{i \leq \frac{n}{2}} \mathbb{E}\left[B_{T_2} | B_{T_2-1} = i\right] \cdot \mathbb{P}\left(B_{T_2-1} = i | B_0 \leq \frac{n}{2}\right)\right) \\
&+ n \sum_{t=0}^{T_2-2} \mathbb{P}\left(B_{t+1} > \frac{n}{2} | B_0 \leq \frac{n}{2}, B_t \leq \frac{n}{2}\right) \qquad (21)
\end{aligned}$$

由于 $\Delta(t) = B_t - B_{t+1}$，利用（7）和扩展性质可得

$$\mathbb{E}\left[B_{t+1}|B_t \leq \frac{n}{2}\right] \leq rB_t, \tag{22}$$

其中 $r = (1-(q_0-q_1))\phi < 1$。

此外，利用 $\mathbf{X}^n$ 的马尔可夫性质，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(B_{t+1} > \frac{n}{2}|B_0 \leq \frac{n}{2}, B_t \leq \frac{n}{2}\right) \\
&= \frac{\sum_{(\mathbf{x}(t),\mathbf{x}(0))\in H} \mathbb{P}\left(B_{t+1} > \frac{n}{2}|\mathbf{X}^n(t) = \mathbf{x}(t)\right) \mathbb{P}\left(\mathbf{X}^n(t) = \mathbf{x}(t), \mathbf{X}^n(0) = \mathbf{x}(0)\right)}{\mathbb{P}\left((\mathbf{X}^n(t), \mathbf{X}^n(0)) \in H\right)} \\
&\leq 2\exp\left(-\frac{(q_0-q_1)^2\phi^2}{2}n\right)
\end{aligned} \tag{23}$$

其中 $H = \{(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(0)) : B(\mathbf{x}(t)) \leq n/2, B(\mathbf{x}(0)) \leq n/2\}$，且最后一个不等式由引理 3 得出。现在，利用 (22)、(23) 和 (21)，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[B_{T_2}|B_0 < \frac{n}{2}\right] &\leq \sum_{i\leq\frac{n}{2}} ri\ \mathbb{P}\left(B_{T_2-1} = i|B_0 < \frac{n}{2}\right) + 2n(T_2-1)\exp\left(-\frac{(q_0-q_1)^2\phi^2}{2}n\right) \\
&\leq r\mathbb{E}\left[B_{T_2-1}|B_0 < \frac{n}{2}\right] + 2n(T_2-1)\exp\left(-\frac{(q_0-q_1)^2\phi^2}{2}n\right)
\end{aligned} \tag{24}$$

递归地应用上述结果，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[B_{T_2}|B_0 < \frac{n}{2}\right] &\leq r^{T_2}\mathbb{E}\left[B_0\right] + 2n\exp\left(-\frac{(q_0-q_1)^2\phi^2}{2}n\right)\sum_{k=1}^{T_2-1}(T_2-k)r^{k-1} \\
&\leq r^{T_2}\ \frac{n}{2} + 2n\exp\left(-\frac{(q_0-q_1)^2\phi^2}{2}n\right)\frac{T_2}{1-r}
\end{aligned} \tag{25}$$

将 $T_2 = \lceil {}^{2}\text{对数}\frac{1}{r}{}^{n}\rceil$ ~~对数~~代入右侧，我们有

$$\mathbb{E}\left[B_{T_2}|B_0 < \frac{n}{2}\right] \leq \frac{1}{2n} + \frac{4n\log n}{(1-r)\log\frac{1}{r}}\exp\left(-\frac{(q_0-q_1)^2\phi^2}{2}n\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{26}$$

因此，利用上述结果和马尔可夫不等式，我们得到，

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(B_{T_2} = 0|B_0 < \frac{n}{2}\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(B_{T_2} \geq 1|B_0 < \frac{n}{2}\right) \\
&\geq 1 - \mathbb{E}\left[B_{T_2}|B_0 < \frac{n}{2}\right] \\
&\geq 1 - O\left(\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}$$

这就证明了引理中的结论。 □

定理 1 的证明：利用 $\mathbf{X}^n$ 的马尔可夫性质，该定理的结论可由推论 1 和引理 5 推出。

□

注1. 根据引理4可知，若 $A_0 = \lceil np\rceil$ 对于某个常数 $p > 0$成立，那么第一阶段将在 $O(1)$ 时间内完成，且概率至少为 $1 - O(\exp(-n\gamma p))$。这意味着，与最初只有对数数量的个体持有优势意见的情形相比，当最初有一定比例的个体持有优势意见时，意见更快地达成共识，且概率更高。

6 有偏双选择规则的分析

本节将分析有偏双选规则，并证明定理 2。在整个分析过程中，我们假设序列 $\{G_n\}_n$ 是一个 λ-扩展图，并用 λ_n表示 G_n的缩放邻接矩阵的第二大特征值（按绝对值计）。与前文一样，分析的第一步是求出每个时间步期望漂移的下界。与投票者模型相比，在二选模型中求得这一界更为困难，因为漂移与网络当前状态之间呈非线性关系。下面的引理刻画了二选模型中的期望漂移。

引理 6. 对于有偏二选模型，我们有

$$\mathbb{E}\left[\Delta(t)\right] \geq B_t \left(q_1(1-\lambda_n^2)\frac{A_t}{n} - \frac{q_1^2}{q_0+q_1} \right) \tag{27}$$

证明。对于每个个体 $i \in B(t)$，令 $Z_i(t)$ 表示一个伯努利随机变量：若该个体在时间 $t+1$ 转变为意见 1，则取值为 1；否则取值为 0。于是，$\mathbb{E}\left[\Delta_{BA}(t)\right] = \sum_{i\in B_t} \mathbb{E}\left[Z_i(t)\right]$。此外，在有偏双选择规则下，$\mathbb{E}\left[Z_i(t)\right] = \mathbb{P}(Z_i(t)=1) = q_0(d_i^A(t)/d_n)^2$，其中 $d_i^A(t)$ 表示个体 i 在集合 A 中的邻居数量。因此，$\mathbb{E}\left[\Delta_{BA}(t)\right] = \sum_{i\in B(t)} q_0(d_i^A(t)/d_n)^2$。类似地，我们有 $\mathbb{E}\left[\Delta_{AB}(t)\right] = \sum_{i\in A(t)} q_1(d_i^B(t))/d_n)^2$。因此，结合上述结果可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\Delta(t)\right] &= \sum_{i\in B_t} q_0 \left(\frac{d_i^A(t)}{d_n}\right)^2 - \sum_{i\in A_t} q_1 \left(\frac{d_i^B(t)}{d_n}\right)^2, \\
&= q_1 \left(\sum_{i\in B_t} \left(\frac{d_i^A(t)}{d_n}\right)^2 - \sum_{i\in A(t)} \left(\frac{d_i^B(t)}{d_n}\right)^2 \right) + (q_0-q_1) \sum_{i\in B_t} \left(\frac{d_i^A(t)}{d_n}\right)^2
\end{aligned} \tag{28}$$

因此，要获得 $\mathbb{E}\left[\Delta(t)\right]$, 的下界，只需分别获得上一个等式右侧两个项的下界。为界定第一项，我们使用 [7] 中的以下不等式：

$$\sum_{i\in B_t} \left(\frac{d_i^A(t)}{d_n}\right)^2 - \sum_{i\in A_t} \left(\frac{d_i^B(t)}{d_n}\right)^2 \geq B_t \left((1-\lambda_n^2)\frac{A_t}{n} - 2\theta_t(1-\theta_t) \right), \tag{29}$$

其中 $\theta_t = E(A_t, B_t)/dB_t$。为界定第二项，我们使用詹森不等式，注意到

$$\sum_{i\in B_t} \left(\frac{d_i^A}{d_n}\right)^2 \geq \frac{1}{B_t d_n^2} (E(A_t, B_t))^2 = B_t \theta_t^2 \tag{30}$$

将上述结果代入（28），可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\Delta(t)\right] &\geq q_1 B_t \left((1-\lambda_n^2)\frac{A_t}{n} - 2\theta_t(1-\theta_t) \right) + (q_0-q_1) B_t \theta_t^2 \\
&= B_t \left(q_1(1-\lambda_n^2)\frac{A_t}{n} - (2q_1\theta_t - (q_0+q_1)\theta_t^2) \right).
\end{aligned}$$

由于根据定义，θ_t 始终位于范围 $[0,1]$, 内，最后一个等式右侧的最小值在 $\theta_t = q_1/(q_0+q_1)$ 时取得。将该值代入最后一个表达式，即可得到引理中所述的下界。

□

我们注意到，在得到上述引理中的下界时，并未使用图的谱性质 G_n 。现在，我们利用扩展图的谱性质，获得期望漂移的一个更精细下界，并将其用于分析双选择更新规则下的动力学。为陈述该结果，我们定义 ϵ（t）=（$A_t - B_t$）/n 为任意时间 t 两个意见之间的不平衡度，并定义 ϵ'（t）=ϵ（t）+（$q_0 - q_1$）/（$q_0 + q_1$）为平移不平衡度。在下面的引理中，其证明见附录，我们利用图的谱性质得到了期望漂移的一个更精细下界。

引理 7. 假设存在某个正常数 $c \in (0, q_0/(q_0+q_1))$，使得 $\lambda_n^2 \le q_0/(q_0+q_1) - c$ 对所有 n 均成立。那么，对所有 $\epsilon' \ge 2\lambda_n^2$，我们有

$$\mathbb{E}\left[\Delta(t)|\epsilon'(t)=\epsilon'\right] \ge \frac{B_t q_1}{2} c\epsilon' \tag{31}$$

上述引理意味着，对任意 $\epsilon' \ge 2\lambda_n^2$，以下结论成立。

$$\mathbb{E}\left[B_{t+1}|\epsilon'(t)=\epsilon'\right] = \mathbb{E}\left[B_t - \Delta(t)|\epsilon'(t)=\epsilon'\right] \le B_t\left(1 - \frac{q_1 c}{2}\epsilon'\right).$$

这意味着，如果意见之间的不平衡度足够高，那么意见0的个体数量在期望上至少会减少一个因子。在下一个引理中，我们将证明，这种减少不仅发生在期望上，而且以高概率沿着过程 $\mathbf{X}^n$ 的样本路径发生。

引理 8. 假设存在一个正常数 $c \in (0, q_0/(q_0+q_1))$，使得 $\lambda_n^2 \le q_0/(q_0+q_1) - c$ 对所有 n 均成立。令 $\gamma \le c$ 为一个正常数。以下陈述成立。

1. 对于足够大的 n，我们有

$$\mathbb{P}\left(\Delta(t) \le \frac{B_t q_1}{4} c\epsilon' \middle| \epsilon'(t)=\epsilon'\right) \le \frac{2}{n^\alpha}, \tag{32}$$

where $\epsilon' \in \Gamma = \left[\max\left(2\lambda_n^2, \sqrt{\frac{\log n}{n}}\right), \frac{2q_0}{q_0+q_1} - 2\gamma\right]$ *and* $\alpha = \frac{\gamma^2 q_1^2 c^2}{8} \in (0,1)$.

2. 对于任意 $i \le n\gamma$，我们有

$$\mathbb{P}\left(B_{t+1} > n\gamma | B_t = i\right) \le 2\exp(-n\beta), \tag{33}$$

where $\beta = 2\left(\frac{q_0}{q_0+q_1} - \gamma\right)^2 \gamma^2 q_1^2 c^2 > 0$.

证明。为证明引理的第一条结论，注意到 $\gamma \le c$ 确保当 n足够大时，区间 Γ非空。此外，$\epsilon'(t) \in \Gamma$ 推出 $B_t \ge n\gamma$, $\epsilon'(t) \ge 2\lambda_n^2$，且$n\epsilon'^2(t) \ge \log n$。与引理 3 的证明类似，我们将漂移 $\Delta(t)$ 表示为 $\Delta(t) = \sum_{v \in C(t)} Y_v(t)$，其中集合 $C(t)$ 和随机变量 $Y_v, v \in C(t)$ 的定义与引理 3 的证明中相同。我们有

$$\mathbb{P}\left(\Delta(t) \le \frac{B_t q_1}{4} c\epsilon' \middle| \epsilon'(t) = \epsilon'\right) \overset{(a)}{\le} \mathbb{P}\left(\Delta(t) \le \frac{\mathbb{E}\left[\Delta(t)|\epsilon'(t) = \epsilon'\right]}{2} \middle| \epsilon'(t) = \epsilon'\right)$$
$$\le \mathbb{P}\left(|\Delta(t) - \mathbb{E}\left[\Delta(t)|\epsilon'(t) = \epsilon'\right]| \ge \frac{\mathbb{E}\left[\Delta(t)|\epsilon'(t) = \epsilon'\right]}{2} \middle| \epsilon'(t) = \epsilon'\right)$$
$$\overset{(b)}{\le} 2\exp\left(-\frac{\mathbb{E}^2[\Delta(t)|\epsilon'(t) = \epsilon']}{2|C(t)|}\right) \overset{(c)}{\le} 2\exp\left(-\frac{B_t^2 q_1^2 c^2 \epsilon'^2(t)}{8n}\right) \overset{(d)}{\le} \frac{2}{n^\alpha} \tag{34}$$

其中，(a) 由 (31) 得出，(b) 由应用切尔诺夫–霍夫丁不等式 (16) 得出，(c) 由 (31) 以及 $|C(t)| \le n$ 这一事实得出，(d) 由以下事实得出： $B_t \ge n\gamma$ 以及 $n\epsilon'^2(t) \ge \log n$。为证明引理的第二条结论，我们注意到 $B_t = i \le n\gamma$ 推出 $\epsilon'(t) \ge 2q_0/(q_0 + q_1) - 2\gamma \ge 2\lambda_n^2$。因此，

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(B_{t+1} > n\gamma | B_t = i\right) &= \mathbb{P}\left(\Delta(t) < -(n\gamma - i) | B_t = i\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\Delta(t) - \mathbb{E}\left[\Delta(t)|B_t = i\right] < -(n\gamma - i) - iq_1 c\epsilon'/2 | B_t = i\right) \\
&\le \mathbb{P}\left(|\Delta(t) - \mathbb{E}\left[\Delta(t)|B_t = i\right]| > n\gamma - (1 - q_1 c\epsilon'/2)i | B_t = i\right) \\
&\le 2\exp\left(-2\frac{(n\gamma - (1 - q_1 c\epsilon'/2)i)^2}{n}\right) \\
&\le \exp(-n\beta)
\end{aligned}$$

其中，第二行由（31）得出，第四行由（16）得出，最后一行则基于以下事实： $\epsilon' \ge 2q_0/(q_0 + q_1) - 2\gamma$ 以及 $i \le n\gamma$。 □

我们将系统的演化分为第一阶段和第二阶段：第一阶段使意见为0的个体数量降至 $n\gamma$ 以下，第二阶段则进一步将其降至0。两个阶段所需的时间分别由以下两个引理刻画。这些引理的证明与引理4和引理 5的证明类似。为完整起见，我们在附录中给出证明。

引理9。假设存在正常数 $c \in (0, q_0/(q_0 + q_1))$，使得对所有 n， $\lambda_n^2 \le q_0/(q_0 + q_1) - c$，并令 $\gamma \le c$ 为正常数。若系统从满足 $\epsilon'(0) \in \Gamma$的初始配置开始，或者等价地

$$\gamma \le \frac{B(0)}{n} \le \frac{q_0}{q_0 + q_1} - \max\left(\lambda_n^2, \sqrt{\frac{\log n}{4n}}\right),$$

那么，当 n 足够大时，意见为 0 的个体数量首次降至 $n\gamma$ 以下，所需步数至多为 T_1，且其概率至少为 $1 - \frac{2T_1}{n^\alpha}$，其中 $T_1 = \lceil \log\left(\frac{B_0}{n\gamma}\right) / \log(1 - q_1 c\epsilon'(0)/4)^{-1} \rceil$，而$\alpha$ 的定义见引理 8。

注2. 我们注意到，若将 $\epsilon'(0)$ 选为任意小的正常数，且 n 足够大, 则对于满足 $\lambda_n = o(1)$ 的图，上述引理中的初始条件 $\epsilon'(0) \ge \max\left(2\lambda_n^2, \sqrt{\log n/n}\right)$ 可以成立。因此，对于足够大的稠密图，只需将 $\epsilon'(0)$ 选为任意正常数即可满足初始条件；等价地，可将 $B(0)/n$ 选为严格小于 $q_0/(q_0 + q_1)$ 的任意常数。这与关于完全图的结果一致。一般而言，若图序列是一个 λ- 扩展图，则对于足够大的 n，选取 $\epsilon'(0) \ge 2\lambda^2$ 即可满足引理中的初始条件。

备注 3. 我们注意到，在引理所述的初始条件下 $B_0/n < q_0/(q_0+q_1)$。因此，以至少 $1-O(1/n^\alpha)$ 的概率，$T_1 = O(1)$。

引理 10. 假设存在正常数 $c \in (0, q_0/(q_0+q_1))$，使得 $\lambda_n^2 \le q_0/(q_0+q_1) - c$，并令 $\gamma \le c$ 为正常数。那么，从有 $B_0 \le n\gamma$ 个个体持有意见0的状态开始，网络以至少 $1-O(1/n)$ 的概率，在 $O(\log n/\log(1/(1-q_1 c(q_0/(q_0+q_1) - \gamma))))$ 时间内达成共识。

定理 2 的证明 定理的证明可由引理9和引理10结合 X^n 的马尔可夫性质得出。

□

7 结论与未来方向

本文研究了在底层图属于正则图扩展图族的假设下，偏置对投票者规则和双选择规则动力学的影响。在我们的模型中，偏置通过持有不同意见的个体的更新概率差异来引入。我们证明，在偏置投票者规则下，即使初始时持有优势意见的个体数量非常少（相对于网络规模呈对数级），仍能以高概率在对数时间内达成优势意见共识。对于有偏双选择规则，我们的结果表明，只要初始时持有优势意见的个体比例高于某个阈值，就能以高概率在 $O(\log n)$ 步内达成优势意见共识。我们将该阈值刻画为偏置参数和图的谱性质的函数。

本文留下了若干有待进一步研究的问题。本文研究的双选择规则的一种自然推广是 $2k$选择规则：个体从其邻域中抽取 $2k$ 个体，并采用抽取到的邻居和该个体自身中占多数的意见。当个体存在偏置时，抽取的个体数量如何影响动力学，仍不清楚。在这种情况下，要获得马尔可夫链漂移的紧下界颇具挑战。另一个值得考虑的推广是底层图并非正则图、但满足扩展性质的情形。我们认为，在这种情况下，类似的共识时间界仍应成立；但实现共识的条件将取决于持有各意见的节点的体积（度数之和），而非持有各意见的节点数量。将这一推广扩展到意见数多于两种的情形，也仍是一个具有挑战性的开放问题。

参考文献

[1] Richard A Holley 和 Thomas M Liggett。《弱相互作用无限系统与投票者模型的遍历定理》。《概率年刊》，第643–663页，1975年。[2] Peter Clifford 和 Aidan Sudbury。《一种空间冲突模型》。《生物统计学》，60(3):581–588，1973年。[3] J Theodore Cox。《环面上 zd 中的合并随机游走与投票者模型共识时间》。《概率年刊》，第1333–1366页，1989年。[4] Colin Cooper、Robert Elsasser、Hirotaka Ono 和 Tomasz Radzik。《连通图上的合并随机游走与投票》。《SIAM 离散数学杂志》，27(4):1748–1758，2013年。

[5] Toshio Nakata、Hiroshi Imahayashi 和 Masafumi Yamashita。《有限图上针对一致问题的概率局部多数投票》。载于《国际计算与组合学会议》，第330–338页。施普林格，1999年。[6] Colin Cooper、Robert Els¨asser 和 Tomasz Radzik。《双选择在分布式投票中的威力》。载于《国际自动机、语言与编程研讨会》，第435–446页。施普林格，2014年。[7] Colin Cooper、Robert Els¨asser、Tomasz Radzik、Nicolas Rivera 和 Takeharu Shiraga。《一般扩展图上的快速共识投票》。载于《国际分布式计算研讨会》，第248–262页。施普林格，2015年。[8] Paul L Krapivsky 和 Sidney Redner。《双态相互作用自旋系统中的多数规则动力学》。《物理评论快报》，90(23):238701，2003年。[9] Arpan Mukhopadhyay、Ravi R Mazumdar 和 Rahul Roy。《具有偏置和顽固智能体的投票者与多数动力学》。《统计物理学杂志》，181(4):1239–1265，2020年。[10] Arpan Mukhopadhyay、Ravi R Mazumdar 和 Rahul Roy。《具有有偏智能体及顽固程度各异智能体的二元意见动力学》。载于《2016年第28届国际电信流量大会（ITC 28）》，第1卷，第261–269页。IEEE，2016年。[11] Colin Cooper、Alan Frieze 和 Tomasz Radzik。《随机正则图中的多重随机游走》。《SIAM 离散数学杂志》，23(4):1738–1761，2010年。[12] Yehuda Hassin 和 David Peleg。《分布式概率轮询及其在比例一致中的应用》。《信息与计算》，171(2):248–268，2001年。[13] Serge Galam。《随机几何中的少数派意见传播》。《欧洲物理学杂志B：凝聚态与复杂系统》，25(4):403–406，2002年。[14] P Chen 和 S Redner。《多状态多数与相对多数模型中的共识形成》。《物理学杂志A：数学与一般物理》，38(33):7239，2005年。[15] James Cruise 和 Ayalvadi Ganesh。《通过轮询和多数规则实现概率共识》。《排队系统》，78(2):99–120，2014年。[16] Mohammed Amin Abdullah 和 Moez Draief。《一类稀疏图上通过局部多数轮询达成初始全局多数》。（arXiv预印本 arXiv:1209.5025），2012年。[17] Aris Anagnostopoulos、Luca Becchetti、Emilio Cruciani、Francesco Pasquale 和 Sara Rizzo。《有偏意见动力学：魔鬼藏在细节中》。《信息科学》，593:49–63，2022年。[18] Emilio Cruciani、Emanuele Natale、Andr´e Nusser 和 Giacomo Scornavacca。《核心—边缘网络上双选择动力学的相变》。《分布式计算》，34(3):207–225，2021年。[19] Arpan Mukhopadhyay。《采用双选择规则的有偏意见动力学中的相变》。（arXiv预印本 arXiv:2208.12245），2022年。

A 引理7的证明

由引理 6以及事实 $A_t = \frac{n}{2}(1+\epsilon(t))$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\Delta(t)|\epsilon'(t)=\epsilon'\right] &\geq B_t q_1\left((1-\lambda_n^2)\frac{1+\epsilon(t)}{2}-\frac{q_1}{q_0+q_1}\right)\\ &=\frac{B_t q_1}{2}\left(\epsilon(t)+\frac{q_0-q_1}{q_0+q_1}-\lambda_n^2(1+\epsilon(t))\right)\\ &=\frac{B_t q_1}{2}\left(\epsilon'-\lambda_n^2\left(\epsilon'+\frac{2q_1}{q_0+q_1}\right)\right)\\ &\geq \frac{B_t q_1}{2}c\epsilon', \end{aligned} \tag{35}$$

其中，最后一行用到了事实 $\epsilon' \geq 2\lambda_n^2$ $\lambda_n^2 \leq q_0/(q_0+q_1) - c$ $1-\lambda_n^2\ \epsilon' - \lambda_n^2\frac{2q_1}{q_0+q_1} \geq c\epsilon' + \frac{q_1}{q_0+q_1}\ \epsilon' - 2\lambda_n^2 \geq c\epsilon'$ and ( )，它们推出了 ( ) ( )。 □

B 引理9的证明

该引理的证明与引理4的证明类似。定义事件 $F = \{\Delta(t) \leq B_t q_1 c\epsilon'(t)/4$，其中某个 $t \in \{0,1,\ldots,T_1-1\}\}$。在 F^c 下，对于所有 $t \in \{0,1,\ldots,T_1-1\}$，我们有 $B_{t+1} \leq B_t(1-q_1 c\epsilon'(t)/4)$ 和 $\epsilon'(t+1) \geq \epsilon'(t)$，这意味着 $B_{T_1} \leq B_0(1-q_1 c\epsilon'(0)/4)^{T_1} \leq B_0/r^{T_1} \leq n\gamma$。第二个不等式根据 r 的定义得出，最后一个不等式根据 T_1 的定义得出。因此，如果 F^c 发生，则 $B_{T_1} \leq n\gamma$。这意味着，对于定义为 $G = \{B_t \geq n\gamma, \forall t \in \{0,1,,\ldots,T_1\}\}$ 的 G，我们有 $G \subseteq F$。此外，我们可以将 F 划分为 $F = \cup_{\tau=0}^{T_1-1} F_\tau$，其中 $F_\tau = \{\Delta(\tau) \leq B_\tau q_1\epsilon'(\tau)/4$，且 $\Delta(s) > B_s q_1\epsilon'(s)/4, \forall s \in \{0,1,\tau-1\}\}$。我们有

$$\mathbb{P}(G|B_0) = \mathbb{P}(G\cap F|B_0) = \sum_{\tau=0}^{T_1-1}\mathbb{P}(G\cap F_\tau|B_0) \leq \sum_{\tau=0}^{T_1-1}\mathbb{P}(G_\tau\cap F_\tau|B_0) \tag{36}$$

其中 $G_\tau = \{B_t \geq n\gamma, \forall t \in \{0,1,\ldots,\tau\}\}$。我们进一步指出，对于足够大的 n，有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G_\tau\cap F_\tau|B_0) &\leq \mathbb{P}\left(\Delta(\tau) \leq \frac{B_\tau q_1 c\epsilon'(\tau)}{4}\middle|\Delta(s) > \frac{B_s q_1 c\epsilon'(s)}{4}, \forall s\in\{0,1,\tau-1\}, G_\tau, B_0\right)\\ &\leq \frac{2}{n^\alpha}, \end{aligned} \tag{37}$$

其中，最后一行中的不等式由 $\mathbf{X}^n$ 的马尔可夫性质、以下事实以及引理 8 的第一条结论得到：在 G_τ 和 $\{\Delta(s) > B_s q_1\epsilon'(s)/4$ ~~的条件~~下，$\forall s \in \{0,1,\tau-1\}\}$ 有 $\epsilon'(\tau) \in \Gamma$。最后，结合（36）和（37）即可得到该引理的结论。 □

C 引理 10 的证明

按照引理 5 的证明中所述的相同步骤，我们首先得到

$$\mathbb{E}\left[B_{T_2}|B_0 \le n\gamma\right] \le \sum_{i \le n\gamma} \mathbb{E}\left[B_{T_2}|B_{T_2-1}=i\right] \cdot \mathbb{P}\left(B_{T_2-1}=i|B_0 \le n\gamma\right) + n\sum_{t=0}^{T_2-2} \mathbb{P}\left(B_{t+1} > n\gamma|B_t, \le n\gamma, B_0 \le n\gamma\right). \tag{38}$$

但根据 $\mathbf{X}^n$ 的马尔可夫性质以及引理 8 的第二个结论，我们有

$$\mathbb{P}\left(B_{t+1} > n\gamma|B_t \le n\gamma, B_0 \le n\gamma\right) \le \exp(-n\beta) \tag{39}$$

此外，对于 $B_t \le n\gamma$，我们有 $\epsilon'(t) = (n-2B_t)/n + (q_0-q_1)/(q_0+q_1) \ge 2q_0/(q_0+q_1) - 2\gamma \ge 2\lambda_n^2$，因为$\gamma \le c$。因此，根据引理 7，我们有 $\mathbb{E}\left[B_{t+1}|B_t=i\right] \le (1 - {}^{q_1 c\epsilon'(t)}\,2)i \le ri$，对任意 $i \le n\gamma$，其中

$r = 1 - q_1 c\, q_0/\, q_0 + q_1 \; - \gamma \quad < 1$ $\sum_{i \le n\gamma} \mathbb{E}\left[B_{T_2}|B_{T_2-1}=i\right] \cdot \mathbb{P}\;\; B_{T_2-1}=i|B_0 \le n\gamma \;\; \le (\,(\,(\,)\,)\,)$。因此，$(\,)$。

$r\mathbb{E}\left[B_{T_2-1}|B_0 \le n\gamma\right]$

所以，我们有

$$\mathbb{E}\left[B_{T_2}|B_0 \le n\gamma\right] \le r\mathbb{E}\left[B_{T_2-1}|B_0 \le n\gamma\right] + n(T_2-1)\exp\left(-n\beta\right).$$

递归地应用上述不等式，我们得到

$$\mathbb{E}\left[B_{T_2}|B_0 \le n\gamma\right] \le r^{T_2}B_0 + n\exp\left(-n\beta\right)\sum_{k=1}^{T_2-1}(T_2-k)r^{k-1} \le r^{T_2}n\gamma + n\exp\left(-n\beta\right)\left(T_2/(1-r)\right).$$

将 $T_2 = \lceil 2\log\, n/\log(1/r)\rceil$ 代入上述不等式，我们得到

$$\mathbb{E}\left[B_{T_2}|B_0 \le n\gamma\right] \le \gamma/n + 2n\log n\exp\left(-n\beta\right)/((1-r)\log(1/r)) = O(1/n).$$

最后，结合上述结果和马尔可夫不等式，即可得出该引理的结论。 □