arXiv:2302.08354v1 [math.DG] 16 Feb 2023

K3曲面上的静电学与测地线

贡.萨洛·奥利维拉

Abstract. 受物理学文献中的一些猜想启发，我们利用 Foscolo 构造的 K3曲面上的 Ricci 平坦 K¨ähler 度量，以极高精度确定了若干条闭测地线，并计算了它们的指标（其长度也已近似得知）。

有趣的是，这些测地线的构造与 Maxwell 在 1873 [30]提出的一个静电学未解问题有关。我们的构造也引起了现代物理学家的兴趣，他们研究以这类 K3曲面为靶空间的（超对称）非线性 sigma 模型 [8]。

Contents

1. 引言 12. 预备知识 83. Foscolo 的 $K3$ 曲面 124. Atiyah–Hitchin流形 135. Gibbons-Hawking流形 156. 构件中的雅可比算子 217. $\bigcup_{j=1}^{8} M_\epsilon^j \cup \bigcup_{i=1}^{n} N_\epsilon^i$ 268. K_ϵ 289. Foscolo 的K3曲面上的测地线 37附录 A. 测地线方程的变形 40附录 B. 麦克斯韦问题 43参考文献 43

1. Introduction

1.1. **背景**。 在黎曼流形上构造闭测地线的问题有着悠久的历史，至少可以追溯到 Jacobi 对椭球面上测地线的研究 [27]，距今几乎已有两个世纪。20 世纪，尝试在更一般的黎曼流形上构造并理解闭测地线，促成了若干动力学和分析技术的发展，这些技术分别由 Poincar´e、Birkhoff [36, 3]，以及 Morse、Lusternik-Schnirelmann[32, 26]率先提出。后者包括在自由环空间中为能量泛函构建 Morse 理论框架。随着拓扑学的新发展 [44, 14],, 最终证明了任何同调群不是

Date: 2023年2月17日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 53 C22,58E10,53C25,53C26。*Key words and phrases.* 闭测地线、K3 曲面、Ricci 平坦 K¨ähler 度量。

截断多项式的闭黎曼流形，都含有无穷多个闭测地线。该结果的证明依赖于这样一个事实：在这种情况下，自由环空间的同调是无限生成的（生成元位于无穷大的次数中）。随后，通过使用适当版本的莫尔斯理论，可以得出结论：存在无穷多个闭测地线，并且它们的指标随相应同调类的次数增长。关于这一结果及其他结果的证明，作者推荐参阅书籍 [22]及其中的参考文献。

尽管取得了如此巨大的进展，要在特定的黎曼流形上显式构造（或找到）测地线，并确定其长度和指标，仍然极其困难，需要对度量有深入了解才能着手解决。事实上，寻找闭测地线需要求解一组二阶常微分方程，并证明周期解的存在；这是一项极其困难的工作，尤其是在度量没有显式形式时。此外，从某种意义上说，研究黎曼流形上的测地线也可以被视为间接研究其底层几何的一种方式。

一些值得进一步了解其闭测地线的黎曼流形实例包括 K¨3曲面上的 Ricci 平坦 Kähler 度量，或更一般的卡拉比–丘流形。人们对这些度量的兴趣，很大程度上源于更深入理解其几何的需求，以及它们在物理学中的重要性。事实上，根据 [8], , 闭测地线应当在以此类卡拉比–丘流形为靶空间的（超对称）非线性σ模型中发挥尤为重要的作用。然而，要探究这类问题似乎极其困难，超出了目前的能力范围，因为紧致卡拉比–丘流形上尚无已知的闭合形式 Ricci 平坦 K¨ähler 度量。[1]尽管如此，在度量退化为轨形度量或发生塌缩的某些极限区域中，仍有可能得到这类度量的良好近似 [24, 6, 15, 10, 19, 39]。这让我们看到了一线希望，可以在这类退化的 K3曲面上寻找闭测地线。本文将探讨这一希望。

1.2. 摘要。 受上述讨论以及 [8] 关于闭测地线对超对称 σ 模型重要性的提议启发。在本文中，我们考察几乎塌缩到三维环面 $\mathbb{T}_\Lambda$ 关于 $\mathbb{Z}_2$ 的商空间的 Ricci 平坦 K¨ähler 度量。这些度量由 Lorenzo Foscolo 在 [10] 中构造，并且可以用 Gibbons–Hawking Ansatz 很好地近似。

在曲率集中的有限个点之外，我们使用这一近似来研究哪些塌缩圆近似于闭测地线。这些圆在商空间 $\mathbb{T}_\Lambda/\mathbb{Z}_2$ 上方的位置，与一个由 Maxwell 在其《电学与磁学论》 [30]中首次提出的经典静电学问题有关。考虑一个在 $\mathbb{Z}_2$作用下对称且包含其不动点的点电荷配置。如果该配置的总电荷为零（这是将其置于 K3 曲面等紧致流形中的必要条件），那么它们会在 $\mathbb{T}_\Lambda/\mathbb{Z}_2$上产生电场 E；电场 E 消失的点，即静电平衡点，对应于所考虑的 K3 曲面上塌缩度量中的近似测地线圆。

[1]不过， [28,29] 在这一方向上取得了一些非常有前景且有趣的进展。据我们所知，这些参考文献的作者找到了一个形式展开，它收敛到 K3 曲面上的 Ricci 平坦 K¨ähler 度量。

我们还可以考察另一种情形：曲率集中的有限个点处会发生什么。事实证明，这些点处（经重新缩放的）度量的局部模型是 ALF 引力瞬子；有时，我们可以利用与静电学类似的关系来确定闭测地线的位置。

这样，对于 K3 曲面上的这类塌缩的 Ricci-flat K¨ahler 度量，我们能够找到若干条闭测地线并计算它们的指标。

1.3. 主要结果。 在陈述任何具体结果之前，我们必须先简要介绍 Fos- colo 在 K3 曲面上的 Ricci-flat K¨ahler 度量，本文简称为 Foscolo 的 K3 曲面。作为黎曼流形，它们构成了 K3 底层光滑流形上超 K¨ahler 度量模空间中的一个开集，因此由 58 个参数刻画。其中一个参数记作 $\epsilon \ll 1$，用于衡量较大区域内圆纤维化的塌缩速度。具体而言，它近似对应于圆纤维的长度。所得黎曼流形 $X_\epsilon = (X,\ g_\epsilon^{hk})$ 可分解为

$$X_\epsilon = K_\epsilon \cup \bigcup_{j=1}^{8} M_\epsilon^j \cup \bigcup_{i=1}^{n} N_\epsilon^i. \tag{1.1}$$

在这种分解中，构件 由塌缩区域 K_ϵ和曲率集中区域 $\bigcup_{j=1}^{8} M_\epsilon^j \cup \bigcup_{i=1}^{n} N_\epsilon^i$组成。它们具有以下性质：

(1) K_ϵ 是一个大的开集，它是一个圆纤维化，其底空间为穿孔环面$\mathbb{T}_\Lambda$ 按 $\mathbb{Z}_2$取商所得的空间，圆纤维的大小约为 ϵ。环面$\mathbb{T}_\Lambda = \mathbb{R}^3/\Lambda$ 中的穿孔点必须分成两组 $\{q_1, \dots, q_8\}$，分别对应具有 $2q_i \in \Lambda$和 $\{p_1, \dots, p_n, -p_1, \dots, -p_n\}$ 的点；第一组 n 中的点可以自由选取，是构造中的参数。此外，我们还必须选取一些额外的数 m_1，.....，$m_8 \in \mathbb{N}_0$和 k_1，.....，$k_n \in \mathbb{N}$，它们与 n 一起必须满足平衡条件

$$\sum_{i=1}^{n} k_i + \sum_{j=1}^{8} m_j = 16. \tag{1.2}$$

这是构造调和函数的必要（且充分）条件

$$h : \mathbb{T}_\Lambda \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\},$$

该函数对应于在点 p_i 和 $-p_i$ 处放置大小为 k_i 的电荷所产生的电势，其中 $i = 1$，.....，n；以及在点 q_j 处放置大小为 $2m_j - 4$ 的电荷所产生的电势，其中 $j = 1$，.....，8。利用此函数，Gibbons–Hawking假设确定了度量 g_ϵ^{gh}，我们可以用它来近似 K3 曲面在此区域内的超K¨ahler度量 g_ϵ^{hk}。我们将由与 K_ϵ 相同的光滑流形、但配备度量 g_ϵ^{gh} 所确定的开黎曼流形记为 K_ϵ^{gh}。

(2) 对于每个 $j = 1$，.....，8，缩放后的度量 $\epsilon^{-2} g_\epsilon^{hk}$ 限制在 M_ϵ^j 上时，光滑收敛至一个预先固定的、类型为 D_{m_j} 的 ALF引力瞬子 M^j。
(3) 对于每个 $i = 1$，.....，n，限制在 N_ϵ^i上的缩放后的度量 $\epsilon^{-2} g_\epsilon^{hk}$ 光滑收敛于一个预先固定的、类型为 $A_{k_i - 1}$ 的 ALF引力瞬子 N^i。 N^i 上的度量可以

描述　使用 Gibbons–Hawking假设显式表示，并由一个函数决定

$$\phi_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$$

对应于由 k_i 单位电荷在 $\mathbb{R}^3$ 中产生的电势，其位置x_1^i，……，$x_{k_i}^i$ 决定了 N^i上的度量。除去有限个点外，N_i 由一个以 $\mathbb{R}^3\backslash\{x_1^i,\dots,x_{k_i}^i\}$ 为底空间的圆纤维化构成，其中圆纤维的长度为 $2\pi\phi_i^{-1/2}$。

定理 1 如下，是正文中稍后出现的7的一个较为非正式的版本，也作为我们能够得到的结果的示例。我们在此处以完全一般的形式陈述它，这削弱了我们在处理更具体的点的构型时能够得出的一些结论。为了说明那些更强的结果，在本引言稍后的部分，我们将考察两个具体例子，在这些例子中我们能够做得比一般结果更好。

定理 1。设 $n \geq 1$，k_1，……，k_n，m_1，……，m_8满足 *1.2*，一组“泡” N^1，……，N^n，M^1，……，M^8，以及 p_1，……，$p_n \in \mathbb{T}_\Lambda$，其中 p_1是一般选取的。那么，存在一个正数$\epsilon_0 \ll 1$，使得对所有 $\epsilon < \epsilon_0$：

- 在 K_ϵ中，至少有 $n+1$ 条指标为一的闭测地线和5 条指标为二的闭测地线。
- 对于 $i = 1$，……，n，如果 x_1^i 在“泡” N^i 中的位置是一般的，则在 N_ϵ^i上至少有 $k_i - 1$条闭测地线。此外，如果$\min_{j_1\neq j_2} |x_{j_1}^i - x_{j_2}^i|$足够大，这些测地线的指标为1。

这些测地线可以在精度为 $o(\epsilon)$的范围内定位；按照豪斯多夫距离，它们位于相应电势的临界点上方的圆纤维内。

在陈述我们所承诺的更强结果之前，我们先简要说明该结果的证明，以及如何更精确地定位这些测地线。为了在 X_ϵ 上构造并定位闭测地线，我们首先在构件 K_ϵ^{gh}、M^j和 N^i上，针对近似度量定位这些测地线，随后将其变形为 X_ϵ上的闭测地线。

另一方面，为了构造构件上近似度量的闭测地线，我们研究了哪些圆纤维是使用 Gibbons–Hawking Ansatz 构造的 hyperK¨ahler 度量的测地线。结果表明，位于 h 的临界点上方的圆纤维是 K_ϵ^{gh}上的闭测地线，而位于每个 ϕ_i 的临界点上方的圆纤维则是 N^i上的闭测地线。鉴于这些函数的临界点对应于由此产生的电场的静电平衡点，静电学与此处的关联便显现出来。至于它与 [30], 中的麦克斯韦 1873 年问题的联系，则是在尝试使这类测地线的数量最大化时产生的，这相当于使静电平衡点的数量最大化。Maxwell猜想其数量至多为（$\ell - 1$）^{2}，其中 ℓ 是点电荷的数量。有关这一猜想迄今为止唯一的进展，见[13] 。

既然已经确定了近似度量的测地线，现在就该将它们变形为附近的超K¨ahler 度量。根据 [45] 中的 White 变形定理，当 ϵ 足够小时，N^i 的闭测地线可以变形为 N_ϵ^i 的闭测地线。另一方面，鉴于 K_ϵ 中的度量正在塌缩，无法使用 White 变形定理将 K_ϵ^{gh} 上的测地线变形为 K_ϵ 上的测地线；要做到这一点，需要进行单独的分析，我们将在本文中展开。这带来了额外的困难，因为近似测地线的雅可比算子本身正变得退化，正如 ¨……

.....近似测地线的雅可比算子本身正变得退化，正如 $\epsilon \to 0$。我们克服这一困难的方法，是恰当地将测地线方程分解为若干部分，并仔细分析，从而证明其余各项本身在 ϵ 中都以更快的速度趋于零。至于关于指标的结论，则可通过利用雅可比算子的显式形式计算近似测地线的指标得出；该算子可以用相关点处 h 和 ϕ_i 的海森矩阵表示。

最后，正如承诺的那样，我们给出具体例子，其中一些总结如下。更全面的论述请参阅第 9 节，其中详细介绍了这些例子以及我们方法的若干其他具体应用。

例 1. 令所有 $m_1 = \ldots = m_8 = 0$ 取定，并考虑 16 的分拆 $9+3+3+1$，然后令 $k_1 = 1$， $k_2 = 3 = k_3$，$k_4 = 9$ 于是 $n = 4$。根据定理 1，在这种情况下，大开集 K_ϵ中至少有 $n+1 = 5$ 条指标为一的闭测地线，以及 5 条指标为二的闭测地线 K_ϵ。它们与 $\epsilon^{13/10}$ 的临界点上方的纤维之间的距离不超过 h。

此外， N^1 是 Taub-NUT 流形，它不含闭测地线，因此我们在 N^1_ϵ中得不到此类测地线。另一方面， $N^2 = N^3$是 A_2型引力瞬子，我们选取它们，使其由 Gibbons–Hawking假设得到，其中 $\phi_2(x) = \phi_3(x) = 1 + \sum_{l=1}^{3} \frac{1}{2|x-x_l|}$由 3 个电荷产生的电势给出 $\{x_1, x_2, x_3\}$ ，这 3 个电荷位于等边三角形的顶点处，如图 1所示。

根据我们的分析，我们发现， N^2_ϵ和 N^3_ϵ总共具有 $6 = 2 \times 3$ 条指标为一的闭测地线，以及 $2 = 2 \times 1$ 条指标为二的闭测地线，相关测地线的示意见图 1。这些测地线与 $\epsilon^2(N^2 \cup N^3)$ 中的测地线之间的豪斯多夫距离不超过 $\epsilon\kappa(\epsilon)$。

接下来，我们考虑 N^4 ，它是一个 A_8 型 ALF引力瞬子，因此可以使用 Gibbons–Hawking Ansatz，通过由 ϕ_4 中的 9 个单位电荷产生的势 $\mathbb{R}^3$来确定。我们将这些单位电荷置于三个等边三角形的顶点处，并将这三个三角形的中心置于一个更大的等边三角形的顶点处，见下方图 1 。

总体而言，在区域 $\bigcup_{i=1}^{4} N^i_\epsilon$ 中，我们得到 $12 + 3 \times 2 = 18$条指标为一的闭测地线，以及 $4+2\times1 = 6$ 条指标为二的闭测地线。将这些测地线与此前得到的测地线合并后，在 $K_\epsilon \cup \bigcup_{i=1}^{4} N^i_\epsilon$ 中总共有 23 条指标为一的闭测地线和 11 条指标为二的闭测地线。

此外，可以证明，在集合 $\bigcup_{j=1}^{8} M^i_\epsilon$ 中还存在 8 条额外的闭测地线，但它们的指标未知。这些闭测地线是通过变形 Atiyah–Hitchin流形上的闭测地线得到的，而后者的存在性和模空间已知。

这样一来，我们就得到了总计 $23 + 11 + 8 = 42$ 条闭测地线，其位置可以近似确定。

再来看一个例子。

例2。 同样，我们考虑所有 $m_1 = \ldots = m_8 = 0$ 的情形，但现在采用 16 的分拆 $4+4+4+4$，得到 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 4$ 和 $n = 4$。然后，我们选择点 $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$，使它们与其对称像一起构成图 2中的浅蓝色点。在这种情况下，我们能够以精度 K_ϵ 确定 $\epsilon^{13/10}$ 条 （ $\epsilon^{13/10}$ ）条 K_ϵ （ $\epsilon^{13/10}$ ） K_ϵ （ $\epsilon^{13/10}$ ） K_ϵ （ $\epsilon^{13/10}$ ） K_ϵ （ $\epsilon^{13/10}$ ） K_ϵ （ $\epsilon^{13/10}$ ） K_ϵ （ $\epsilon^{13/10}$ ） K_ϵ （ $\epsilon^{13/10}$ ） K_ϵ （ $\epsilon^{13/10}$ ） K_ϵ 闭测地线 $\epsilon^{13/10}$ （按同一幅图所示）。这仅比定理 1 给出的下界多一条。不过，在这个例子中，我们可以直接确定这些测地线的位置

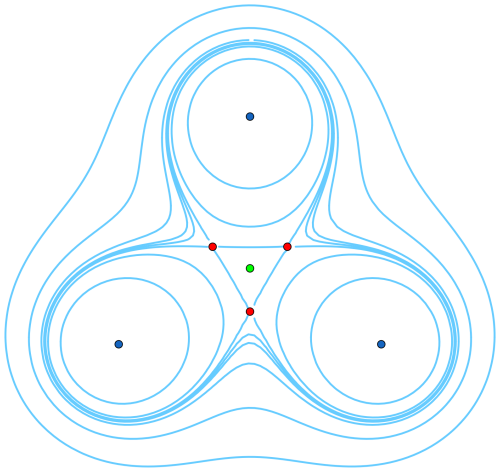

FIGURE 1. 深蓝色的点 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 位于一个等边三角形的顶点处，对应于产生势 $\phi_2 = \phi_3$ 的电荷位置；这些势决定了 N^2 和 N^3 上的超K¨ahler 度量。图中以浅蓝色表示了该势的一些等值集。

可以验证， $\phi_2 = \phi_3$ 在三角形内部有 4 个临界点，而这些点上方的圆纤维在 $N^2 \cong N^3$ 中对应于这些超K¨ahler 流形上的闭测地线。总的来说，红点对应于指标为一的测地线，绿色点对应于一条指标为二的测地线。

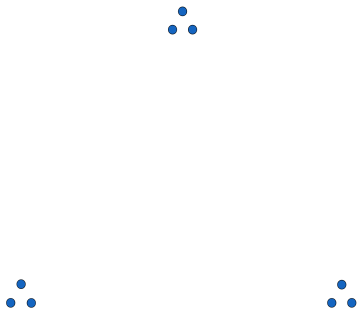

FIGURE 2. 这 9 个点位于 3 个小等边三角形的顶点处，每个三角形的边长为 d ；我们将它们放置在一个较大的等边三角形的顶点处，该三角形的边长为$D \gg d$。与 1 中一样，每个三角形内（包括那个非常大的三角形）都有 4 个 ϕ_4 临界点。因此，总共有 12 条指标为一的闭测地线和 3 条指标为二的闭测地线。

利用对称性原理，而不必求出 h 的临界点；求解这些临界点需要使用计算机近似。

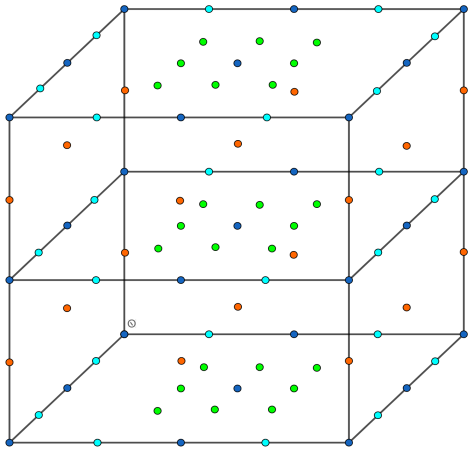

FIGURE 3. 这些点 $\{p_1, p_2, p_3, p_4, -p_1, -p_2, -p_3, -p_4\}$ 以浅蓝色表示，而 $\{q_1, \dots, q_8\}$ 中的点以深蓝色表示。决定 h 上度量的函数 K_ϵ^{gh}是由荷值为 (-4) 的深蓝色点和荷值为 4 的浅蓝色点产生的电势。第 8.3 节中的对称性论证 h 表明，其在橙色点和绿色点处有临界点。因此， $11 = 22/2$ 上共有 K_ϵ条闭测地线。

至于 N^i，它们是 A_3 型 ALF引力瞬子。我们选择使它们彼此等距，并且都由势为 ϕ 的 Gibbons–Hawking Ansatz 给出，其奇点位于正方形顶点处。于是，每个这样的瞬子上都有 4 条指标为一的闭测地线和 1 条指标为二的闭测地线。

总共，我们得到 $11 + 4 \times 5 = 31$ 条闭测地线。

1.4. 其他结果。 在证明我们的主要目标的过程中，我们还得出了一些本身也颇有意义的其他结果。为方便读者，现简要陈述如下。

定理 2 (某些非紧致超K¨ahler 4-流形上不存在稳定测地线)。 *Atiyah–Hitchin*、*Taub–Nut* 以及 *ALE* 或 *ALF* A_1 引力瞬子上不存在二阶稳定的闭测地线。

文献中还有其他有趣的非存在性结果。参见 [35] ，该文考察了 Eguchi–Hanson空间；另见 [43] ，其中给出了其他特殊全纯群黎曼流形上的例子。

下一个结果构造了超K¨ahler 4-流形上的闭测地线，它们二阶稳定，但整体上不稳定，即不是长度泛函的局部极小值。

定理3 （二阶稳定的不稳定测地线）。 对于无穷多个 $k \in \mathbb{N}$，存在一种 *ALE* 型 A_k 引力瞬子，其中包含一条不稳定但二阶稳定的闭测地线。

最后，通过 将定理 2 代入 Foscolo 构造，可得到以下结果 .

定理 4（禁止稳定测地线进入“泡”区域）。 设 X_ϵ 为一个由所有 $m_1 = \ldots = m_8 = 0$ 和 k_1、…、$k_n \in \{1, 2\}$构造的 *Foscolo K3* 曲面。那么， X_ϵ中的任何二阶稳定闭测地线都必须完全包含于 K_ϵ中，即不会进入泡区域 $\bigcup_{j=1}^{8} M_\epsilon^j \cup \bigcup_{i=1}^{n} N_\epsilon^i$。

1.5. **组织结构**。 本文的组织如下。我们在第2 节开始，回顾现有文献中关于闭测地线这一问题的研究成果。具体而言，我们概述莫尔斯理论对能量泛函在当前情形下所给出的结论，并顺带考察 Kummer K3 曲面。第3 节篇幅较短，旨在解释 Foscolo 构造 K3 曲面上的 Ricci-平坦 K¨ahler 度量，并着眼于其在我们应用中的作用。

在第 4 和 5 节中，我们研究了在 Foscolo 的 K3 曲面的构件上构造闭测地线的问题。这些章节包含原创成果，也包含取自相关文献的内容。此外，在第 6 节中，我们考察了这些构件上测地线的一些几何/解析性质，并将其抽象为命题，以便稍后对这些测地线进行变形。

最后，在第 7 和 8 节中，我们将构件上的测地线变形为 Foscolo 的 K3 曲面上的实际测地线。这些章节分别聚焦于曲率集中的区域和塌缩区域。我们以第 9 节结束本文，该节探讨了若干示例，并将其作为我们结果的应用。

1.6. **致谢**。 作者非常感谢诸多讨论，这些讨论极大地加深了他对本文主题的理解。特别地，出于这一原因，作者谨向 Arnav Tripathy、Jørgen Olsen Lye、Lorenzo Foscolo、Max Zimet、Ruobing Zhang、Song Sun、Tam´as Hausel、Willem Salm、Yu-Shen Lin 致谢。

这项工作部分源于作者曾听过的一场报告 [9], , Michael Douglas 在报告中展示了卡拉比–丘流形上一条闭测地线的数值近似。

这项工作由 NOMIS 基金会资助。作者在奥地利 IST Austria 的 Hausel 研究组担任 NOMIS 研究员期间开始了这项工作，并在作者目前所在的机构——Instituto Superior T´ecnico——完成了这项工作。作者还曾在 SLMath（前身为 MSRI）担任研究成员，并感谢该机构的盛情款待。本文所述的工作是在上述三家机构完成的。

2. Prelimaries

本节将介绍一些预备知识，旨在回答阅读本文其余部分时可能遇到的一些基本问题。本节内容如下。在2.1 中，我们回顾测地线的长度、能量、零度和指标的定义。为此，我们还必须重述雅可比算子的定义。在2.2 中，我们介绍黎曼流形中闭测地线的四种不同稳定性概念，并说明它们之间的关系。

第2.3 和2.4 小节已经包含了一些较有原创性的结果，但这些结果是由已知理论的简单应用得出的。在2.3 中，我们说明基本的莫尔斯理论论证如何揭示 K3 曲面上指标为一的闭测地线的存在性。最后，在2.4 中，我们运用 White 变形定理，在由库默尔构造得到的 K3 曲面上寻找一些 Ricci 平坦的 K¨ahler 度量下的闭测地线。

2.1. 长度、能量、零度与指标。 设 $\mathcal{I}=[0,2\pi]$ 或 $\mathcal{I}=S^1$。黎曼流形 (X,g) 中路径 γ 的长度 $\mathcal{I}\to X$ 定义为

$$\ell(\gamma)=\int_{\mathcal{I}}|\dot\gamma(t)|dt,$$

其中 $|\dot\gamma(t)|^2=g(\dot\gamma(t)\ \dot\gamma(t))$。在许多应用中，人们希望寻找使该泛函最小化的路径（对于 $\mathcal{I}=[0,2\pi]$，必须固定 $\gamma(0)$ 和 $\gamma(2\pi)$）。这些路径特别是测地线。然而，鉴于能量泛函具有更好的解析性质，转而将其最小化更为方便

$$\mathcal{E}(\gamma)=\int_{\mathcal{I}}|\dot\gamma(t)|^2dt$$

由于索博列夫嵌入 $W^{1,2}(\mathcal{I})\hookrightarrow C^{0,\frac12}(\mathcal{I})$ 以及 Arzel´a-Ascoli 定理，该泛函满足帕莱-斯梅尔条件。

γ的无穷小变分可利用法向量场 $V\in\Gamma(\mathcal{I},\gamma^*(TX)^\perp)$ 进行参数化，即满足 $g(\dot\gamma,\gamma_*V)=0$逐点成立的向量场。省略推前与拉回后，这样的向量场产生如下形式的变分

$$f(t,s):=\exp_{\gamma(t)}\left(sV(t)\right).$$

然后，利用恒等式

$$\frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial s},$$

我们考虑 $\mathcal{E}(f(t,\ s))$、 $\ell(f(t,\ s))$，并求得它们在 $s=0$ 处的一阶变分为

$$(\partial_s\mathcal{E})|_{s=0}=-2\int_{\mathcal{I}}g\left(\frac{D^2\gamma}{dt},V\right)dt,$$
$$(\partial_s\ell)|_{s=0}=-\int_{\mathcal{I}}g\left(\frac{D}{dt}\left(\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}\right),V\right)dt,$$

若 γ 是测地线，则后者为零；而前者只有在进一步以弧长参数的倍数对 γ 重新参数化时才为零。另一方面，利用恒等式

$$\frac{D}{ds}\frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{D}{dt}\frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial s}+\mathrm{Riem}\left(\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial f}{\partial s},$$

我们发现，二阶变分为

$$(\partial_s^2\mathcal{E})|_{s=0}=-2\int_{\mathcal{I}}g\left(\frac{D^2\gamma}{dt},\frac{D^2f}{ds^2}\Big|_{s=0}\right)dt+2\int_0^{2\pi}g\left(-\frac{D^2V}{dt^2}+\mathrm{Riem}(\dot\gamma,V)\dot\gamma,V\right)dt$$

and

$$(\partial_s^2\ell)|_{s=0}=-\int_{\mathcal{I}}g\left(\frac{D}{dt}\left(\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}\right),\frac{D^2f}{ds^2}\Big|_{s=0}\right)dt+\int_0^{2\pi}g\left(-\frac{D^2}{dtds}\left(\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}\right)+\mathrm{Riem}(\dot\gamma,V)\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|},V\right)dt.$$

同样，如果 γ 是一条测地线，这些项中的第一项就会消失。此外，如果 γ 以弧长参数的常数倍进行参数化，那么这些二阶变分中的第二项就会相同（相差一个整体常数）。受此启发，我们定义雅可比算子

$$J_\gamma : \Gamma(\mathcal{I}, \gamma^*(TX)^\perp) \to \Gamma(\mathcal{I}, \gamma^*(TX)^\perp),$$

一条曲线的 γ 定义为与二阶变分相关联的算子的负值（当在一条测地线上取值时），即

$$J_\gamma(V) = \frac{D^2V}{dt^2} - \mathrm{Riem}(\dot\gamma, V)\dot\gamma. \tag{2.1}$$

特别注意，$(\partial_s^2\mathcal{E})|_{s=0} = -\int_{\mathcal{I}} g(V,\ J_\gamma(V))dt$。然后，定义一条测地线的零度$\gamma$ 为 $\dim(\ker(J_\gamma))$，并将其 γ 的指标定义为使得 $-J_\gamma$ 为负定的极大子空间的维数。

2.2. **稳定性概念**。此时，考虑测地线的若干不同稳定性概念是方便的。若一条测地线是ℓ的（严格）局部极小值，或者等价地 $\mathcal{E}$，则称其为（严格）稳定。另一方面，若一条测地线的指标为零，则称其为二阶稳定；若其零度进一步消失，则称其为严格二阶稳定。这些不同的稳定性概念之间具有如下关系：严格稳定测地线显然是稳定的，而严格二阶稳定的测地线尤其是二阶稳定的。此外，任何稳定测地线尤其也是二阶稳定的。

在X^4、 g构成四维超K¨ahler流形这一特殊情形下——本文所讨论的正是这种情况——Bourguignon–Yau 的一个结果 [4] 利用变分 $I\dot\gamma$， $J\dot\gamma$ 以及 $K\dot\gamma$Ric $= 0$ 表明，沿着任意一条二阶稳定的闭测地线，完整曲率均为零，即沿着 $= 0$ $\gamma(\mathcal{I}$，Riem I、 J、 K 和 $\dot\gamma$ 均为平行场，因此这三个变分都属于雅可比算子的核。由此，任何这样的测地线的零度至少为三，因而不可能是严格二阶稳定的。据作者所知，目前尚无已知的超K¨ahler四维流形上的稳定闭测地线。尽管如此，[8], 文中仍提出了两个猜想，探讨（紧致）Calabi-Yau流形上是否存在稳定闭测地线。猜想认为，在任意这样的流形上，都存在若干条稳定闭测地线。

正如我们稍后将在示例中看到的 6 通过一个具体示例，我们可以在这样的超K¨ahler 流形中找到一条不稳定但二阶稳定的闭测地线。

我们进一步指出，在一类通过 Kummer 构造得到的特定 K3 曲面上，存在一条二阶稳定的闭测地线。这一点已在 [34], 另见 [35]中得到证明。然而，这条测地线是否确实对应于长度泛函的局部极小值，尚不得而知。

2.3. **莫尔斯理论中的测地线**。

2.3.1. 指标为一的测地线的存在性。 令 LX 表示 X的环空间，则 $\pi_1(LX)$与 $\pi_2(X)$之间存在同构。此外，若 X 是单连通的——如X 是K3曲面底层的光滑流形时的情形——则根据Hurewicz同构

$\pi_2(X) \cong H_2(X, \mathbb{Z})$。结合这两个同构，我们得出

$$b_1(LX) = b_2(X).$$

鉴于测地线是能量泛函的临界点，$\mathcal{E}$其在C^k中满足 *Palais–Smale* 条件，$^{\alpha}(S^1, X)$，我们可以对 $\mathcal{E}$ 应用莫尔斯理论，并如 [22], 中的定理 2.4.12 所示，由莫尔斯不等式得出：对于 X 上的一般度量，指标为一的闭测地线数目至少为 $b_2(X)$，对于 X上的一般度量亦然。[2]

对于 K3曲面，我们有 $b_2(X) = 22$ ，但尚不清楚其上的 Ricci 平坦 K¨ahler 度量是否在所设想的意义下是一般的；事实上，它们很可能不是。例如，根据2.2 节中的讨论，如果存在一条二阶稳定的闭测地线，那么它的零度至少为三，因此该度量不可能在所需意义下是一般的。相反，可以利用 $H_1(LX)$中的类来进行极小极大论证，并在X上构造 22 条闭测地线。然而，该论证并不能立即推出这些闭测地线的指标为一，只能说明其指标至少为一。

2.3.2. 无穷多个闭测地线。 Gromoll 和 Meyer 的一项著名结果指出， [14], 若$H^*(LX)$ 是无限生成的，那么在 X 上存在无穷多个几何上不同的闭测地线，它们可与生成 $H^*(LX)$ 的那些类相关联。这些测地线的指标与 $H^*(LX)$ 中通过莫尔斯理论产生该测地线的类的次数相同。此外，由 [44]和 [37], 可知，这种情况适用于一大类光滑流形，其中包括作为 K3 曲面底层流形的那个流形。因此，能量泛函的莫尔斯理论保证，任意超凯勒 K3 曲面上都存在无穷多个闭测地线。然而，这些测地线的指标会随着产生它们的 $H^*(LX)$ 中生成元的次数增加而无界增长。此外，像这样的抽象莫尔斯理论论证，并不能揭示所得测地线的位置及其其他几何性质。

注 1. 我们将使用 [44] 的方法为 LX 计算一个极小模型，并利用它更全面地研究 $\mathcal{E}$的莫尔斯理论这一问题留作未来工作的建议。我们相信，这将带来有趣的结果；可以像 [18, 47]中那样利用迹公式，尝试将其与拉普拉斯谱联系起来。

2.4. **Kummer K3 曲面上的闭测地线**。 本节将说明如何在通过 Kummer 构造得到的 K3 曲面上找到 48 条闭测地线，我们将这类曲面称为 Kummer K3 曲面。回顾一下，这些曲面是从一个平坦四维环面 $\mathbb{T}_\Lambda = \mathbb{C}^2/\Lambda$出发构造的，其中 Λ 是一个满秩格；另有轨形 $T_\Lambda/\mathbb{Z}_2$，其中 $\mathbb{Z}_2$ 通过 $(z_1, z_2) \mapsto (-z_1, -z_2)$ 作用。局部而言，这 16 个奇点以 $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ 为模型，并可通过吹起予以消解。由此得到一个复曲面 X ，它是一个 K3 曲面。

对于 $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{16})$，给定 $|\epsilon| \ll 1$，接下来考虑一种近似 Ricci 平坦的度量 g_ϵ：通过将 $\mathbb{T}_\Lambda/\mathbb{Z}_2$ 中奇点补集上的平坦度量与环绕每个体积为 ϵ_i^2 的例外因子 E_i 的 16 份 Eguchi-Hanson 度量粘合而得到。这些

[2]如 [22] 所述，对度量的必要条件是所有简单闭测地线都应为非退化的，即零度为零。然而，根据White的颠簸度量定理，对于 X上的一般度量，这一条件成立。

度量随后可以经过微扰，得到一个超K¨ahler度量 g_ϵ^{hk}定义在 X 其在 $|\epsilon| \to 0$ 意义下收敛到平坦轨形 $\mathbb{T}_\Lambda/\mathbb{Z}_2$。这一构造的细节可见 [24, 6, 23]。

此外，固定例外因子 E_i 的开邻域 U_i，对于 $i = 1$、.....、16，缩放后的度量 $\epsilon_i^{-2} g_\epsilon^{hk}|_{U_i}$ 在几何上收敛；当 $\epsilon_i \to 0$ 时，它们收敛到一个固定的 Eguchi-Hanson度量，其中全测地二维球面的体积为 1。关于细节，我们再次请读者参阅前面提到的参考文献之一，即 [24, 6, 23]。此外，请回忆 Eguchi-Hanson空间中的全测地二维球面实际上是一个圆二维球面，因此，在这样的圆二维球面上的闭测地线空间为 $\mathbb{RP}^3$，其 Lusternik–Schnirelmann 数为 3。

因此，应用 Brian White 的变形（ [45]，中作为定理3.2 陈述）可知，对于 $\epsilon_i \ll 1$，在 U_i 内部的 g_ϵ^{hk} 至少存在 3 条闭测地线。这使得任意 Kummer K3曲面上共有 $16 \times 3 = 48$ 条闭测地线，且它们的指标均至少为 1。

此外，根据示例 9 中的 5 以及连续性[3]，，我们必有：黎曼曲率张量在 g_ϵ^{hk}的每个开集内部都不恒为零 U_i，因此（X，g_ϵ^{hk}）中的稳定测地线无法穿过区域 $\bigcup_{i=1}^{16} U_i$。这一点在 [35] 中已经有所观察，并且与 [8]第 4.4 节提出的一种可能性相矛盾。

3. Foscolo's $K3$ surfaces

本节将描述 Foscolo 在 K3 曲面上构造 Ricci 平坦 K¨ahler 度量的方法。该构造的原始参考文献是 [10]，，我们还推荐综述文章 [11]。从现在起，设 Λ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个满秩格。然后，令（$\mathbb{T}_\Lambda = \mathbb{R}^3/\Lambda$，$g_E$）为一个平坦三维环面，并令 $\tau\colon\ \mathbb{T}_\Lambda \to \mathbb{T}_\Lambda$ 对合 $\tau(x) = -x$。该对合的不动点满足 $2x = 0$模 Λ，由 $\mathbb{T}_\Lambda$ 中的 8 个不同点组成，我们将其记为 $\{q_1, \dots, q_8\}$。此外，我们还考虑另一组由 $2n$ 个点组成的集合 $\{p_1, \dots, p_n, \tau(p_1) \dots, \tau(p_n)\}$，以及穿孔环面

$$T := \mathbb{T}_\Lambda \backslash \{q_1, \dots, q_8, p_1, \dots, p_n, \tau(p_1), \dots, \tau(p_n)\}.$$

然后，固定 $m_1, \dots, m_8 \in \mathbb{N}_0$ 和 $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$，使其满足

$$\sum_{i=1}^{n} k_i + \sum_{j=1}^{8} m_j = 16 \tag{3.1}$$

并求解方程

$$\Delta h = 2\pi \sum_{i=1}^{n} k_i (\delta_{p_i} + \delta_{\tau(p_i)}) + 2\pi \sum_{j=1}^{8} (2m_j - 4)\delta_{q_i}, \tag{3.2}$$

在 $\mathbb{T}_\Lambda$上。条件 3.1 意味着这样的 h 存在。此外，h 在穿孔点之外是调和的，且 $\frac{1}{2\pi} *_E dh$ 的周期具有整数性，这意味着存在一个圆丛 $\pi\colon P \to T$，它配备了一个联络 $\theta \in \Omega^1(T, \mathbb{R})$，使得

$$d\theta = - *_E dh.$$

接下来，考虑函数 $h_\epsilon = 1 + \epsilon h$ 和度量

$$g_\epsilon^{gh} := \epsilon^2 h_\epsilon^{-1} \theta^2 + h_\epsilon g_E, \tag{3.3}$$

[3]该 c 这个例子的结论并非原创。至少在以下参考文献中已有记载 [5]和 [34]

根据 [10], 中的引理 4.9，它作为对称二阶张量在 P的全空间上定义良好，并且在远离点 q_1、...、q_8和p_1、.....、p_n、$\tau(p_1)$.....、$\tau(p_n)$周围小半径 $\sim \epsilon$球的原像处正定。由 τ定义的 $\mathbb{Z}_2$作用可提升到 P的全空间，并保持g_ϵ^{gh}不变。随后，Foscolo 构造了一个近似超K¨ahler 度量 g_ϵ ，定义在流形 X上；该流形由 $P/\mathbb{Z}_2$ 通过粘合任意预先选定的 D_{m_j} 个 ALF 引力瞬子到点q_j（ $j = 1$, ...，8），并将任意 ALF 型引力瞬子粘合到点 p_i（ i =1，.....， n）而得到。这个近似超K¨ahler 度量具有如下性质：在开集K_ϵ 上， $g_\epsilon = g_\epsilon^{gh}$；该开集定义为 P 中点 $\{q_1, \dots, q_8, p_1, \dots, p_n, \tau(p_1)\text{.....、 } \tau(p_n)\}$周围半径为 $\sim \epsilon^{2/5}$ 的球的原像的补集。

当 $\epsilon \le \epsilon_0$ 足够小时，随后对这些度量进行扰动，以得到一个超K¨ahler 度量g_ϵ^{hk}。作为黎曼流形， $X_\epsilon = (X, g_\epsilon^{hk})$ 可以按以下方式分解

$$X_\epsilon = K_\epsilon \cup \bigcup_{j=1}^{8} M_\epsilon^j \cup \bigcup_{i=1}^{n} N_\epsilon^i. \tag{3.4}$$

Fu此外，这些定义在 X 上的超K¨ahler 度量 g_ϵ^{hk} 满足以下性质 ：

(1) 在较大的开集 K_ϵ 上， g_ϵ^{hk} 以如下速率逼近 g_ϵ

$$\sup_{K_\epsilon} |g_\epsilon^{hk} - g_\epsilon|_{g_\epsilon} \le \epsilon^{\frac{11-2\delta}{5}}, \tag{3.5}$$

其中某个固定的 $\delta \in (-1/2, 0)$ 是先验固定的。此外，根据椭圆正则性，参见 [10]，中定理 6.15 证明末尾的讨论，度量 g_ϵ^{hk} 和 g_ϵ 的所有导数也满足类似的界。

(2) 对每个 $j = 1, \dots, 8$，缩放后的度量 $\epsilon^{-2} g_\epsilon^{hk}$ 限制在 M_ϵ^j 上时，连同所需的任意阶导数，均一致收敛到最初固定的 D_{m_j} 型 ALF引力瞬子。

(3) 对于每个 $i = 1$, ..., n，限制在 N_ϵ^i上的缩放后的度量 $\epsilon^{-2} g_\epsilon^{hk}$都一致收敛，并且对任意阶数的导数均如此，收敛到最初固定的A_{k_i-1}型 ALF引力瞬子。

4. Atiyah–Hitchin manifold

Foscolo的K3曲面的构件之一是 D_m ALF引力瞬子。因此，为了在Foscolo的K3曲面上构造闭测地线，理解这类引力瞬子上闭测地线的存在性是有益的。据作者所知，这一领域在很大程度上尚未得到探索。[4] 基于这一原因，本节将仅限于 D_0 由 Atiyah–Hitchin流形构成的情形。

在4.1 中，我们运用 Bourguignon–Yau结果证明 Atiyah–Hitchin流形上不存在稳定闭测地线。随后，在4.2中，我们回顾 [31] 所得到的结果；他们构造了 Atiyah–Hitchin流形上一族闭测地线。

[4]作者认为，本文所采用的技术或许可以用于在更一般的 D_m ALF引力瞬子上构造闭测地线，方法是利用 [38]中的一项近期构造。

4.1. **稳定闭测地线的不存在性**。如2.2中已经提到的，根据 Bourguignon–Yau 在 [4][5] 中的结果，在一个超K¨ahler 4-流形中，沿任意二阶稳定的闭测地线，黎曼曲率张量必须处处为零。因此，为了证明给定的超K¨ahler 4-流形中不存在此类测地线，只需证明截面曲率不会在同一点处全部为零。

根据 [1] 和 [41],，固定一个标准正交余标架 $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$，其属于 $SU(2)$，且满足 $d\sigma_i = \sigma_j \wedge \sigma_k$ 其中 $(i、\ j、\ k)$ 表示对 (1、2、3) 的循环置换。于是，Atiyah–Hitchin度量可写为

$$g = dr^2 + a(r)^2\sigma_1^2 + b(r)^2\sigma_2^2 + c(r)^2\sigma_3^2,$$

其中 $r \in [0, +\infty)$ 和 $a、\ b、\ c\colon\ [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 满足常微分方程

$$\frac{da}{dr} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc},$$

以及 $(a、\ b、\ c)$ 的循环置换。由度量的这一形式，我们可以利用嘉当结构方程计算 g 的截面曲率表达式，例如参见 [41] 的第 2.4 节。可得其中三个曲率为 $\frac{a''}{a}$、$\frac{b''}{b}$、$\frac{c''}{c}$。[1] 的引理10.10证明了 $a''(r) \leq 0$，且等号仅在 $r = 0$ 处成立。因此，任何稳定闭测地线都必须包含在$r = 0$中。它是一个极小的 $\mathbb{RP}^2$，其上 g 的等距变换群 $SO(3)$ 具有传递作用。事实上，$SO(3)$ 在 $T\Sigma$ 中的单位圆丛上具有传递作用，因此也在从 Σ 出发、与 Σ相切的测地线空间上具有传递作用。因此，若存在一条完全包含在 Σ 中的 g 闭测地线，那么这个 $\mathbb{RP}^2$ 就是全测地的，但事实并非如此。

注 2。事实上，在 Atiyah–Hitchin 流形的任意紧致子集中，$|\mathrm{Riem}|$ 都可以由一个正常数从下方控制。现在考虑利用某个 M^j引力瞬子构造的 Foscolo 的 K3 曲面 X_ϵ。由连续性可知，当 $\epsilon > 0$ 充分小时，黎曼曲率张量在 M^j_ϵ 中不为零，因此，任何假定存在的稳定闭测地线都无法进入 M^j_ϵ X_ϵ。

4.2. **闭测地线的存在**。Atiyah-Hitchin 度量确实存在闭测地线。其中一族此类测地线是在 [31]中构造的。回顾一下，Atiyah–Hitchin 流形的等距变换群为 $SO(3)$，因此其作用必定保持闭测地线空间不变。[31] 中描述的测地线对应于 $SO(3)$的单参数子群，因此它们所在的测地线模空间与 $SO(3)/SO(2) \cong \mathbb{RP}^2$微分同胚。该文献的策略是使 Atiyah-Hitchin 流形上的这类闭测地线 $\mathcal{M}_2$的 $SO(3)$轨道对应于约化空间 $T^*\mathcal{M}_2/SO(3)$中的一个向量场的零点。随后，作者证明了这样一个零点的存在。此外，根据[31], 最后一页中的讨论，该向量场在其一个零点处的线性化是非退化的，因此与之对应的任何闭测地线的零度都必须等于 $\dim \mathbb{RP}^2 = 2$。

最后顺便提一下，作者并不知道这些闭测地线的指标，但从4.1节的讨论可知，其指标至少为 1。

注记3。 以下评论与本文其余部分无关，但为求完整，仍收录于此。

[5]另请参阅 [5] 该文非常简洁，切中要点。

- 另请参见 [46] 其中构造了 Atiyah–Hitchin流形上的准周期测地线。
- 高荷磁单极子模空间上也存在闭测地线，Bielawski 已构造出这些测地线 [2]。

5. Gibbons-Hawking manifolds

Foscolo 构造中用于在 K3 曲面上构造 Ricci 平坦 K¨ahler 度量的另一种构件，是 A_k 型 ALF引力瞬子。与 D_m 的情形不同，我们可以利用 Gibbons–Hawking Ansatz 显式写出相应的超 K¨ahler 度量，从而轻易发现关于这些空间上的闭测地线的大量性质。事实上，这将是我们主要的例子来源之一，对于在区域 N_ϵ^i（其中 $i = 1, \ldots\ldots, n$）以及大开集 K_ϵ 上构造测地线至关重要。

在5.1 和5.2 中，我们回顾 Gibbons–Hawking Ansatz，并据此构造 型 ALF引力瞬子上的闭测地线。在5.3 中，我们计算它们的黎曼曲率张量。这是一项极其有用的计算，在我们的工作中将有多项应用。首先，我们在此利用它得出一些关于稳定闭测地线的不存在性结果，并给出一些闭测地线的例子：它们二阶稳定，但总体上不稳定。其次，稍后我们将在第6 节利用它计算我们将找到的测地线的雅可比算子。

5.1. **Gibbons–Hawking Ansatz**。 Gibbons–Hawking Ansatz 是一种优美的方法，可以显式地表达所有具有圆对称性的完备超K¨ahler 度量。这一构造可追溯至 [16, 17] ，我们推荐这些参考文献，以了解这一构造的更多细节。对于比本文所述内容更简短但更完整的总结，我们还推荐 [25]。

令 $m \geq 0, k \in \mathbb{N}_0, \{P_1, \ldots, P_k\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个离散子集，并且

$$\phi(x) = m + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2|x - P_i|}.$$

回顾一下，Gibbons–Hawking Ansatz 中的度量由下式给出

$$g = \phi^{-1}\eta^2 + \phi g_E, \tag{5.1}$$

其中， g_E 是将 $\mathbb{R}^3$ 上的欧几里得度量经由 $\pi : X \to \mathbb{R}^3$拉回到 X 上的结果；除去 $\{P_1, \ldots, P_k\}$ 之外， X 是一个圆丛，在其上 η是满足以下条件的联络形式

$$d\eta = - *_E d\phi.$$

事实上，从这个方程可以注意到， ϕ 同时确定了 X 和 η ，因而也确定了 g。确实， $\Delta_{g_E}\phi = 2\pi \sum_{i=1}^{k} \delta_{P_i}$ ，因此 $\frac{1}{2\pi} *_E d\phi$ 在 $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ 中是闭的，并且具有整数周期，故它是圆丛 $\hat{}\pi : \hat{}$ $X \to \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$上的某个联络 η 的曲率。随后，通过在 P_i 中的每个点上方添加一个点，可以从 $\hat{}$ X 得到 X ，其中每个点附近的局部模型都是径向延拓的 Hopf丛。这得到 $\pi : X \to \mathbb{R}^3$。

5.2. **闭测地线的存在性与位置**。关于 A_k 型引力瞬子上闭测地线的存在性， [25] 对此进行了研究，下面我们将概述其主要结果。

对于超凯勒度量 $g = \phi^{-1}\theta^2 + \phi g_E$，测地线轨道的长度由函数 $l(x) = \phi(x)^{-\frac{1}{2}}$ 给出；该函数在圆作用退化的任意点处均为零，因此我们可以

将其视为定义在 $\mathbb{R}^3$上的函数。文献 [25] 中的第一个观察是，在（M， g）上，测地线轨道是 ϕ 的临界点的原像。如果 ϕ 至少有两个奇点，那么 ϕ 至少有一个临界点，并且任意这样的临界点都位于 ϕ的奇点凸包内。一个特别有趣且简单的例子是所有 k 奇点都位于同一直线上。在这种情况下，可以证明恰有 $k-1$ 个临界点，且它们全部位于相邻奇点对之间的直线上。关于测地线轨道，在 [25]中证明的关键结果是该文献中的定理3.6，它推广了所有奇点共线的情形。为完整起见，我们在此重述该结果。

定理 5. 设 X 是一个使用 *Gibbons-Hawking* 设定构造的超凯勒 *4*-流形，其中有ϕ $k \geq 2$ 个奇点。则对于奇点的一般位置排列，至少存在 $k-1$ 条测地线轨道。此外，存在 $m_0 \geq 0$，使得对所有 $m \geq m_0$，这些 $k-1$条测地线都可以选为指标1。

证明。 本结果的第一部分由莫尔斯理论论证得出，我们请读者参阅原始文献 [25]，其中证明了至少存在 $k-1$ 条指标至少为 1 的测地线。这里，我们声称其中有 $k-1$条的指标恰为 1。这是因为每条这样的测地线 $\gamma = \pi^{-1}(p)$ 对应于一个临界点 p，而 ϕ 莫尔斯理论论证表明至少存在 $k-1$ 个指标为 2 的临界点。接着，在下文的命题 2 中，我们将证明存在 m_0，使得若 $m \geq m_0$，则指标$(\gamma) = 3 -$ 指标 $\mathrm{Hess}_p \phi$。因此，在这种情况下， ϕ 的任意一个指标为 2 的临界点都对应于 ϕ的一条指标为 1 的闭测地线。 □

注 4. 鉴于注 5，我们可以将此结果陈述中的假设 $m \geq m_0$ 替换为假设 $|P_i - P_j| \geq d_0$ 对某个 d_0 以及所有 $i \neq j$均成立。

另请注意，当 ϕ 的所有奇点共线时，测地线轨道的数量恰好达到前一结果所保证的最小值。事实上，可以找到测地线轨道数量超过该最小值的显式例子。我们将在此重述 [25] 中的命题 3.7 所提供的例子，以便读者查阅。另请参见上文图 1以及下文的5.2，其中以图示形式展示了这些测地线。

命题 1. 设 (X, g) 是一个通过 *Gibbons–Hawking Ansatz* 构造的超*K¨ahler* 流形，其中 ϕ 恰有3 个奇点，位于一个等边三角形的顶点处。那么，对于$m \geq m_0$，g 恰有4 条测地线轨道，其中一条的指标为2，其余三条的指标均为1。*</output>*

证明。 证明同样见命题 3.7。 [25]但这些测地线最终得到的指标这一陈述除外。关于指标的陈述源于这样一个事实：此类测地线对应于 ϕ 的临界点，其中三个的指标为 2，一个的指标为 2。同样，根据下面的命题 2，最终得到的测地线的指标会反转，因此我们得到所述结果。 □

5.3. **稳定闭测地线**。在 [40]中已证明，利用 Gibbons–Hawking Ansatz 构造的超K¨ahler 流形上不存在严格稳定测地线。论证相当简单。由圆对称性，任何严格稳定测地线都必须是圆不变的，正如

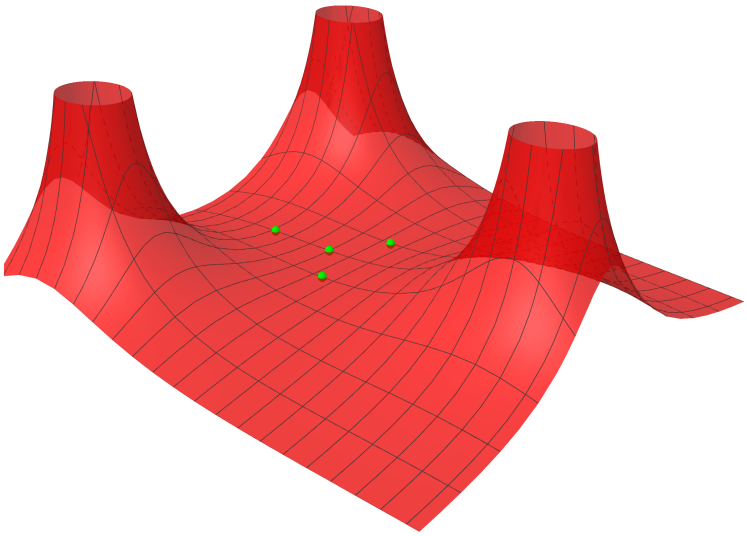

FIGURE 4. 势的图像 ϕ 限制在包含该三角形的平面上。为便于观察，将四个临界点叠加在势函数图像之上。它们对应于命题 1 中的测地线，其中位于中心的临界点产生指标为二的测地线，而其余三个临界点产生指标为一的测地线。

否则它将具有非零零度。因此，任何这样的测地圆轨道都必须对应于 ϕ 的局部极大值（ℓ 的极小值），但这是不可能的，因为 ϕ 是调和的。

然而，事实证明，可以找到无穷多个二阶稳定但当然并非严格稳定的闭测地线。这些测地线的零度等于 3，在高阶下不稳定；下面将给出一些例子，参见例如例 6。

我们首先计算所考虑的超¨凯勒度量的黎曼曲率张量。

联络形式。 考虑由 $\{e^a\}_{a=0}^3$ 给出的标准正交余标架

$$e^0 = \phi^{-1/2}\eta \quad \text{and} \quad e^i = \phi^{1/2} d\mu_i \tag{5.2}$$

对于 $i = 1, 2, 3$。利用爱因斯坦求和约定，我们有满足嘉当结构方程的联络 1-形式 ω_b^a

$$de^a = e^b \wedge \omega_b^a, \quad \omega_b^a + \omega_a^b = 0. \tag{5.3}$$

利用单极子方程

$$d\eta = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\frac{\partial\phi}{\partial\mu_i} d\mu_j \wedge d\mu_k,$$

我们推导出

$$\omega_j^k = \frac{1}{2\phi^{3/2}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\mu_j}e^k - \frac{\partial\phi}{\partial\mu_k}e^j - \epsilon_{ijk}\frac{\partial\phi}{\partial\mu_i}e^0\right), \tag{5.4}$$

$$\omega_i^0 = \frac{1}{2\phi^{3/2}}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial\mu_i}e^0 + \epsilon_{ijk}\frac{\partial\phi}{\partial\mu^j}e^k\right). \tag{5.5}$$

曲率 形式。利用 ϕ 的调和性，我们随后可以计算曲率形式

$$\Omega_\mu^\nu = d\omega_\mu^\nu + \omega_\mu^\kappa \wedge \omega_\kappa^\nu.$$

由此可得

$$\Omega_0^i = -\frac{\phi_{ii}\phi - 2\phi_i^2 + \phi_j^2 + \phi_k^2}{2\phi^3}(e_0 \wedge e_i - e_j \wedge e_k) + \tag{5.6}$$
$$- \frac{\phi_{ij}\phi - 3\phi_i\phi_j}{2\phi^3}(e_0 \wedge e_j - e_k \wedge e_i) - \frac{\phi_{ik}\phi - 3\phi_i\phi_k}{2\phi^3}(e_0 \wedge e_k - e_i \wedge e_j)$$

$$\Omega_j^k = -\frac{\phi_{ii}\phi + \phi_j^2 + \phi_k^2 - 2\phi_i^2}{2\phi^3}(e_0 \wedge e_i - e_j \wedge e_k) - \tag{5.7}$$
$$- \frac{\phi_{ij}\phi - 3\phi_i\phi_j}{2\phi^3}(e_0 \wedge e_j - e_k \wedge e_i) - \frac{\phi_{ik} - 3\phi_i\phi_k}{2\phi^3}(e_0 \wedge e_k - e_i \wedge e_j),$$

其中（i，j，k）表示对（1，2，3）作循环置换，且这些方程中重复指标不作求和约定。因此我们有

$$|\mathrm{Riem}|^2 = \sum_{i=1}^3 2|\Omega_0^i|^2 + \sum_{i,j=1}^3 |\Omega_i^j|^2,$$

利用上述公式可得

$$\begin{aligned}|\mathrm{Riem}|^2 &= \frac{1}{\phi^6}\sum_{i=1}^3 \left((\phi_{ii}\phi - 2\phi_i^2 + \phi_j^2 + \phi_k^2)^2 + (\phi_{ij}\phi - 3\phi_i\phi_j)^2 + (\phi_{ik}\phi - 3\phi_i\phi_k)^2\right) + \\ &+ \frac{1}{\phi^6}\sum_{k=1}^3 \left((\phi_{kk}\phi + \phi_i^2 + \phi_j^2 - 2\phi_k^2)^2 + (\phi_{ki}\phi - 3\phi_k\phi_i)^2 + (\phi_{kj}\phi - 3\phi_k\phi_j)^2\right) \\ &= \frac{2}{\phi^6}\sum_{i=1}^3 \left((\phi_{ii}\phi - 2\phi_i^2 + \phi_j^2 + \phi_k^2)^2 + (\phi_{ij}\phi - 3\phi_i\phi_j)^2 + (\phi_{ik}\phi - 3\phi_i\phi_k)^2\right).\end{aligned}$$

此外，利用分解 $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{su}(2)^+ \oplus \mathfrak{su}(2)^-$，我们可以将黎曼曲率张量写为

$$\begin{aligned}\mathrm{Riem} &= \Omega_\mu^\nu e^\mu \otimes e^\nu \\ &= \sum_{i=1}^3 \Omega_0^i e^0 \wedge e^i + \sum_{j<k=1}^3 \Omega_j^k e^j \wedge e^k \\ &= \sum_{i=1}^3 \Omega_0^i \frac{\omega_i + \overline{\omega_i}}{2} + \sum_{j<k=1}^3 \Omega_j^k \frac{\overline{\omega_i} - \omega_i}{2} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^3 (\Omega_0^i - \Omega_j^k) \otimes \omega_i}_{\mathrm{Riem}^+} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^3 (\Omega_0^i + \Omega_j^k) \otimes \overline{\omega_i}}_{\mathrm{Riem}^-},\end{aligned}$$

其中 (i,j,k) 始终是 (1,2,3) 的循环置换。然后，利用方程 5.6 和 5.7，我们发现 Riem^+ 为零，而 $\mathrm{Riem}=\mathrm{Riem}^-$ 满足

$$\mathrm{Riem}^- = -\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\phi_{ii}\phi-2\phi_i^2+\phi_j^2+\phi_k^2}{2\phi^3}\,\overline{\omega_i}+\frac{\phi_{ij}\phi-3\phi_i\phi_j}{2\phi^3}\,\overline{\omega_j}+\frac{\phi_{ik}\phi-3\phi_i\phi_k}{2\phi^3}\,\overline{\omega_k}\right)\otimes\overline{\omega_i},$$

或者将 Riem^- 视为 Λ^2_-上的一个自同态，并写成矩阵形式。

$$-\mathrm{Riem}^- = \begin{pmatrix} \frac{\phi_{11}\phi-2\phi_1^2+\phi_2^2+\phi_3^2}{2\phi^3} & \frac{\phi_{12}\phi-3\phi_1\phi_2}{2\phi^3} & \frac{\phi_{13}\phi-3\phi_1\phi_3}{2\phi^3} \\ \frac{\phi_{21}\phi-3\phi_2\phi_1}{2\phi^3} & \frac{\phi_{22}\phi-2\phi_2^2+\phi_3^2+\phi_1^2}{2\phi^3} & \frac{\phi_{23}\phi-3\phi_2\phi_3}{2\phi^3} \\ \frac{\phi_{31}\phi-3\phi_3\phi_1}{2\phi^3} & \frac{\phi_{32}\phi-3\phi_3\phi_2}{2\phi^3} & \frac{\phi_{33}\phi-2\phi_3^2+\phi_1^2+\phi_2^2}{2\phi^3} \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

例 3 (Taub-NUT)。 在这种情况下 $\phi = m+\frac{1}{2r}$ 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。将其代入方程5.8我们计算得

$$-\mathrm{Riem}^- = \begin{pmatrix} \frac{2m(2x^2-y^2-z^2)}{r^2(1+2mr)^3} & \frac{6mxy}{r^2(1+2mr)^3} & \frac{6mxz}{r^2(1+2mr)^3} \\ \frac{6myx}{r^2(1+2mr)^3} & \frac{2m(2y^2-z^2-x^2)}{r^2(1+2mr)^3} & \frac{6myz}{r^2(1+2mr)^3} \\ \frac{6mzx}{r^2(1+2mr)^3} & \frac{6mzy}{r^2(1+2mr)^3} & \frac{2m(2z^2-x^2-y^2)}{r^2(1+2mr)^3} \end{pmatrix},$$

and

$$|\mathrm{Riem}|^2 = \frac{24m^2}{(2mr+1)^6}.$$

它永不 为零，因此 Taub–Nut度量不存在稳定闭测地线 .

例 4 (轨形Eguchi-Hanson)。 假设情形为 $\phi=\frac{k_1}{2r_1}+\frac{k_2}{2r_2}$，其中 $r_1=\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}$, $r_2=\sqrt{x^2+y^2+(z+1)^2}$ 且 $k_1,\ k_2\in\mathbb{N}$。我们计算得

$$|\mathrm{Riem}|^2 = \frac{96k_1^2k_2^2}{(k_1r_1+k_2r_2)^6},$$

我们再次得出结论：不存在稳定闭测地线。

关于 Eguchi-Hanson空间上不存在稳定闭测地线的证明见 [34]和[5]。这些文献采用的方法同样基于 [4], , 但没有使用 Gibbons–Hawking假设，而是将度量写成余维一形式。

例 5 (Eguchi-Hanson的ALF版本)。 这是我们主要关注的例子，我们发现 $\phi=m+\frac{k_1}{2r_1}+\frac{k_2}{2r_2}$ 其中 $r_1=\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}$, $r_2=\sqrt{x^2+y^2+(z+1)^2}$ 以及 $k_1,\ k_2\in\mathbb{N}$。我们发现

$$\frac{\phi_{12}\phi-3\phi_1\phi_2}{2\phi^3} = \frac{6xy}{r_1^2r_2^2}\frac{mk_1r_1^5+mk_2r_2^5+8z^2k_1k_2}{(2mr_1r_2+k_1r_1+k_2r_2)^3},$$

除非 $xy=0$，否则该式始终非负。由对称性，不失一般性，我们只需分析 $x=0$ 的情形。在这种情形下，我们发现沿着 $x=0$

$$\frac{\phi_{11}\phi-2\phi_1^2+\phi_2^2+\phi_3^2}{2\phi^3} = -2\frac{mk_1r_1^3+mk_2r_2^3+2k_1k_2}{(2r_1r_2+k_1r_1+k_2r_2)^3},$$

该函数永不为零，因此我们发现，在这个 Eguchi-Hanson 的 ALF 版本中，不存在二阶稳定的测地线。

例6 （一条二阶稳定的非极小测地线）。 考虑点 $p_1 = (1,0,0)$、 $p_2 = (0,1,0)$、 $p_3 = (0,0,1)$以及调和函数

$$\phi = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{2|x - p_i|} + \frac{1}{2|x + p_i|} \right).$$

可以发现，对于所有 $i,\ j = 1,\ \ldots,\ 3$，$\partial_i \phi = 0 = \partial^2_{ij} \phi$ 在原点处为零。因此， g 的黎曼曲率张量在该点的原像所形成的圆上消失。由此可知，这条测地线是二阶稳定的。然而，它不可能是严格稳定的，因为 ϕ 是调和的，根据强极大值原理，它在原点处不可能有局部极大值。

例7. 假设 ϕ 的奇点位于某个柏拉图立体的顶点上。那么， X 中原点上方的圆是一条二阶稳定的闭测地线。

这些例子可以通过一种非常有趣的方式加以推广。为此，我们将考虑 ϕ的具有足够对称性的奇点构型。令 $\mathcal{H}_2 \subset \mathbb{R}[x, y, z]$ 表示由二次调和齐次多项式生成的子空间，令 $G \subset O(3,\ \mathbb{R})$表示 ϕ 的奇点的对称群。该群通过复合前作用于 $\mathbb{R}[x, y, z]$ ，计算表明，此作用确实保持 $\mathcal{H}_2$ 不变。我们将 $\mathcal{H}_2^G \subset \mathcal{H}_2$ 表示为由 G-不变元素构成的子空间。

定理6。 假设 ϕ 在原点处有一个临界点，并且其奇点构型的对称群 G 满足 $\mathcal{H}_2^G = 0$。那么，原点是 ϕ 的临界点，且海森矩阵为零，因此其上方的圆在 X 中对应一条二阶稳定的闭测地线。然而，它并非强稳定。

证明。 已知 ϕ 有一个临界点，因而原点处没有奇点，所以它在 0 的某个开邻域内是实解析的，因此我们可以将其写成泰勒级数

$$\phi(x) = \sum_{m \geq 0} \phi_m(x),$$

其中每个 ϕ_m 都是次数为 m的调和齐次多项式。由于 0 是一个临界点，必有 $\phi_1 = 0$ ；又因为 $\phi_2 \in \mathcal{H}_2^G$根据假设也为零。因此，如例 6中所示， g 的曲率张量沿原点上方的圆处处为零，从而证明该圆对应一条二阶稳定的测地线。其不稳定性源于以下事实： ϕ 不可能有局部极小值，因此存在长度严格更小的邻近圆轨道 $\pi^{-1}(x)$ $2\pi\phi(x)^{-1/2}$。 □

最后，作为推论，我们证明定理 3 并在此将其作为推论陈述。

推论1。 对于无穷多个 $k \in \mathbb{N}$，存在 A_k类型的 *ALE* 和 *ALF*引力瞬子，其中包含一条不稳定但二阶稳定的闭测地线。

证明。设 $k + 1$ 存在一个分拆，其中所有项均为 3、6、8、12 或 20。于是，我们可以考虑一族同心的柏拉图立体，并在其顶点处放置电荷。根据例6 和7 ，所得势 ϕ 在它们的共同中心处海森矩阵为零。因此，利用 Gibbons–Hawking Ansatz 构造的相应 ALE 和 ALF A_k 引力瞬子具有一条闭测地线，它二阶稳定，但整体上不稳定。这是超Kähler 矩映射中中心的原像。 □

6. Jacobi operators in the building blocks

本节的目标是计算通过 Gibbons–Hawking Ansatz 构造的度量所对应的测地线轨道的指标。根据底空间分别为欧几里得空间或三维环面，这些结果陈述于命题 2 和3 中。这些结果还刻画了此类测地线轨道何时是非退化的。

最后，在命题 4中，我们求出g_ϵ^{hk}的非退化测地线轨道的雅可比算子的逆，并给出其逆算子范数的估计。

6.1. 测地线轨道的雅可比算子公式。 在本小节中，我们首先计算 Gibbons–Hawking 型度量下测地圆轨道的雅可比算子。

6.1.1. 以 $\mathbb{R}^3$ 为底空间。 对于 5.1 中的度量，并使用 5.2中的余标架，我们可以将测地线轨道 $\gamma_0 = \pi^{-1}(p)$ 的法向量 V 写为如下形式。接着，我们计算

$$\begin{aligned}\frac{D}{dt}\frac{DV}{dt} &= \frac{D}{dt}(\dot{V}_i e_i + V_i \nabla_{e_0} e_i)\\ &= \ddot{V}_i e_i + 2\dot{V}_i \nabla_{e_0} e_i + V_i \nabla_{e_0}^2 e_i\\ &= \ddot{V}_i e_i,\end{aligned}$$

并利用在 ϕ 的临界点 p 处有 $\Omega_0^j(e_0, e_i) = -\frac{1}{2\phi^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\mu_i\partial\mu_j}$ 这一事实，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Riem}(\dot{\gamma_0}, V)\dot{\gamma_0} &= V_i\langle R(e_0, e_i)e_0, e_j\rangle e_j\\ &= V_i\Omega_0^j(e_0, e_i)e_j\\ &= -\frac{1}{2\phi^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\mu_i\partial\mu_j}V_i e_j.\end{aligned}$$

综合以上结果，我们得到

$$\begin{aligned}J_{\gamma_0}(V) &= \frac{D}{dt}\frac{DV}{dt} - \mathrm{Riem}(\dot{\gamma_0}, V)\dot{\gamma_0}\\ &= \left(\ddot{V}_j + \frac{1}{2\phi^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\mu_i\partial\mu_j}V_i\right)e_j.\end{aligned} \tag{6.1}$$

6.1.2. 以 $\mathbb{T}_\Lambda$ 为基底。 现在我们来讨论 g_ϵ^{gh} 中定义的度量 3.3，其形式为 ϵ 乘以一个采用 Gibbons–Hawking Ansatz 构造、基底为三维环面的度量 $\mathbb{T}_\Lambda$。鉴于我们已经计算出 Gibbons–Hawking度量的曲率张量，使用

$$\epsilon^{-1}g_\epsilon^{gh} = \frac{\epsilon}{1+\epsilon h}\theta^2 + \frac{1+\epsilon h}{\epsilon}g_E.$$

现在，设 $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ 是相对于 $\epsilon^{-1}g_\epsilon^{gh}$ 的正交标架；除去围绕 h 的奇点的小球外，它与余标架互为对偶。

$$e^0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{1+\epsilon h}}\theta, \text{ and } e^i = \sqrt{\frac{1+\epsilon h}{\epsilon}}dx_i,$$

特别地，这给出 $e_i = \sqrt{\frac{\epsilon}{1+\epsilon h}}\partial_{x_i}$，并且在方程 5.6 中，我们计算了 $\epsilon^{-1}g_\epsilon^{gh}$ 的曲率形式。我们发现，在 $\phi = \epsilon^{-1} + h$ 的临界点处

$$\Omega_0^j(e_0, e_i) = -\frac{1}{2\phi^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\mu_i\partial\mu_j} = -\frac{\epsilon^2 V_i}{2(1+\epsilon h)^2}\frac{\partial^2 h}{\partial\mu_i\partial\mu_j}.$$

此时，我们回到度量 g_ϵ^{gh} 的讨论。相对于该度量的一个正交标架为 $E_i = \epsilon^{-\frac{1}{2}}e_i$。特别地，我们有 $E_0 = \epsilon^{-1}\sqrt{1+\epsilon h}\theta^*$，其中 θ^* 是相对于基底 θ、dx_1、dx_2、dx_3 的 θ 的对偶。此外，我们发现

$$\gamma_0^* g_\epsilon^{gh} = \frac{\epsilon^2}{1+\epsilon h}\gamma_0^*\theta^2 = dt^2,$$

其中 t 是弧长参数，因此其取值必须属于 $\left[0, \frac{\epsilon}{\sqrt{1+\epsilon h}}\right]$，并满足 $\dot\gamma_0(t) := (d\gamma_0)(\partial_t) = E_0$。接着，将此基底中的法向量场 V 写作 $V = \sum_{i=1}^3 V_i E_i$，我们发现，在 h 的临界点处

$$R(\dot\gamma_0, V)\dot\gamma_0 = V_i\Omega_0^j(E_0, E_i)E_j = \epsilon^{-1}V_i\Omega_0^j(e_0, e_i)E_j = -\frac{\epsilon V_i}{2(1+\epsilon h)^2}\frac{\partial^2 h}{\partial\mu_i\partial\mu_j}E_j,$$

这里我们用到了曲率 2-形式在缩放下保持不变这一事实。接下来，由5.5 中的联络形式计算可知，在 $\phi = \epsilon^{-1} + h$ 的临界点处，我们有$\nabla_{e_0}e_i = 0 = \nabla_{e_0}^2 e_i$，因此也有$\nabla_{E_0}E_i = 0 = \nabla_{E_0}^2 E_i$，由此得到 $\frac{D^2V}{dt^2} = \ddot V_i E_i$。综上这两项计算，我们得到

$$\begin{aligned} J_{\gamma_0}^{gh}(V) &= \frac{D^2V}{dt^2} - \mathrm{Riem}(\dot\gamma_0, V)\dot\gamma_0 \\ &= \left(\ddot V_j + \frac{\epsilon V_i}{2(1+\epsilon h)^2}\frac{\partial^2 h}{\partial\mu_i\partial\mu_j}\right)E_j. \end{aligned} \tag{6.2}$$

6.2. 测地线轨道的雅可比算子指标。 本小节计算由 Gibbons–Hawking Ansatz 给出的度量所对应的测地线轨道的雅可比算子的指标。为方便起见，我们仍将底空间为 $\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{T}^3$ 的情形分别陈述结果。

6.2.1. 底空间为 $\mathbb{R}^3$。设 $P_1, \dots, P_K \in \mathbb{R}^3$ 以及 $m \geq 0$ 如 5.1所述。在下一个结果中，我们考虑使用 Gibbons–Hawking Ansatz 构造的度量，其势函数为

$$\phi = m + \sum_{i=1}^k \frac{1}{2|x - P_i|}.$$

在下一个结果中，我们将把超K $\gamma_0 = \pi^{-1}(p)$ 度量¨ 5.1形式的测地线的指标，与势函数 ϕ 在 p 处的指标联系起来。

命题 2. 对于上述的 $P_1, \dots, P_K \in \mathbb{R}^3$，存在 $m_0 > 0$，使得对于所有 $m \geq m_0$，若 $p \in \mathbb{R}^3$ 是 ϕ 的临界点，且 $V \in \mathbb{R}^3$ 是 $\mathrm{Hess}_p(\phi)$ 对应于非负特征值 μ 的特征向量，则下述结论成立。对于 $\gamma_0 = \pi^{-1}(p)$，V 给出 $-J_{\gamma_0}$ 的一个对应于该特征值的正规特征向量场

$$-\frac{\mu}{2\phi(p)^2}.$$

反过来， $-J_{\gamma_0}$ 的任意非正特征向量都以此方式得到。特别地，我们有

$$\operatorname{index}(-J_{\gamma_0}) = 3 - \operatorname{index}\operatorname{Hess}_p(\phi).$$

证明。 在本命题的情形下， $\gamma_0 = \pi^{-1}(p)$ 是一条长度为 $L = 2\pi\phi(p)^{-1/2}$的测地线轨道。于是，利用正交标架 $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ 和公式 6.1，可得

$$J_{\gamma_0}(V) = \left(\ddot{V}_i + \frac{1}{2\phi^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\mu_i\partial\mu_j}V_j\right)e_i.$$

特别地，算子 $-J_{\gamma_0}$ 是一个具有有限个负特征值的椭圆算子。现在我们来寻找 $-J_\gamma$的非正特征值 $-\lambda \le 0$ 。为此，将任意相应的特征向量 $V(t) = \sum_{i=1}^{3} V_i(t)e_i$ 分解为傅里叶模态会很方便。因此，将其系数$V_i(t)$（其中 $i = 1,2,3$）写成余弦级数，可得

$$V_i(t) = V_{i,0} + \sum_{n\in\mathbb{N}} V_{i,n}\cos(2\pi nt/L).$$

于是，方程 $-J_\gamma(V) = -\lambda V$给出，对于 $i = 1,2,3$,

$$\frac{4\pi^2n^2}{L^2}V_{i,n} - \sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2\phi^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\mu_i\partial\mu_j}V_{j,n} = -\lambda V_{i,n},$$

对于所有满足$V_{i,n}$ 非零的 $n \in \mathbb{N}$ ，以及

$$-\frac{1}{2\phi^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\mu_i\partial\mu_j}V_{j,0} = -\lambda V_{i,0}.$$

此时，写成 $\phi = m + \psi$ 会很方便，其中 $\psi = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2|x-P_i|}$ 与 m无关。于是，前面的方程可以改写为

$$\frac{1}{2\phi^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\mu_i\partial\mu_j}V_{j,0} = \lambda V_{i,0}$$
$$\frac{1}{2\phi^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\mu_i\partial\mu_j}V_{j,n} = \left(\lambda + \frac{4\pi^2n^2}{L^2}\right)V_{i,n},$$

或者，明确用 m 和 ψ表示为,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\mu_i\partial\mu_j}V_{j,0} = 2(m+\psi)^2\lambda V_{i,0}$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\mu_i\partial\mu_j}V_{j,n} = 2(m+\psi)^2\left(\lambda + n^2(m+\psi)\right)V_{i,n},$$

其中我们利用了 $L^2 = 4\pi^2(m+\psi)^{-1}$ 这一事实。现在请注意，这些方程的左端与 m 无关，而对于 $n \neq 0$ ，由于 λ 的非负性和 n^2m 的正性，右端会随着 m 的增加而增加。因此，存在 $m_0 \ge 0$ ，使得对于所有 $m \ge m_0$，当 $n \neq 0$ 时，方程都没有非零解。因此，我们必须关注 $n = 0$ 对应的方程，并将其写为 $\lambda := \mu/(m+\psi)^2$，那么

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\mu_i\partial\mu_j}V_{j,0} = \mu V_{i,0}$$

由此我们得出， μ 是 ψ 的海森矩阵（这与 ϕ 的海森矩阵重合）的一个特征值，而 $(V_{1,\,0},\ V_{2,\,0},\ V_{3,\,0})$ 是一个相应的特征向量。此外，鉴于 $\lambda \geq 0$，我们还必须有 $\mu \geq 0$。□

注 5. 通过使用 m^{-1} 对度量进行缩放，我们也可以对 $\mathbb{R}^3$中的（尺度不变）欧几里得度量进行同样的缩放。这样，命题 2 可表述为 $m = 1$。也就是说，存在 $d_0 > 0$ 使得若 $|P_i - P_j| \geq d_0$ 对所有 $i \neq j$均成立，则相同的结论也成立。

6.2.2. 以 $\mathbb{T}_\Lambda$为基底。 本小节进行类似的计算，但基底取为三维环面$\mathbb{T}_\Lambda$。一个关键区别是，现在我们在点 $\{q_1, \dots q_8\}$和 $\{p_1, \dots, p_n\}$分别放置负电荷和正电荷，如3中所示。与该节一样，我们有相应的调和函数 h，并用它构造超凯¨勒度量 g_ϵ^{gh}，如3.3所示；该度量对应于 ϵ乘以由势函数 $\phi = \epsilon^{-1} + h$确定的 Gibbons–Hawking度量。

和之前一样，现在我们将度量 g_ϵ^{gh}下形如 $\gamma_0 = \pi^{-1}(p)$ 的测地线的指标，与 h 在 p处的指标联系起来。

命题 3. 存在 $\epsilon_0 > 0$，使得对所有 $\epsilon \leq \epsilon_0$，下述结论成立。设 $p \in \mathbb{T}^3$ 是 h 的一个临界点，$V \in \mathbb{R}^3$ 是与非负特征值$\mu \geq 0$对应的 $\mathrm{Hess}_p(h)$ 的一个特征向量。那么，对于 $\gamma_0 = \pi^{-1}(p)$， V 会导出一个与特征值对应的 $-J_{\gamma_0}$ 的正规特征向量场

$$-\frac{\epsilon}{2(1+\epsilon h(p))^2}\mu.$$

反过来 ，$-J_{\gamma_0}$ 的任意非正特征向量都以这种方式得到。特别地，我们有 e

$$\operatorname{index}(-J_{\gamma_0}) = 3 - \operatorname{index}\operatorname{Hess}_p(h).$$

证明。 证明方法是进行与命题2的证明中相同的计算，但改用度量 g_ϵ^{gh}，从而得到以下方程

$$\frac{1}{2(1+\epsilon h)^2}\frac{\partial^2 h}{\partial\mu_i\partial\mu_j}V_{j,0} = \frac{\lambda}{\epsilon}V_{i,0}$$
$$\frac{1}{2(1+\epsilon h)^2}\frac{\partial^2 h}{\partial\mu_i\partial\mu_j}V_{j,n} = \left(\frac{\lambda}{\epsilon} + \frac{4\pi^2 n^2}{\epsilon^3}(1+\epsilon h)\right)V_{i,n}.$$

注意，对于 $n \neq 0$，右端由于 $n^2\epsilon^{-3}$ 项而发散，而左端可以在与 $\epsilon < 1$无关的情况下取上界。因此，当 ϵ 足够小时，我们可以关注第一个方程，即含有 $n = 0$的方程，并写成 $\lambda := \lambda(\epsilon) = \frac{\epsilon}{2(1+\epsilon h)^2}\mu$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial\mu_i\partial\mu_j}V_{j,0} = \mu V_{i,0}.$$

因此， μ 是海森矩阵的一个特征值，其中海森矩阵对应于 h，而 $(V_{1,\,0},\ V_{2,\,0},\ V_{3,\,0})$ 是一个相应的特征向量。鉴于 $\lambda \geq 0$，我们还必须有 $\mu \geq 0$，于是得证。逆向推理立即成立，因此我们完成了所述结果的证明。□

6.3. **对 g_ϵ^{gh} 的测地线轨道的雅可比算子求逆。** 在本小节中，我们将证明命题 4，给出 Gibbons–Hawking度量 g_ϵ^{gh}的测地线轨道的雅可比算子可逆所需满足的条件。该结果还给出了

逆算子的范数上界；稍后将其用于将这样的测地线轨道变形为 g_ϵ^{gh}的测地线。

命题 4. 设 $\gamma_0 = \pi^{-1}(p)$ 是 *Gibbons–Hawking*度量 $g_\epsilon^{gh} = \epsilon^2 h_\epsilon^{-1}\theta^2 + h_\epsilon g_E$ 下的一个测地圆轨道，该度量定义在 P 上，见第 3节。若 h 的海森矩阵在 p处非退化，则 γ_0

$$J_{\gamma_0} : W^{2,2}(S^1, \gamma_0^*(TP)^\perp) \to L^2(S^1, \gamma_0^*(TP)^\perp),$$

是可逆的，且其逆算子满足

$$\|J_{\gamma_0}^{-1}(V)\|_{L^2} \lesssim \epsilon^{-1}\|V\|_{W^{2,2}}.$$

特别地， γ_0 是非退化的，即零度为零。

证明。 与前面一样，我们将法向量场记为 $V = \sum_{i=1}^3 V_i E_i$ ，并将每个系数 V_i 写成余弦级数

$$V_i = V_{i,0} + \sum_{n\in\mathbb{N}} V_{i,n}\cos\left(2\pi n\frac{\sqrt{1+\epsilon h}}{\epsilon}t\right),$$

并利用方程 6.2，可得 $J_{\gamma_0}(V) = \sum_{j=1}^3 (J_{\gamma_0}(V))^j E_j$，其中

$$\begin{aligned}(J_{\gamma_0}(V))^j = &\sum_{i=1}^3 \frac{\epsilon V_{i,0}}{2(1+\epsilon h)^2}\frac{\partial^2 h}{\partial\mu_i\partial\mu_j} + \\ &+ \sum_{i=1}^3\sum_{n\in\mathbb{N}} V_{i,n}\cos\left(2\pi n\frac{\sqrt{1+\epsilon h}}{\epsilon}t\right)\left(\frac{\epsilon}{2(1+\epsilon h)^2}\frac{\partial^2 h}{\partial\mu_i\partial\mu_j} - \delta_{ij}\frac{4\pi^2 n^2}{\epsilon^2}(1+\epsilon h)\right).\end{aligned}$$

此时，沿着 γ_0将法丛分解为 $\gamma_0^*(TP)^\perp = T_0 \oplus T_p$，其中 $T_0 = \{V \mid \nabla_{\dot\gamma_0} V = 0\}$ ，而 T_p 表示相对于 L^2度量的正交补。有了这些分解后，注意到

$$V_{i,0}E_i \in T_0, \text{ and } V_{i,n}\cos\left(2\pi n\frac{\sqrt{1+\epsilon h}}{\epsilon}t\right)E_i \in T_p \text{ for all } n \in \mathbb{N}.$$

因此，我们发现，只要 h 的海森矩阵可逆， $J_{\gamma_0}|_{T_0}$ 就可逆。在这种情况下，我们有 $\|J_{\gamma_0}^{-1}|_{T_0}\| \sim \epsilon^{-1}$。此外，对于 $\epsilon \ll 1$ ，我们实际上有

$$-\langle V, J_{\gamma_0}(V)\rangle_{L^2} \gtrsim \epsilon^{-2}\|V\|_{L^2}^2,$$

对所有 $V \in T_p$ ，因此 $J_{\gamma_0}|_{T_p}$ ： $W^{2,\,2} \to L^2$ 也可逆，接下来我们将计算 $\|J_{\gamma_0}^{-1}|_{T_p}\|$的上界。然后，我们将 $T_p = \oplus_{n\in\mathbb{N}} T_n$ 分解，其中 T_n 由如下形式的向量场生成

$$V_n = \cos\left(2\pi n\frac{\sqrt{1+\epsilon h}}{\epsilon}t\right)(a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3),$$

for $a_1,\ a_2,\ a_3 \in \mathbb{R}$。特别地，鉴于我们处于 h 的临界点，我们有

$$|V_n|^2 = (a_1^2+a_2^2+a_3^2)\cos\left(2\pi n\frac{\sqrt{1+\epsilon h}}{\epsilon}t\right)^2$$

$$|\nabla_{E_0}V_n|^2 = 4\pi^2n^2\frac{1+\epsilon h}{\epsilon^2}(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\cos\left(2\pi n\frac{\sqrt{1+\epsilon h}}{\epsilon}t\right)^2$$

$$|\nabla^2_{E_0}V_n|^2 = 16\pi^4n^4\frac{(1+\epsilon h)^2}{\epsilon^4}(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\cos\left(2\pi n\frac{\sqrt{1+\epsilon h}}{\epsilon}t\right)^2,$$

由此可知，对于 $\epsilon \ll 1$

$$\|V_n\|_{W^{2,2}} \sim n\epsilon^{-1}\|V_n\|_{W^{2,1}} \sim n^2\epsilon^{-2}\|V_n\|_{L^2},$$

并且根据前面的计算，我们得到

$$\|J_{\gamma_0}(V_n)\|_{L^2} \gtrsim n^2\epsilon^{-2}\|V_n\|_{L^2} \sim n^2\epsilon^{-2}\left(n^{-2}\epsilon^2\|V_n\|_{W^{2,2}}\right) \sim \|V_n\|_{W^{2,2}}.$$

再次，由此可知 $J_{\gamma_0}|_{T_p}:\ W^{2,\ 2} \to L^2$ 可逆，且

$$\|J_{\gamma_0}|^{-1}_{T_p}(W)\|_{W^{2,2}} \lesssim \|W\|_{L^2},$$

对于所有 $W \in T_p$。因此，我们可以构造逆算子 $J^{-1}_{\gamma_0} = J^{-1}_{\gamma_0}|_{T_0} \oplus J^{-1}_{\gamma_0}|_{T_p}:\ L^2(T) \to W^{2,\ 2}(T)$，使其满足

$$\|J^{-1}_{\gamma_0}(V_0+V_p)\|_{L^2} \lesssim \epsilon^{-1}\|V_0\|_{W^{2,2}} + \|V_p\|_{W^{2,2}} \lesssim \epsilon^{-1}\|V\|_{W^{2,2}},$$

对于 $\epsilon \ll 1$。 □

7. Geodesics on $\bigcup_{j=1}^8 M^j_\epsilon \cup \bigcup_{i=1}^n N^i_\epsilon$

本节将说明如何运用我们对 ALF 引力瞬子上的测地线的研究成果，在 Foscolo的K3曲面的曲率集中区域构造闭测地线，即 $\bigcup_{j=1}^8 M^j_\epsilon \cup \bigcup_{i=1}^n N^i_\epsilon$。在这两种情形下，也就是 M^j_ϵ和 N^i_ϵ 中，我们将利用 White 扰动定理对 ALF 引力瞬子上的原始测地线作出变形。

7.1. **测地线位于** M^j_ϵ。对每个 $j = 1,\dots,8$，考虑双K¨ahler 度量$\epsilon^{-2}g^{hk}_\epsilon$在 M^j_ϵ上的限制。我们在第 3 节提到，经过这样的缩放后，度量 $\epsilon^{-2}g^{hk}_\epsilon$连同其所有阶导数一致收敛到一个预先固定的、类型为 D_{m_j} 的 ALF 引力瞬子，记为 M^j。

接下来，由 White 变形定理（ [45]中的定理 3.2）可知， M^j中的任意非退化闭测地线都可变形为M^j_ϵ中的一条具有相同指标的非退化闭测地线。遗憾的是，作者对 D_m 型 ALF 引力瞬子上的闭测地线并不熟悉，其中 $m \geq 1$。另一方面，在 $m = 0$的情形下，即 Atiyah–Hitchin 流形，我们在第4 节看到，不存在二阶稳定的闭测地线，但确实存在不稳定闭测地线。事实上，我们看到有一族由 $\mathbb{RP}^2$参数化的闭测地线。由于 $\mathbb{RP}^2$ 的 Lusternik–Schnirelmann 数为 3，根据 White 变形定理， [45]上至少存在 3 条闭测地线，只要 M^j_ϵ 充分小。 $\epsilon > 0$。

7.2. **上的测地线** N^i_ϵ。回顾第3节，对于每个 $i=1$，……，8，缩放后的度量 $\epsilon^{-2}g^{hk}_\epsilon$限制在 N^i_ϵ 上时，连同所有导数一致收敛到一个预先固定的 A_{k_i-1} 型 ALF 引力瞬子，记为 N^i。

与之前一样，当 ϵ 足够小时，我们可以利用 White 变形定理，将 N^i 中任意一条非退化闭测地线变形为 N^i_ϵ 中指标相同的一条测地线。因此，只需为 N^i 找到这样的测地线即可。

例 8. 设 N^i 是利用 Gibbons–Hawking ansatz 构造的 A_2 型 ALF引力瞬子，其中将 $\{P_1,P_2,P_3\}$ 个 $\phi(x)=m+\sum_{i=1}^3\frac{1}{2|x-P_i|}$ 个奇点放置在等边三角形的顶点上。~~由命题 1~~ 可知，存在 4 条非退化测地线。结合命题 2 可得，对于 $m\geq m_0$ 或 $\min_{i\neq j}|P_i-P_j|>d_0$，其中一条测地线的指标为 1，其余三条的指标均为 2。

例 9. 考虑若干组三个奇点 $\{P_{(n)\,1},P_2^{(n)},P_3^{(n)}\}_{n=1,\dots,N}$，每组与其他组之间的距离都足够大。我们将通过明确要求下式来实现这一点：

$$D:=\min_{n,m=1,\dots,N}\min_{i,j=1,2,3}|P_i^{(n)}-P_j^{(m)}|\gg d:=\max_{n=1,\dots,N}\max_{i,j=1,2,3}|P_i^{(n)}-P_j^{(n)}|.$$

于是，我们可以将 $\phi=m+\sum_{n=1}^N\phi^{(n)}$ 写成，其中

$$\phi^{(n)}=\sum_{i=1}^3\frac{1}{2|x-P_i^{(n)}|}.$$

于是，对于凸包中任意的 $l\in\{1,\dots,N\}$ 和 x，该凸包由三个点 $\{P_{(l)\,1},P_{(l)\,2},P_{(l)\,3}\}$构成，我们发现，对于 $n\neq l$

$$|\nabla^k\phi^{(n)}|\lesssim D^{-k-1}.$$

特别地，若 $\phi^{(l)}$ 是非退化的，我们发现存在足够大的 D_0，使得对于 $D\geq D_0$，函数 ϕ 在 $\{P_{(l)\,1},P_2^{(l)},P_{(l)\,3}\}$ 的凸包内具有与 $\phi^{(l)}$相同数量的临界点，且这些临界点具有相同的指标。

基于这些观察，我们现在设定 $N=3$，并将每个 $\{P_{(n)\,1}、P_2^{(n)}、P_{(n)\,3}\}$ 放置在边长为 d 的等边三角形的顶点处。于是，我们在每个这样的三角形内部得到三个指标为二的临界点和一个指标为一的临界点。此外，我们可以将这些小三角形分别放置在一个大得多的三角形（边长为 $D\gg d$）的顶点处。然后，在这个大三角形内部，我们还会找到三个指标为二的临界点和一个指标为一的临界点。

总的来说，利用命题2 ，我们发现所得的A_8型 ALF 引力瞬子，记作 N^i，总共有 12 条指标为一的测地线轨道和 4 条指标为二的测地线轨道。见图1。

例 10。设 N^i 是一种 A_1 类型的 ALF引力瞬子。则，经由 π 对连接 ϕ 的两个奇点的直线取原像，得到一个全测地、非圆但轴对称的椭球面。因此，它具有 1 条非退化闭测地线以及一个由 S^1 参数化的闭测地线一参数族，其零度等于一，指标为二。由于 S^1 的 Lusternik–Schnirelmann 数等于二，根据 White 变形定理 [45]

任何对该度量的充分小扰动都至少具有 $1+2=3$ 条闭测地线，其中每条的指标分别为一、二和三。

8. Geodesics on K_ϵ

本节讨论如何在 Fosocolo 的 K3 曲面塌缩区域（即 K_ϵ中）构造闭测地线。我们首先在 8.1 节中，将 Gibbons– Hawking 近似中的塌缩测地圆 $K_{\epsilon^{gh}}$ 变形为 Fosocolo 的 K3 曲面 K_ϵ上的实际测地线。本小节的主要结果是命题5。接着，在 8.2 节中，我们研究 h 的临界点，因为它们会在近似空间 $K_{\epsilon^{gh}}$上产生闭测地线。若这些临界点非退化，则可将其用于命题5 ，从而将这些闭测地线变形为 K_ϵ上的闭测地线。最后，在 8.3 节中，我们给出一个例子，作为本节其余结果的应用。

在讨论命题 5 的陈述和证明之前，我们先回顾一些有助于陈述该结果的记号。如第 3节所述，K_ϵ 是 $X_\epsilon=(X,\, g_\epsilon^{hk})$ 中的一个大开集，我们也可以将其视为配备超K¨ahler 度量 g_ϵ^{hk}的 $P/\mathbb{Z}_2$ 的子集。因此，我们可以将投影 π 限制到 K_ϵ 上，从而得到映射 $\pi:\ K_\epsilon\to\mathbb{T}_\Lambda/\mathbb{Z}_2$。

8.1. 测地线的变形。在本小节中，我们将相对于近似超K¨ahler度量 g_ϵ^{gh}变形测地线，使其成为Foscolo的K3度量 g_ϵ^{hk}下的实际测地线。

命题 5。设 p 是 h 和 $\gamma_0=\pi^{-1}(p)$的一个非退化临界点。那么，存在 $\epsilon_0>0$，使得对所有正的 $\epsilon<\epsilon_0$:

- 存在唯一的法向量场 $U\in\Gamma(S^1,\gamma_0^*(TX)^\perp)$满足 $\|U\|_{W^{2,2}}\lesssim\epsilon^{9/5}$，且 d 使得 $\gamma(t)=\exp_{\gamma_0(t)}(U(t))$ 是超*K¨ahler*度量 g_ϵ^{hk}下的一条闭测地线;
- γ_0 与 γ 之间的豪斯多夫距离满足 $d_H(\gamma_0,\gamma)\lesssim\epsilon^{13/10}$。
  γ 关于 g_ϵ^{hk}的指标与 γ_0 关于 g_ϵ的指标相同。

在深入证明之前，先计算 γ_0 相对于 g_ϵ^{hk}偏离测地线的程度，并对线性化测地线方程作一些估计，这样做很方便。

设 $s_0>0$ 为一个稍后确定的小参数，并令 $s\in(0,\ s_0)$。于是，我们将测地线方程写成函数的零点集:

$$f_s:W^{2,2}(S^1,\gamma_0^*TX^\perp)\to L^2(S^1,\gamma_s^*TX^\perp)$$

定义如下:

$$f_s(V)=(\nabla^{g_\epsilon^{hk}}_{\dot\gamma_s}\dot\gamma_s)^{\perp_{g_\epsilon^{hk}}},$$

其中，$\gamma_s(t)=\exp_{\gamma_0(t)}(sV(t))$，$(\cdot)^{\perp_{g_\epsilon^{hk}}}$表示使用度量 g_ϵ^{hk}到 $\langle\dot\gamma_s\rangle\subset TX|_{\gamma_s(S^1)}$ 的法丛上的投影，而 $\nabla^{g_\epsilon^{hk}}$是其列维-奇维塔联络。

误差项。 回顾方程 3.5 可知

$$g_\epsilon^{hk}=g_\epsilon+\epsilon^\alpha\Upsilon_\epsilon, \tag{8.1}$$

对于 Υ_ϵ，一个满足 $|\Upsilon_\epsilon|_{g_\epsilon}\lesssim 1$ 且具有导数的对称张量，以及满足 $\alpha=\frac{11-2\delta}{5}$且具有 $\delta\in(-1/2,0)$ 的张量。现在，选择一个局部坐标系 $\{x_\mu\}_{\mu=1}^4$，使得 $|\partial_{x_\mu}|_{g_\epsilon^{hk}}\lesssim 1$ （对于充分小的 $\epsilon\ll 1$

这也意味着 $|\partial_{x_\mu}|_{g_\epsilon} \lesssim 1$)，对于 $\mu = 1$，2，3，4。在该坐标系的定义域内，关于 g_ϵ^{hk} 的 $t \mapsto \gamma_0(t)$ 的测地线方程为

$$\nabla^{g_\epsilon^{hk}}_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0 = \left(\ddot\gamma_0^\nu + ((\Gamma_\epsilon^{hk})^\nu_{\mu\lambda}\circ\gamma_0)\dot\gamma_0{}^\mu\dot\gamma_0{}^\lambda\right)\partial_{x_\nu},$$

其中 $(\Gamma_\epsilon^{hk})^\nu_{\mu\lambda}$ 表示度量 g_ϵ^{hk}的克里斯托费尔符号。回想一下，对于一般度量g，可通过以下公式利用度量计算这些符号

$$\Gamma^\nu_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\nu\rho}\left(\partial_\lambda g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\lambda} - \partial_\rho g_{\mu\lambda}\right).$$

因此，利用方程 8.1 可得

$$(\Gamma_\epsilon^{hk})^\nu_{\mu\lambda} = (\Gamma_\epsilon)^\nu_{\mu\lambda} + \epsilon^\alpha(\delta\Gamma_\epsilon)^\nu_{\mu\lambda}, \tag{8.2}$$

其中 $(\Gamma_\epsilon)^\nu_{\mu\lambda}$ 表示度量 g_ϵ 的克里斯托费尔符号，且 $|(\delta\Gamma_\epsilon)^\nu_{\mu\lambda}| \lesssim 1$。将其代入测地线方程可得

$$\begin{aligned}\nabla^{g_\epsilon^{hk}}_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0 &= \left(\ddot\gamma_0^\nu + ((\Gamma_\epsilon)^\nu_{\mu\lambda}\circ\gamma_0)\dot\gamma_0{}^\mu\dot\gamma_0{}^\lambda\right)\partial_{x_\nu} + \epsilon^\alpha\left(((\delta\Gamma_\epsilon)^\nu_{\mu\lambda}\circ\gamma_0)\dot\gamma_0{}^\mu\dot\gamma_0{}^\lambda\right)\partial_{x_\nu}\\ &= \epsilon^\alpha\left(((\delta\Gamma_\epsilon)^\nu_{\mu\lambda}\circ\gamma_0)\dot\gamma_0{}^\mu\dot\gamma_0{}^\lambda\right)\partial_{x_\nu},\end{aligned}$$

因为对于度量 g_ϵ， γ_0 是一条测地线。鉴于 $|\partial_{x_\mu}| \lesssim 1$ ，因此我们得到

$$|\nabla^{g_\epsilon^{hk}}_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0|_{g_\epsilon^{hk}} \lesssim \epsilon^\alpha, \tag{8.3}$$

类似地，我们也得到 $|\nabla^{g_\epsilon^{hk}}_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0|_{g_\epsilon} \lesssim \epsilon^\alpha$。

此外，由 g_ϵ诱导的 S^1上的 L^2-度量满足 $\gamma_0^* g_\epsilon = \frac{\epsilon^2}{1+\epsilon h}\gamma_0^*\theta^2 = dt^2$，其中 $t \in [0, 2\pi\frac{\epsilon}{\sqrt{1+\epsilon h}}]$。然而，有时使用一个与$\epsilon$无关的参数会更方便。因此，我们将坐标 t（即弧长参数）重新缩放为 $u = \frac{\sqrt{1+\epsilon h}}{\epsilon}t \in [0, 2\pi]$，利用它，度量变为 $\gamma_0^* g_\epsilon = \frac{\epsilon^2}{1+\epsilon h}du^2$。此外，再次利用 $g_\epsilon^{hk} = \overline{g_\epsilon} + \epsilon^\alpha\Upsilon_\epsilon$，可得 $\gamma_0^* g_\epsilon^{hk} = \frac{\epsilon^2}{1+\epsilon h}du^2 + O(\epsilon^\alpha)$。因此，由于 $\alpha > 2$，当 ϵ充分小时，我们可以如下估计 $\nabla^{g_\epsilon^{hk}}_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0$ 的L^2-范数

$$\|\nabla^{g_\epsilon^{hk}}_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0\|_{L^2} \lesssim \left(\int_0^{2\pi}|\nabla^{g_\epsilon^{hk}}_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0|^2_{g_\epsilon}\epsilon du\right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \epsilon^{\alpha+\frac{1}{2}}. \tag{8.4}$$

比较雅可比算子。我们首先回顾曲线 γ_0 关于一般度量 g 的雅可比算子 $J^g_{\gamma_0}(\cdot)$ 的定义。根据定义，它表示为

$$J_{\gamma_0}(V) := \left(\frac{D}{dt}\frac{DV}{dt} - R^g\left(\dot\gamma_0, V\right)\dot\gamma_0\right)^\perp,$$

其中 $R^g(\cdot,\ \cdot)\cdot$ 是 g 的黎曼曲率张量，而 $(\cdot)^\perp$ 是相对于度量 g的正交分量。我们的下一个目标是比较 $J^{g_\epsilon}_{\gamma_0}$和 $J^{g_\epsilon^{hk}}_{\gamma_0}$，并进一步将它们与 g_ϵ^{hk}在 γ_0处的测地线方程的线性化进行比较。

利用 Koszul公式，我们发现，对于任意向量场 X，Y，Z

$$\begin{aligned}2g_\epsilon^{hk}(\nabla_X^{g_\epsilon^{hk}}Y,Z) &= X\left(g_\epsilon^{hk}(Y,Z)\right)+Y\left(g_\epsilon^{hk}(Z,X)\right)-Z\left(g_\epsilon^{hk}(X,Y)\right)\\ &\quad+g_\epsilon([X,Y],Z)+g_\epsilon([Z,X],Y)-g_\epsilon([Y,Z],X)\\ &= X\left(g_\epsilon(Y,Z)\right)+Y\left(g_\epsilon(Z,X)\right)-Z\left(g_\epsilon(X,Y)\right)\\ &\quad+g_\epsilon([X,Y],Z)+g_\epsilon([Z,X],Y)-g_\epsilon([Y,Z],X)\\ &\quad+\epsilon^\alpha\left(X\left(\Upsilon_\epsilon(Y,Z)\right)+Y\left(\Upsilon_\epsilon(Z,X)\right)-Z\left(\Upsilon_\epsilon(X,Y)\right)\right)\\ &\quad+\epsilon^\alpha\left(\Upsilon_\epsilon([X,Y],Z)+\Upsilon_\epsilon([Z,X],Y)-\Upsilon_\epsilon([Y,Z],X)\right)\\ &= 2g_\epsilon(\nabla_X^{g_\epsilon}Y,Z)+\epsilon^\alpha\left(\tilde{\Upsilon}_\epsilon(X,Z)\right)(Y),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\left(\tilde{\Upsilon}_\epsilon(X,Z)\right)(Y) &= X\left(\Upsilon_\epsilon(Y,Z)\right)+Y\left(\Upsilon_\epsilon(Z,X)\right)-Z\left(\Upsilon_\epsilon(X,Y)\right)\\ &\quad+\Upsilon_\epsilon([X,Y],Z)+\Upsilon_\epsilon([Z,X],Y)-\Upsilon_\epsilon([Y,Z],X),\end{aligned}$$

它关于 X，Z 是张量性的，但关于 Y不是。此外，若 $\{e_\mu\}_{\mu=1}^4$ 表示度量 g_ϵ^{hk}的一个正交标架，我们可以写为

$$\begin{aligned}\left(\tilde{\Upsilon}_\epsilon(X,Z)\right)(Y) &= \left(\tilde{\Upsilon}_\epsilon(X,e_\mu)\right)(Y)\left(g_\epsilon^{hk}(e_\mu,Z)\right)\\ &= g_\epsilon^{hk}\left(\left(\tilde{\Upsilon}_\epsilon(X,e_\mu)\right)(Y)e_\mu,Z\right),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}g_\epsilon(\nabla_X^{g_\epsilon}Y,Z) &= g_\epsilon^{hk}(\nabla_X^{g_\epsilon}Y,Z)-\epsilon^\alpha\Upsilon_\epsilon(\nabla_X^{g_\epsilon}Y,Z)\\ &= g_\epsilon^{hk}(\nabla_X^{g_\epsilon}Y,Z)-\epsilon^\alpha g_\epsilon^{hk}\left(\Upsilon_\epsilon(\nabla_X^{g_\epsilon}Y,e_\mu)e_\mu,Z\right)\\ &= g_\epsilon^{hk}\left(\nabla_X^{g_\epsilon}Y-\epsilon^\alpha\Upsilon_\epsilon(\nabla_X^{g_\epsilon}Y,e_\mu)e_\mu,Z\right).\end{aligned}$$

最后，将这两者代入上面对 $2g_\epsilon^{hk}(\nabla_X^{g_\epsilon^{hk}}Y,\ Z)$ 的计算，得到

$$2g_\epsilon^{hk}(\nabla_X^{g_\epsilon^{hk}}Y,Z)=2g_\epsilon\left(\nabla_X^{g_\epsilon}Y-\epsilon^\alpha\Upsilon_\epsilon(\nabla_X^{g_\epsilon}Y,e_\mu)e_\mu+\frac{\epsilon^\alpha}{2}\left(\tilde{\Upsilon}_\epsilon(X,e_\mu)\right)(Y)e_\mu,Z\right).$$

由于这对所有的 Z 都成立，我们得出

$$\nabla_X^{g_\epsilon^{hk}}Y=\nabla_X^{g_\epsilon}Y-\epsilon^\alpha\Upsilon_\epsilon(\nabla_X^{g_\epsilon}Y,e_\mu)e_\mu+\frac{\epsilon^\alpha}{2}\left(\tilde{\Upsilon}_\epsilon(X,e_\mu)\right)(Y)e_\mu.$$

我们不需要这个方程的精确公式；我们所需要的只是，对于任意向量场 X，Y，都有

$$\nabla_X^{g_\epsilon^{hk}}Y=\nabla_X^{g_\epsilon}Y+\epsilon^\alpha O_X(Y),$$

对于 $O_X(Y)$，这是一个关于 X 具有张量性的量，但关于 Y 不具有张量性，且其导数阶数为 $O(1)$，与 $\epsilon\ll 1$ 无关。将其代入黎曼曲率张量的定义，我们发现这两个度量的黎曼曲率张量之间的关系为

$$R^{g_\epsilon^{hk}}(\cdot,\cdot)\cdot=R^{g_\epsilon}(\cdot,\cdot)\cdot+\epsilon^\alpha O_R(\cdot,\cdot,\cdot),$$

再次有 $O_R(\cdot,\cdot,\cdot) \sim O(1)$。根据这两个观察，我们发现，相对于 g_ϵ^{hk} 和 g_ϵ ， γ_0 的雅可比算子相差一个阶数为 ϵ^α 的项，即对任意向量场 V

$$J_{\gamma_0}^{g_\epsilon^{hk}}(V) = J_{\gamma_0}^{g_\epsilon}(V) + \epsilon^\alpha \delta J(V), \tag{8.5}$$

其中 $|\delta J(V)| \lesssim |V|$ 逐点成立。

线性化测地线方程。 然而，测地线方程 $f_s(V) = 0$ 的线性化并不完全等同于雅可比算子，因为 $t \mapsto \gamma_0(t)$ 并非度量 g_ϵ^{hk}下的测地线。下一个引理将计算测地线方程的线性化。

引理 1。 设 $\gamma_s(t) = \exp_{\gamma_0(t)}(sV(t))$ 同前。则，

$$\frac{D}{ds}\Big|_{s=0} (\nabla^{g_\epsilon^{hk}}_{\dot\gamma_s}\dot\gamma_s)^{\perp_{g_\epsilon^{hk}}} = J^{g_\epsilon^{hk}}_{\gamma_0}(V) - \langle \nabla^{g_\epsilon^{hk}}_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0, \nabla^{g_\epsilon^{hk}}_{\dot\gamma_0} V\rangle_{g_\epsilon^{hk}} \frac{\dot\gamma_0}{|\dot\gamma_0|^2_{g_\epsilon^{hk}}} - \langle \nabla^{g_\epsilon^{hk}}_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0, \dot\gamma_0\rangle_{g_\epsilon^{hk}} \frac{\nabla^{g_\epsilon^{hk}}_{\dot\gamma_0} V}{|\dot\gamma_0|^2_{g_\epsilon^{hk}}}.$$

证明。 为使记号简洁，在证明过程中，我们将省略所有上下标中的 g_ϵ^{hk}。具体而言，我们有 $(\nabla_{\dot\gamma_s}\dot\gamma_s)^\perp = \nabla_{\dot\gamma_s}\dot\gamma_s - \langle \nabla_{\dot\gamma_s}\dot\gamma_s, \frac{\dot\gamma_s}{|\dot\gamma_s|}\rangle \frac{\dot\gamma_s}{|\dot\gamma_s|}$。 然后，对其求导并在 ~~$s=0$~~ 处取值，可得

$$\begin{aligned}
\frac{D}{ds}(\nabla_{\dot\gamma_s}\dot\gamma_s)^\perp &= \frac{D}{ds}\nabla_{\dot\gamma_s}\dot\gamma_s - \langle \frac{D}{ds}\nabla_{\dot\gamma_s}\dot\gamma_s, \frac{\dot\gamma_s}{|\dot\gamma_s|}\rangle \frac{\dot\gamma_s}{|\dot\gamma_s|} - \langle \nabla_{\dot\gamma_s}\dot\gamma_s, \frac{D}{ds}\frac{\dot\gamma_s}{|\dot\gamma_s|}\rangle \frac{\dot\gamma_s}{|\dot\gamma_s|} - \langle \nabla_{\dot\gamma_s}\dot\gamma_s, \frac{\dot\gamma_s}{|\dot\gamma_s|}\rangle \frac{D}{ds}\frac{\dot\gamma_s}{|\dot\gamma_s|} \\
&= \left(\frac{D}{ds}\nabla_{\dot\gamma_s}\dot\gamma_s\right)^\perp - \langle \nabla_{\dot\gamma_s}\dot\gamma_s, \frac{D}{ds}\frac{\dot\gamma_s}{|\dot\gamma_s|}\rangle \frac{\dot\gamma_s}{|\dot\gamma_s|} - \langle \nabla_{\dot\gamma_s}\dot\gamma_s, \frac{\dot\gamma_s}{|\dot\gamma_s|}\rangle \frac{D}{ds}\frac{\dot\gamma_s}{|\dot\gamma_s|}
\end{aligned} \tag{8.6}$$

现在我们将分别计算各项。第一项为

$$\begin{aligned}
\left(\frac{D}{ds}\nabla_{\dot\gamma_s}\dot\gamma_s\right)^\perp &= \left(\frac{D}{ds}\frac{D}{dt}\frac{d\gamma_s}{dt}\right)^\perp \\
&= \left(\frac{D}{dt}\frac{D}{ds}\frac{d\gamma_s}{dt} - R\left(\frac{d\gamma_s}{dt}, \frac{d\gamma_s}{ds}\right)\frac{d\gamma_s}{dt}\right)^\perp \\
&= \left(\frac{D}{dt}\frac{DV}{dt} - R\left(\dot\gamma_s, V\right)\dot\gamma_s\right)^\perp,
\end{aligned}$$

为了计算其余两项，我们需要求出 $\frac{D}{ds}\frac{\dot\gamma_s}{|\dot\gamma_s|}$ ，其表达式为 ——

$$\frac{D}{ds}\frac{\dot\gamma_s}{|\dot\gamma_s|} = \frac{1}{|\dot\gamma_s|}\frac{D}{ds}\dot\gamma_s - \frac{\dot\gamma_s}{2|\dot\gamma_s|^3}\partial_s|\dot\gamma_s|^2.$$

另一方面，我们有

$$\partial_s|\dot\gamma_s|^2 = 2\langle \frac{D}{ds}\dot\gamma_s, \dot\gamma_s\rangle = 2\langle \frac{DV}{dt}, \dot\gamma_s\rangle = 2\partial_t\langle V, \dot\gamma_s\rangle - 2\langle V, \nabla_{\dot\gamma_s}\dot\gamma_s\rangle = -2\langle V, \nabla_{\dot\gamma_s}\dot\gamma_s\rangle$$

因为 $\langle V, \dot\gamma_s\rangle = 0$，将其代入上式可得

$$\frac{D}{ds}\frac{\dot\gamma_s}{|\dot\gamma_s|} = \frac{1}{|\dot\gamma_s|}\frac{DV}{dt} - \frac{\langle V, \nabla_{\dot\gamma_s}\dot\gamma_s\rangle}{|\dot\gamma_s|^3}\dot\gamma_s.$$

将这一切代入上面的方程 8.6 可得

$$\frac{D}{ds}(\nabla_{\dot\gamma_s}\dot\gamma_s)^\perp = \left(\frac{D}{dt}\frac{DV}{dt} - R\left(\dot\gamma_s, V\right)\dot\gamma_s\right)^\perp - \langle \nabla_{\dot\gamma_s}\dot\gamma_s, \nabla_{\dot\gamma_s}V\rangle \frac{\dot\gamma_s}{|\dot\gamma_s|^2} - \langle \nabla_{\dot\gamma_s}\dot\gamma_s, \dot\gamma_s\rangle \frac{\nabla_{\dot\gamma_s}V}{|\dot\gamma_s|^2},$$

这就是命题中的结论。 □

命题5的证明。 我们希望对 $f_s(V)$ 在 s中进行泰勒展开。然而，为了实现这一点，我们必须将 f_s 视为取值于一个与 s无关的同一空间中；为此，可以在 TX 的一个开邻域 U 中将其平凡化，该开邻域 $\{\gamma_0(t)\}_t$ 包含我们将要考虑的所有可能曲线 $t \mapsto \gamma_s(t)$ 的像。在这种情况下，我们有 $TX|_U \cong U \times \mathbb{R}^4$，并且通过隐式地与此同构复合，我们将 f_s 视为一族映射

$$f_s : W^{2,2}(S^1, \langle \dot\gamma_0\rangle^\perp) \to L^2(S^1, \langle \dot\gamma_s\rangle^\perp),$$

其中，我们将 $\dot\gamma_0$ 和 $\dot\gamma_s$ 视为 $\mathbb{R}^4$中的向量。接下来，利用曲线 γ_s 具有平凡法丛这一事实，我们固定一个同一化 ψ_s： $\langle \dot\gamma_s\rangle^\perp \to \langle \dot\gamma_0\rangle^\perp \cong \mathbb{R}^3$，并考虑映射

$$F_s := \psi_s \circ f_s : W^{2,2}(S^1, \mathbb{R}^3) \to L^2(S^1, \mathbb{R}^3),$$

其中 ψ_0 为恒等式。然后，将 $F_s(V)$ 视为关于 s 的函数，在 $s = 0$ 处进行泰勒展开，得到测地线方程

$$\begin{aligned} 0 &= F_0(V) + s\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} F_s(V) + \frac{s^2}{2} R_s(V) \\ &= (\nabla^{g_\epsilon^{hk}}_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0)^{\perp_{g_\epsilon^{hk}}} + s\left[\frac{d\psi_s}{ds}\Big|_{s=0}\left((\nabla^{g_\epsilon^{hk}}_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0)^{\perp_{g_\epsilon^{hk}}}\right) + \frac{D}{ds}\Big|_{s=0}(\nabla^{g_\epsilon^{hk}}_{\dot\gamma_s}\dot\gamma_s)^{\perp_{g_\epsilon^{hk}}}\right] + \frac{s^2}{2}R_s(V), \end{aligned}$$

其中余项满足 $\|R_s(V)\|_{L^2} \lesssim \|V\|^2_{W^1,2}$，参见附录 A。此外，结合方程 8.4 与引理 1，可得 $|\nabla^{g_\epsilon^{hk}}_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0| \lesssim \epsilon^{\alpha+1/2}$，因此 $\frac{D}{ds}\Big|_{s=0}(\nabla^{g_\epsilon^{hk}}_{\dot\gamma_s}\dot\gamma_s)^{\perp_{g_\epsilon^{hk}}}$ 与 $J^{g_\epsilon^{hk}}_{\gamma_0}(V)$ 相差一个 $\epsilon^{\alpha+1/2}$ 阶的量。另一方面，方程 8.5 表明，$J^{g_\epsilon^{hk}}_{\gamma_0}(V)$ 与 $J^{g_\epsilon}_{\gamma_0}(V)$ 相差一个 ϵ^α 阶的量。因此，

$$\frac{D}{ds}\Big|_{s=0}(\nabla^{g_\epsilon^{hk}}_{\dot\gamma_s}\dot\gamma_s)^{\perp_{g_\epsilon^{hk}}} = J^{g_\epsilon}_{\gamma_0}(V) + O(\epsilon^\alpha).$$

此外，由命题 4 可知，$\epsilon^\alpha \ll \epsilon$ $J^{g_\epsilon}_{\gamma_0}$: $W^{2,2} \to L^2$的可逆性转化为 $\frac{D}{ds}|_{s=0}(\nabla^{g_\epsilon^{hk}}_{\dot\gamma_s}\dot\gamma_s)^{\perp_{g_\epsilon^{hk}}}$ 的可逆性，我们将其右逆记为 P: $L^2 \to W^{2,2}$。另请注意，与 $\|(J^{g_\epsilon}_{\gamma_0})^{-1}\| \lesssim \epsilon^{-1}$ 同理，我们也必须有 $\|P\| \lesssim \epsilon^{-1}$。

接下来，我们寻找形如 $V = P(W)$ 的解。在这种情况下，测地线方程变为

$$0 = (\nabla^{g_\epsilon^{hk}}_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0)^{g_\epsilon^{hk}} + s\frac{d\psi_s}{ds}\Big|_{s=0}\left((\nabla^{g_\epsilon^{hk}}_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0)^{\perp_{g_\epsilon^{hk}}}\right) + sW + \frac{s^2}{2}R_s(P(W)),$$

这可以写成一个不动点方程

$$W = -\frac{(\nabla^{g_\epsilon^{hk}}_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0)^{\perp_{g_\epsilon^{hk}}}}{s} - \frac{d\psi_s}{ds}\Big|_{s=0}\left((\nabla^{g_\epsilon^{hk}}_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0)^{\perp_{g_\epsilon^{hk}}}\right) - \frac{s}{2}R_s(P(W)). \tag{8.7}$$

我们将使用绍德尔不动点定理来解决这个问题。为此，我们必须证明，由上一个方程右侧定义的映射$\mathcal{F}$： $L^2 \to L^2$ 将半径为 R 的球映射到自身。

让我们利用方程 A.4来证明这一点

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(W)\|_{L^2} &\lesssim \frac{1}{s}\|(\nabla^{g_\epsilon^{hk}}_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0)^{\perp_{g_\epsilon^{hk}}}\|_{L^2} + \left\|\frac{d\psi_s}{ds}\Big|_{s=0}\left((\nabla^{g_\epsilon^{hk}}_{\dot\gamma_0}\dot\gamma_0)^{\perp_{g_\epsilon^{hk}}}\right)\right\|_{L^2} + s\|R_s(P(W))\|_{L^2}\\ &\lesssim \frac{\epsilon^{\alpha+\frac{1}{2}}}{s} + s\|P(W)\|^2_{W^{2,2}}\\ &\lesssim \frac{\epsilon^{\alpha+\frac{1}{2}}}{s} + s\|P\|^2R^2.\end{aligned}$$

接下来我们选择 ϵ和 s，使得 $\frac{\epsilon^{\alpha+\frac{1}{2}}}{s}$和 $s\|P\|^2R^2$都小于 $R/2$。利用 $\|P\|\sim\epsilon^{-1}$这一事实，只要满足 $sR<\epsilon^2/2$和 $\epsilon^{\alpha+\frac{1}{2}}<sR/2$，上述条件便成立。显然，取足够小的 s 和 ϵ 即可做到这一点，因为 $\alpha=\frac{11-2\delta}{5}>3/2$，因此 $\alpha+\frac{1}{2}>2$。

另一种方法是使用压缩映射原理，这可以保证不动点的唯一性。为此，我们可以使用附录A中的方程 A.5，它给出

$$\|\mathcal{F}(W_2)-\mathcal{F}(W_1)\|\lesssim s\|P\|^2R\|W_2-W_1\|,$$

由此可得，若 $s\|P\|^2R<1$，则 $\mathcal{F}$ 在半径为 R 的球内是压缩映射；这与前面计算所得的条件相差一个因子 2。现在已经证明，存在满足 $\|W\|\le R$的解 W，使其满足不动点方程 8.7；由此得到的测地线为 $\gamma_s(t)=\exp_{\gamma_0(t)}(sV(t))$，其中 $V=P(W)$。因此，为了估计 sV有多大，我们必须找出使前述论证成立的 $s\|P\|R$ 的最小值。回想一下，所需的两个条件是

$$sR<\frac{\epsilon^2}{2},\text{ and }\epsilon^{\alpha+\frac{1}{2}}<\frac{sR}{2}.$$

然而请回想，$\alpha=\frac{11-2\delta}{5}$对于某个 $\delta\in(-1/2,\,0)$。因此，$\alpha+\frac{1}{2}=\frac{27-4\delta}{10}$通过选取 $\delta\in(-1/2,-1/4)$，可以使其大于 $14/5$，所以只要对于某个不依赖于 ϵ 的统一常数 $C>0$，有 $sR=C\epsilon^{\frac{14}{5}}$即可。注意，这样我们便可以任意缩小 s，代价是按比例增大 R，从而使它们的乘积保持为 $C\epsilon^{\frac{14}{5}}$。因此，我们得到

$$\|sV\|_{W^{2,2}}=\|sP(W)\|_{W^{2,2}}\lesssim s\|P\|\|W\|_{L^2}\lesssim sR\epsilon^{-1}=C\epsilon^{\frac{9}{5}},$$

这就完成了命题 5 第一部分的证明，所用方法为 $U=sV$。

接下来，我们必须证明关于 γ_s 到 γ_0 的豪斯多夫距离的断言。我们得到的估计表明

$$\int_0^{2\pi\epsilon}\left(|sV(t)|^2+|s\partial_tV(t)|^2+|s\partial_t^2V(t)|^2\right)dt\lesssim\epsilon^{\frac{18}{5}}.$$

用参数 $u=\epsilon^{-1}t$ 重新参数化（该参数独立于 ϵ），并定义 $\tilde V(u)=V(\epsilon u)$，我们可以将其写成

$$\int_0^{2\pi}\left(|s\tilde V(u)|^2+\epsilon^{-2}|s\partial_u\tilde V(u)|^2+\epsilon^{-4}|s\partial_u^2\tilde V(u)|^2\right)\epsilon du\lesssim\epsilon^{\frac{18}{5}}.$$

鉴于 $1\ll\epsilon^{-1}$，我们发现

$$\int_0^{2\pi}\left(|s\tilde V(u)|^2+|s\partial_u\tilde V(u)|^2+|s\partial_u^2\tilde V(u)|^2\right)du\lesssim\epsilon^{\frac{13}{5}}.$$

索伯列夫嵌入 维度为 1 时的edding $W^{2,2} \hookrightarrow C^{1,\beta}$，对于 $\beta \in (0, 1/2)$，尤其意味着 th at

$$\|sV\|_{C^0} \lesssim \epsilon^{\frac{13}{10}}.$$

由此，我们可以给出 $\gamma_0(t)$ 与 $\gamma_s(t) = \exp_{\gamma_0(t)}(sV(t))$ 之间豪斯多夫距离 d_H 的上界。这表明，

$$\begin{aligned} d_H(\gamma_0, \gamma_s) &= \sup_t \operatorname{dist}(\gamma_0, \gamma_s(t)) \\ &= \sup_t \inf_{t'} \operatorname{dist}(\gamma_0(t'), \gamma_s(t)) \\ &\leq \sup_t \operatorname{dist}(\gamma_0(t), \gamma_s(t)) \\ &= \sup_t |sV(t)| \\ &\lesssim \epsilon^{13/10}, \end{aligned}$$

至此，第二个要点的证明便告结束。

最后，我们来讨论关于指标的最后一条结论。为此，我们将固定一个坐标系，如本节开头所述，即 $\{x_\mu\}_{\mu=1}^4$ 满足 $|\partial_{x_\mu}|_{g_\epsilon^{hk}} \lesssim 1$，并回顾方程 8.2 中的结论：对于 $\alpha = \frac{11-2\delta}{5}$

$$(\Gamma_\epsilon^{hk})^\nu_{\mu\lambda} = (\Gamma_\epsilon)^\nu_{\mu\lambda} + \epsilon^\alpha (\delta\Gamma_\epsilon)^\nu_{\mu\lambda},$$

及其所有导数。于是，在这些坐标下，利用附录 A 中的计算结果，我们可以写出测地线 $\gamma_s(t)$ 关于 g_ϵ^{hk}的雅可比算子 $J_{\gamma_s}^{g_\epsilon^{hk}}$，对于向量场 $v = v^\nu \partial_\nu$，

$$J_{\gamma_s}^{g_\epsilon^{hk}}(v) = (j_\epsilon^{hk})^\nu(v)\partial_\nu,$$

其中

$$(j_\epsilon^{hk})^\nu(v) = (1 - (g_\epsilon^{hk})_{\rho\sigma}\dot\gamma_s^\sigma\dot\gamma_s^\nu)\left(\ddot v^\nu + \partial_\lambda(\Gamma_\epsilon^{hk})^\nu_{\sigma\mu}\dot\gamma_s^\sigma\dot\gamma_s^\mu v^\lambda + 2(\Gamma_\epsilon^{hk})^\nu_{\mu\lambda}\dot\gamma_s^\mu\dot v^\lambda\right).$$

现在，利用前面提到的 g_ϵ^{hk}（分别是 $(\Gamma_\epsilon^{hk})^\nu_{\mu\lambda}$）与 g_ϵ（分别是 $(\Gamma_\epsilon)^\nu_{\mu\lambda}$）之间的关系，我们得到

$$(j_\epsilon^{hk})^\nu(v) = (1 - (g_\epsilon)_{\rho\sigma}\dot\gamma_s^\sigma\dot\gamma_s^\nu)\left(\ddot v^\nu + \partial_\lambda(\Gamma_\epsilon)^\nu_{\sigma\mu}\dot\gamma_s^\sigma\dot\gamma_s^\mu v^\lambda + 2(\Gamma_\epsilon)^\nu_{\mu\lambda}\dot\gamma_s^\mu\dot v^\lambda\right) + O(\epsilon^\alpha|v|).$$

此外，$\gamma_s(t) = \exp_{\gamma(t)}(sV(t))$，其中 $|sV| = O(\epsilon^{\frac{13}{10}})$ 已如刚才所证。因此，我们得到 $\gamma_s^{mu}(t) = \gamma_0^\mu(t) + O(\epsilon^{\frac{13}{10}})$，将其代入上式，并结合 $\epsilon^\alpha < \epsilon^{\frac{13}{10}}$yields

$$\begin{aligned} (j_\epsilon^{hk})^\nu(v) &= (1 - (g_\epsilon)_{\rho\sigma}\dot\gamma_0^\sigma\dot\gamma_0^\nu)\left(\ddot v^\nu + \partial_\lambda(\Gamma_\epsilon)^\nu_{\sigma\mu}\dot\gamma_0^\sigma\dot\gamma_0^\mu v^\lambda + 2(\Gamma_\epsilon)^\nu_{\mu\lambda}\dot\gamma_0^\mu\dot v^\lambda\right) + O(\epsilon^{\frac{13}{10}}|v|) \\ &= j_\epsilon(v) + O(\epsilon^{\frac{13}{10}}|v|), \end{aligned}$$

其中 $j_\epsilon(v)$ 由 $J_{\gamma_0}(v) = (j_\epsilon)^\nu(v)\partial_\mu$定义。我们已在命题 3 中证明，$J_{\gamma_0}$的特征值的最小绝对值与 ϵ成正比，并且由于 $\epsilon^{\frac{13}{10}} \ll \epsilon$的指标与 $J_{\gamma_s}^{g_\epsilon^{hk}}$和$J_{\gamma_0}$的指标相同。□

8.2. **的临界点** h。 下一个命题给出了当点 p_1、.....、 $p_n \in \mathbb{T}_\Lambda$ 处于一般位置时， h 的临界点数量的下界。请注意，这些临界点会产生 K_ϵ^{gh}的测地线。

命题 6。 设 h 是以下方程的一个解： *3.2*对于点 $p_1, \dots, p_n$的一般位置排列。则， h至少包含 10 个指标为一的临界点，以及 $2(n+1)$ 个指标为二的临界点。

特别地，将 h 视为商空间 $T/\mathbb{Z}_2$上的一个函数，它至少有5 个指标为1 的临界点，以及 $n+1$ 个指标为2的临界点。

证明。设 h 是方程 3.2 的一个解，对应点 $p_1, \dots, p_n$的一般位置排列。由 [33] 中的定理 6.3 以及同一参考文献第 46 页中部的第二次应用可知，对于任意选定的单个点，例如 $p_1 \in \mathbb{T}^3$，函数 h 是 Morse。因此，我们现在可以运用莫尔斯理论来计算 h 的临界点数量下界。首先注意到，可以在点 $\{q_1, \dots, q_8\}$、 $\{p_1, \dots, p_n, \tau(p_1) \dots, \tau(p_n)\}$附近修改 h，使其延拓为定义在 $\mathbb{T}^3$ 上的光滑函数 $\tilde{h}$，并在每个 p_i 和 $\tau(p_i)$处取最大值，在每个 q_i处取最小值。这样做不会额外引入 h的临界点。

现在，令 b_i 表示 $\mathbb{T}^3$ 的贝蒂数， $P_t = \sum_l b_l t^l$ 表示其庞加莱多项式。类似地，令 $\nu_l(h)$ 表示 h 的指标为 l 的临界点数，并令 $M_t(f) = \sum_l \nu_l(f) t^l$ 表示其莫尔斯函数。于是，强莫尔斯不等式为

$$M_t(h) - P_t = (1+t)Q_t(h),$$

其中， $Q_t(h) = \sum_l a_l t^l$ 是一个所有系数均非负的多项式。在我们的情形中，有 $P_t = 1 + 3t + 3t^2 + t^3$ 和 $\nu_0 = 8$、 $\nu_3 = 2n$，代入上述强莫尔斯不等式可得

$$8 + \nu_1 t + \nu_2 t^2 + 2nt^3 - (1 + 3t + 3t^2 + t^3) = (1+t)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots) \Leftrightarrow\Leftrightarrow 7 + (\nu_1 - 3)t + (\nu_2 - 3)t^2 + (2n-1)t^3 = a_0 + (a_0 + a_1)t + (a_1 + a_2)t^2 + (a_2 + a_3)t^3 + (a_3 + a_4)t^4 + \dots.$$

然后，我们得到

$$\begin{aligned} a_0 &= 7 \\ a_0 + a_1 &= \nu_1 - 3 \\ a_1 + a_2 &= \nu_2 - 3 \\ a_2 + a_3 &= 2n - 1 \\ a_3 + a_4 &= 0. \end{aligned}$$

由其中最后一个式子可得 $a_3 = 0 = a_4$，再由倒数第二个式子和第一个式子分别得到 $a_2 = 2n-1$ 和 $a_0 = 7$。然后，我们可以将这些结果代入其余方程，并求解 ν_1 和 ν_2。结果为

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 10 + a_1 \geq 10 \\ \nu_2 &= 2(n+1) + a_1 \geq 2(n+1), \end{aligned}$$

由此我们得出， h 至少有 $10 + 2(n+1)$ 个临界点。这些临界点绝不会位于 $\mathbb{Z}_2$-作用的不动点处，因为不动点对应于 $\{q_1, \dots, q_8\}$ 处的点，而 h 在这些点处有局部

极小值。因此，由于 h 是 $\mathbb{Z}_2$-不变的，在 $T/\mathbb{Z}_2$ 中这对应于 $5+n+1=n+6$ 个临界点，其中 5 个指标为一， $n+1$ 个指标为二。□

8.3. **一个特别有趣的例子**。 在进入相关例子之前，我们先从低一维空间中的一个简单小例子开始。

例11。 考虑 $\mathbb{T}^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 以及定义在 $\mathbb{T}^2$ 上的函数 ϕ，它在 $(\mathbb{Z}/2)^2/\mathbb{Z}^2$ 的点处有 4 个局部极小值，并在这些点处有 4 个局部极大值

$$p_1=(1/4,0),\ p_2=(3/4,0),\ p_3=(0,1/4),\ p_4=(0,3/4)\in\mathbb{T}^2,$$

如图 11所示。如果 ϕ 是一个莫尔斯函数，且这些是它仅有的局部极大值和局部极小值，那么它有 $8-\chi(T^2)=8$ 个指标为 1 的临界点。现在假设 ϕ 在直线 $y=x$ 和 $x+y=1$ 的反射下保持不变，那么我们声称这 8 个临界点中有 4 个位于这些直线上。事实上，由相应的反射对称性可知，在任意一条这样的直线上， $\nabla\phi$ 必定与该直线平行。每条这样的直线对应于 $\mathbb{T}^2$ 中的一个圆，且 ϕ 沿着该直线有两个局部极大值，因为这样的直线与 $(\mathbb{Z}/2)^2/\mathbb{Z}^2$ 相交于两点。因此， ϕ 在这些直线中的每一条上都必定有两个局部极小值。总共由此得到 4 个临界点。再次参见图11 及其下方的图注，其中以更直观的方式解释了这个例子。

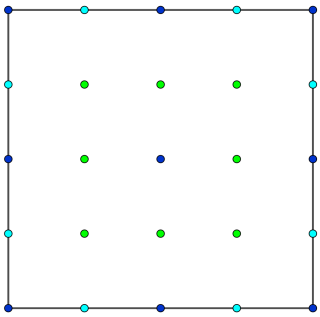

FIGURE 5. $\mathbb{T}^2$ 的基本域，蓝点处为局部极大值，黑点处为局部极小值。绿点为额外的临界点；当 ϕ 限制在线上时，这些临界点是局部极小值，这些线对应于反射对称的不动点集。

其余 4 个临界点可通过对直线$y=1/4$ 和 $y=3/4$进行反射，采用类似的推理得到。

设 $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ 是一个满秩格， $\mathbb{T}_\Lambda = \mathbb{R}^3/\Lambda$ 是对应的三维环面。我们将考虑函数 h，它满足3.2，其中 $\{q_1, \dots, q_8\} = (\Lambda/2)/\Lambda$ 是 τ的不动点， $n = 4$， $k_1 = \dots = k_4 = 4$，以及 $\{p_1, \dots p_n, \tau(p_1) \dots, \tau(p_n)\}$按下文将要说明的方式选取。明确地将格 Λ 写成如下形式

$$\Lambda = \{n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + n_3\lambda_3 \mid (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3\}.$$

然后，我们设

$$p_1 = \lambda_1/4,\ p_2 = 3\lambda_1/4,\ p_3 = \lambda_2/4,\ p_4 = 3\lambda_2/4,$$

then

$$-p_1 = \lambda_1/4 + \lambda_3/2,\ -p_2 = 3\lambda_1/4 + \lambda_3/2,\ -p_3 = \lambda_2/4 + \lambda_3/2,\ -p_4 = 3\lambda_2/4 + \lambda_3/2.$$

这可以看作是将例子 11 在 $\mathbb{T}_\Lambda$中的两个副本叠加起来，见下方图 8.3 。图中展示了一个基本域；请注意，相对的边被识别起来。

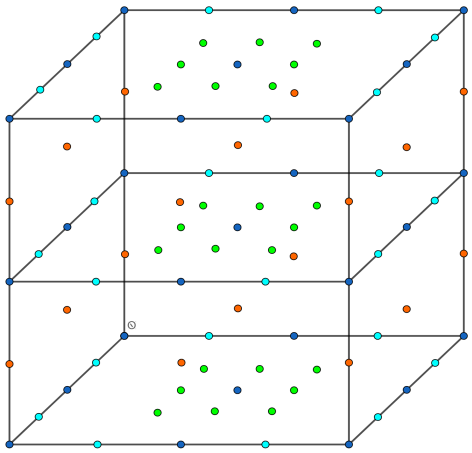

FIGURE 6. $\mathbb{T}_\Lambda$的基本域。8 个黑点表示大小为 -4 的电荷，8 个蓝点表示大小为 $+4$的电荷。绿色点表示从二维图像中得到的 8 个临界点，并通过关于包含这些点的平面的反射对称性得到。此外，还有 8 个橙色的额外临界点，每个都可以用类似的方法通过反射对称性论证得到。

9. GEODESICS ON FOSCOLO'S K3 SURFACE

9.1. **一般结果，定理 1**。 为方便起见，我们在此回顾定理 1的陈述。

定理 7. 设 $n \geq 1$， k_1，……， k_n， m_1，……， m_8满足 *3.1*，一组"泡" N^1，……， N^n， M^1，……， M^8，以及 p_1，……， $p_n \in \mathbb{T}_\Lambda$满足 p_1为一般选取。于是，存在一个正数$\epsilon_0 \ll 1$，使得对所有 $\epsilon < \epsilon_0$:

• 在 K_ϵ 中至少存在 $n+1$ 条指标为一的闭测地线，以及 5 条指标为二的闭测地线。这些闭测地线的位置可精确到 $\epsilon^{13/10}$，以豪斯多夫距离衡量，它们是 h 的临界点上方的圆纤维。

• 对于 $i=1,\ldots\ldots,n$，并且如果 x_1^i 在“泡” N^i 中的位置是一般的，那么 N_ϵ^i 上至少有 k_i-1 条闭测地线。此外，存在一个非负连续单调函数 $\kappa:\ [0,\epsilon_0]\to\mathbb{R}$，满足 $\kappa(0)=0$，使得这些测地线与 ϕ_i 临界点上方的圆纤维之间的豪斯多夫距离为 $\epsilon\kappa(\epsilon)$。此外，存在 $d_{k_i}>0$，使得如果 $\min_{j_1\neq j_2}|x_{j_1}^i-x_{j_2}^i|>d_{k_i}$，那么这些测地线的指标为1。

证明。 第一部分的证明是通过将 K_ϵ^{gh} 上的非退化测地线变形得到的。对于近似度量 g_ϵ^{gh}，这些测地线（具有所需指标）的存在性由命题6 保证；该命题确保此区域内至少存在 $n+1$ 条指标为一和 5 条指标为二的闭测地线。根据命题 5，随后可将这些测地线变形为度量 g_ϵ^{hk}下的测地线，与 g_ϵ^{gh}对应的原测地线之间的豪斯多夫距离为 $\epsilon^{13/10}$；回想一下，这些原测地线位于 h的临界点上方。

定理的第二部分可通过像第 7 节中那样应用 White 变形定理得出。事实上，对于每个 $i=1,\ldots,n$，$\epsilon^{-2}g_\epsilon^{hk}$ 在 N_ϵ^i 上的限制收敛到一个类型为 A_{k_i-1} 的 ALF 引力瞬子，我们将其记为 N_0^i。在 x_1^i 为一般且$|x_{j_1}^i-x_{j_2}^i|>d_{k_i}$的假设下，我们可以应用定理 5 (另见注 4)，从而保证至少存在 k_i-1 条指标为一的非退化闭测地线。根据 White 变形定理 g_ϵ^{hk}，这些测地线在 [45] 上仍然是指标为一的闭测地线。□

9.2. **例子**。 我们来看几个所有 m_j 均为零的例子。在这种情况下，方程3.1 中的条件为

$$\sum_{i=1}^{n}k_i=16,$$

现在我们将探讨 16 的不同分拆所对应的一些例子。

例12。 若所有 $k_i=1$ 那么我们必有 $n=16$ 个点，因此根据定理 7，区域 K_ϵ中至少有 5 条指标为二的闭测地线和 17 条指标为一的闭测地线。

或者，我们可以更全面地展开证明定理 7 时所用的论证。为此，我们使用命题 6，它保证在奇点 h处于一般位置时，至少存在 22 个非退化临界点。其中 5 个指标为一，17 个指标为二；根据命题 2，这意味着 g_ϵ有 17 条指标为一的闭测地线和 5 条指标为二的闭测地线。接着，由命题 5 可知，这些测地线变形为超K¨ahler 度量 g_ϵ^{hk}下的闭测地线。此外，每个 N_0^i 被粘入的空间都是 Taub-NUT 空间，且其中没有闭测地线，参见 [25]中的附录 B 的例 B.1。

此外，在以下 8 个点附近 q_j，度量 $\epsilon^{-2}g_\epsilon^{hk}$近似于一个 ALF D_0- 流形，即 Atiyah–Hitchin流形。由第 7.1 节的讨论可知，在每个 M_j^ϵ 中至少有 3 条闭测地线，由此在X_ϵ上额外得到 24 条闭测地线。因此，总数达到 $22+24=46$ 条闭测地线。不过请注意，最后这 24 条测地线的指标尚不明确。

例 13。 如果所有 $k_i = 2$，那么 $n = 8$ ，由定理 7 可得，在 K_ϵ 中有 5 条指标为二的闭测地线和 9 条指标为一的闭测地线。同样，我们也可以从对奇点的一般位置应用命题 6 开始论证，由此得到 h的 14 个临界点。其中，5 个指标为一，9 个指标为二。根据命题2，可得出 g_ϵ上的闭测地线，其中 5 条指标为二，9 条指标为一。同样，根据命题 5，这些测地线可以变形为相对于双曲 K¨ahler 度量 g_ϵ^{hk}下 K_ϵ的闭测地线。

然而需要注意的是，在这种情况下， $\epsilon^{-2}g_\epsilon^{hk}$在每个点附近都近似于一个 ALF A_1 流形p_i。如例10所述，每个 N_ϵ^i 至少有 3 条闭测地线，其中 2 条指标为一，1 条指标为二。因此，总共多出 24 条闭测地线，每种指标（指标为一、二和三）各 8 条。加上我们先前在 K_ϵ 中找到的测地线，目前我们已经统计出$8 + 9 = 17$ 条指标为一的闭测地线， $8 + 5 = 13$ 条指标为二的闭测地线，以及 8 条指标三的闭测地线。

此外，和前一个例子一样，在 8 个点 q_j, $\epsilon^{-2}g_\epsilon^{hk}$附近收敛到一个 ALF D_0-流形，从而在 X_ϵ 上产生额外的 $8 \times 3 = 24$ 条闭测地线，其指标未知。因此，我们总共找到 $38 + 24 = 62$ 条闭测地线。

例 14。 现在考虑另一个例子，其中有 n_1 个奇点，以及 n_2 个奇点，且 $k_i = 2$和 k_i 均等于 3。这样的 n_1 和 n_2 必须满足 $32 = 2\sum_{i=1}^{n_1} 2 + 2\sum_{i=1}^{n_2} 3$，即

$$16 = 2n_1 + 3n_2.$$

对于 (n_1, n_2)，该方程的唯一可能解是 $\in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$ 为 $n_1 = 2$ 和 $n_2 = 4$。于是，h 在 p_1、p_2 处具有荷为 2 的奇点，并在 p_3、……、p_6 处具有荷为 3 的奇点。在这些点附近，$\epsilon^{-2}g_\epsilon^{hk}$分别收敛到 A_1 和 A_2 个 ALF引力瞬子。后者中的 ALF引力瞬子可以选取为由 Gibbons–Hawking 设定构造而成，其中 3 个奇点置于等边三角形的顶点处，如命题 1 和例 8 所示。于是，在每个 A_2 空间中都有 4 条非退化闭测地线（其中 3 条指标为一，1 条指标为二），并且在 A_1 上有一个全测地椭球面。采用与前一个例子类似的推理，这些结构在 $\bigcup_{i=1}^n N_\epsilon^i$ 上产生总计 $3n_1 + 4n_2 = 6 + 16 = 22$ 条闭测地线，其中 $2 + 4 \times 3 = 14$ 条指标为一， $2 + 4 \times 1 = 6$ 条指标为二，另有 2 条指标三。

连同我们此前在 K_ϵ中找到的测地线，我们在 $K_\epsilon \cup \bigcup_{i=1}^n N_\epsilon^i$上共得到 $22+n+6 = 22+6+6 = 34$ 条闭测地线。其中， $14 + 7 = 21$ 条指标为一， $6 + 5 = 11$ 条指标为二，另有 2 条指标为三。

此外，与此前所有其他例子一样，加入 8 个 D_0 型 ALF 瞬子后，还会额外得到 $8 \times 3 = 24$ 条闭测地线，总数达到 $34 + 24 = 58$。

例15。 现在，我们考虑以下 16 的分拆 $9 + 3 + 2 + 2$ ，此时 $n = 4$ ，且超K¨ahler度量在 K_ϵ中有 5 条指标为一的闭测地线和 5 条指标为二的闭测地线。

此外，我们还考虑以下类型的 ALF引力瞬子： A_8 和 A_2 ，分别对应例9 和8 。前者贡献了 12 条指标为一的闭测地线和 4 条指标为二的闭测地线，而后者贡献了 3 条指标为一的闭测地线和 1 条指标为二的闭测地线。总的来说，在区域 $\bigcup_{i=1}^4 N_\epsilon^i$ 中，我们得到 $12 + 3 + 2 \times 1 = 17$ 条指标为一的闭测地线、 $4 + 1 + 2 \times 1 = 7$ 条指标为二的闭测地线，以及 2×1 条指标三的闭测地线。

总而言之，在 $K_\epsilon \cup \bigcup_{i=1}^4 N_\epsilon^i$ 中，我们找到了 $5 + 17 = 22$ 条指标为一的闭测地线、 $5 + 7 = 12$ 条指标为二的闭测地线，以及2条指标三的闭测地线。

最后，加上来自 $\bigcup_{j=1}^{8} M_\epsilon^i$的24条闭测地线，我们共找到了 $24+12+24=60$条闭测地线。

例16. 在本例中，我们改为考虑分拆 $9+3+3+1$，其中同样有 $n=4$，因此在较大的 K_ϵ 区域中，超K¨ahler 度量也有 5 条指标为一的闭测地线和 5 条指标为二的闭测地线。

使用与前例相同的 A_8 和 A_2 空间，我们发现，在区域 $\bigcup_{i=1}^{4} N_\epsilon^i$ 中，有 $12+3\times 2=18$ 条指标为一的闭测地线和 $4+2\times 1=6$ 条指标为二的闭测地线。

总之，在 $K_\epsilon \cup \bigcup_{i=1}^{4} N_\epsilon^i$ 中，我们发现 $5+18=23$ 条指标为一的闭测地线，以及 $5+6=11$ 条指标为二的闭测地线。

加上来自 $\bigcup_{j=1}^{8} M_\epsilon^i$ 的 24 条闭测地线，我们共找到了 $23+11+24=58$ 条闭测地线。

例17。 最后，我们考虑与例 12 中的情况处于另一极端的情形。此时 $n=1$，在这种情况下 h 有 7 个临界点，而 $\epsilon^{-2}g_\epsilon^{hk}$ 近似于一个 ALF A_{15}- 流形，在一般情形下，它总是至少有 14 条闭测地线。将它们与此前在 K_ϵ 中找到的 7 条相加，我们得到 22 条闭测地线。

Appendix A. Deforming the geodesic equation

考虑曲线族 $\gamma_s(t) = \exp_{\gamma_0(t)}(sV(t))$，它在局部坐标系 $(x^1,\dots,x^n)$ 中可写为 $t\mapsto(\gamma_s^1(t)\dots,\gamma_s^n(t))$。测地线方程为

$$f_s(V) = (\nabla_{\dot\gamma_s}\dot\gamma_s)^\perp = \underbrace{\nabla_{\dot\gamma_s}\dot\gamma_s}_{I_1(s)} - \underbrace{\langle\nabla_{\dot\gamma_s}\dot\gamma_s, \frac{\dot\gamma_s}{|\dot\gamma_s|}\rangle\frac{\dot\gamma_s}{|\dot\gamma_s|}}_{I_2(s)},$$

并且我们可以将其在 s 处展开为泰勒级数

$$f_s(V) = f_0(V) + s\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} f_s(V) + \frac{s^2}{2}R_s(V), \tag{A.1}$$

其中 $|R_u(V)| = |\frac{1}{u^2}\int_0^u (u-s)^2\partial_s^2 f_s(V)ds| \lesssim$上标$_{s\in(0,u)} |\partial_s^2 f_s(V)|$。现在，为了计算$\partial_s|_{s=0} f_s(V) = I_1'(0)+I_2'(0)$ 和 $\partial_s^2 f_s(V) = I_1''(s)+I_2''(s)$，我们分别计算 $I_1'(0)$、$I_2'(0)$ 以及$I_1''(s)$、$I_2''(s)$。为此，将方程写成局部坐标形式会很方便。ν-分量 I_1 和 I_2 分别为

$$I_1^\nu(s) = \ddot\gamma_s^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda}(\gamma_s(t))\dot\gamma_s^\mu\dot\gamma_s^\lambda,$$
$$I_2^\nu(s) = \frac{\dot\gamma_s^\nu g_{\rho\sigma}(\gamma_s(t))\dot\gamma_s^\sigma I_1^\rho(s)}{g_{\rho\sigma}(\gamma_s(t))\dot\gamma_s^\rho\dot\gamma_s^\sigma}.$$

不失一般性，我们可以假设 $\gamma(t)$ 是一条以弧长为参数的测地线，即 $I_1(0) = 0$。此外，现在我们将选取一组非常特殊的坐标。首先，沿着 $\gamma_0(t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$ 固定一个˙坐标 x_1，使得 $x_1\mapsto \exp(x_1\gamma_0(t_0)) = \gamma_0(t_0+x_1)$。然后，我们在 $\gamma_0(t_0)$ 处选取 $\dot\gamma_0(t_0)$ 的法空间的一组标准正交基 $\{e_2,\dots,e_n\}$，并将其沿着 $\gamma_0(t_0-\epsilon,t_0+\epsilon)$ 平行移动。接着，我们考虑坐标系

$$(x_1,\dots,x_n)\mapsto \exp_{\gamma_0(t_0+x_1)}(x_2e_2+\dots+x_ne_n).$$

在这些坐标下，我们可以将向量场 $V(t)$ 写成 $v_2(t)e_2 + \ldots + v_n(t)e_n$，因此曲线 $\gamma_s(t) = \exp_{\gamma_0(t)}(sV(t))$ 在这些坐标下表示为

$$t \mapsto (\gamma_s^1(t), \ldots, \gamma_s^n(t)) = (t - t_0, sv_2(t), \ldots, sv_n(t)).$$

于是，我们得到

$$(I_1^\nu)'(0) = \ddot{v}^\nu + \partial_\lambda \Gamma^\nu_{\sigma\mu} \dot{\gamma}^\sigma \dot{\gamma}^\mu v^\lambda + 2\Gamma^\nu_{\mu\lambda} \dot{\gamma}^\mu \dot{v}^\lambda,$$

其中 $\dot{\gamma}^\sigma := \dot{\gamma_0}^\sigma = \delta^{\sigma 1}$ 但为了更便于阅读我们将要得到的方程，我们将其保留为 $\dot{\gamma}^\sigma$。

注意到沿着一条测地线有下式，上面的方程可以写成更易于理解的形式：

$$\left(\frac{D^2 V}{dt^2}\right)^\nu = \ddot{v}^\nu + 2\Gamma^\nu_{\mu\lambda} \dot{\gamma}^\mu \dot{v}^\lambda + (\partial_\sigma \Gamma^\nu_{\mu\lambda} + \Gamma^\nu_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\sigma\lambda} - \Gamma^\nu_{\rho\lambda}\Gamma^\rho_{\mu\sigma}) \dot{\gamma}^\sigma \dot{\gamma}^\mu v^\lambda,$$

代入上式后得到

$$\begin{aligned}(I_1^\nu)'(0) &= \left(\frac{D^2 V}{dt^2}\right)^\nu + (\partial_\lambda \Gamma^\nu_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \Gamma^\nu_{\mu\lambda} + \Gamma^\nu_{\rho\lambda}\Gamma^\rho_{\mu\sigma} - \Gamma^\nu_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\sigma\lambda}) \dot{\gamma}^\sigma \dot{\gamma}^\mu v^\lambda \\ &= \left(\frac{D^2 V}{dt^2}\right)^\nu + R^\nu_{\mu\lambda\sigma} \dot{\gamma}^\sigma \dot{\gamma}^\mu v^\lambda.\end{aligned}$$

另一方面，二阶导数由下式给出

$$(I_1^\nu)''(s) = 2v^\rho \partial_\rho \Gamma^\nu_{\mu\lambda}(\gamma_s(t)) \dot{\gamma}^\mu \dot{v}^\lambda + \frac{1}{2} v^\rho v^\sigma \partial^2_{\rho\sigma} \Gamma^\nu_{\mu\lambda}(\gamma_s(t)) \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\lambda,$$

其满足

$$\sup_{s\in(0,u)} |(I_1^\nu)''(s)| \lesssim |V|^2 + |\nabla V|^2. \tag{A.2}$$

现在我们来计算 $I_2'(0)$ 和 $I_2''(s)$。对于前者，我们有

$$\begin{aligned}|\gamma_s(t)|_g^2 (I_2^\nu)'(s) = &\left(v^\lambda \partial_\lambda g_{\rho\sigma}(\gamma_s(t)) \dot{\gamma}_s^\sigma \dot{\gamma}_s^\nu + \dot{v}^\nu g_{\rho\sigma}(\gamma_s(t)) \dot{\gamma}_s^\sigma + \dot{\gamma}_s^\nu g_{\rho\sigma}(\gamma_s(t)) \dot{v}^\sigma\right) I_1^\rho(s) \\ &- \frac{1}{|\gamma_s(t)|_g^2} \frac{d}{ds} \left(g_{\rho\sigma}(\gamma_s(t)) \dot{\gamma}_s^\rho \dot{\gamma}_s^\sigma\right) \dot{\gamma}_s^\nu g_{\rho\sigma} \dot{\gamma}_s^\sigma I_1^\rho(s) \\ &+ g_{\rho\sigma}(\gamma_s(t)) \dot{\gamma}_s^\sigma \dot{\gamma}_s^\nu (I_1^\rho)'(s),\end{aligned}$$

其中

$$\frac{d}{ds} \left(g_{\rho\sigma}(\gamma_s(t)) \dot{\gamma}_s^\rho \dot{\gamma}_s^\sigma\right) = v^\lambda \partial_\lambda g_{\rho\sigma}(\gamma_s(t)) \dot{\gamma_s}^\rho \dot{\gamma_s}^\sigma + g_{\rho\sigma}(\gamma_s(t))(\dot{v}^\rho \dot{\gamma_s}^\sigma + \dot{\gamma_s}^\rho \dot{v}^\sigma),$$

利用 $I_1(0) = 0$ 这一事实，我们有

$$(I_2^\nu)'(0) = g_{\rho\sigma} \dot{\gamma}^\sigma \dot{\gamma}^\nu (I_1^\rho)'(0).$$

接下来，我们按如下方式计算二阶导数

$$|\dot{\gamma}_s|^2 (I_2^\nu)''(s) = -\partial_s(|\dot{\gamma}_s|^2)(I_2^\nu)'(s) + \partial_s\left(|\dot{\gamma}_s|^2 (I_2^\nu)'(s)\right),$$

其中第二项为

$$\begin{aligned}\partial_s\left(|\dot\gamma_s|^2(I_2^\nu)'(s)\right) &= \left[v^{\lambda_1}v^{\lambda_2}\partial^2_{\lambda_1\lambda_2}g_{\rho\sigma}(\gamma_s(t))\dot\gamma_s^\sigma\dot\gamma_s^\nu + v^\lambda\partial_\lambda g_{\rho\sigma}(\gamma_s(t))\dot v^\sigma\dot\gamma_s^\nu + v^\lambda\partial_\lambda g_{\rho\sigma}(\gamma_s(t))\dot\gamma_s^\sigma\dot v^\nu\right] I_1^\rho(s)\\ &+\left[v^\nu v^\lambda\partial_\lambda g_{\rho\sigma}(\gamma_s(t))\dot\gamma_s^\sigma + 2\dot v^\nu g_{\rho\sigma}(\gamma_s(t))\dot v^\sigma + \dot\gamma_s^\nu v^\lambda\partial_\lambda g_{\rho\sigma}(\gamma_s(t))\dot v^\sigma\right] I_1^\rho(s)\\ &+\left(v^\lambda\partial_\lambda g_{\rho\sigma}(\gamma_s(t))\dot\gamma_s^\sigma\dot\gamma_s^\nu + \dot v^\nu g_{\rho\sigma}(\gamma_s(t))\dot\gamma_s^\sigma + \dot\gamma_s^\nu g_{\rho\sigma}(\gamma_s(t))\dot v^\sigma\right)(I_1^\rho)'(s)\\ &+\frac{1}{|\gamma_s(t)|_g^2}\left[\frac{1}{|\gamma_s(t)|_g^2}\left(\frac{d}{ds}\left(g_{\rho\sigma}(\gamma_s(t))\dot\gamma_s^\rho\dot\gamma_s^\sigma\right)\right)^2 - \frac{d^2}{ds^2}\left(g_{\rho\sigma}(\gamma_s(t))\dot\gamma_s^\rho\dot\gamma_s^\sigma\right)\right]\dot\gamma_s^\nu g_{\rho\sigma}\dot\gamma_s^\sigma I_1^\rho(s)\\ &-\frac{\frac{d}{ds}\left(g_{\rho\sigma}(\gamma_s(t))\dot\gamma_s^\rho\dot\gamma_s^\sigma\right)}{|\gamma_s(t)|_g^2}\left[(\dot v^\nu g_{\rho\sigma}\dot\gamma_s^\sigma + \dot\gamma_s^\nu v^\lambda\partial_\lambda g_{\rho\sigma}\dot\gamma_s^\sigma + \dot\gamma_s^\nu g_{\rho\sigma}\dot v^\sigma)I_1^\rho(s) + \dot\gamma_s^\nu g_{\rho\sigma}\dot\gamma_s^\sigma(I_1^\rho)'(s)\right]\\ &+\left(v^\lambda\partial_\lambda g_{\rho\sigma}(\gamma_s(t))\dot\gamma_s^\sigma\dot\gamma_s^\nu + g_{\rho\sigma}(\gamma_s(t))\dot v^\sigma\dot\gamma_s^\nu + g_{\rho\sigma}(\gamma_s(t))\dot\gamma_s^\sigma\dot v^\nu\right)(I_1^\rho)'(s)\\ &+g_{\rho\sigma}(\gamma_s(t))\dot\gamma_s^\sigma\dot\gamma_s^\nu(I_1^\rho)''(s).\end{aligned}$$

再次，由此计算、A.2中的界，以及 $\sup_{s\in(0,u)}|I_1(s)|\lesssim 1$和 $\sup_{s\in(0,u)}|I_1'(s)|\lesssim|\nabla V|+|V|$ 可知

$$\sup_{s\in(0,u)}|(I_2^\nu)''(s)|\lesssim|V|^2+|\nabla V|^2+|\nabla^2V|^2. \tag{A.3}$$

综合A.2 和 A.3 中得到的界，我们发现 A.1中的余项满足

$$|R_s(V)|\lesssim|V|^2+|\nabla V|^2+|\nabla^2V|^2.$$

此外，积分后可得

$$\|R_s(V)\|_{L^2}\lesssim\|V\|^2_{W^{2,2}}. \tag{A.4}$$

接下来，我们将说明如何得到以下估计

$$\|R_s(W_2)-R_s(W_1)\|_{L^2}\lesssim\|W_1+W_2\|_{W^{2,2}}\|W_2-W_1\|_{W^{2,2}}. \tag{A.5}$$

为此，我们写作 $R_s(V)=\frac{1}{s^2}\int_0^s(s-s')^2\partial^2_{s'}f_{s'}(V)ds'$ 并计算

$$\begin{aligned}|R_s(W_2)-R_s(W_1)| &= \frac{1}{s^2}\left|\int_0^s(s-s')^2\left(\partial^2_{s'}f_{s'}(W_2)-\partial^2_{s'}f_{s'}(W_1)\right)ds'\right|\\ &= \frac{1}{s^2}\left|\int_0^s(s-s')^2\left(\partial^2_{s'}\int_0^1\partial_u f_{s'}(W_1+u(W_2-W_1))du\right)ds'\right|\\ &\lesssim\left|\int_0^1\partial_u\int_0^s\partial^2_{s'}f_{s'}(W_1+u(W_2-W_1))ds'du\right|\\ &=\left|\int_0^1\partial_u\left[\partial_{s'}f_{s'}(W_1+u(W_2-W_1))\right]_{s'=0}^{s'=s}du\right|\\ &\lesssim\sup_{s'\in[0,s]}\sup_{u\in[0,1]}\left|\partial_u\partial_{s'}f_{s'}(W_1+u(W_2-W_1))\right|.\end{aligned}$$

现在，我们可以用类似的局部坐标，对 $\gamma_s(t)=\exp_{\gamma_0(t)}(sW_1(t)+su(W_2(t)-W_1(t)))$ 重复先前的计算。这立即得出方程 A.5中的界。

Appendix B. Maxwell's problem

一个有趣的问题是：对于哪些点的构型，我们得到的测地线数量可以达到最大或最小？回想一下，在我们的情形中，这些测地线来自 ϕ 的临界点； ϕ 是由一组点电荷在$\mathbb{R}^3$ 或 $\mathbb{T}_\Lambda$中产生的电势。由此， ϕ 的临界点对应于电场 $E = \nabla\phi$ 为零的位置。

事实上，关于临界点最大数量的问题，早在 Maxwell 1873年的《电学与磁学论》中就已提出 [30]。在这部著作中，Maxwell 猜想临界点的最大数量至多为 $(n-1)^2$。令人惊讶的是，沿着这一方向开展的研究寥寥无几，不过可参见这篇非常有趣的文章 [13]，作者在其中计算了静电平衡点数量的上界。关于这一主题的其他相关文献见 [21, 43] 及其中的参考文献。

References

[1] 阿蒂亚，迈克尔·弗朗西斯，和奈杰尔·希钦。 *The geometry and dynamics of magnetic monopoles.*《磁单极子的几何与动力学》。普林斯顿大学出版社，2014年。14[2] Bielawski，Roger。 *Existence of closed geodesics on the moduli space of k-monopoles.*《非线性》9.6（1996年）：1463。15[3] Birkhoff，George D.，和D. C. Lewis。"关于动力系统中给定周期运动附近的周期运动。"《纯粹与应用数学年刊》12.1（1934年）：117-133。1[4] J.P. 布尔吉尼翁和S.T. 丘成桐，载于 *Sur les métriques riemanniennes à courbure de Ricci nulle sur le quotientd'une surface K3*，《巴黎科学院报告》A-B辑277（1973年）：A1175–A1177，10，14，19[5] 陈景怡， *A note on closed stable geodesics in hyperkähler four dimensional manifolds*，讲义（2016年）12，14，19[6]唐纳森，西蒙·K。 *Calabi-Yau metrics on Kummer surfaces as a model glueing problem.* arXiv预印本 arXiv:1007.4218（2010年）。2，12[7] 西蒙·K. 唐纳森和P. B. 克朗海默。《四维流形的几何》。牛津大学出版社，1990年。[8] 高，彭，和迈克尔·R. 道格拉斯。 *Geodesics on Calabi-Yau manifolds and winding states in non-linear sigmamodels.*《物理学前沿》1（2013年）：26。1，2，10，12[9] 迈克尔·R. 道格拉斯。 *Numerical CY metrics from holomorphic networks*。在2022年12月4日里斯本几何研讨系列中作的报告，在线进行，见https://geolis.math.tecnico.ulisboa.pt/seminars? id=6579 8[10] Foscolo，Lorenzo。 *ALF gravitational instantons and collapsing Ricci-flat metrics on the K3 surface.*《微分几何杂志》112.1（2019年）：79-120。2，12，13[11] Foscolo，Lorenzo。 *Gravitational Instantons and Degenerations of Ricci-flat Metrics on the K3 Surface.*《G_2流形及相关主题讲座与综述》。施普林格，纽约州纽约，2020年。173-199。12[12] C. F. 高斯， *Collected works*，第1版（特布纳，莱比锡，1870–1917年）第3卷，第112页；第8卷，第32页；第10卷第2部分，第189–191页。[13] 加布里埃洛夫，Andrei，德米特里·诺维科夫，和鲍里斯·沙皮罗。 *Mystery of point charges.*《伦敦数学会会报》95.2（2007年）：443-472。4，43[14] 格罗莫尔，Detlef，和沃尔夫冈·迈耶。 *Periodic geodesics on compact Riemannian manifolds.*《微分几何杂志》3.3-4（1969年）：493-510。1，11[15] 格罗斯，Mark，和佩勒姆·M. H. 威尔逊。 *Large complex structure limits of K3 surfaces.*《微分几何杂志》55.3（2000年）：475-546。2[16] Gibbons，G.W.；Hawking，S. W。 *Gravitational multi-instantons*，《物理快报B》78（4）：430–432，（1978年）15

[17] Gibbons，G. W.；Hawking，S. W。 *Classification of gravitational instanton symmetries*，《数学物理通讯》66（3）：291–310，（1979年）15[18] Guillemin V，Weinstein A。 *Eigenvalues associated with a closed geodesic*。《美国数学会通报》。（1976年）82：92–4。doi：10.1090/S0002-9904-1976-13972-9 18。11[19] Hein，Hans-Joachim，等。 *Nilpotent structures and collapsing Ricci-flat metrics on the K3 surface.*《美国数学会杂志》35.1（2022年）：123-209。2[20] Jacobi，Carl Gustav Jacob。

Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution.（1839年）：309-313。1[21] Killian，Kenneth。

A remark on Maxwell's conjecture for planar charges.《复变变量与椭圆方程》54.12（2009年）：1073-1078。43[22] Klingenberg，Wilhelm。 *Lectures on closed geodesics*。《》。第230卷。施普林格科学与商业媒体，2012年。2，11[23] Ryoichi Kobayashi。 *Moduli of Einstein Metrics on a K3 Surface and Degeneration of Type 1.*《纯粹数学高级研究》18-11，第257-311页，1990年。12[24] LeBrun，Claude，和Michael Singer。

A Kummer-type construction of self-dual 4-manifolds.《数学年刊》300.1（1994年）：165-180。2，12[25] Lotay，Jason D.，和GONCALO OLIVEIRA。 *Special Lagrangians*，

Lagrangian mean curvature flow and the Gibbons-Hawking ansatz. arXiv预印本arXiv:2002.10391（2020年）。15，16，38[26] Lusternik，L.，和Lev Schnirelmann。

Sur le problème de trois géodésiques fermées sur les surfaces de genre 0.《巴黎科学院报告》189（1929年）：269-271。1[27] Jacobi，Carl Gustav Jacob。

Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution.（1839年）：309-313。1[28] S. Kachru，A. Tripathy，和M. Zimet， *K3 metrics from little string theory*，arXiv:1810.10540（2018年）2[29] Kachru，Shamit，Arnav Tripathy，和Max Zimet。 *K3 metrics.*arXiv预印本arXiv:2006.02435（2020年）。2[30] Maxwell，James Clerk。 *A treatise on electricity and magnetism.* 第1卷。Clarendon出版社，1873年。1，2，4，43[31] L. Bates，和R. Montgomery。 *Closed geodesics on the space of stable two-monopoles.*《数学物理通讯》118.4（1988年）：635-640。13，14[32] Morse，Marston。 *The calculus of variations in the large*。第18卷。美国数学会，1934年。1[33] Morse，Marston，和Stewart S. Cairns。

Critical point theory in global analysis and differential topology: Anintroduction。学术出版社，2014年。35[34] Lye，Jørgen Olsen。 *Stable Geodesics on a K3 Surface* 博士学位论文，Albert-Ludwigs-Universit¨at Freiburg，（2019年）。10，12，19[35] Lye，Jørgen Olsen。 *Geodesics on a K3 Surface near the Orbifold Limit.* arXiv预印本arXiv:2209.04814（2022年）。7，10，12[36] Poincare，H.， *Sur les lignes geodesiques des surfaces convexes.*《美国数学会汇刊》6，237-274（1905年）。1[37] Vigu´e-Poirrier，Micheline，和Dennis Sullivan。

The homology theory of the closed geodesic problem.《微分几何杂志》11.4（1976年）：633-644。11[38] Schroers，B. J.，和M. A. Singer。 *D_k Gravitational Instantons as Superpositions of Atiyah–Hitchin and Taub–NUT Geometries.*《季刊数学杂志》72.1-2（2021年）：277-337。13[39] Sun，Song，和Ruobing Zhang。

Collapsing geometry of hyperkaehler 4-manifolds and applications. arXiv预印本arXiv:2108.12991（2021年）。2[40] Trinca，Federico。 *Barrier methods for minimal submanifolds in the Gibbons-Hawking ansatz.* arXiv预印本arXiv:2010.01322（2020年）。16[41] Tsai，Chung-Jun，和Mu-Tao Wang。

*Global uniqueness of the minimal sphere in the Atiyah-Hitchin manifold.*arXiv预印本arXiv:1804.08201（2018年）。14[42] Tsai，Chung-Jun，和Mu-Tao Wang。 *Mean curvature flows in manifolds of special holonomy.*《微分几何杂志》108.3（2018年）：531-569。7，43[43] Tsai，Ya-Lun。

Maxwell's conjecture on three point charges with equal magnitudes.《物理学D辑：非线性现象》309（2015年）：86-98。7，43

[44] 维格´-普瓦里耶，Micheline 和 Dennis Sullivan。 *The homology theory of the closed geodesic problem.* 《微分几何杂志》11.4（1976）：633-644。1，11[45] White，Brian。
The space of minimal submanifolds for varying Riemannian metrics.《印第安纳大学数学杂志》（1991）：161-200。4，12，26，27，38[46] Wojtkowski，Maciej P. *Bounded geodesics for the Atiyah-Hitchin metric.* 《美国数学会通报》（新系列）18.2（1988）：179-183。15[47] Zelditch S. *Wave invariants at elliptic closed geodesics*。《几何与泛函分析》（1997）。7：145–213。11

Departamento de Matemática, Intituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal; and IST Austria, Klosterneuburg, Austria*URL*: sites.google.com/view/goncalo-oliveira-math-webpage/home*Email address*: galato97@gmail.com