可容许$\mathbb{Q}_p$-Banach 空间表示的局部解析向量系数的连续群上同调

Paulina Fust

arXiv:2302.08369v1 [math.RT] 16 Feb 2023

摘要

我们证明，对于一个 p-进约化群，以可容许 $\mathbb{Q}_p$-Banach 空间表示的局部解析向量为系数的连续上同调群，与以该 Banach 空间表示本身为系数的连续上同调群同胚。此外，我们推导出，这些连续上同调群上的典范拓扑是豪斯多夫的，并且是唯一确定的最精细局部凸拓扑。

1 引言

设 G 是一个 p-进约化群， L 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限域扩张。对于 G 的一个可容许酉 L-Banach 空间表示 Π，我们研究 G 的连续群上同调，其系数取为 Π 中由局部解析向量组成的子表示 Π^{la}。当 G 是紧群时，Rodrigues Jacinto 和 Rodr´ıguez Camargo 在 [6, 推论 1.6], 中证明，这些上同调群 $H^i(G、\Pi^{\mathrm{la}})$ 与以表示 Π 本身为系数的上同调群同构。我们将这一结果作为证明以下定理的关键要素：

定理 1.1（命题 3.3）。设 $\Pi \in \mathrm{Ban}_G^{\mathrm{adm}}(L)$ 是 G 的一个容许 L-Banach 空间表示，Π^{la} 是 Π 中的局部解析向量子空间，并赋予其自然拓扑。包含映射 $\Pi^{\mathrm{la}} \hookrightarrow \Pi$ 在连续群上同调群之间诱导出自然同构

$$H^i(G, \Pi^{\mathrm{la}}) \cong H^i(G, \Pi), \ \forall i \geqslant 0.$$

这里，我们考虑子表示 Π^{la}，并赋予它 Emerton 在 [4], 第 3 节中定义的拓扑；该拓扑比由包含映射 $\Pi^{\mathrm{la}} \subseteq \Pi$ 所诱导的子空间拓扑更精细。为证明定理 1.1，我们针对 G 在一个 L-向量空间 V 上的任意连续表示，构造一个谱序列，该谱序列收敛到 G 以 V 为系数的连续上同调，其第一页项是 Bruhat–Tits 建筑 G 中面稳定子的某些连续上同调群。这使我们能够从紧群的情形推出定理 1.1。在 [5], 的推论 6.10 中，我们证明了对于 Π 的一个容许 L-Banach 空间表示，连续上同调群 $H^i(G、\Pi)$ 是有限维的。结合定理 1.1，便可得到以下推论。

推论 1.2（推论 3.8）。对于每个 $\Pi \in \mathrm{Ban}_G^{\mathrm{adm}}(L)$，连续上同调群 $H^i(G, \Pi^{\mathrm{la}})$ 对所有 $i \geqslant 0$ 都是 L 上的有限维向量空间。

对于拓扑 G-模 V，连续 i-上链空间 $C^i(G,V)$ 赋予紧开拓扑。因此，我们在连续上同调群 $H^i(G,V)$上得到一种商拓扑，称为典范拓扑。此外，若 G-模 V 是局部凸的 L-向量空间，我们证明 $C^i(G,V)$上的紧开拓扑以及 $H^i(G,V)$ 上的典范拓扑都是局部凸的。典范拓扑通常不是豪斯多夫的。然而，定理 1.2 和 1.1 使我们能够应用一个判别准则，判断 [3]中的上同调群是否为豪斯多夫，从而推出以下结论。

推论 1.3（推论 3.9）。设 G 是一个 p-进约化群，且 Π 是 G 的一个容许 L-Banach 空间表示。那么对于所有 $i \geqslant 0$，连续上同调群 $H^i(G,\Pi)$ 和 $H^i(G,\Pi^{\mathrm{la}})$ 上的典范拓扑都是豪斯多夫的。

我们利用推论 1.3 得出，定理 1.1 中的同构实际上是同胚。

推论 1.4（推论 3.13）。连续上同调群 $H^i(G,\Pi^{\mathrm{la}})$ 和 $H^i(G,\Pi)$ 上的典范拓扑是最细局部凸拓扑。特别地，对于所有 $i \geqslant 0$，我们有同胚

$$H^i(G,\Pi^{\mathrm{la}}) \cong H^i(G,\Pi).$$

注 1.5。有限维上同调群 $H^i(G,\Pi)$ 和 $H^i(G,\Pi^{\mathrm{la}})$ 上的最细局部凸拓扑可以更明确地描述如下：设 V 是一个有限维 L-向量空间。那么，使 V 成为局部凸豪斯多夫 L-向量空间的拓扑只有一种，也就是最细局部凸拓扑。具体而言，它是由范数 $\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\| := \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i|$ 定义的拓扑，其中 $e_1,\dots,e_n$ 是 V 的一个 L-基（命题 4.13 [7]）。

致谢：本论文是在 Vytautas Pa˘sk¯unas 的指导下完成的，作为我的博士论文的一部分。我想感谢他给予我的支持，也感谢 Nicolas Dupr´e 和 Jonas Franzel 提出的宝贵意见和建议。本研究由德国研究基金会研究生院 2553 资助。

2 连续群上同调

为保持连贯，我们简要回顾局部仿紧群 G 的连续群上同调定义，并整理后续章节所需的一些基本性质。

按照 [3], ，我们如下定义连续群上同调：设 V 是一个拓扑 G-模，即一个拓扑阿贝尔群 V，带有一个 G-作用，使得 G通过群自同构作用于 V，且映射 $G \times V \to V$是连续的。于是我们可以定义上链复形

$$C^n(G,V) := C(G^{n+1},V) := \{f : G^{n+1} \to V \text{ continuous}\},$$

其微分为 d^n：$C^n(G,V) \to C^{n+1}(G,V)$，定义如下：

$$d^n f(g_0,\dots,g_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f(g_0,\dots,\widehat{g_i},\dots,g_{n+1}).$$

我们赋予空间 $C^n(G,V)$ 紧开拓扑。更明确地说，紧开拓扑的一组基由以下形式的集合的有限交构成

$\Omega(K,U) = \{f \in C^n(G,V) |\ f(K) \subset U\}$，其中 $K \subset G^{n+1}$为紧子集， $U \subset V$为开子集。通过定义 G-作用 $(gf)(g_0,\ldots,g_n) = gf(g^{-1}g_0,\ldots,g^{-1}g_n)$，对于 $g, g_0,\ldots,g_n \in G$和 $f \in C^n(G,V)$，这些将构成拓扑 G-模。此外，存在一个连续的 G-等变单射 $V \hookrightarrow C(G,V)$，其定义为$v \mapsto [g \mapsto v]$。

对于闭子群 $H \leqslant G$ 和一个拓扑 G-模 V，定义诱导表示为

$$\mathrm{Ind}_H^G V := \{f \in C(G,V) \mid f(hg) = hf(g)\ \forall h \in H,\ \forall g \in G\},$$

赋予由 $\mathrm{Ind}_H^G V \subseteq C(G,V)$ 诱导的子空间拓扑以及 G-作用 $gf(g') := f(g'g)$，其中 $g, g' \in G$。类似地，紧诱导定义为

$$\text{c-}\mathrm{Ind}_H^G V := \{f \in \mathrm{Ind}_H^G V \mid \text{ the support of } f \text{ is compact modulo } H\}$$

具有相同的 G-作用。

Le引理 2.1。对于一个拓扑 G-模 V，存在 G-模的同胚

$$C^{n+1}(G,V) \cong C^0(G, C^n(G,V))\ \textit{and}\ C^0(G,V) \cong \mathrm{Ind}_1^G V,$$

对所有 $n \geqslant 0$。

证明。由 [2, X.3.4 推论 2], ，映射

$$\begin{aligned} \phi : C^{n+1}(G,V) &\to C^0(G, C^n(G,V)) \\ f &\mapsto \phi(f), \end{aligned}$$

其中 $\phi(f)(g_0)(g_1,\ldots,g_n) = f(g_0,\ldots,g_n)$, 是一个同胚。显然，这个映射是 G-等变的，因而是拓扑 G-模之间的同构。

赋值 $f \mapsto [g \mapsto gf(g^{-1})]$ 同时定义了映射 $C^0(G,V) \to \mathrm{Ind}_1^G V$及其逆映射。可以验证，这两个映射都是连续且 G-等变的，因此这些模彼此同胚。

□

引理 2.2. 对于两个拓扑 G-模 V 和 W，有如下同构:

$$\mathrm{Hom}_G^{\mathrm{cts}}(V, \mathrm{Ind}_1^G W) \cong \mathrm{Hom}^{\mathrm{cts}}(V,W),$$

其中 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cts}}(V,W)$ 是连续群同态；在左侧，我们取连续的 G-等变群同态。

证明. 由引理 [3, 可得。 □

引理2.3. 复形 $0 \to V \to C^\bullet(G,V)$ 是 G-模的一个正合复形。

证明。 [5, 引理 2.3] □

定义 2.4。 i^{th} G 的V连续群上同调群定义为 $H^i(G,\ V) := H^i(C^\bullet(G,V)^G)$。

拓扑 G-模之间的同态 $\phi: V \to W$ 称为强态射，若诱导的态射 $\mathrm{Ker}\ \phi \to V$ 和 $V/\mathrm{Ker}\ \phi \to W$ 在拓扑阿贝尔群范畴中各自都有一个连续左逆。并且，若存在一个拓扑 G-模的短正合列

$$0 \to V \to W \to U \to 0,$$

其中所有态射都是强的，则诱导出的序列

$$0 \to C^n(G,V) \to C^n(G,W) \to C^n(G,U) \to 0$$

也同样是强的，进而诱导出上同调的长正合列。

例如，任意短正合列

$$0 \to V \to W \to U \to 0,$$

拓扑 G-模中的短正合列在 U 为离散时自动是强的。因此，它诱导出上同调的长正合列。

定义 2.5. 如果拓扑 G-模 V 满足以下条件，则称其为（关于连续群上同调的）无环模:

$$H^i(G,V) = \begin{cases} V^G, \text{ if } i = 0 \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

注 2.6. 1. G-模 $C^n(G,V)$ 关于连续群上同调是无环的。因此，复形 $0 \to V \to C^\bullet(G, V)$ 是 V 的无环分解。（参见 [3, 第 201] 页。）

2. 若拓扑 G-模 V 满足：对于每个强 G-单射 $U \hookrightarrow W$，以及每个拓扑 G-模之间的态射 $\phi: U \to V$，态射 ϕ 都可扩张为从 W 到 V 的态射，则称其为连续内射的。
连续内射 G-模的一个例子是模 $C^n(G,V)$（参见 [3, 第 201] 页）。

引理 2.7. 对于开子群 $K \leqslant G$ 和拓扑 G-模 V， G-模 $C^n(G,V)$ 关于连续群上同调 $H^\bullet(K,-)$ 是无环的。此外，复形 $C^\bullet(G,V)^K$ 的上同调为 $H^\bullet(K,V)$。

证明。证明见 [3, 命题 4 (a)]。思路如下：由于商 G/K 是离散的，因此存在自然投影 $G \to G/K$ 的连续截面 $s: G/K \to G$，利用它可以定义 K-不变同胚 $K \times G/K \to G,\ (h, gK) \mapsto s(gK)h$。因此，可以得到一个 K-模同构

$$C(G,V) \cong C(K \times G/K, V) \cong C(K, C(G/K, V))$$

这表明 $C(G,V)$ 作为 K-模是无环的。

要得出复形 $C^\bullet(G,V)^K$ 计算了 K 的上同调，还必须利用分解 $V \hookrightarrow C^\bullet(G,V)$ 是无环 K-模的强分解，因此可用于计算 K ([3, 命题 1]) 的上同调。

□

3 可容许 Banach 空间表示的局部解析向量

我们采用以下记号：令 G 为一个 p-进约化群， L 为 $\mathbb{Q}_p$ 的有限域扩张。由于 G 是一个 p-进约化群，因此特别是一个局部 $\mathbb{Q}_p$-解析群。我们希望研究 G 的连续上同调群，其系数取自一个容许 Banach 空间表示中的局部解析向量表示。为此，我们使用一个谱序列，并将首先在更一般的情形下构造它。

3.1 谱序列的构造

为了构造该谱序列，我们使用一个平凡表示的分解，该分解由 Bruhat–Tits 建筑中顶点的稳定子子群所诱导的某些紧诱导表示构成。按照 [8], 的记号，我们用 X 表示与 G 相关联的约化 Bruhat–Tits 建筑；对于任意 $q \geqslant 0$ ，用 X_q 表示 X 中所有 q 维面的集合。此外，对于一个 q 面 $F \in X_q$，我们定义 $P_F^\dagger$ 为 F 的 G 稳定子。在 [8], 中，作者利用 Bruhat–Tits 树是一个可缩空间这一事实，构造了一个 G 等变的 $\mathbb{Z}$ 分解。我们采用 [5] 第 6.4 节所述的这一分解的改写形式：

$$\cdots \to \bigoplus_{F\in R_1} \text{c-Ind}_{P_F^\dagger}^G \delta_F \to \bigoplus_{F\in R_0} \text{c-Ind}_{P_F^\dagger}^G \delta_F \to \mathbb{Z} \to 0. \tag{1}$$

本节中，我们使用分解 (1) 构造如下形式的谱序列

$$E_1^{i,j} = \bigoplus_{F\in R_i} H^j(P_F^\dagger, V \otimes_L \delta_F^{-1}) \Rightarrow H^{i+j}(G, V), \tag{2}$$

其中 δ_F 是 P_F上的特征，取值于 $\{\pm 1\}$。

先验地，复形 (1) 是由自由 $\mathbb{Z}$-模上的光滑 G-表示构成的分解，但通过与 L张量，我们得到一个由 L-向量空间上的光滑 G-表示构成的平凡表示分解。

$$\bigoplus_{F\in R_\bullet} \text{c-Ind}_{P_F^\dagger}^G \delta_F \to \mathbb{1} \to 0.$$

滥用记号，现将表示记为 δ_F

$$\delta_F : P_F^\dagger \to \{\pm 1\} \subset L^\times$$

在一维 L-向量空间上。

由于该分解中的紧诱导表示是光滑的，我们可以赋予它们拓扑 G-模结构，方法是为其赋予离散拓扑。

现在考虑双复形

$$C^{i,j} := \text{Hom}_G(\bigoplus_{F\in R_i} \text{c-Ind}_{P_F^\dagger}^G \delta_F, C^j(G,V)),\ i,j \geqslant 0. \tag{3}$$

注意，由于我们给紧诱导表示赋予了离散拓扑， $C^{i,j}$ 中的所有同态都是自动连续的，因此我们也可以将其写作 $C^{i,j} = \text{Hom}_G^{\text{cts}}(\bigoplus_{F\in R_i} \text{c-Ind}_{P_F^\dagger}^G \delta_F, C^j(G,V))$.

这会导出两个具有相同极限项的谱序列。一个来自水平滤过，另一个来自垂直滤过。要明确写出这两个谱序列，我们需要理解双复形 (3) 的各行和各列的上同调。我们先研究各行：

固定一个 $i \geqslant 0$，我们可以写成

$$C^i(G,V) \cong C^0(G, C^{i-1}(G,V)) \cong \mathrm{Ind}_1^G C^{i-1}(G,V) \tag{4}$$

（参见引理 2.1），约定 $C^{-1}(G,V) = V$。特别地，我们有同构 $C^i(G,V)^G \cong (\mathrm{Ind}_1^G C^{i-1}(G,V))^G \cong C^{i-1}(G,V)$。同构 (4) 使我们得以应用拓扑 G-模上的弗罗贝尼乌斯互反律（参见引理 2.2）。于是得到

$$\begin{aligned} C^{\bullet,i} &= \mathrm{Hom}_G^{\mathrm{cts}}(\bigoplus_{F\in R_\bullet} \text{c-Ind}_{P_F^\dagger}^G \delta_F, C^i(G,V)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_L^{\mathrm{cts}}(\bigoplus_{F\in R_\bullet} \text{c-Ind}_{P_F^\dagger}^G \delta_F, C^{i-1}(G,V)) \\ &= \mathrm{Hom}_L(\bigoplus_{F\in R_\bullet} \text{c-Ind}_{P_F^\dagger}^G \delta_F, C^{i-1}(G,V)). \end{aligned}$$

但现在，复形

$$0 \to \mathrm{Hom}_L(L, C^{i-1}(G,V)) \to \mathrm{Hom}_L(\bigoplus_{F\in R_0} \text{c-Ind}_{P_F^\dagger}^G \delta_F, C^{i-1}(G,V)) \to \dots$$

是正合的，因为我们将 L-线性同态作用于一个正合序列，映入 L 向量空间 $C^{i-1}(G,V)$。因此，对各行 $C^{\bullet,i}$ 取上同调可得

$$H^j(C^{\bullet,i}) = \begin{cases} 0, \text{ if } j \neq 0, \\ \mathrm{Hom}_L(L, C^{i-1}(G,V)) \cong C^{i-1}(G,V) \cong C^i(G,V)^G, \text{ if } j = 0. \end{cases}$$

由水平滤过得到的谱序列的第一页项恰由这些上同调群给出：

$$E_{h,1}^{i,j} = H^j(C^{\bullet,i}).$$

此外，当 j 非零时，第一页微分 $d^{i,h^{j},1}: E^{i,h^{j},1} \to E^{i+1}{}_{1,h}{}^{j},$ 为零；而对于 $j = 0$，它们正是这些映射

$$d_{h,1}^{i,0} : C^i(G,V)^G \to C^{i+1}(G,V)^G,$$

由复形 $C^\bullet(G,V)$ 上的微分映射诱导。我们可以轻松计算第二页项：

$$E_{h,2}^{i,j} = H^{i,j}(E_{h,1}^{\bullet,\bullet}) = \begin{cases} 0, \text{ if } j \neq 0 \\ H^i(C^\bullet(G,V)^G) = H^i(G,V), \text{ if } j = 0. \end{cases}$$

总之，我们知道，由水平滤过得到的谱序列收敛到 G 的连续上同调群，其系数为 V。由垂直滤过诱导的谱序列也收敛到 $H^\bullet(G,V)$，因为它具有相同的极限项。

另一方面，我们可以固定一个 $i \geqslant 0$，并考虑该双复形的列

$$C^{i,\bullet} = \mathrm{Hom}_G(\bigoplus_{F\in R_i} \text{c-Ind}_{P_F^\dagger}^G \delta_F, C^\bullet(G,V)).$$

提出直和，并对紧诱导应用弗罗贝尼乌斯互反律后，我们得到

$$\begin{aligned} C^{i,\bullet} &\cong \bigoplus_{F\in R_i} \mathrm{Hom}_{P_F^\dagger}(\delta_F, C^\bullet(G,V)) \\ &\cong \bigoplus_{F\in R_i} \mathrm{Hom}_{P_F^\dagger}(\mathbb{1}, C^\bullet(G,V)\otimes_L \delta_F^{-1}). \end{aligned} \tag{5}$$

引理 3.1. 设 V 是一个定义在 L-向量空间上的拓扑 G-模，设 $H \leqslant G$ 是一个开子群，且 $\delta: H \to L^\times$ 是 H 上的一个光滑特征。我们有一个拓扑 H-模之间的 L-线性同构

$$C^n(G,V)\otimes_L \delta \xrightarrow{\cong} C^n(G, V\otimes_L \delta),\ \forall n \geqslant 0.$$

证明。与引理 2.1 中一样，对于每个拓扑空间 W，我们都有同胚 $C^{n+1}(G, W) \to C^0(G, C^n(G,W))$。若赋予 W 拓扑 H-模的结构，则这些同胚是 H-等变的。因此，我们可以假设 $n=0$。

Let $\widetilde{\delta}: G \to L^\times$ 是将元素 $g\in G$ 映到 $\delta(g)$（当 g 属于 H 时），否则映到 1 的映射。由于 H 是 G 中的开集，该映射是局部常值的（但不一定是特征）。因此，映射

$$\alpha:\ C^0(G,V)\otimes_L \delta \to C^0(G, V\otimes_L \delta),$$

其中

$$\alpha(f\otimes 1)(g) := f(g)\otimes \widetilde{\delta}(g)$$

是一个定义良好的 L-线性同构。此外，它是 H-等变的，因为对于任意 $h\in H$ 和 $g\in G$，我们有

$$\begin{aligned} \alpha(h(f\otimes 1))(g) &= \alpha((hf)\otimes \delta(h))(g) = f(gh)\otimes \widetilde{\delta}(g)\delta(h) \\ &= f(gh)\otimes \widetilde{\delta}(gh) = \alpha(f\otimes 1)(gh) = h\alpha(f\otimes 1)(g). \end{aligned}$$

连续性可以通过右侧紧开拓扑的一个基来检验。这样的基由集合 $\Omega(K, U) = \{f\in C^0(G, V\otimes_L \delta) |\ f(K)\subset U\}$构成，其中 $K\subset G$ 是紧子集，$U\subset V\otimes_L \delta$ 是开子集。固定这样的 K 和 U，我们看到 $\alpha^{-1}(\Omega(K,U))$ 由满足以下条件的函数 f 组成：对任意 $k\in K$，$\widetilde{\delta}(k)f(k)$ 都位于开子集 U 中。但由于 δ 是局部常值的，且 K 是紧的，我们可以用有限多个形如 $\widetilde{\delta}^{-1}(\lambda_i)$ 的开集覆盖 K，其中 $\lambda_i\in L, i=1,\dots,s$。由于交集 $K\cap \widetilde{\delta}^{-1}(\lambda_i)$ 仍然是紧的，我们得到 $\alpha^{-1}(\Omega(K,U))$ 是有限交集

$$\alpha^{-1}(\Omega(K,U)) = \bigcap_{i=1}^{s} \Omega(K_i, \lambda_i^{-1}U)$$

由开集构成，因此其自身也是开集。因此，α 是连续的。 □

将引理 3.1 应用于 (5) 中的特征 δ_F^{-1}，得到

$$\begin{aligned} C^{i,\bullet} &\cong \bigoplus_{F\in R_i} \mathrm{Hom}_{P_F^\dagger}(\mathbb{1}, C^\bullet(G, V\otimes_L \delta_F^{-1})) \\ &\cong \bigoplus_{F\in R_i} C^\bullet(G, V\otimes_L \delta_F^{-1})^{P_F^\dagger}. \end{aligned}$$

正如我们在引理 2.7 中所见，对于任意开子群 $H \leqslant G$，复形 $C^\bullet(G,V)$ 对于 H 的连续上同调都是无环的，因而可用于计算 H 的上同调群。因此，取该复形的上同调，我们得到如下结果：

$$\begin{aligned} H^j(C^{i,\bullet}) &= \bigoplus_{F\in R_i} H^j(C^\bullet(G, V\otimes_L \delta_F^{-1})^{P_F^\dagger}) \\ &= \bigoplus_{F\in R_i} H^j(P_F^\dagger, V\otimes_L \delta_F^{-1}). \end{aligned}$$

因此，我们得到一个谱序列，它收敛到 G的连续上同调，其系数取自 V；其第一页项由我们的双复形的列 $C^{i,\bullet}$ 的上同调给出。更准确地说，我们得到谱序列 (2)。

3.2 可容许 Banach 空间表示的局部解析向量

谱序列 (2) 对于将紧群的已知结果推广到任意 p-进约化群非常有用。本节将通过比较可容许 Banach 空间表示的连续上同调与其由局部解析向量构成的子表示的连续上同调，展示这类应用。我们先简要回顾局部解析表示的定义。有关此主题的更多细节，例如参见 [4]中的第 3 节。

设 V 是一个桶化的局部凸豪斯多夫 L-向量空间，也就是说，它是一个豪斯多夫拓扑 L-向量空间，其拓扑由一族半范数 $q_i : V \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $i \in I$所定义，具体而言， V 上的拓扑是使所有半范数成为连续映射的最粗拓扑，并且在该拓扑下每个闭格都是开集（更多细节参见 [7]中的第 1 章第 6 节）。对于这样的空间，我们用$C^{\mathrm{la}}(G,V)$ 表示 G 上取值于 V的局部解析函数集合。

定义 3.2. G 上的局部解析表示是指在一个桶状局部凸豪斯多夫 L-向量空间上对 G的表示，其中 G 通过连续自同态作用于 V，并且对于每个 $v \in V$，轨道映射 $\rho_v : G \to V$、 $g \mapsto gv$是一个局部解析函数 $\rho_v \in C^{\mathrm{la}}(G、 V)$。

设 Π 是 G的一个可容许 L-Banach 空间表示。根据定义， Π 是一个赋范 L-向量空间，因而特别是一个局部凸 L-向量空间，所以讨论 Π中的局部解析向量是有意义的，即讨论向量$v \in \Pi$，其轨道映射 ρ_v 是局部解析函数。局部解析向量构成 Π的一个局部解析子表示，记为 Π^{la}。子表示Π^{la} 配备了 [4], 中所述的拓扑，使其成为一个拓扑 G-模。 Π^{la} 上的拓扑比由 $\Pi^{\mathrm{la}} \subset \Pi$诱导的子空间拓扑更精细，因此嵌入 $\Pi^{\mathrm{la}} \hookrightarrow \Pi$ 是一个连续映射。关于这一点的解释，例如可参见 [4]第 3.5 节开头。

根据 [6], 中关于紧致 p-adic 李群 K 的推论 1.6，我们有如下同构

$$H^i(K, \Pi^{\mathrm{la}}) \cong H^i(K, \Pi).$$

注意，在 [6], 中，存在此类同构的条件是表示 Π 不含高阶局部解析向量；对于容许的巴拿赫空间表示，这一条件成立（参见定理 7.1 [9]）。

我们希望利用谱序列 (2) 将此结果推广如下:

命题 3.3. 设 Π 是 G 的一个容许 L-Banach 空间表示。那么对每个 $i \geqslant 0$，由包含映射 Π 诱导的映射

$$H^i(G, \Pi^{\mathrm{la}}) \xrightarrow{\cong} H^i(G, \Pi),$$

由包含映射 $\Pi^{\mathrm{la}} \hookrightarrow \Pi$ 所诱导的映射是同构。

在应用谱序列论证之前，请注意，序列中出现的稳定子群 $P_F^\dagger$ 并非紧群。因此，我们需要先证明以下引理。

引理 3.4. 设 Γ 是一个离散群，$0 \to M^0 \xrightarrow{d^0} M^1 \xrightarrow{d^1} M^2 \to \dots$ 是一个 Γ-模复形。给定一个正合函子 $F : \mathrm{Mod}_\Gamma \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}$，则有同构

$$H^i(F(M^\bullet)) \cong F(H^i(M^\bullet))$$

对每个 $i \geqslant 0$ 均成立。

证明. 固定以下记号：对于任意复形

$$0 \to C^0 \xrightarrow{\delta^0} C^1 \xrightarrow{\delta^1} C^2 \to \dots,$$

令 $Z^i(C^\bullet) := \ker(\delta^i)$ 为 i-上闭链，并令 $B^i(C^\bullet) := \mathrm{im}(\delta^{i-1}) \cong C^{i-1}/Z^{i-1}(C^\bullet)$ 为 i-上余边界。

将正合函子 F 应用于正合序列

$$0 \to Z^i(M^\bullet) \to M^i \to M^{i+1}$$

得到同构

$$Z^i(F(M^\bullet)) = F(Z^i(M^\bullet)),\ \forall i \geqslant 0. \tag{6}$$

利用这一识别（6）以及 F 的正合性，我们还可以将余边界改写为

$$B^i(F(M^\bullet)) \cong \frac{F(M^{i-1})}{Z^{i-1}(F(M^\bullet))} \cong \frac{F(M^{i-1})}{F(Z^{i-1}(M^\bullet))} \cong F\left(\frac{M^{i-1}}{Z^{i-1}(M^\bullet)}\right) \cong F(B^i(M^\bullet)). \tag{7}$$

结合这些同构（6）和（7），得到

$$H^i(F(M^\bullet)) \cong \frac{F(Z^i(M^\bullet))}{F(B^i(M^\bullet))} \cong F\left(\frac{Z^i(M^\bullet)}{B^i(M^\bullet)}\right) \cong F(H^i(M^\bullet)),$$

如所述。 □

引理 3.5. 设 Γ 是离散群，则对每个 $i \geqslant 0$，函子 $C^i(\Gamma, -)^\Gamma$ 都是正合的。

特别地，对于任意由 Γ-模组成的复形 $0 \to M^0 \xrightarrow{d^0} M^1 \xrightarrow{d^1} M^2 \to \dots$，我们有

$$H^j(C^i(\Gamma, M^\bullet)^\Gamma) \cong C^i(\Gamma, H^j(M^\bullet))^\Gamma,\ \forall i, j \geqslant 0.$$

证明。为证明函子 $C^i(\Gamma,-)^\Gamma$ 是正合的，设

$$0 \to N \to M \to Q \to 0$$

这是一个 Γ-模的短正合序列。注意，由于 Γ 是离散的， Γ 上的任意函数（或在 Γ^{i+1} 个 Γ的副本的乘积上）都自动连续，因此函子 $C^i(\Gamma,-)$ 是正合的，从而得到一个短正合序列

$$0 \to C^i(\Gamma,N) \to C^i(\Gamma,M) \to C^i(\Gamma,Q) \to 0.$$

对其应用函子 $(-)^\Gamma$ ，得到上同调中的长正合列

$$0 \to C^i(\Gamma,N)^\Gamma \to C^i(\Gamma,M)^\Gamma \to C^i(\Gamma,Q)^\Gamma \to H^1(\Gamma,C^i(\Gamma,N)),$$

其中第一上同调群 $H^1(\Gamma,C^i(\Gamma,N))$ 为零，因为 $C^i(\Gamma,N)$ 是无环的；由引理 2.1 和 Shapiro 引理 [3, 命题 3], ，我们有

$$H^i(\Gamma,C^i(\Gamma,N)) \cong H^i(\Gamma,\mathrm{Ind}_{\{1\}}^\Gamma C^{i-1}(\Gamma,N)) \cong H^i(\{1\},C^{i-1}(\Gamma,N)) = 0$$

对于 $i>0$成立。这证明了 $C^i(\Gamma,-)^\Gamma$的正合性。

因此，我们可以将引理 3.4 应用于函子 $C^i(\Gamma,-)^\Gamma$ 和复形 $M^\bullet$，从而得到 $H^j(C^i(\Gamma,M^\bullet)^\Gamma) \cong C^i(\Gamma,H^j(M^\bullet))^\Gamma$。 □

引理 3.6. 设 V 是一个拓扑 G-模，且 $H \leqslant G$ 是 G 的开正规子群。则存在一个 Hochschild–Serre 谱序列：

$$E_2^{i,j} \cong H^i(G/H,H^j(H,V)) \Rightarrow H^{i+j}(G,V).$$

证明. 我们仿照 [3], 中命题 5 的证明。作者在那里证明了，对于闭正规子群 H，存在一个 Hochschild–Serre 谱序列，但需要一些在开正规子群情形下不需要的额外条件。我们考虑双复形

$$C^{i,j} = C^i(G/H,C^j(G,V)^H)^{G/H},\ i,j \geqslant 0.$$

这个双复形导出两个具有相同极限项的谱序列。第一个谱序列来自双复形的水平滤过，其 E_1-项为：

$$E_{1,h}^{i,j} = H^j(C^{\bullet,i}) = H^j(C^\bullet(G/H,C^i(G,V)^H)^{G/H}) = H^j(G/H,C^i(G,V)^H)$$

注意，对于 G/H 的上同调，群 $C^i(G、V)^H$ 是无环的。事实上，由于 G/H 是离散的， G/H 的连续上同调就是群上同调。现在，对于任意 G/H-模 W，我们可以赋予它离散拓扑，从而将其视为一个拓扑 G/H-模，并得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{G/H}(W,C^i(G,V)^H) &= \mathrm{Hom}_{G/H}^{\mathrm{cts}}(W,C^i(G,V)^H)\\ &\cong \mathrm{Hom}_G^{\mathrm{cts}}(W,C^i(G,V))\\ &\cong \mathrm{Hom}^{\mathrm{cts}}(W,C^{i-1}(G,V))\\ &= \mathrm{Hom}(W,C^{i-1}(G,V)),\end{aligned}$$

利用引理 2.2。由于函子 $\mathrm{Hom}(-,C^{i-1}(G,V))$ 是正合的，因此函子 $\mathrm{Hom}_{G/H}(-,C^i(G,V)^H)$, 也是正合的，这表明 $C^i(G,V)^H$ 对 G/H 的上同调是无环的。

因此，我们得到

$$E_{1,h}^{i,j} = H^j(G/H, C^i(G,V)^H) = \begin{cases} 0, \text{ if } j \neq 0 \\ (C^i(G,V)^H)^{G/H} \cong C^i(G,V)^G, \text{ if } j = 0. \end{cases}$$

而 E_2-项由下式给出

$$E_{2,h}^{i,j} = \begin{cases} 0, \text{ if } j \neq 0 \\ H^i(C^\bullet(G,V)^G) = H^i(G,V), \text{ if } j = 0. \end{cases}$$

因此，双复形 $C^{i,\ j}$ 的两个谱序列都收敛到 G 关于 V的连续上同调。

由垂直滤过得到的谱序列的 E_1-项由下式给出

$$E_{1,v}^{i,j} = H^j(C^{i,\bullet}) = H^j(C^i(G/H, C^\bullet(G,V)^H)^{G/H}).$$

我们可以将引理 3.5 应用于离散群 $\Gamma = G/H$ 和复形 $M^\bullet = C^\bullet(G,V)^H$，从而得到

$$H^j(C^i(G/H, C^\bullet(G,V)^H)^{G/H}) \cong C^i(G/H, H^j(C^\bullet(G,V)^H))^{G/H}.$$

根据引理 2.7，分解 $C^\bullet(G,V)$ 可用于计算 H的连续上同调，因此

$$E_{1,v}^{i,j} = C^i(G/H, H^j(C^\bullet(G,V)^H))^{G/H} = C^i(G/H, H^j(H,V))^{G/H}.$$

那么 E_2-项由下式给出

$$E_{2,v}^{i,j} = H^{i,j}(E_{1,v}^{\bullet,\bullet}) = H^i(C^\bullet(G/H, H^j(H,V))^{G/H}) = H^i(G/H, H^j(H,V)).$$

由于我们知道，这个谱序列与水平滤过给出的谱序列具有相同的极限项，因此得到了所需的谱序列。 □

引理 3.7。设 $F \in X_q$ 是 G 的 Bruhat–Tits 建筑中的一个 q 维面。那么对于每个 $i \geqslant 0$, 我们都有同构

$$H^i(P_F^\dagger, \Pi^{\mathrm{la}}) \cong H^i(P_F^\dagger, \Pi).$$

证明。固定一个面 $F \in X_q$。回忆一下，存在一个紧开子群 $R_F \leqslant G$，它是 $P_F^\dagger$ 的开正规子群（其构造见 [8] 中的第 1.2 节）。

由于子群 R_F 是 $P_F^\dagger$ 的紧开子群，我们可以应用引理 3.6，从而得到一个 Hochschild–Serre 谱序列

$$E_2^{i,j} = H^i(P_F^\dagger/R_F, H^j(R_F, \Pi)) \Rightarrow H^{i+j}(P_F^\dagger, \Pi).$$

用相同的论证，我们也得到了局部解析子表示的一个谱序列

$$\widetilde{E}_2^{i,j} = H^i(P_F^\dagger/R_F, H^j(R_F, \Pi^{\mathrm{la}})) \Rightarrow H^{i+j}(P_F^\dagger, \Pi^{\mathrm{la}}).$$

另一方面，包含映射 $\Pi^{\mathrm{la}} \hookrightarrow \Pi$ 在极限项$H^i(P_F^\dagger$、$\Pi^{\mathrm{la}}) \to H^i(P_F^\dagger$、$\Pi)$之间诱导出映射，并在谱序列的所有第二页项之间诱导出一个映射

$$\widetilde{E}_2^{i,j} = H^i(P_F^\dagger/R_F, H^j(R_F, \Pi^{\mathrm{la}})) \to H^i(P_F^\dagger/R_F, H^j(R_F, \Pi)) = E_2^{i,j}.$$

因此，我们得到一个谱序列的映射 $\widetilde{E}^{i,\,j}_r \to E^{i,\,j}_r$。

但是，由于 R_F 是紧的，[6] 中的推论 1.6 告诉我们，对于 $r=2$ 以及所有 i、$j \geqslant 0$，这些都是同构。根据 [10]，中的比较定理 5.2.12，这也意味着极限项之间的映射

$$H^i(P_F^\dagger, \Pi^{\mathrm{la}}) \to H^i(P_F^\dagger, \Pi)$$

是一个同构。 □

现在我们可以证明命题 3.3。

命题 3.3 的证明。论证与引理 3.7 的证明类似。根据第 3.1 节中的讨论，我们为 Π 和 Π^{la} 都得到了类似于 (2) 的谱序列：

$$\widetilde{E}_1^{i,j} = \bigoplus_{F \in R_i} H^j(P_F^\dagger, \Pi^{\mathrm{la}} \otimes_L \delta_F^{-1}) \Rightarrow H^{i+j}(G, \Pi^{\mathrm{la}}),$$
$$E_1^{i,j} = \bigoplus_{F \in R_i} H^j(P_F^\dagger, \Pi \otimes_L \delta_F^{-1}) \Rightarrow H^{i+j}(G, \Pi).$$

但同样，包含映射 $\Pi^{\mathrm{la}} \hookrightarrow \Pi$ 在所有项之间诱导出映射。并且根据引理 3.7，这些映射在 E_1 项之间是同构。[10] 中的定理 5.2.12 推出这些映射

$$H^i(G, \Pi^{\mathrm{la}}) \to H^i(G, \Pi)$$

是同构。 □

推论 3.8. 对任意可容许的 L-Banach 空间表示 $\Pi$of G，其局部解析向量的上同调群 $H^i(G, \Pi^{\mathrm{la}})$（系数取自 Π）是 L 上的有限维向量空间。

证明. 这可由命题 3.3 以及以下事实立即得到：可容许的 L-Banach 空间表示 Π 的连续上同调群 $H^i(G, \Pi)$ 是有限维的（参见 [5] 中的推论 6.10）。

□

3.3 上同调群上的拓扑

设 V 是一个豪斯多夫拓扑 G-模。注意，连续上同调群 $H^i(G, V)$ 继承了上链上的紧开拓扑所诱导的商拓扑。我们称之为典范拓扑。上链 $C^i(G, V)$ 上的紧开拓扑是豪斯多夫的，因为对于任意一对连续映射 $f, f' \colon G^{i+1} \to V$in $C^i(G, V)$，且满足 $f \neq f'$，我们可以分别为 f, f' 找到不相交的开邻域，如下所示：存在一个元素 $g \in G^{i+1}$ 使得 $f(g) \neq f'(g)$，并且由于根据假设 V 是豪斯多夫的，我们可以找到不相交的开邻域 $U \ni f(g), U' \ni f'(g)$,$U \cap U' = \varnothing$。于是，我们有不相交的开邻域 $\Omega(\{g\}, U) \ni f$ 和 $\Omega(\{g\}, U') \ni f'$。

由于 $C^i(G, V)$ 是豪斯多夫空间，因此作为豪斯多夫空间的子空间，$C^i(G, V)^G$ 也是豪斯多夫空间。并且，i-余循环空间 $Z^i(G, V) = \ker(d^i \colon C^i(G, V)^G \to C^{i+1}(G, V)^G)$ 也是豪斯多夫空间；此外，由于它是豪斯多夫空间之间连续映射的核，因此还是 $C^i(G, V)^G$ 的闭子空间。这也意味着，i-余边界上的商拓扑 $B^i(G, V) \cong C^{i-1}(G, V)^G / Z^{i-1}(G, V)$ 是豪斯多夫的。

上同调群上的商拓扑通常不是豪斯多夫的。不过， [3] 中的命题 6 给出了一个判断上同调群是否为豪斯多夫空间的简明判据，这几乎适用于我们的情形。但我们需要假设群 G 是 σ-紧的，也就是说，它可以写成可数个紧子集的并。若 F 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张，则群 $\mathrm{GL}_n(F)$ 是 σ-紧的。利用 Cartan 分解可以证明这一点（参见 [1] 的第 3.2 节）。

因此，我们知道，任意 p-进约化群 $G = \mathbb{G}(F)$（其中 $\mathbb{G}$是线性代数群）也是 σ-紧的，因为它对某个 n嵌入为 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的一个闭子群。于是得到以下结论：

推论 3.9. 假设 G 是一个 p-进约化群，且 Π 是 G的一个容许L-Banach 空间表示。那么，对于所有 $i \geqslant 0$，上同调群 $H^i(G,\Pi)$ 和 $H^i(G,\Pi^{\mathrm{la}})$ 上的典范拓扑都是豪斯多夫的。

证明。 [5] 中的推论 6.10表明，上同调群是有限维的。此外，由于假设 Π 是一个 L-Banach 空间表示，它是一个完备的可度量 L-向量空间。因此，我们可以应用 [3],中的命题 6，该命题指出上同调群是强豪斯多夫的，即 i-余边界 $B^i(G,\Pi)$ 到 i-余循环 $Z^i(G,\Pi)$ 的包含映射有一个连续截面，记作 s:$Z^i(G,\Pi) \to B^i(G,\Pi)$。我们声称，连续的 L-线性双射

$$\ker(s) \hookrightarrow Z^i(G,\Pi) \xrightarrow{\pi} H^i(G,\Pi)$$

是一个同胚。只需证明该映射是开映射。为此，设 $U \subset$$\ker(s)$是一个开子集。这意味着存在一个开子集 $V \subset Z^i(G,\Pi)$ ，使得$U = V \cap \ker(s)$。由于映射 $\mathrm{id} - s\colon\ Z^i(G,\Pi) \to Z^i(G,\Pi)$ 是连续的，集合$V' := (\mathrm{id} - s)^{-1}(V) = \{z \in Z^i(G,\Pi) | z - s(z) \in V\}$ 在 $Z^i(G,\Pi)$中是开集。此外，交集

$$\begin{aligned} V' \cap \ker(s) &= \{z \in Z^i(G,\Pi) | z - s(z) \in V \text{ and } s(z) = 0\} \\ &= \{z \in Z^i(G,\Pi) | s(z) = 0 \text{ and } z \in V\} \\ &= V \cap \ker(s) \end{aligned}$$

与交集 $V \cap \ker(s) = U$重合。但于是我们有

$$\pi(U) = \pi(V \cap \ker(s)) = \pi(V' \cap \ker(s)) = \pi(V') \text{ open},$$

因为对于任意 $z \in V'$, $\pi(z) = \pi(z) - \pi(s(z)) = \pi(z - s(z))$ ，都有 $z - s(z) \in V \cap \ker(s)$。

作为豪斯多夫空间之间一个连续映射的核，$\ker(s)$ 是豪斯多夫的，因此 $H^i(G,\Pi)$也是如此。

根据命题 3.3，连续的 L-线性映射 $H^i(G,\Pi^{\mathrm{la}}) \to H^i(G,\Pi)$ 是双射。这意味着 $H^i(G,\Pi^{\mathrm{la}})$ 上的拓扑比（或等于） $H^i(G,\Pi)$ 上的拓扑更精细；后者是豪斯多夫的，因此群 $H^i(G,\Pi^{\mathrm{la}})$ 也是豪斯多夫的。 □

引理 3.10。设 V 和 W 是拓扑 L-向量空间，且 $\phi : V \xrightarrow{\cong} W$ 是一个 L-线性同构。假设 $\mathcal{B}$ 是 $0 \in V$ 的开邻域子基，使得集合 $\phi(\mathcal{B}) = \{\phi(U) |\ U \in \mathcal{B}\}$ 是 $0 \in W$ 的开邻域子基。那么同构 ϕ 是一个同胚。

证明。由对称性，只需证明映射 ϕ 连续。为此，设$U \subset W$ 是一个开集。我们通过证明 V 中的每个元素 $v \in \phi^{-1}(U)$ 都有一个包含于 $\phi^{-1}(U)$ 的开邻域，来说明 $\phi^{-1}(U)$ 是开集。

由于 W 是一个拓扑向量空间，平移后的集合 $-\phi(v)+U$ 在 W 中仍是开集，并且包含零元。根据假设，我们可以在 V、V_1、……、$V_n \in \mathcal{B}$ 中分别找到有限个包含 0 的开邻域，使得它们的交集 $\bigcap_{i=1}^n \phi(V_i)$ 包含于 $-\phi(v)+U$。这意味着开集 $\bigcap_{i=1}^n (v+V_i)$ 的交集包含于逆像 $\phi^{-1}(U)$，并且包含 v。因此，该映射确实是连续的。 □

命题 3.11. 设 V 是局部凸 L-向量空间上的拓扑 G-模。那么，对每个 $i \geqslant 0$，上链空间 $C^i(G,V)$ 上的紧开拓扑都是局部凸的。

证明. 根据同胚 $C^i(G,V) \cong C^0(G, C^{i-1}(G,V))$（参见引理 2.1），只需证明 $C(G,V) = C^0(G,V)$ 是局部凸的。

设 V 上的局部凸拓扑由半范数族 $\{q_i\}_{i\in I}$ 定义。对于每个紧子集 $K \subset G$ 和 $i \in I$，我们在 $C(G,V)$ 上定义一个半范数如下：

$$\begin{aligned} q_{K,i} : C(G,V) &\to \mathbb{R}, \\ f &\mapsto \sup_{k\in K} q_i(f(k)) \end{aligned}$$

记 $C(G,V)_{\mathrm{lc}}$ 为赋予由半范数族 $\{q_{K,\ i}\}_{K,\ i}$ 所定义的局部凸拓扑的空间 $C(G,V)$，并记 $C(G,V)_{\mathrm{co}}$ 为赋予紧开拓扑的空间 $C(G,V)$。我们断言，恒等映射 $C(G,V)_{\mathrm{co}} \to C(G,V)_{\mathrm{lc}}$ 是一个同胚。

根据引理 3.10，只需找到一组分别构成两种拓扑中开邻域子基的 $0 \in C(G、V)$ 的邻域。根据定义，$0 \in C(G、V)_{\mathrm{lc}}$ 的开邻域子基由形如 $q_K^{-1}{}_{,i}(B_\epsilon)$ 的集合构成，其中 $K \subset G$ 紧致，$i \in I$、$\epsilon > 0$。这里，B_ϵ 表示以 $0 \in \mathbb{R}$ 为中心、半径为 ϵ 的开球。我们可以将这些集合改写如下：

$$\begin{aligned} q_{K,i}^{-1}(B_\epsilon) &= \{f \in C(G,V) |\ q_{K,i}(f) < \epsilon\} \\ &= \{f \in C(G,V) |\ \sup_{k\in K} q_i(f(k)) < \epsilon\} \\ &= \{f \in C(G,V) |\ q_i(f(k)) < \epsilon,\ \forall k \in K\} \\ &= \{f \in C(G,V) |\ f(k) \in q_i^{-1}(B_\epsilon)\ \forall k \in K\} \\ &= \Omega(K, q_i^{-1}(B_\epsilon)). \end{aligned}$$

这些集合是 $C(G、V)_{\mathrm{co}}$ 中 0 的开邻域。我们要证明它们构成 0 的开邻域子基。事实上，根据紧开拓扑的定义，0 的开邻域子基由形如 $\Omega(K,U)$（其中 $K \subset G$ 紧致且 $U \subset V$ 开）的集合构成。但由于 V 局部凸，我们可以找到有限多个形如 $q_{i_j}^{-1}(B_{\epsilon_j})$ 的开集，其中 $j = 1$、……、m，并满足

$$\bigcap_{j=1}^m q_{i_j}^{-1}(B_{\epsilon_j}) \subset U.$$

由此我们得到

$$\bigcap_{j=1}^m \Omega(K, q_{i_j}^{-1}(B_{\epsilon_j})) \subset \Omega(K,U),$$

由此可见，集合 $\Omega(K, q_i^{-1}(B_\epsilon))$ 构成了 $C(G,V)_{\mathrm{co}}$ 中 0 的开邻域子基，正如所述。 □

由于局部凸向量空间的子空间和商仍是局部凸的（见 [7] 第 5 节），命题 3.11 推出以下推论。

推论 3.12. 对于局部凸 L-向量空间上的任意拓扑 G-模，连续上同调群 $H^i(G,V)$ 上的典范拓扑是局部凸的。

推论 3.13. 对于 G的任意容许 L-Banach 空间表示 Π，连续上同调群 $H^i(G,\Pi)$ 和 $H^i(G,\Pi^{\mathrm{la}})$配备其典范拓扑后，都是有限维局部凸豪斯多夫 L-向量空间。特别地，它们的拓扑是唯一确定的，即最细局部凸拓扑。特别地，同构 $H^i(G,\Pi^{\mathrm{la}}) \cong H^i(G,\Pi)$ 都是同胚。

证明。由 [5] 中的推论 6.10 以及推论 3.9 和 3.12 可知，这些上同调群是有限维、豪斯多夫且局部凸的。因此，我们可以应用 [7], 中的命题 4.13，该命题证明了有限维 L-向量空间上只有一种局部凸豪斯多夫拓扑。作者将这一拓扑明确描述为由范数 $\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\| := \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i|$定义的拓扑，其中 L是该向量空间任意选取的 e_1-基底，…， e_n。

由于 $H^i(G,\Pi^{\mathrm{la}})$ 和 $H^i(G,\Pi)$ 上的典范拓扑是唯一确定的，且这些群作为 L-向量空间同构（命题 3.3），因此这些拓扑必定一致，而该同构是拓扑 L-向量空间之间的同胚。□

参考文献

[1] I. N. Bernšteĭn and A. V. Zelevinskiĭ, 《群 $GL(n,F)$ 的表示》，其中 F 是局部非阿基米德域，Uspekhi Mat. Nauk，31（1976），第 5–70 页。

[2] N. Bourbaki, ´数学元素。X. 第一部分：分析的基本结构。第三卷：一般拓扑。第 X 章：函数空间；词典，科学与工业新成果 [《科学与工业新论题》], 第 1084 号，Hermann et Cie.，巴黎，1949 年。[3] W. Casselman and D. Wigner, 《连续上同调与 Serre 猜想》，Invent. Math.，25（1974），第 199–211 页。

[4] M. Emerton, 《局部解析群表示中的局部解析向量》，第 248 卷，美国数学会，2017 年。[5] P. Fust, 《连续群上同调与 Ext 群》，M¨unster 数学期刊，15（2022），第 279–304 页。

[6] J. Rodrigues Jacinto and J. Rodríguez Camargo, 《 p-进李群的凝聚局部解析表示》，美国数学会表示论，26（2022），第 962–1024 页。

[7] P. Schneider, 《非阿基米德泛函分析》，Springer Science & Business Media，2001 年。[8] P. Schneider and U. Stuhler, 《Bruhat-Tits 建筑上的表示论与层》，高等科学研究所数学出版物，(1997)，第 97–191 页。

[9] P. Schneider and J. Teitelbaum, 《p-进分布代数与容许表示》，Inventiones mathematicae，153（2002），第 145–196 页。

[10] C. A. Weibel, 《同调代数导论》, 剑桥高等数学研究丛书第 38 卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1994。