面向具有粉末夹杂物、用于实现可控耗散的增材制造超材料：堆积密度的关键影响

Patrick M. Praegla[a,*], Thomas Mair[b], Andreas Wimmer[b], Sebastian L. Fuchs[a], Niklas Fehn[a], Michael F. Zaeh[b], Wolfgang A. Wall[a], Christoph Meier[a]

[a]*Institute of Computational Mechanics, Technical University of Munich, Boltzmannstraße 15, Garching b.München, 85748, Bavaria, Germany*[b]*Institute for Machine Tools and Industrial Management, Technical University Munich, Boltzmannstraße 15, Garching b.München, 85748, Bavaria, Germany*

arXiv:2302.08371v1 [cs.CE] 16 Feb 2023

摘要

颗粒阻尼器安装在结构部件上，是减少不必要振荡的一种简单而有效的方法。金属粉末床熔融增材制造能够将任意形状、尺寸和空间分布的颗粒夹杂物直接集成到块体材料中，从而形成具有可控耗散特性的新型超材料，无需额外的外部阻尼装置。然而，目前人们尚未充分了解封装粉末堆积体的性质如何影响耗散程度。本研究提出了一种双向耦合离散元-有限元模型，首次能够一致地描述振荡变形结构与封装粉末堆积体之间的相互作用。作为基础测试案例，研究考察了填充不同粉末堆积体的中空悬臂梁的自由振荡；这些粉末堆积体在堆积密度、颗粒尺寸和表面性质方面各不相同，以系统研究这些因素的影响。研究发现，阻尼特性强烈依赖于封装粉末的堆积密度，并且存在一个使耗散达到最大的最优堆积密度。此外，研究还发现，颗粒（绝对）尺寸对耗散的影响相当小。为阐明这一现象，研究推导了此类粉末腔体在不同变形模式下的一阶解析模型。

关键词：颗粒阻尼器，离散元法，有限元法，激光粉末床熔融，增材制造

1. 引言

颗粒阻尼器附着在结构部件上时，是减少不必要振荡的一种简单而有效的方法。传统生产技术需要将颗粒阻尼器制成额外的外部装置，而激光束金属粉末床熔融（PBF-LB/M）则能够将任意形状、尺寸和空间分布的颗粒夹杂物直接集成到块体材料中，从而形成具有可控耗散特性的新型超材料 [1–4]。重要的是，PBF-LB/M 天然允许将工艺中使用的粉末颗粒既作为原材料，也作为耗散手段。通过制造封闭腔体，未熔合粉末会在工艺完成后留在部件内部。然而，目前人们尚不清楚封闭腔体中的粉末堆积体特性如何影响耗散程度。本研究提出了一种双向耦合离散元-有限元模型，

*通讯作者*Email addresses:* patrick.praegla@tum.de (PatrickM. Praegla), thomas.mair@iwb.tum.de (ThomasMair),andreas.wimmer@iwb.tum.de (Andreas Wimmer), sebastian.fuchs@tum.de (Sebastian L. Fuchs), niklas.fehn@tum.de(Niklas Fehn), michael.zaeh@iwb.tum.de (Michael F. Zaeh), wolfgang.a.wall@tum.de (Wolfgang A. Wall),christoph.anton.meier@tum.de (Christoph Meier)

该模型首次能够一致地描述振荡结构与封闭粉末堆积体之间的相互作用，并系统研究粉末堆积特性对最终耗散程度的影响。

颗粒阻尼器在文献中已得到广泛研究，并应用于土木工程和机械工程领域。与其他阻尼机制相比，它们具有多种优势。作为一种被动阻尼机制，它们无需额外的能源。其设计简单，易于安装在不同位置，可在多个方向和宽频率范围内工作，且不受环境温度影响 [5]。不过，在增材制造中，应避免后热处理产生的高温，因为未熔合颗粒可能会烧结，从而显著降低阻尼性能 [2, 3, 6]。在实验研究中，颗粒阻尼器通常作为外部装置安装。在对这类颗粒阻尼器进行数值和解析研究时，通常将悬臂梁简化为单自由度振子，以降低模型复杂度 [5, 7–10]。颗粒阻尼器通常表现出高度非线性，其行为取决于多种参数，例如颗粒尺寸、质量、摩擦系数和恢复系数 [8]。Lu 等人 [9] 和 Gagnon 等人 [5]的综述文章对传统颗粒阻尼器进行了全面概述。本文及下文所说的传统颗粒阻尼器，指采用传统制造技术生产的装置。这些系统通常由一个部分填充有较大颗粒的围护结构组成，颗粒尺寸处于毫米量级；该围护结构通过外部安装的方式连接到待阻尼结构上。

增材制造颗粒阻尼器需要单独研究，因为它们在多个方面不同于传统颗粒阻尼器，因此研究结果是否具有可迁移性值得商榷。具体而言，颗粒尺寸通常存在差异：传统颗粒阻尼器中的颗粒尺寸处于毫米范围（参见 [5] 中的表 3），而在 PBF-LB/M 中则处于微米范围，例如， [2] 中的平均直径为 27 µm， [11] 中为 47 µm。另一个关键特征是颗粒阻尼器内部的填充水平，即堆积密度。采用 PBF-LB/M 制造封闭腔体时，腔体内粉末颗粒的数量由 PBF-LB/M 的工艺参数和此前的铺粉过程决定。这些腔体通常被粉末完全填满，其堆积密度一般在 40–60 % 的范围内 [3, 11, 12]。对于传统颗粒阻尼器，研究发现，颗粒与阻尼器壁面之间必须留有一定间隙，才能提高阻尼程度，因此其有效堆积密度通常在 10 % 左右 [7]。这种概念上的差异可能会改变耗散的基本机制。在传统颗粒阻尼器中，动态颗粒碰撞可被视为主要耗散方式；而在增材制造颗粒阻尼器中，持续接触的颗粒之间的粘滑效应可能是主要耗散源。

了解这些差异后，以下将总结专门研究增材制造颗粒阻尼器的文献。在实验中，K¨unneke 和 Zimmer [3]将填充粉末的长方体空腔连接到弹簧元件上，并测量初始激励后的自由衰减，以研究不同空腔几何形状的影响。他们发现，较大的空腔能提供更好的阻尼。此外，将空腔分隔成多个部分或在空腔内设置晶格结构，都会降低阻尼效果。类似地，Guo 等人 [13]通过将增材制造部件连接到悬臂梁末端，采用与传统颗粒阻尼器相同的实验装置 [14, 15]，研究了多单元颗粒阻尼器。对于所研究的低振动频率（< 100 Hz），一个较大的单元比多个较小的单元具有更好的阻尼性能。此外，他们还使用离散元模型研究能量耗散。为减少计算量，他们仅考虑一个尺寸为 $2 \times 2 \times 2$ 毫米^3 的单元，并采用直径为 30 µm 的单一粒径颗粒，而实际颗粒尺寸范围为 15–40 µm。研究发现，阻尼机制主要源于颗粒与壁面之间的冲击。在实验中，Ehlers 等人 [11]制造了由 AlSi10Mg 制成的完整梁，其封闭腔体内含有未熔合粉末。使用自动冲击锤激励这些梁。固有频率较低时阻尼效果最佳，而阻尼随固有频率升高而减弱。阻尼比与固有频率之间的这种相关性用双曲线进行了近似。此外， [6] 提出了一种 3^3 全因子试验设计，以确定激励力、激励频率和空腔尺寸对铝合金 AlSi10Mg 和工具钢 1.2709 的影响。颗粒阻尼器使频率响应函数的振幅最高降低了 97%。类似地，Scott-Emuakpor 等人 [2, 12, 16–19] 发表了多项研究，研究由振动器激励、带有多个空腔的增材制造悬臂梁

使用振动器激励。仅需 1–4 % 的未熔合粉末体积 [16]，即可达到完全熔合梁十倍的阻尼。Kiracofe 等人 [20] 利用 [2, 12, 16–19], 的实验数据创建了一个离散元法（DEM）模型，用于预测颗粒阻尼器的阻尼比。由于包含 2600 万个平均直径为 25 µm 颗粒的整个空腔无法进行模拟，因此将计算域划分为 5000 个相同的子域，每个子域包含 5000 个颗粒，从而只需模拟一个子域。该子域连接到一个受外力激励的单自由度弹簧-阻尼器系统。根据共振附近正弦驻留激励下的响应计算阻尼性能。模型参数经过选择，以尽可能匹配实验数据。利用五个验证点，他们预测出的趋势与实验结果相似。Harduf 等人 [21] 最近提出了一种双质量模型，用于描述含颗粒阻尼器结构的稳态响应。该模型由一个弹簧-阻尼器系统构成，其中松散粉末颗粒被建模为额外的集中质量，并通过库仑摩擦与系统耦合。

总之，只有少数研究探讨了增材制造颗粒阻尼器的建模与数值模拟。Guo 等人 [13] 仅使用单一粒径颗粒，这可能会降低阻尼性能 [20]。此外，初始的面心立方颗粒构型产生了高达 72 % 的堆积密度，而铺展粉末的典型堆积密度为 40–60 % [22]。Kiracofe 等人 [20] 仅模拟了整个粉末腔体的一个子区域。这两篇论文都将振荡结构简化为连接刚性箱体的单自由度振子，但未考虑粉末腔体的变形。此类采用刚性颗粒箱体的模型可用于研究粉末颗粒冲击造成的耗散，也就是说，能量仅通过冲击从围护结构传递至粉末。然而，要准确模拟粉末颗粒切向相对运动造成的摩擦耗散——据信这是密集堆积粉末腔体的主要耗散源——就必须考虑可变形围护结构。

为弥补现有方法留下的这一空白，本文提出一种双向耦合的离散元法—有限元模型，以一致地描述振荡变形结构与封闭于结构内部空腔中的粉末堆积体之间的相互作用。重要的是，该方法首次能够考虑由腔壁变形引起的粉末颗粒相对滑移运动。对于嵌入可变形结构中的粉末腔体而言，当其被粉末完全填充且粉末堆积密实时，这种滑移运动被认为是主要耗散源；而这正是 PBF-LB/M 工艺通常形成的状态。粉末域（由离散元法表示）与结构域（由有限元法（FEM）离散）通过 Dirichlet-Neumann分区方法耦合。作为基础测试案例，本文考察填充有粉末堆积体的中空悬臂梁的自由振荡；这些粉末堆积体的堆积密度、颗粒尺寸、密度和表面性质各不相同，从而系统地研究这些因素的影响。关键在于，研究发现阻尼特性强烈依赖于内部粉末的堆积密度，并且存在一个使耗散达到最大值的最优堆积密度。此外，研究发现颗粒绝对尺寸对耗散的影响相对较小。本文还针对此类粉末腔体的不同变形模式推导了一阶解析模型，以阐明这一现象。

本文其余部分安排如下：首先，概述离散元粉末模型、固体域的有限元法离散以及 DEM-FEM耦合方法，随后介绍仿真设置。接着，利用计算模型研究模型中不同参数对悬臂梁颗粒阻尼器耗散行为的影响。然后，推导解析模型以研究颗粒尺寸的影响。最后，介绍仿真设置的实验实现。

2. 方法

为开展颗粒阻尼器的数值研究，采用离散元法（DEM）对阻尼器内的粉末颗粒进行建模。此外，将离散元法与有限元法（FEM）耦合，后者用于离散颗粒阻尼器的（可变形）结构外壳。颗粒-结构相互作用问题的区域 Ω 由互不重叠的区域 Ω^p （其中填充颗粒）和结构域 Ω^s 组成，二者共享公共界面 Γ^{ps}。

2.1. 离散元粉末模型

为对粉末相进行建模，本文将采用作者近期针对粉末床熔融工艺中的粉末铺展提出的一种黏聚性粉末模型 [22–25], 。下文仅总结最重要的方程。采用离散元法，在每个时间步中，对每个粒子 i 求解以下运动方程:

$$\begin{aligned}(m\ddot{\mathbf{r}}_G)^i &= m^i\mathbf{g} + \sum_j(\mathbf{f}_{CN}^{ij} + \mathbf{f}_{CT}^{ij} + \mathbf{f}_{AN}^{ij}) \quad \text{in} \quad \Omega^p,\\ (I_G\dot{\boldsymbol{\omega}})^i &= \sum_j(\mathbf{m}_R^{ij} + \mathbf{r}_{CG}^{ij}\times\mathbf{f}_{CT}^{ij}) \quad \text{in} \quad \Omega^p,\end{aligned} \tag{1}$$

其质量为 $m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$ ，转动惯量为 $I_G = 0.4mr^2$ ，适用于半径为 r 、密度为 ρ的球形颗粒。相互作用力包括法向接触力 $\mathbf{f}_{CN}^{ij}$、摩擦接触力 $\mathbf{f}_{CT}^{ij}$和黏附力 $\mathbf{f}_{AN}^{ij}$。在角动量平衡中，考虑了摩擦力通过力臂 $\mathbf{r}_{CG}^{ij} = \mathbf{r}_C^{ij} - \mathbf{r}_G^i$ （从颗粒中心到接触点）产生的力矩，以及滚动阻力 $\mathbf{m}_R^{ij}$ 产生的力矩。下面将对各项作简要说明。法向接触力采用弹簧-阻尼器模型计算

$$\mathbf{f}_{CN}^{ij} = \begin{cases}\min(0, k_N g_N + d_N\dot{g}_N)\mathbf{n}, & g_N \le 0,\\ \mathbf{0}, & g_N > 0,\end{cases} \tag{2}$$

其中， g_N 为法向间隙（压入量），$\mathbf{n}$ 为两个颗粒之间的法向量，具体如下:

$$g_N := \|\mathbf{r}_G^j - \mathbf{r}_G^i\| - (r_i + r_j), \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_G^j - \mathbf{r}_G^i}{\|\mathbf{r}_G^j - \mathbf{r}_G^i\|}. \tag{3}$$

刚度常数 k_N 和阻尼常数 d_N 的表达式如下:

$$k_N \ge \max\left(\frac{8\pi\rho V_{max}^2 r_{max}}{c_g^2}, \frac{4\pi\gamma}{c_g}\right), \quad d_N = 2|\ln(e)|\sqrt{\frac{k_N m_{eff}}{\ln(e)^2 + \pi^2}}, \tag{4}$$

其中，接触刚度 k_N 的选取应满足以下条件：最大半径为 r_{max} 、最大速度为 V_{max} 的颗粒发生动态碰撞，或在表面能 γ表征的最大静态黏附力作用下，所产生的压入量均不超过最大压入量 c_g。阻尼常数由恢复系数 e 和有效质量 $m_{eff} = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}$表征。

同样，摩擦力遵循弹簧-阻尼器模型，并通过库仑 law

$$\mathbf{f}_{CT}^{ij} = \begin{cases}\min(\mu\|\mathbf{f}_{CN}^{ij}\|, \|k_T\mathbf{g}_T + d_T\dot{\mathbf{g}}_T\|)\mathbf{t}_T, & g_N \le 0,\\ \mathbf{0}, & g_N > 0,\end{cases} \tag{5}$$

其中摩擦系数为 μ，常数为 $k_T = \frac{1-\nu}{1-0.5\nu}k_N$和 $d_T = d_N$，~~ν~~为泊松比，切向间隙向量为 $\mathbf{g}_T$，其变化率为 $\dot{\mathbf{g}}_T$，切向单位向量为 $\mathbf{t}_T$。

滚动阻力同样遵循弹簧-阻尼器模型。不过，模拟表明，对于所考虑的颗粒阻尼器，滚动阻力的影响可以忽略，因此这里不予考虑。

黏附力源于颗粒之间的范德华力，其特征量为拉脱力，即将两个接触颗粒分开所需的力。拉脱力根据有效表面能，通过 Derjaguin-Muller-Toporov（DMT）模型 [26] 计算。用于表征黏附力大小的表面能会受到颗粒性质（例如粗糙度和表面污染物）的显著影响，因此通常需要通过实验进行校准。后文将会表明，在所研究的颗粒阻尼器系统中，黏附力对耗散的影响很小。

时间积分采用速度Verlet格式。有关粉末模型的更多详情，请参见 [23]。

2.2. 固体域的有限元离散

考虑有限变形情形，结构场由以下局部材料形式的非线性线动量平衡方程控制：

$$\rho_0^s \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{d}^s}{\mathrm{d}t^2} = \nabla_0 \cdot (\mathbf{F}\mathbf{S}) + \rho_0^s \mathbf{b}_0^s \quad \text{in} \quad \Omega^s, \tag{6}$$

其中，参考密度为 ρ_0^s，体力为 $\mathbf{b}_0^s$，结构位移 $\mathbf{d}^s$ 为主要未知量。结构的变形由变形梯度 $\mathbf{F} = \nabla_0 \mathbf{d}^s$ 描述，其定义了 Green-Lagrange 应变 $\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}\right)$。为简化起见，第二类 Piola-Kirchhoff 应力 $\mathbf{S}$ 由基于超弹性应变能函数$\Psi \stackrel{=}{=} \Psi(\mathbf{E})$的本构关系 $\mathbf{S} = \partial\Psi/\partial\mathbf{E}$ 确定。本文采用 Saint Vernant Kirchoff 本构律。偏微分方程 (6) 需满足结构位移和速度场的初始条件：

$$\mathbf{d}^s = \mathbf{d}_0^s \quad \text{and} \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{d}^s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{d}_0^s}{\mathrm{d}t} \quad \text{in} \quad \Omega^s \quad \text{at} \quad t = 0\,. \tag{7}$$

在结构边界 $\Gamma^s = \partial\Omega^s \setminus \Gamma^{ps}$ 上，其中 $\partial\Omega^s$ 是结构域的总边界，Γ^{ps} 是粉末-结构界面，施加 Dirichlet 和 Neumann 边界条件

$$\mathbf{d}^s = \hat{\mathbf{d}}^s \quad \text{on} \quad \Gamma_D^s \quad \text{and} \quad (\mathbf{F}\mathbf{S}) \cdot \mathbf{N} = \hat{\mathbf{t}}_0^s \quad \text{on} \quad \Gamma_N^s\,, \tag{8}$$

给定材料描述中的边界位移 $\hat{}\mathbf{d}^s$、（第一类 Piola-Kirchoff）边界牵引力$\hat{}\mathbf{t}_0^s$，以及外向单位法向量 $\mathbf{N}$，位于 Γ^s 上，其中 $\Gamma^s = \Gamma_D^s \cup \Gamma_N^s$ 和 $\Gamma_D^s \cap \Gamma_N^s = \emptyset$。

采用有限元法对线动量平衡方程 (6) 进行离散。关于这一标准过程的更多详情，感兴趣的读者可参阅文献 [27, 28]。所得半离散运动方程的一般形式为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{F}_{int}(\mathbf{d}) - \mathbf{F}_{ext} = 0, \tag{9}$$

其中，质量矩阵为 $\mathbf{M}$，非线性内力向量为 $\mathbf{F}_{int}$，外力向量为 $\mathbf{F}_{ext}$，时变位移向量为 $\mathbf{d}$。半离散问题 (9) 采用广义-α 方法 [29] 进行时间离散，谱半径取 $\rho_\infty = 0.8$。

注 1. 未考虑结构部分的阻尼（$\mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}$）。不过，可以很容易地将其纳入模型，例如采用 Rayleigh阻尼。忽略结构阻尼有助于分离颗粒阻尼器的作用，并将耗散归因于颗粒相互作用。

*2.3. DEM-FEM*耦合方法

粉末域与结构域通过Dirichlet-Neumann分区方法进行耦合，这与作者此前的工作 [30], 类似：在该工作中，流体问题和结构问题分别采用光滑粒子流体动力学（SPH）和有限元法进行离散。DEM颗粒构成Dirichlet分区，在颗粒-结构界面 Γ^{ps}处施加规定的界面位移$\mathbf{d}^{ps}$。结构场构成Neumann分区，承受由颗粒传递的力$\mathbf{f}^{ps}$。

引入用于粒子与结构问题的场算子 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{S}$，二者均将界面位移 $\mathbf{d}^{ps}$ 映射为界面力

$$\mathbf{f}_{\mathcal{P}}^{ps} = \mathcal{P}(\mathbf{d}^{ps}) \quad \text{and} \quad \mathbf{f}_{\mathcal{S}}^{ps} = \mathcal{S}(\mathbf{d}^{ps})\,, \tag{10}$$

当满足条件 Γ^{ps} 时，界面处的平衡得以满足

$$\mathcal{P}(\mathbf{d}^{ps}) = \mathcal{S}(\mathbf{d}^{ps}) \tag{11}$$

成立。将界面力 $\mathbf{f}^{ps}$ 映射为界面位移的逆粒子与结构场算子因此定义为

$$\mathbf{d}^{ps}_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}^{-1}(\mathbf{f}^{ps}) \quad \text{and} \quad \mathbf{d}^{ps}_{\mathcal{S}} = \mathcal{S}^{-1}(\mathbf{f}^{ps})\,. \tag{12}$$

通过最近点投影确定粒子与表面单元的接触点。作用于各自最近点的界面力 $\boldsymbol{\xi}$ 利用在最近点处求得的形函数 N^e_j，分配给界面单元 e的节点 j。节点 j处的节点界面力 $\mathbf{f}^{ps}_j$ 由作用于与该节点 j相邻的各个界面单元e 的粒子 i所产生的所有力贡献 $\mathbf{f}^e_i$求和得到:

$$\mathbf{f}^{ps}_j = \sum_e \sum_i N^e_j(\boldsymbol{\xi}_i)\mathbf{f}^e_i\,. \tag{13}$$

采用迭代定点求解器 [31]反复求解粒子与结构问题，直至满足收敛准则

$$\frac{\left|\Delta \mathbf{d}^{ps}_{n+1,k+1}\right|}{\Delta t\sqrt{n^{ps}_{dof}}} < \epsilon \tag{14}$$

得到满足，其中界面位移增量的 L_2 范数为 $\left|\Delta \mathbf{d}^{ps}_{n+1,\ k+1}\right| = \left|\mathbf{d}^{ps}_{n+1} - \mathbf{d}^{ps}_{n}\right|$，时间步为 n、迭代次数为 k、时间步长为 Δt、界面自由度数为 n^{ps}_{dof}，容差为 ϵ（本文中设为 $\epsilon = 1 \cdot 10^{-3}$）。耦合算法详见算法 **1**。

算法 1 Dirichlet-Neumann分区固定点粒子-结构相互作用算法的时间循环，直至最终时间 T 算法

同时 $t < T$ **执行**
  $t \leftarrow t + \Delta t$ ▷ 递增时间
  $k \leftarrow 1$ ▷ 重置迭代计数器
  $\mathbf{d}^{ps}_{n+1,\ k}$ ▷ 预测界面位移
  当 *true* **时**
    $\mathbf{f}^{ps}_{n+1,\ k+1} = \mathcal{P}\left(\mathbf{d}^{ps}_{n+1,\ k}\right)$ ▷ 求解粒子场
    $\mathbf{d}^{ps}_{n+1,\ k+1} = \mathcal{S}^{-1}\left(\mathbf{f}^{ps}_{n+1,\ k+1}\right)$ ▷ 求解结构场
    $\Delta \mathbf{d}^{ps}_{n+1,\ k+1} = \mathbf{d}^{ps}_{n+1,\ k+1} - \mathbf{d}^{ps}_{n+1,\ k}$ ▷ 计算界面位移增量
    如果 $\left|\Delta \mathbf{d}^{ps}_{n+1,\ k+1}\right| \Big/ \left(\Delta t\sqrt{n^{ps}_{dof}}\right) < \epsilon$ **则** ▷ 检查收敛准则，参见公式 **(14)**
      跳出
    结束如果
    $k \leftarrow k + 1$ ▷ 增加迭代计数器
  结束循环
  $n \leftarrow n + 1$ ▷ 递增步数计数器
结束循环

2.4. 仿真设置

上述计算模型在并行多物理场研究代码 BACI [32] 中实现。利用该模型，构建了含颗粒填充腔体的悬臂梁，以研究封装粉末颗粒对自由弯曲振荡阻尼的影响。梁长为 132 毫米，具有尺寸为 20×20毫米^2 的矩形横截面（参考了文献 [11] 中的实验）。梁内腔尺寸为 $18 \times 18 \times 110$毫米^3, , 因此壁厚为 1 毫米。仿真分为两个步骤。第一步，生成随机颗粒构型。第二步，将该颗粒构型用作参数研究的初始构型。为在腔体内生成逼真的颗粒初始构型，首先将颗粒放置在笛卡尔网格上，随后颗粒在重力作用下沉降，形成随机粉末构型，该构型类似于粉末铺展所形成的构型。使用狄利克雷控制板压实粉末，从而研究不同（预设）堆积密度的影响（见图 1a）。对于给定的堆积密度，将颗粒取出并放入梁腔体中，进行第二步仿真。图 1c 展示了含颗粒填充腔体的梁的初始构型。通过在梁底面施加狄利克雷表面条件来实现梁的夹持端，使梁处于竖直位置，且重力方向向下。首先，在梁的一侧施加恒定面力 $q = 0.1$ 牛顿·毫米$^{-2}$（合力 $R = 264$ 牛顿），使梁发生弯曲（见图 1b）。该力在 5 毫秒内线性增加，随后保持恒定 1 毫秒，使横向端部位移最大约为 0.1 毫米（见图 1d）。在 $T = 6$毫秒时撤去该力，梁开始自由振荡。

颗粒尺寸遵循对数正态尺寸分布，该分布曾用于我们此前针对同类材料开展的工作 [25] （见表 A.2）。本研究中，罚参数取值为 $k_N = 5642$N m^{-1}，将最大颗粒穿透量限制在低于颗粒直径 5% 的范围内。第 3.3 节将深入分析所呈现结果对这一取值的敏感性。计算模型的所有参数汇总于表 A.2 和表 A.3。腔体体积为$18\times18\times110\,\mathrm{mm}^3$，若填充原始尺寸为 D50 ≈ 25μm 的颗粒，颗粒总数将达到 $2.3 \cdot 10^9$。为降低计算复杂度，需缩小问题规模，使其在计算上可行。Kiracofe 等人 [20] 缩小了计算域，仅模拟部分颗粒，但保留原始颗粒尺寸。本研究采用原始几何形状，并放大颗粒尺寸，直至颗粒数量达到可处理的水平。重要的是，采用原始几何形状可以直接与使用相同梁几何形状的实验进行比较。基于这一方法，我们将深入研究颗粒尺寸的影响。默认设置下，颗粒尺寸取 $D_{50} = 1.0$mm，填满空腔约需 32 000 个颗粒，相对于原始颗粒尺寸放大了 37 倍。模拟时间设为 $T_{max} = 30$ms，足以捕捉振荡幅度的下降。时间步长取决于颗粒尺寸 [23]，对于颗粒尺寸为 $D50 = 1.0\,$mm 的情况，时间步长设为 $\Delta t = 2.5$μs。在所有模拟中，结构问题均采用与离散元模型相同的时间步长求解。

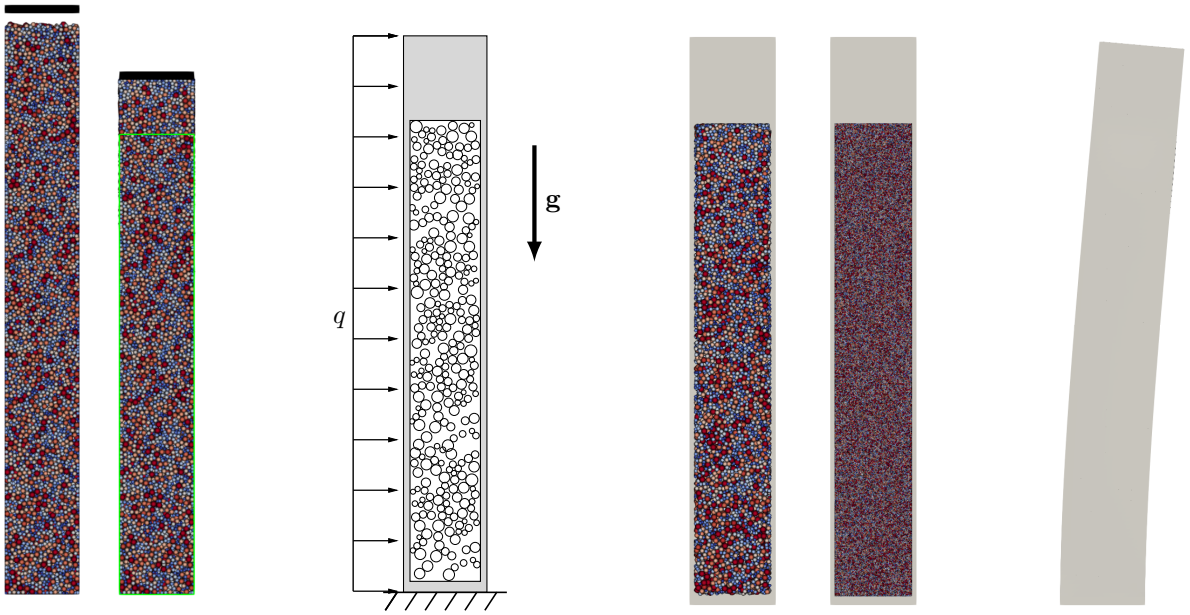
3. 结果

利用第 2 节所述的计算模型，研究了不同物理效应对耗散的影响，具体包括堆积密度、接触模型的罚参数、摩擦系数、恢复系数、黏附力、颗粒尺寸，以及梁的取向。

粉末和梁材料采用具有代表性的 316L不锈钢性能参数。所研究模型参数的默认值汇总于表 A.2 和 A.3。根据振荡幅度的衰减研究阻尼行为。振荡通过梁外表面顶部中心点沿激励方向的位移进行量化。

3.1. 堆积密度

采用 PBF-LB/M 制造零件时，封闭腔体内粉末的堆积密度取决于所选工艺参数。不同的工艺条件可能会改变堆积密度，并最终



(a) 粉末压缩的两个步骤；绿色方框内的颗粒被取出并放入空腔内。

(b) 模拟设置示意图。

(c) 初始构型的含空腔梁的两种不同粉末尺寸：$D50 = 1.0$毫米（左）和 $D50 = 0.25$毫米（右侧）。

(d) 挠度 of 梁（位移按因子缩放 100）。

图 1：仿真设置概览：通过粉末压缩进行粉末制备，并对带有未熔合粉末空腔的梁施加激励。外部尺寸为 $20 \times 20 \times 132$毫米^3，内部尺寸为 $18 \times 18 \times 110$毫米^3。空腔起始位置在夹具上方 2 毫米处（狄利克雷固定底面）。颗粒按颗粒尺寸着色，从最小（蓝色）到最大（红色），即 D50 = 1.0 毫米时为 $D_{min} = 0.71$毫米至 $D_{max} = 1.41$ 毫米，D50 = 0.25 毫米时为 $D_{min} = 0.18$ 毫米至 $D_{max} = 0.35$ 毫米。

表1：不同颗粒尺寸及其相应最优堆积密度下的阻尼比。 ζ_i 表示第 i个周期的阻尼比，其中第一周期取自第一个局部最小值到第二个局部最小值（见图2）。 $\bar{\zeta}_5$ 表示在五个周期内计算得到的阻尼比，即从第一个局部最小值到第六个局部最小值。

颗粒尺寸 D50 [毫米]	堆积密度 Φ [%]	ζ_1	ζ_2	$\bar{\zeta}_5$
0.25	61	0.217	0.166	0.075
0.5	61	0.196	0.059	0.060
1.0	58	0.160	0.186	0.121

影响阻尼性能。在本研究中，堆积密度以受控方式设定，并定义为颗粒体积与腔体体积之比。空腔始终完全填充颗粒，使颗粒堆积体与腔壁之间不存在间隙。堆积密度以1%的步长在50%至60%之间变化。对于这些不同的堆积密度，图2a显示了振动梁端部位移（x方向）随时间的变化。相应地，在较低堆积密度（$\leq$ 52 %）下，没有明显的阻尼。随着堆积密度增大，阻尼增强。当堆积密度约为58%时达到最优阻尼，即堆积密度进一步增加时，阻尼量反而再次降低。这一现象可以解释如下：在非常低的堆积密度（$\ll$ 58 %）下，接触点过少，且接触法向力过小，无法产生明显的耗散。相反，在非常高的堆积密度（$\gg$ 58 %）下，颗粒紧密堆积在一起，随之产生的较高接触法向力会阻碍颗粒之间的滑移运动（即接触颗粒主要保持在黏着状态），从而导致耗散降低。

3.2. 颗粒尺寸

为研究颗粒尺寸的影响，将默认颗粒尺寸 1毫米分别缩小至原来的 0.5 倍和 0.25 倍。此外，还针对每种颗粒尺寸模拟了不同的堆积密度。当颗粒尺寸缩小为原来的 1/2，即 $D_{50} = 0.5$ 毫米，且堆积密度范围为 $\Phi = 56\%$ 至 62 %（$\sim$ 250000 颗粒）时，可以确定最佳堆积密度为 $\Phi = 61\%$（图2b）。不过，其阻尼略低于默认情况。颗粒尺寸再缩小一半，即 $D_{50} = 0.25$毫米（$\sim$ 2.0 百万个颗粒），得到的结果相似（图2c）。同样，在 $\Phi = 61\%$ 时阻尼效果最佳。

为了解阻尼性能，在各自的最佳堆积密度下，将颗粒尺寸为 $D50 = 0.25$、0.5 和 1.0 毫米时的阻尼比汇总于表1。由于颗粒阻尼器的阻尼具有高度非线性，因此给出了从第一个局部最小值开始计算的前两个周期的阻尼比，以及根据第一个至第六个局部最小值计算的第五个周期的阻尼比。阻尼比 $\zeta = 1/\sqrt{1 + (2\pi/\delta)}$

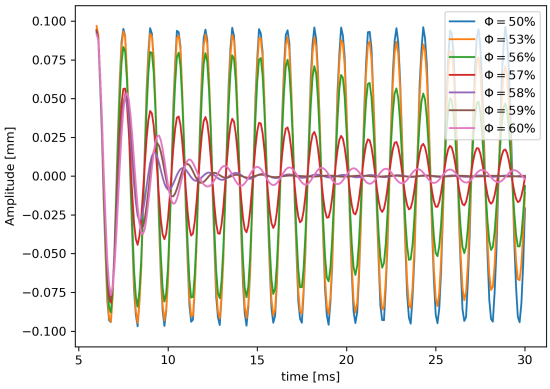
[2] 根据对数衰减率$\delta = \frac{1}{n}\ln($

$_x\ t\ /x\ t + nT$ n $n = 1$ $\zeta_1\ \zeta_2$ $n = 5$( )

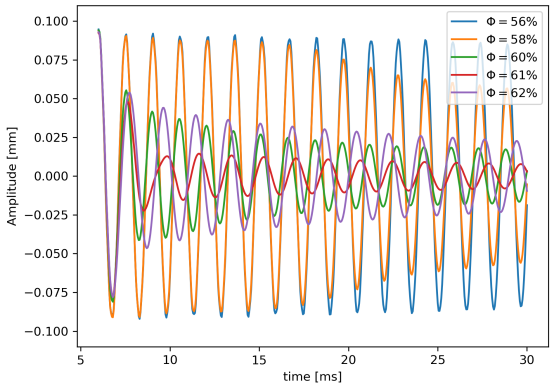
( ))计算，其中 T 为振荡周期， 为整数（其中 ，而 ζ_5）。各自最佳堆积密度下的阻尼比相当接近。如果在当前最佳值附近研究更多堆积密度，不同颗粒尺寸对应的最佳堆积密度下的阻尼比甚至可能更加接近。总体而言，与堆积密度的显著影响相比，颗粒尺寸对耗散行为的影响较小。

3.3. 接触刚度

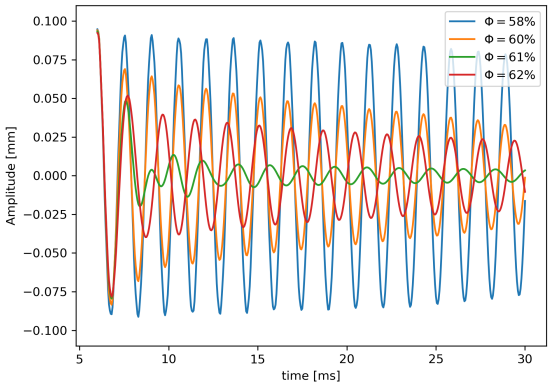
与离散元法模拟中的常见做法一样，为了显著增大时间步长，接触刚度特意设定为低于材料的实际杨氏模量。为检验降低刚度的有效性，我们采用增大的罚参数值进行了额外的阻尼模拟。图3a显示了堆积密度为 $\Phi = 58\%$ 的梁在默认接触刚度$k_N = 5642\,\mathrm{N\,m^{-1}}$下，以及接触刚度分别提高至原来的 2、4、8 和 16 倍时的振荡情况。相应地，增大接触刚度会降低耗散。不过，当罚参数约为 $4 \times k_N$时，耗散趋于饱和，即进一步增大罚参数不再影响阻尼行为。为考察接触刚度增大（4 倍）的具体影响，我们将堆积密度



(a) D50 = 1.0 毫米。



(b) D50 = 0.5 毫米。



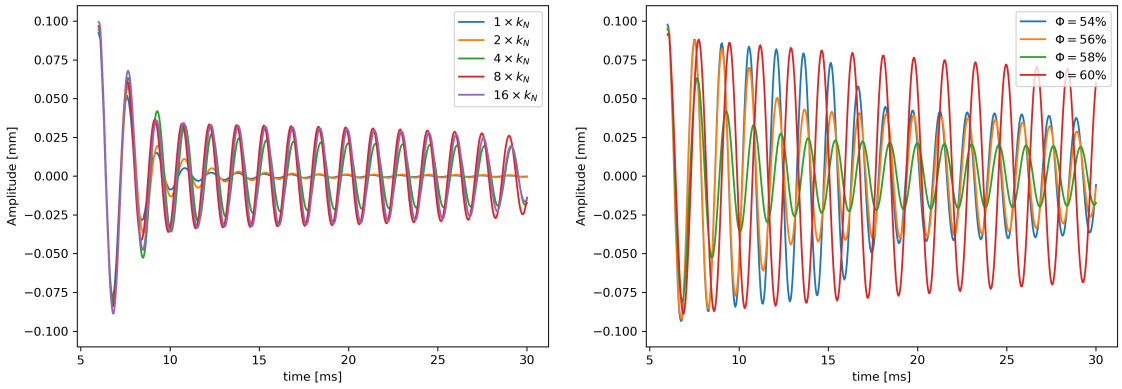
(c) D50 = 0.25 毫米。

图2：不同堆积密度 Φ对振幅的影响。

在这种情况下从 50–60 % 进行变化。图3b显示了选定堆积密度下的位移曲线。即使接触刚度增大，耗散特性仍强烈依赖于堆积密度，并在 $\Phi = 58$ % 时达到最佳耗散。因此可以得出结论：对于更接近金属粉末实际刚度特性的较高罚参数值，仍能观察到原罚参数 k_N 下已发现的相同基本趋势和相关性。因此，在本文余下部分中将采用（计算成本更低的）默认接触刚度 k_N 。

3.4. 摩擦系数

摩擦是颗粒阻尼器的两种主要耗散机制之一，因此将摩擦系数从 $\mu = 0$ 变化到 $\mu = 0.7$（步长为 0.1），同时将恢复系数设为 $e = 0.4$。根据图 4a，摩擦系数为 $\mu \leq 0.2$ 时仅表现出中等程度的阻尼。值得注意的是，即使完全不考虑摩擦，也能观察到这种行为。这表明，部分耗散可归因于非弹性碰撞。随着摩擦系数增大，阻尼增强（这是滑动摩擦力增大的结果），并在 $\mu = 0.4$时达到最优值。进一步增大摩擦系数会使阻尼略有下降。摩擦系数越大，可传递的切向力也越大。因此，与此前在堆积分数很高（即接触法向力很大）时观察到的情况类似，摩擦系数较大时，相当一部分颗粒会从滑动摩擦转变为静摩擦，从而降低总耗散。

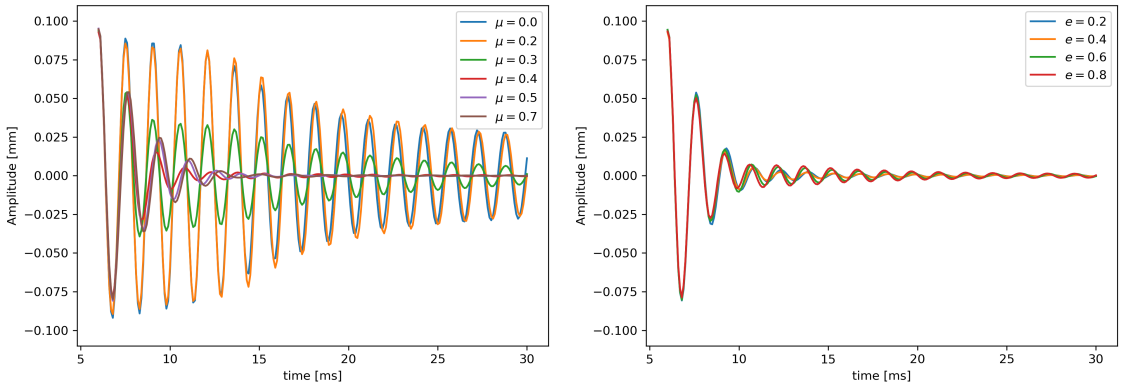


(a) $\Phi = 58$ % 的不同接触刚度。 (b) 接触刚度为 $4 \times k_N$ 时的不同堆积密度。

图3：接触刚度 k_N 对振幅的影响。

3.5. 恢复系数

将恢复系数在 0.2 至 0.8 的范围内变化（同时将摩擦系数保持在默认值 $\mu = 0.4$），所得耗散行为几乎完全相同（见图 4b）。因此，对于所研究的堆积密度范围，恢复系数的影响可忽略不计，而摩擦是主要的耗散形式。不过，如图 4a 所示，冲击也会在一定程度上促进能量耗散；即使接触面无摩擦（$\mu = 0$），振荡幅度仍会有所降低。



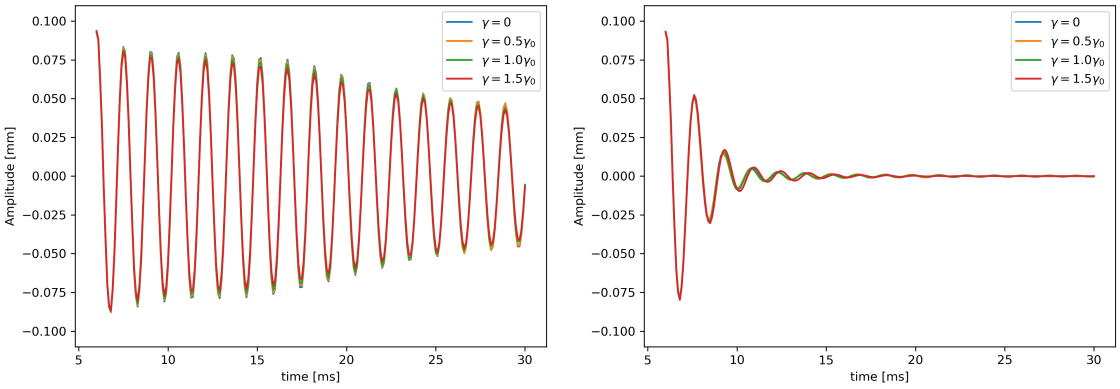
(a) 摩擦系数 μ ($e = 0.4$)。 (b) 恢复系数 e ($\mu = 0.4$)。

图4：影响 摩擦系数 μ 和恢复系数 e 对振幅的影响。

3.6. 黏附

对于增材制造中使用的小尺寸粉末颗粒，众所周知，黏附力会显著影响散装粉末的流动行为。例如，颗粒尺寸减小一半时，重力会减小为原来的八分之一，而黏附力仅减小为原来的四分之一。因此，对于小尺寸颗粒，黏附力会超过重力，并显著影响粉末流动性，例如在粉末铺展过程中便可观察到这一点 [22, 23]。本文研究了此前结果中未考虑的黏附力的影响。为补偿放大的颗粒尺寸，将内聚表面能按缩放因子的平方进行放大，以保持粉末的无量纲内聚性

不变，即重力与黏附力之比保持不变 [23]。因此，为补偿放大后的粉末颗粒尺寸，原始粉末 $\gamma_{ref} = 0.06$ mJ m^{-2} 的表面能被缩放至 $\gamma_{scaled} = 85$mJ m$^{-2} = \gamma_0$。为探究内聚力的一般影响，还研究了表面能取值 $0.5 \cdot \gamma_{scaled}$和 $2 \cdot \gamma_{scaled}$ 时的情况。图5显示，黏附力及其不同大小对阻尼没有显著影响。因此，推测法向力主要源于预压缩步骤，该步骤使堆积密度较高，因而黏附力的贡献较小。



(a) $\Phi = 56$ %。　　(b) $\Phi = 58$ %。

图5：黏附的影响（采用缩放后的原始表面能 γ_0）。

3.7. 梁的方向

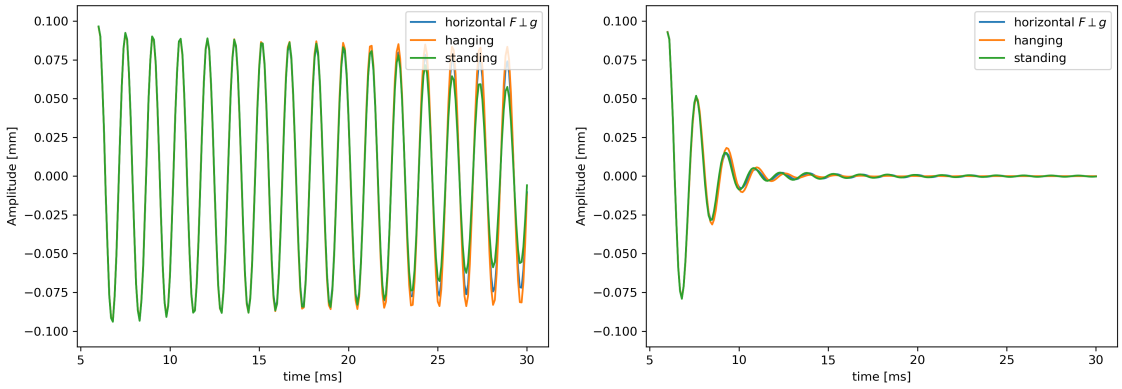
默认情况下，梁竖直放置，夹持端位于底部。在其他模拟中，梁倒置，即竖直放置且夹持端位于顶部；也会水平放置并施加水平激励。在模拟中，只需改变重力方向即可轻松实现这些设置。针对两种堆积密度研究了不同的设置。

对于默认堆积密度 $\Phi = 58$ %，改变取向不会影响阻尼（图6b）。由于堆积密度较高，转动车梁时，颗粒没有足够的自由活动空间来重新排列。相比之下，堆积密度为 $\Phi = 54$ % 时，颗粒重构更为显著（图6a），因此梁的方向对阻尼有明显但较小的影响。

4. 颗粒尺寸影响的解析研究

第3.2节的数值结果表明，观察到的阻尼行为（近似）独立于颗粒尺寸。为通过解析论证验证这些数值观察结果，本节将推导颗粒填充腔体在不同变形模式下的一阶模型。为对该问题进行解析处理，作出以下简化假设：由于空腔内的堆积密度较高，假设颗粒始终保持接触。颗粒始终接触时，模型仅考虑摩擦引起的耗散，而不考虑颗粒碰撞引起的耗散。此外，不考虑颗粒与壁面之间的耗散（例如，颗粒粘附在壁面上时即符合这一条件）。下面将考虑纯剪切模式和纯弯曲模式。为此，假设一个矩形箱体内填充着半径为 R 的等尺寸颗粒，且壁面上存在法向力$F_{N,\,x}$ 和$F_{N,\,y}$（见图7a），这些法向力是粉末压实过程的直接结果。每个接触点处的法向力$F_{N,\,x,\,i}$ 和$F_{N,\,y,\,i}$ 给出

$$F_{N,y,i} = \frac{F_{N,y}}{N_x} \quad \text{and} \quad F_{N,x,i} = \frac{F_{N,x}}{N_y}, \tag{15}$$



(a) $\Phi = 54$ %.

(b) $\Phi = 58$ %.

图6：梁的方向的影响。

其中，x方向和y方向上的颗粒数分别为 $N_x = b/（2R）$ 、 $N_y = l/（2R）$ 。

角度为 φ 的线性剪切变形（见图7b）会产生相对运动

$$\Delta d = 2R \cdot \tan(\varphi) \tag{16}$$

发生在两个接触颗粒之间。单个粒子的功贡献$W_{x,\ i}$ 表示为

$$W_{x,i} = F_{T,x,i}\Delta d \quad \text{with} \quad F_{T,x,i} = \mu F_{N,y,i}, \tag{17}$$

其中$F_{T,\ x,\ i}$ 是沿x方向作用的摩擦力， μ 是摩擦系数。假设所有接触点均发生滑动摩擦，则功会耗散。因此，总耗散是所有发生相对运动的接触点的功之和 i

$$\begin{aligned} W &= \sum_i W_{x,i} = \sum_i \mu \frac{F_{N,y}}{N_x}\Delta d = N_x(N_y - 1)\mu\frac{F_{N,y}}{N_x}\Delta d \\ &\approx N_y \mu F_{N,y}\Delta d = \frac{l}{2R}\mu F_{N,y} 2R\tan(\varphi) = l\mu F_{N,y}\tan(\varphi), \end{aligned} \tag{18}$$

利用 x方向上有 $N_x = l/(2R)$ 个接触点、y方向上有 $N_y - 1 \approx N_y = b/(2R)$ 个接触点这一事实。由此可知，在剪切情况下，耗散与粒子半径无关。在该模型中，颗粒尺寸减半会使接触点数量增加四倍，但同时也会使接触力和相对滑动距离减半，因此总功保持不变。

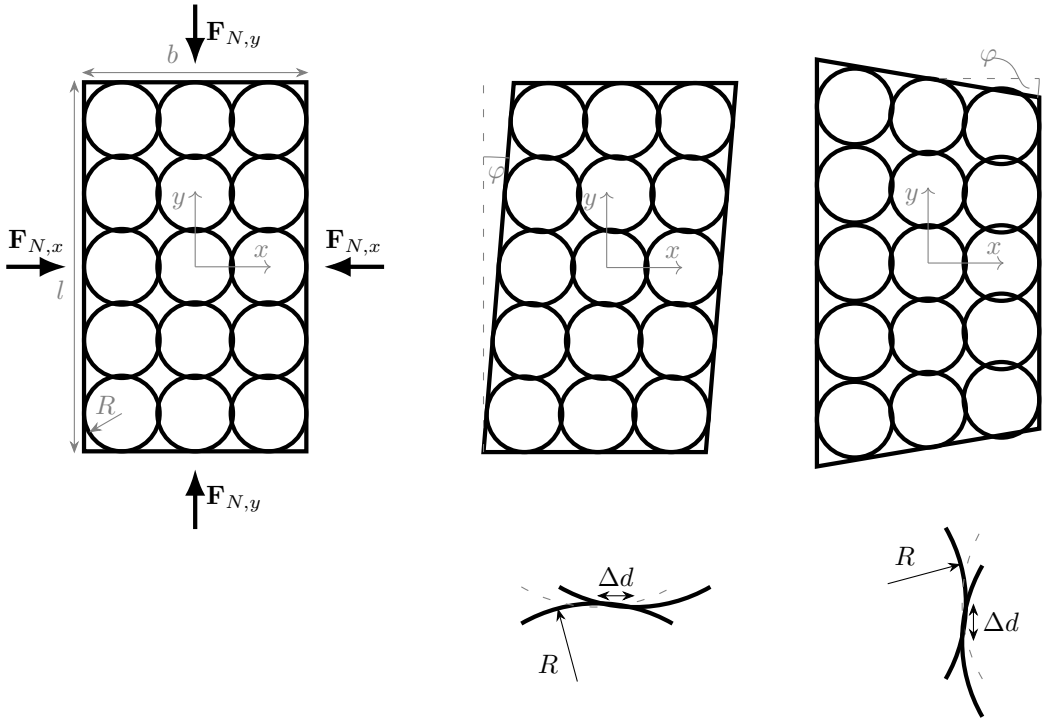
对于纯弯曲，考虑线性变形（见图 7c）。将变形理想化为所有粒子始终保持接触。x方向上没有位移，而y方向上的位移为

$$\Delta y = -\Delta y_{max}\frac{x}{b/2}\frac{y}{l/2} = f \cdot xy, \tag{19}$$

其中， $\Delta y_{max} = b/2 \cdot \tan(\varphi)$ 是角点处的最大位移， $f = 4\Delta y_{max}/(bl)$ 用于概括常数因子。随后，未变形构型中坐标为 (x_1, y) 和 (x_2, y) 的两个粒子之间的相对运动为

$$\Delta d = f x_2 y - f x_1 y = f(x_2 - x_1)y = f \cdot 2R \cdot y, \tag{20}$$

其中， $x_2 - x_1 = 2R$ 使得颗粒之间的相对运动取决于其 y 位置。请注意，只有处于相同高度的接触颗粒之间才存在相对运动，在该



(a) 未变形构型。 (b) 剪切变形。 (c) 弯曲变形。

图 7: 用于描述颗粒尺寸对剪切变形和弯曲变形影响的解析模型。

未变形的构型 构型中，即处于相同的 y 坐标。再次，对于一对颗粒，功的贡献为 $W_{x,\ i}$ f 颗粒被计算 化

$$W_{y,i} = \Delta d_i F_{T,y,i} \quad \text{with} \quad F_{T,y,i} = \mu F_{N,x,i}, \tag{21}$$

在 y 方向上的摩擦力 $F_{T,\ y,\ i}$。同样，假设所有粒子始终保持接触并处于滑动摩擦状态。总耗散为

$$W = \sum_i W_{y,i} = \sum_i \Delta d_i F_{T,y,i} = \sum_i f \cdot 2R \cdot y_i \cdot \mu F_{N,x,i} = f \cdot 2R \cdot \mu \frac{F_{N,x}}{N_y} \sum_i y_i. \tag{22}$$

该求和还可以进一步简化。x方向上有 $N_x - 1$ 个接触点，其 y 值相同，因此剩下的求和只需对 N_y 个接触点进行。这里可以利用关于 x 轴的对称性，并将 y 坐标表示为粒子直径 $y_i = 2R \cdot i$的整数倍。对于所得的求和，可以使用求和式 $\sum_{i=1}^{n} i = {}^{n}{}_{(n+1)\ 2}$。由此得到

$$\sum_i y_i = (N_x - 1) \sum_{i_y} y_{i_y} = (N_x - 1) \sum_{i_y=1}^{N_y/2} 2R \cdot i_y = (N_x - 1) 2R \frac{\frac{N_y}{2}(\frac{N_y}{2} + 1)}{2} \approx 2RN_x \frac{N_y^2}{8}, \tag{23}$$

其中，对于较大的 N， ~~N_x~~ —1 $\approx N_x$和—$^{N_y}_{2}$($^{N_y}_{2}$ + 1) $\approx$ $^{N_x}_{4}$。最后，结合式 (22) 和 (23)，总功为

$$W = f \cdot 2R \cdot \mu \frac{F_{N,x}}{N_y} \cdot 2RN_x \frac{N_y^2}{8} = f \cdot \mu F_{N,x} \cdot 4R^2 \cdot \frac{1}{8} \frac{b}{2R} \frac{l}{2R} = \frac{fbl}{8} \cdot \mu F_{N,x}. \tag{24}$$

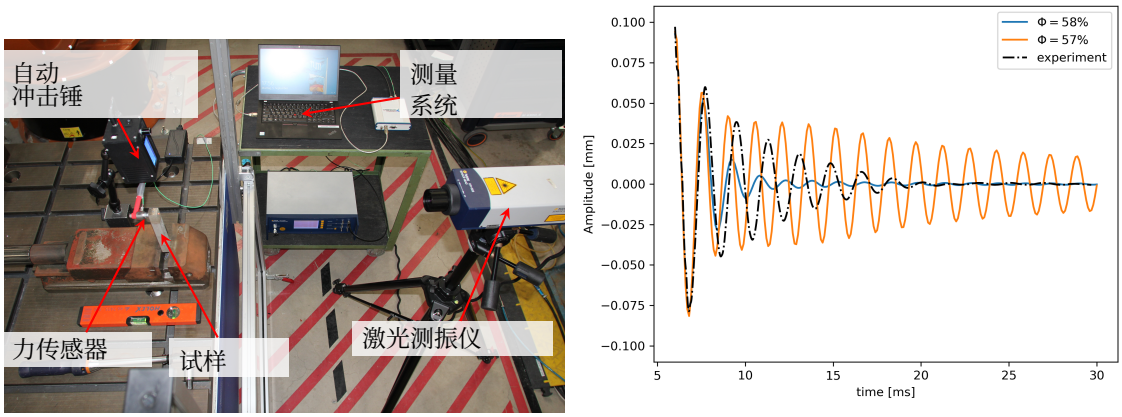
同样，结果与粒子尺寸无关。当然，实际的粒子行为更加复杂。粒子尺寸遵循一定的尺寸分布。剪切和弯曲模态会同时发生，而且并非

线性的。然而，结果表明，与堆积密度的影响相比，粒子尺寸的影响较小（堆积密度会直接影响法向力 $F_{N,x}$ 和 $F_{N,y}$）。因此，在制造颗粒阻尼器时，确保空腔内具有合适的堆积密度，比选择粒子尺寸更重要。

5. 实验实现

本节介绍数值研究中所考察颗粒阻尼系统实验实现的首次概念验证。具体而言，需要证明阻尼时间尺度（即振荡停止时间）与数值研究中观察到的处于同一数量级；对于大多数实际应用而言，这是相关的特征参数。对于这些一阶比较，直接采用文献中的离散元模型参数（例如接触刚度、摩擦系数等）即可，无需进行耗时的模型校准实验 [23]。

图8a展示了实验装置。具有 $20 \times 20 \times 150$ 毫米^3 尺寸且中心设有 $18 \times 18 \times 110$ 毫米^3 封闭空腔的梁，采用316L不锈钢打印制成。该几何结构与数值研究中使用的结构相似。梁的前20毫米被夹持在虎钳中，使梁保持垂直方向。通过连接有力传感器（Dytran 1051 V4）的自动冲击锤从梁的一侧施加激励。在另一侧，激光测振仪（Polytec OFV-505传感器头和Polytec OFV-5000测振仪控制器）测量梁顶端附近的速度。使用自动冲击锤能够实现高重复性的激励。



(a) 实验装置。

(b) 静止梁激励的实验与仿真对比
静止梁的 tion。

图 8：实验实现。

在一项初步研究中，使用 108 N 的力激励梁。将测得的位移曲线与相应的仿真结果进行比较。鉴于离散元模型的参数尚未经过校准以匹配实验所用的粉末材料，仿真所得的阻尼行为与实验测量结果吻合良好。尤其是阻尼时间尺度（即达到静止所需的时间）与实验结果高度吻合，而这一指标与许多实际应用相关。实验结果介于堆积密度为 $\Phi = 57\,\%$ 和 $\Phi = 58\%$ 的仿真结果之间（两者的颗粒尺寸均为 $D50 = 1.0$ 毫米），且量级相同。为了进行后续的定量比较，需要通过实验校准相关模型参数，例如接触刚度、摩擦系数和材料阻尼。此外，还需要高精度测量实验中的堆积密度。

6. 结论与展望

在本研究中，提出了一种双向耦合的离散元法-有限元法模型，用于研究增材制造颗粒阻尼器中的基本耗散机制。具体而言，

所提出的离散元-有限元框架首次能够一致地描述振荡变形结构与封闭粉末堆积体之间的相互作用，并揭示出，对于所研究的系统，由可变形腔壁引起的粉末颗粒间滑动摩擦是耗散的主要机制。对封闭粉末堆积体的空心悬臂梁进行自由振荡模拟表明，存在一个可实现最佳阻尼的最优堆积密度。对于本研究所考察的粉末尺寸，未熔合粉末的最优堆积密度为58%至61%。不同于最优堆积密度的堆积密度会导致明显较差的阻尼效果。在增材制造颗粒阻尼器时，应考虑颗粒阻尼器对堆积密度的这种强依赖性。此外，结果表明，不同颗粒尺寸对耗散的影响很小，这一点可通过粉末腔体剪切模式和弯曲模式的一阶模型加以验证。研究发现，颗粒间的内聚力对阻尼没有明显影响。同样，恢复系数（即定义冲击耗散的参数）的影响也很小。相反，摩擦系数的影响很大，在摩擦系数为 $\mu = 0.4$时可实现最佳阻尼。模拟阻尼行为与实验结果的初步比较显示出良好的一致性。

未来的工作将着重于利用实验数据校准模型。此外，目标是优化粉末腔体的尺寸、形状及其在部件中的定位，以实现部件所需的阻尼特性。

致谢

作者感谢德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）通过项目 414180263 为本研究提供资助。

附录 A. 计算建模参数

参见表 A.2 和 A.3。

表 A.2：离散元模型参数的列表值

符号	参数	值	Unit
ρ	密度	8000	$\mathrm{kg\,m^{-3}}$
k_N	罚参数	5642	$\mathrm{N\,m^{-1}}$
c_g	最大相对穿透量	0.055	–
μ	摩擦系数	0.4	–
e	恢复系数	0.4	–
ν	泊松比	0.27	–
g	重力	9.81	$\mathrm{m\,s^{-2}}$
Δt	时间步长	$2.5 \cdot 10^{-6}$	s
原始对数正态粒径分布			
D_{50}	中位数	0.0265646	mm
σ	西格玛	0.2707	–
D_{90}	90th 百分位数	0.0375828	mm
D_{10}	10th 百分位数	0.0187766	mm
缩放对数正态粒径分布			
D_{50}	中位数	1.0	mm
σ	西格玛	0.2707	–
r_{max}	最大截断半径	0.707385	mm
r_{min}	最小截断半径	0.353414	mm

表 A.3：有限元法模型的列表值

符号	参数	数值	Unit
ρ	密度	8000	$\mathrm{kg\,m^{-3}}$
E	杨氏模量	175	GPa
ν	泊松比	0.27	–
h	单元尺寸（六面体八节点单元）	1.0	mm
ϵ	离散元法-有限元法耦合容差	$1.0 \cdot 10^{-3}$	–
广义-α 方法的算法参数			
ρ_∞	谱半径	0.8	–
α_f		$0.\overline{4}$	–
α_m		$0.\overline{3}$	–
β		0.30864	–
γ		0.61111	–

参考文献

[1] T. Ehlers、R. Lachmayer，《针对刚度和阻尼进行优化的摩托车三联夹设计》，载于：S. Pfingstl、A. Horoschenkoff、P. H¨ofer、M. Zimmermann（编），《2020年慕尼黑轻量化设计研讨会论文集》，Springer Berlin Heidelberg，柏林、海德堡，2021年，第 1–17 页。[2] O. Scott-Emuakpor、J. Beck、B. Runyon、T. George，《利用增材制造确定实现最佳固有阻尼的未熔合粉末阈值》，《增材制造》38（2021年）101739。 doi:10.1016/j.addma.2020.101739。[3] T. K¨unneke、D. Zimmer，《弯曲振动下增材制造阻尼结构的功能集成》，载于：H. A. Richard、B. Schramm、T. Zipsner（编），《零部件与结构的增材制造》，Springer Fachmedien，威斯巴登，2017年，第 61–74 页。[4] F. Vogel、S. Berger、E. ¨Ozkaya、D. Biermann，《采用内部结构特殊且填充颗粒的中空元件增材制造刀具夹持器抑制 TiAl6V4 合金车削振动》，第 40 卷，2019年，第 32–37 页。[5] L. Gagnon、M. Morandini、G. L. Ghiringhelli，《颗粒阻尼建模与测试综述》，《声学与振动杂志》459（2019年）114865。 doi:10.1016/j.jsv.2019.114865。[6] T. Ehlers、R. Lachmayer，《用于激光粉末床熔融的颗粒阻尼器设计》，《应用科学》12（4）（2022年）2237。[7] K. Mao、M. Y. Wang、Z. Xu、T. Chen，《瞬态振动中颗粒阻尼的仿真与表征》，《振动与声学杂志》126（2）（2004年）202–211。 doi:10.1115/1.1687401。[8] Z. Lu、S. F. Masri、X. Lu，《谐波激励下颗粒阻尼器性能的参数研究》，《结构控制与健康监测》18（1）（2011年）79–98。 doi:10.1002/stc.359。[9] Z. Lu、Z. Wang、S. F. Masri、X. Lu，《颗粒撞击阻尼器：过去、现在与未来》，《结构控制与健康监测》25（1）（2018年）e2058。 doi:10.1002/stc.2058。[10] M. Masmoudi、S. Job、M. S. Abbes、I. Tawfiq、M. Haddar，《颗粒阻尼器中耗散机制的实验与数值研究》，《颗粒物质》18（3）（2016年）71。 doi:10.1007/s10035-016-0667-4。[11] T. Ehlers、S. Tatzko、J. Wallaschek、R. Lachmayer，《面向增材制造的颗粒阻尼器设计》，《增材制造》38（2021年）101752。[12] O. Scott-Emuakpor、T. George、B. Runyon、J. Beck、L. Sheridan、C. Holycross、R. O'Hara，《增材制造镍合金固有阻尼的可持续性研究》，《AIAA杂志》57（1）（2019年）456–461。 doi:10.2514/1.J057608。[13] H. Guo、K. Ichikawa、H. Sakai、H. Zhang、X. Zhang、K. Tsuruta、K. Makihara、A. Takezawa，《增材制造颗粒阻尼器在低频下的数值与实验分析》，《粉末技术》（11月 2021 doi:10.1016/）。 j.powtec.2021.11.029
[14] R. D. Friend、V. K. Kinra，《颗粒撞击阻尼》，《声学与振动杂志》 233 1 2000 93 118 doi:()() 10.1006/jsvi.1999.2795
–。[15] K. S. Marhadi 、 V. K. Kinra，《颗粒撞击阻尼：质量比、材料和形状的影响》，《声学与振动杂志》 283 （ 1 ）（ 2005 年）433–448。 doi:10.1016/j.jsv.2004.04.013。[16] O. Scott-Emuakpor、T. George、B. Runyon、C. Holycross、B. Langley、L. Sheridan、R. O'Hara、P. Johnson、J. Beck，《研究具有独特内部结构的激光粉末床熔融构件的阻尼性能》，载于：2018年ASME涡轮机博览会：涡轮机械技术会议暨展览会，美国机械工程师学会数字馆藏，2018年。 doi:10.1115/GT2018-75977。[17] O. Scott-Emuakpor、J. Beck、B. Runyon、T. George，《验证增材制造构件阻尼性能的多因素模型》，《AIAA杂志》58（12）（2020年）5440–5447。 doi:10.2514/1.J059608。[18] O. Scott-Emuakpor、A. Schoening、A. Goldin、J. Beck、B. Runyon、T. George，《内部几何结构对增材制造构件固有阻尼性能的影响》，《AIAA杂志》 59 1 2021 379 385 doi:10.2514/1.()() J059709
–。[19] O. Scott-Emuakpor 、 L. Sheridan 、 B. Runyon 、 T. George，《增材制造镍合金的振动疲劳评估》

具有固有阻尼的合金，《燃气轮机与动力工程杂志》

143 10 2021 doi:10.1115/1.()
4051489
(Sep.). .[20] D. Kiracofe、M. Postell、O. Scott-Emuakpor、B. Runyon、T. George，《采用增材制造的集成颗粒阻尼器部件的离散元法模拟》，美国机械工程师学会数字馆藏，2021年。 doi:10.1115/GT2021-58462.[21] Y. Harduf、E. Setter、M. Feldman、I. Bucher，《将增材制造颗粒阻尼器建模为二自由度摩擦系统》，《机械系统与信号处理》187 (2023) 109928。
doi:10.1016/j.ymssp.2022.109928.[22] C. Meier、R. Weissbach、J. Weinberg、W. A. Wall、A. J. Hart，《颗粒尺寸和黏附对金属增材制造中粉末层均匀性的关键影响》，《材料加工技术杂志》266 (2019) 484–501。
doi:10.1016/j.jmatprotec.2018.10.037.[23] C. Meier、R. Weissbach、J. Weinberg、W. A. Wall、A. J. Hart，《细金属粉末内聚力的建模与表征：聚焦于增材制造过程仿真》，《粉末技术》

343 2019 855 866 doi:()–。.
10.1016/j.powtec.2018.11.072
[24] C. Meier、S. L. Fuchs、N. Much、J. Nitzler、R. W. Penny、P. M. Praegla、S. D. Proell、Y. Sun、R. Weissbach、M. Schreter、N. E. Hodge、A. J. Hart、W. A. Wall，《跨尺度粉末床熔融增材制造的基于物理的建模与预测性仿真》，《GAMM通讯》(2021) e202100014doi:10.1002/gamm.202100014。[25] R. W. Penny、P. M. Praegla、M. Ochsenius、D. Oropeza、R. Weissbach、C. Meier、W. A. Wall、A. J. Hart，《利用透射X射线成像对金属增材制造粉末层密度进行空间映射》，《增材制造》46 (2021) 102197。 doi:10.1016/j.addma.2021.102197.[26] B. Derjaguin、V. Muller、Y. Toporov，《接触变形对颗粒黏附的影响》，《胶体与界面科学杂志》53 (2) (1975) 314–326。 doi:https://doi.org/10.1016/0021-9797(75)90018-1.[27] T. J. R. Hughes，《有限元法：线性静态与动态有限元分析》，多佛出版社，2012年。[28] O. C. Zienkiewicz、R. L. Taylor、D. D. Fox，《固体与结构力学有限元法》，第七版，爱思唯尔·巴特沃思-海涅曼，2014年。[29] J. Chung、G. M. Hulbert，《一种改进数值耗散的结构动力学时间积分算法：广义-α 方法》，《应用力学杂志》60 (2) (1993) 371–375。 doi:10.1115/1.2900803.[30] S. L. Fuchs、C. Meier、W. A. Wall、C. J. Cyron，《一种新颖的用于流固耦合的光滑粒子流体动力学与有限元耦合方案：滑动边界粒子方法》，《计算力学与工程方法》383 (2021) 113922。 doi:10.1016/j.cma.2021.113922.[31] U. K¨uttler、W. A. Wall，《采用动态松弛的定点流固耦合求解器》，《计算力学》43 (1) (2008) 61–72。 doi:10.1007/s00466-008-0255-5.[32] BACI：综合多物理场仿真框架（访问于2023年2月10日）。URL https://baci.pages.gitlab.lrz.de/website