arXiv:2302.08376v2 [math.AC] 7 Apr 2023

非交换无挠解析的对数中心是川俣对数终端：关于 Stafford 和 Van den Bergh 一篇论文的评述

Colin Ingalls 和 Takehiko Yasuda

Abstract. 我们证明，若有限生成素代数 Δ 是其中心 Z上的有限生成极大 Cohen–Macaulay 模，且其整体维数等于 $\dim Z$，则由其中心与分歧除子构成的对是川俣对数终端的。

1. 引言

我们将在特征零的代数闭域上进行研究。正如 [**2**], 所述，非交换保正则形式解消（NCCR）体现了非交换代数与代数几何之间的相互作用。目前尚不清楚何时交换代数具有 NCCR，已有研究发现了若干必要条件。 [**18**], 证明，任何具有 NCCR 的交换代数都有有理奇点。特别地，他们证明，若一个有限于其中心的仿射素代数 Δ 是同调齐次的，或者等价地， Δ 是其中心上的 Cohen–Macaulay 模且具有有限全局维数，那么其中心就有有理奇点。我们运用极小模型纲领中关于奇点的标准结果 [**11**], 以及 [**18**] 的论证，证明由中心与分歧除子构成的对数对具有川俣对数终端奇点。这尤其表明该对是 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 的。现在我们回顾本文的内容。

在第2节中，我们讨论极小模型纲领中的奇点，并回顾对数典范覆盖的定义和性质。在第3节中，我们计算离散赋值环上遗传序的典范双模 ω 的中心化子。我们还引用了来自 [**11**]的相关结果。这些内容将在主定理的证明中用到。在第4节中，我们回顾有限于其中心的同调齐次代数的性质。这部分内容摘自 [**18**]。在第5节中，我们证明主定理。给定 Δ，一个有限于其中心且同调齐次的素仿射代数，其中心为 Z、判别式为 D，我们证明该序 Δ 的典范覆盖 Γ 的中心就是对的对数典范覆盖

Ingalls 得到了 NSERC 探索基金的支持。Yasuda 得到了 JSPS KAKENHI 基金编号 JP22740020、JP18H01112、JP21H04994 的支持。第一作者谨此感谢 Kenneth Brown 和 Michael Wemyss 的有益讨论。我们还要感谢一位匿名审稿人提出的宝贵意见。

(Z, Δ)。最后，在第6节中，我们列出主定理适用的代数，并给出一些相关示例。

有许多奇点已知不允许存在非交换克雷帕分解，例如参见 [7]。

本文的结果引出了以下问题。

QUESTION 1.1. 设 Z 是一个交换局部环。在什么条件下，Z 是素仿射同调齐性环 A 的中心？换言之，如果允许加入边界除子 D，并允许 A 具有非平凡的一般布劳尔类，能否得到对 (谱 Z, D) 的扭曲分歧非交换克雷帕分解？

相关术语的定义见 4.2。本文的结果及证明概要已在 [9] 中报告。论文 [8] 研究非交换克雷帕分解的情形，而 [8] 的定理1.1(a)和推论1.7证明了我们在这一特殊情形下的主要结果。

2. 双有理几何中的奇点

本节回顾一些关于双有理几何和极小模型纲领研究中出现的奇点的内容。标准参考文献包括 [6, 11, 13]。

2.1. 川俣对数终端、对数终端和典范奇点。设 X 是一个正规簇。X 上的 $\mathbb{Q}$-除子是 X 的余维一子簇的有理系数线性组合。若 $\mathbb{Q}$-除子的所有系数均为非负，则称其为有效的。若存在整数 m 使得 mD 是一个卡蒂埃除子，则称 $\mathbb{Q}$-除子 D 是 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃的。对数簇是一个对(X, D)，由一个正规簇 X 及其上的 $\mathbb{Q}$-除子 D组成。

设(X, D)是一个对数簇，且 $K_X + D$ 是 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃的。在这种情况下，我们称(X, D)为 $\mathbb{Q}$-Gorenstein。于是，对于一个适当双有理态射 $f\colon\ Y \to X$，其中 Y 光滑，我们记

$$K_Y = f^*(K_X + D) + \sum_E a_E E,\ a_E \in \mathbb{Q}$$

其中，E 遍历 D. 中出现的例外除子和素除子的严格变换。系数 a_E 与态射 f 无关，只取决于与 E相关联的函数域的除子赋值。映射$f\colon\ Y \to (X, D)$称为保正则形式的，若所有 $a_E = 0$均成立，即使在 Y 仅为正规而不一定光滑的情形下也是如此。若对每个 E. 都有 $a_E > -1$，则称(X, D)具有川俣对数终端（KLT）奇点。当(X, D)是 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 且$D = 0$时，X 是 $\mathbb{Q}$-Gorenstein。在这种情况下，若对每个 E. 都有 $a_E > -1$ （分别为 ≥ 0），则称 X 具有对数终端（分别为典范）奇点。注意，K_X 是 Cartier 当且仅当 X 是 Gorenstein。我们回顾以下众所周知的结果。

PROPOSITION 2.1（[11, 推论 5.24]）。假设 K_X 是 Cartier。那么 X 具有有理奇点，当且仅当它具有典范奇点。

PROPOSITION 2.2（[11, 定理 5.22]）。若（X, D）具有川俣对数终端奇点，且 D 有效，则 X 具有有理奇点。

2.2. 对数典范覆盖。接下来我们回顾对数典范覆盖的标准技巧（见 [**10**, §8.5][**14**, §1.3]）。

现在假设 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 对数簇 (X, D) 的边界除子具有如下形式

$$D = \sum_i \frac{e_i - 1}{e_i} D_i,\ e_i \in \mathbb{Z}_{>0}$$

其中有 D_i 个素除子。我们称 D 具有标准系数。令 m 为 (X, D) 的指标，即使得 $m(K_X + D)$ 为 Cartier 的最小正整数。给定 X 上的凝聚层 $\mathcal{F}$，记 $\mathcal{F}^{(n)} := (\mathcal{F}^{\otimes n})^{**}$ 为其张量幂的自反包。在 X 上局部地固定一个同构 $\omega_X^{(m)}(mD) \cong \mathcal{O}_X$，我们得到一个 $\mathcal{O}_X$-代数

$$\mathcal{A} := \bigoplus_{i=0}^{m-1} \omega_X^{(i)}(\lfloor iD \rfloor). \tag{2.1}$$

（在 [**10, 14**]，中，层 $\bigoplus_{i=0}^{m-1} \mathcal{O}_X(\lfloor -i(K_X + D) \rfloor)$ 的描述略有不同，但它与 $\mathcal{A}$ 同构。）相应的有限态射

$$\phi : \widetilde{X} := \mathcal{S}\mathrm{pec}_X \mathcal{A} \to X$$

称为对数典范覆盖，并具有以下性质：

Proposition 2.3. [**10**, §8.5][**14**, §1.3] 设 (X, D) 是一个 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 对数簇 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$，其对数典范覆盖为 X。那么 X 是一个不可约正规簇，$K_{\widetilde{X}}$ 是 Cartier，并且

$$K_{\widetilde{X}} = \phi^*(K_X + D).$$

$\widetilde{\ }$注意，按照定义，映射 ψ：$X \to (X, D)$ 是保正则形式的。

$\sim$Proposition 2.4. [**11**, 命题 5.20] 沿用上述记号，X 具有典范奇点，当且仅当 (X, D) 具有 Kawamata 对数终端奇点。

3. ω 的幂的中心化子

设 R 是一个离散赋值环，其参数为 t。记 $(t^i) = t^i R$ 为 $i \in \mathbb{Z}$，即由 t^i 生成的分式理想；记 $(t^0) = (1) = R$。设 Δ 是一个定义在 R 上的标准遗传序，其分歧指数为 e，定义为

$$\Delta = \begin{pmatrix} (1) & \cdots & \cdots & (1) \\ (t) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (t) & \cdots & (t) & (1) \end{pmatrix} \subseteq R^{e \times e}.$$

Δ 的对偶化模由 $\omega = \mathrm{Hom}_R(\Delta, \omega_R)$ 描述为一个双模，如 [**18**, 命题 2.7] 所述。我们通过将 Δ 逐分量对偶化为 R 并取转置，来计算这个双模。令 J 为 Δ的雅各布森根，则有：

$$\omega \simeq \begin{pmatrix} (1) & (t^{-1}) & \cdots & (t^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (t^{-1}) \\ (1) & \cdots & \cdots & (1) \end{pmatrix} \text{ and } J = \begin{pmatrix} (t) & (1) & \cdots & (1) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (1) \\ (t) & \cdots & \cdots & (t) \end{pmatrix}.$$

Let

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ t & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

注意， y 是 Δ 中的正规元素，并且

$$J = y\Delta = \Delta y \qquad y^e = t \qquad \omega = y^{1-e}\Delta = yt^{-1}\Delta.$$

归纳计算表明

$$J^i = y^i\Delta = \begin{pmatrix} \left(t^{-\lfloor \frac{-i}{e} \rfloor}\right) & \cdots & \left(t^{-\lfloor \frac{e-1-i}{e} \rfloor}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(t^{-\lfloor \frac{-e+1-i}{e} \rfloor}\right) & \cdots & \ddots \end{pmatrix}$$

注意到

$$\omega^i = y^{-i(e-1)}\Delta = \begin{pmatrix} \left(t^{-\lfloor \frac{i(e-1)}{e} \rfloor}\right) & \cdots & \left(t^{-\lfloor \frac{(i+1)(e-1)}{e} \rfloor}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(t^{-\lfloor \frac{(i-1)(e-1)}{e} \rfloor}\right) & \cdots & \ddots \end{pmatrix}$$

因此，双模 ω^i 的中心化子是

$$Z(\omega^i) = \left(t^{-\lfloor \frac{i(e-1)}{e} \rfloor}\right).$$

记 $a^{m\times n}$ 为所有元素均为 a 的 $m \times n$ 矩阵。对于 a 为理想或环的元素的情形，我们将使用这一记号。

给定一个自然数序列 $[N] = [n_1, \ldots, n_e]$，令 Δ 为如下给出的分块遗传序

$$\Delta = \begin{pmatrix} (1)^{n_1\times n_1} & \cdots & \cdots & (1)^{n_1\times n_e} \\ (t)^{n_2\times n_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (t)^{n_e\times n_1} & \cdots & (t)^{n_e\times n_{e-1}} & (1)^{n_e\times n_e} \end{pmatrix}$$

我们将其简记为

$$\Delta \simeq \begin{pmatrix} (1) & \cdots & \cdots & (1) \\ (t) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (t) & \cdots & (t) & (1) \end{pmatrix}^{[N]}$$

注意， Δ 与标准遗传 R-序莫里田等价，其分歧指标为 e。由于我们可以按块乘矩阵，因此有以下等式

$$J = (y\Delta)^{[N]} = (\Delta y)^{[N]} \qquad (y^e)^{[N]} = t \qquad \omega = (y^{1-e}\Delta)^{[N]} = (yt^{-1}\Delta)^{[N]}.$$

如上所述，我们得到以下引理。

LEMMA 3.1. 设 R 为参数为 t. 的离散赋值环。设 Δ 为其上的分块遗传序，分歧指数为 e。则对偶化模 ω^i 的幂的中心化子由下式给出

$$Z(\omega^i) = \left(t^{-\lfloor \frac{i(e-1)}{e} \rfloor}\right).$$

4. 非交换分解或代数设定

我们首先回顾 [18] 中的一些结果和记号。回忆一下，如果一个 k-代数作为代数是有限生成的，则称其为仿射代数。设 Δ 是一个仿射素 k-代数，且作为其中心 $Z := Z(\Delta)$ 上的模有限生成。注意， Z 是一个整环 [**12**, §10，例 1], ，我们将其分式域记为 K 。令 A 为 Δ. 的分式单阿廷环。我们有， A 是一个中心单 K-代数。

如果 Δ 是一个有限生成的自反 Z 模，且对于 Z 的所有余维一素理想 p ，Δ_p 都是遗传的，则称 Δ 为温和的 Z-序。如果所有简单 Δ 模的投射维数都相等，则称 Δ 为同调齐次。我们回顾以下结果，该结果主要归功于 Brown-Hajarnavis [**5**]„ 此处引自 [**18**]。

PROPOSITION 4.1. [**18**, 定理 2.3] 设 Δ 是一个维数为 d 、中心为 Z的仿射同调齐次序，则

(1) Δ 是 Z上的 Cohen-Macaulay 模；(2) gldim $\Delta =$ Gelfand–Kirillov 维数 $\Delta = d$。(3) Z 是一个仿射 Cohen-Macaulay 正规整环。(4) Δ 是一个温和的 Z-序。

请注意，第三个结论依赖于我们的底域 k 具有特征零。

现在我们来定义余维一中温和序的判别式。设 p是 Z的一个余维一素理想。由于 Δ_p 是遗传的，存在离散赋值环 Z_p 的一个 ´étale 扩张R，使得 $\Delta_R := \Delta \otimes R$ 同构于

$$\Delta_R \simeq \begin{pmatrix} (1)^{n_1\times n_1} & \cdots & \cdots & (1)^{n_1\times n_{e_p}} \\ (t)^{n_2\times n_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (t)^{n_{e_p}\times n_1} & \cdots & (t)^{n_{e_p}\times n_{e_p-1}} & (1)^{n_{e_p}\times n_{e_p}} \end{pmatrix}$$

其中 t 是 R [**1, 16**]的一个参数。我们将记 $[N] = [n_1, \ldots, n_{e_p}]$，并简写为

$$\Delta_R \simeq \begin{pmatrix} (1) & \cdots & \cdots & (1) \\ (t) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (t) & \cdots & (t) & (1) \end{pmatrix}^{[N]}$$

我们将 e_p 称为 Δ 在 p处的分歧指数。我们将 Δ 的判别式定义为 $\mathbb{Q}$-除子

$$D = \sum_{\substack{p \subset Z \\ \operatorname{cod} p = 1}} \left(\frac{e_p - 1}{e_p}\right) D_p.$$

注意，由于 $\lceil D \rceil$ 是环 Δ的经典判别式，而该判别式通过约化迹配对 [**16**, §25]定义，因此此和是有限的。我们将 Δ 的中心与其判别式结合为对数中心 logZ(Δ) $=$(Spec Z(Δ) D)。

设 Δ 是一个仿射素代数，且作为其中心上的有限模。根据 [**18**, 引理 2.4] ， Δ 是同调齐次的，当且仅当 Δ 是一个 Cohen–Macaulay R-模，且 GKdim $\Delta =$ gldim Δ。

Definition 4.2. 设 Δ 是一个素的、仿射的 k-代数，且在其中心上模有限。若 Δ 是同调齐次的，或者根据 [**18**, 引理 2.4],等价地，代数 Δ 是一个 Cohen–Macaulay 代数，且 GKdim $\Delta =$ gldim Δ，则称 Δ 是对 logZ(Δ) $= (X, D)$ 的扭曲分歧非交换 crepant 解消（NCCR）。若进一步满足 $D = 0$ ，则称该 NCCR 是非分歧的。设 K 是中心 Z 的分式域。扭曲 NCCR Δ 的扭曲类是 Br K. 中的 $\Delta \otimes_Z K$ 类。若该类是平凡的，则称 Δ 是对 logZ(Δ) 的非扭曲非交换 crepant 解消。经典非交换 crepant 解消是非扭曲且非分歧的，这也是文献中通常对 NCCR 的定义。

注意，若 Z(Δ) 是 Gorenstein，则我们对经典非交换 crepant 解消的定义等价于 [**2**, Defn. 2.2] 中对非交换 crepant 解消的定义，而我们对扭曲非分歧非交换克雷潘分解的定义等价于 [**2**,Defn. 2.2] 中对扭曲非交换克雷潘分解的定义。

下述结论众所周知。

Proposition 4.3. 若 Δ 是一个极大序，且是对 (Z, D) 的经典非交换 crepant 解消，则 $D = 0$，并且存在一个自反的 Z-模 M，使得 $\Delta \simeq \operatorname{End}_Z(M)$。

Proof. 由于 Δ 的一般 Brauer 类是平凡的，且 Z 是正规整环，上述陈述在余维一成立，因此取自反包即可得到所需结果。□

5. 非交换 crepant 解消与典范覆盖

Proposition 5.1. 设 $\Gamma = \Delta \oplus \omega_\Delta \oplus \cdots \oplus \omega_\Delta^{(r-1)}$ 是 Δ 的典范覆盖，并令 $Z := Z(\Gamma)$ 和 $X :=$ 谱 Z. 。那么态射 $X \to X$ 是 (X, D) 的对数典范覆盖。

Proof. 令 p 为 Z 的一个余维一素理想。根据 [**1**], , 存在 Δ_p 的一个 ´étale 扩张 R，使得 $\Delta_R := \Delta \otimes R$ 同构于

$$\Delta_R \simeq \begin{pmatrix} R^{n_1 \times n_1} & \cdots & \cdots & R^{n_1 \times n_k} \\ (tR)^{n_2 \times n_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (tR)^{n_k \times n_1} & \cdots & (tR)^{n_{k-1} \times n_k} & R^{n_k \times n_k} \end{pmatrix}$$

其中 t 是离散赋值环 R 的一个参数。现在由引理 3.1 可知

$$Z(\omega^i_{\Delta_R}) = \left(t^{-\lfloor \frac{i(e-1)}{e} \rfloor}\right)$$

因此

$$Z(\omega_\Delta^{(i)}) = \omega_X^{(i)}(\lfloor iD \rfloor).$$

′在余维一处局部仿射。两边在泛点处自然同构，因此由于两边都是自反的，我们得到处处成立的这个同构。立即可得

$$\widetilde{Z} = Z(\Gamma) = \bigoplus_{i=0}^{m-1} Z(\omega_\Delta^{(i)}) = \bigoplus_{i=0}^{m-1} \omega_X^{(i)}(\lfloor iD \rfloor)$$

其中 m 是 $K_X + D$的指标。

□

设 Δ 是一个仿射素 k-代数，且在其中心上模有限。进一步设 Δ 是同调齐次的。令 $Z := Z(\Delta)$ 为其中心，令 $X :=$Spec Z 为其谱。Stafford 和 Van den Bergh 证明了一个关于该中心可能具有的奇点的重要结果：

Theorem 5.2 ([18]). X 只有有理奇点。

事实上，沿着同样的思路，我们可以证明如下结果。由于命题 2.2，这一结果是对他们结果的细化。

Theorem 5.3. 令 D 为与 Δ. 相关联的 X 上的判别除子。于是，对数簇 (X, D) 具有 Kawamata 对数终端奇点。此外，若 X 是 $\mathbb{Q}$ -Gorenstein，则 X 具有对数终端奇点。

Proof. 由于证明在 X 上是局部的，我们可以假设，若 m 是 (X, D) 的指标，则 $\omega_X^{(m)}(mD)$ 同构于 Z。于是，令 $\widetilde{Z} := \bigoplus \omega_X^{(i)}(\lfloor iD \rfloor)$，我们可以构造 (X, D) 的对数典范覆盖，

$$\phi : \widetilde{X} = \operatorname{Spec} \widetilde{Z} \to X = \operatorname{Spec} Z$$

如 (2.1) 所示。另一方面，同构 $\omega_X^{(m)}(mD) \cong Z$ 给出了 $\omega_\Delta^{(m)} \cong \Delta$ 作为 Δ-双模的一个同构，并且我们有 Δ 的典范覆盖，

$$\Gamma := \Delta \oplus \omega_\Delta \oplus \cdots \oplus \omega_\Delta^{(m-1)}.$$

我们在 5.1 中证明 $Z(\omega_\Delta^{(i)}) = \omega_X^{(i)}(\lfloor iD \rfloor)$ 和 $Z(\Gamma) = \widetilde{Z}$.

由于 [18, 命题 3.1(1)] 表明 Γ 也是同调齐次的，因此根据~定理 5.2， Z 具有有理奇点。现在，由命题 2.1 和 2.4，(X, D) 这一对具有 Kawamata 对数终端奇点。最后一个断言是显然的。□

我们注意到以下推论。

Corollary 5.4. 设 A 是交换代数 R 的非分歧非交换克雷潘分解。则 R 是对数终端的，并且是 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 的。

Corollary 5.5. 设 $\mathcal{A}$ 是对 (X, D) 的（扭曲的、分歧的）非交换克雷潘分解。则该对是川俣对数终端的，并且是 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 的。

我们给出上述定理的另一种证明。首先注意：

Proposition 5.6. 设 Δ 是一个仿射、素、在中心上有限且同调齐次的 k-代数。设 Γ 是 5.1 中所述的 Δ 的典范覆盖。设 (X, D) 为 Δ 的~对数中心，并令 $X =$ 为 Spec $Z(\Gamma)$。那么有 $K_{\widetilde{X}} = \pi^*(K_X + D)$。

Proof. 设 m 是 $K_X + D$ 的指标，并令 $\hat{\otimes}$ 表示该张量积的自反包。我们有以下同构：

$$\Gamma \hat{\otimes}_\Delta \omega_\Delta \simeq \omega_\Gamma$$
$$\omega_\Gamma \simeq \omega_{\widetilde{X}} \hat{\otimes}_{\widetilde{X}} \Gamma$$
$$\omega_\Delta^{(m)} = \omega_X^{(m)}(mD) \otimes_X \Delta.$$

换言之，若我们考虑以下图表：

$$\begin{array}{ccc} \text{谱 } \Delta & \longleftarrow & \text{谱 } \Gamma \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X, D) & \longleftarrow & \widetilde{X} \end{array}$$

我们知道，除了底部映射之外，所有映射都是保正则形式的。因此，底部映射也是保正则形式的。□

利用命题 5.6，我们得到定理 5.3 的另一种证明。

Proof. 由于 Γ 是同调齐次的，且满足 $Z(\Gamma) = Z$，根据定理 5.2，我们知道谱 $Z = X$ 具有有理奇点。因此，根据命题 2.1，X 是典范的，进而是对数终端的。由命题 5.6 可知，$K_{\widetilde{X}} = \pi^*(K_X + D)$。因此，根据命题 2.4，$(X, D)$ 是川俣对数终端的。特别地，若 X 是 $\mathbb{Q}$–Gorenstein，则它是对数终端的。□

6. 推论与例子

众所周知，有些代数是同调齐次的，因此可作为扭曲和分歧非交换克雷帕特解消的例子。我们感谢 Kenneth Brown 提供以下陈述的参考文献。

Proposition 6.1. 假设 Δ 在其中心上有限，且 Δ 是以下之一
(1) 代数闭域上的霍普夫代数。(2) 有限整体维数的连通分次仿射诺特代数。
(3) 不一定是连通的 Artin-Schelter 正则代数。

那么 Δ 是对 (Z, D) 的（扭曲类、分歧）非交换克雷帕分解 $= \log Z(\Delta)$，它是川俣对数终端的，且为 $\mathbb{Q}$-Gorenstein。

Proof. 第一种情形见 [**4**, 命题 1.6]。第二种情形见 [**19**]。第三种情形见 [**17**]。□

Corollary 6.2. 下列代数的对数中心是川俣对数终端的。

- 当 q 是单位根时，半单群的量子化函数代数 $\mathcal{O}_q(G)$。
- 当 q 是单位根时，半单李代数的量子化包络代数 $U_q(\mathfrak{g})$。

接下来，我们给出一个并非 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 的簇 X；但添加适当的边界除子 D 后，我们得到一个 $\mathbb{Q}$-Goreinstein 对（X, D），它是 $\mathbb{Q}$-Goreinstein 的，并且容许一个分歧的非交换克雷潘奇分解。

Example 6.3. 考虑如下具有顶点 $Q_0 = \{0, 1\}$ 的箭图：有两条箭u、 v从 0 指向 1，另有两条箭 $\bar{u}$、 $\bar{v}$从 1 指向 0。我们令 A 为该箭图的路径代数，并赋予关系

$$u\bar{u}v = v\bar{u}u \quad u\bar{v}v = v\bar{v}u$$
$$\bar{u}u\bar{v} = \bar{v}u\bar{u}, \quad \bar{u}v\bar{v} = \bar{v}v\bar{u}.$$

考虑交换环和分式理想

$$R = k[a, b, c, d]/(ad - bc)$$
$$I = aR + cR \qquad I^* = R + \frac{b}{a}R.$$

另请注意

$$A \simeq \begin{pmatrix} R & I \\ I^* & R \end{pmatrix}$$

在同构下

$$u \mapsto \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad v \mapsto \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\bar{u} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{v} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{b}{a} & 0 \end{pmatrix}.$$

众所周知， A 除原点外是阿祖马亚环，并且是 R的一个非交换克雷帕分解。我们考虑 $\mathbb{Z}/2$ 对 A 的一个作用，该作用固定顶点，并分别在箭 u、 v、 $\bar{u}$、 $\bar{v}$ 上作用为 -1、1、1、1。注意，斜群环

$$A \rtimes \mathbb{Z}/2$$

具有三维整体维数，且是同调齐次的。因此，它是其对数中心的一个分歧的非交换克雷潘奇分解。

我们计算

$$Z(A) = R = k[a, b, c, d](ad - bc)$$
$$S = Z(A \rtimes \mathbb{Z}/2) = Z(A)^{\mathbb{Z}/2} = k[a^2, ab, b^2, c, d] \subset R.$$

审稿人指出了 $S \simeq k[x, y, z, c, d]/(xz - y^2, xd - yc, yd - zc)$，它是 Francia 翻转的底空间。因此存在一个小解消 $f\colon\ Y \to$ 谱 S ，由爆破理想 (c, d) 给出。因此， K_Y 必须是丰沛的或反丰沛的，并且 $K_Y = f^*K_S$. 有关更多细节，请参见 [3, (2·1)，引理 2] ，或 [15, (3.8)]。如果 S 是 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 的，那么对于某个 n 有 $nK_S = 0$，从而导致矛盾。我们还将在下面给出一个环面计算，说明 S 不是 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 的。

我们记 $N = \mathbb{Z}^3$ 和 $N' = \mathbb{Z}^2 \oplus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$，并令 $M = N^\vee$、 $M' = N'^\vee$ 为对偶格。令 σ 为由矩阵的各列生成的锥：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

我们将看到，由 $\sigma \subset N$ 到 $\sigma \subset N'$ 确定的环面簇之间的映射就是映射 Spec $R \to$ Spec S。我们记作

$$k[M] = k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}] \subset k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 2}] = k[M'].$$

我们有

$$R = k[a, b, c, d] = k[zx^{-1}, zy^{-1}, y, x] = k[\sigma^\vee] \subset k[M'].$$
$$S = k[a^2, ab, b^2, c, d] = k[z^2x^{-2}, z^2x^{-1}y^{-1}, z^2y^{-2}, y, x] = k[\sigma^\vee] \subset k[M'].$$

我们计算得出， $A \rtimes \mathbb{Z}/2$ 在对应于由 $\rho = (0, 0, 1/2) \in \sigma \subset N'$生成的射线的环面除子$D_\rho$上具有二阶分歧。因此，对 (谱 $S, \frac{1}{2}D_\rho$) 是 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 的，并且 admits a 分歧的非交换克雷帕分解。若我们将 σ的各条射线的本原生成元用 N'的基 $e_1, e_2, \frac{1}{2}e_3$表示，则得到以下矩阵的各列

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

设 $D_1, \dots, D_4$ 为与这些射线对应的环面魏尔除子。当且仅当 $(n_1, \dots, n_4)$ 属于矩阵 B 各行的$\mathbb{Q}$ 行空间时，环面魏尔除子 $n_1D_1 + n_2D_2 + n_3D_3 + n_4D_4$ 才是 $\mathbb{Q}$-Cartier。显然，$K_{\operatorname{Spec} S} = -D_1 - D_2 - D_3 - D_4$ 不在 C 的行空间中。然而，如上所述，我们有 $\frac{1}{2}D_\rho = \frac{1}{2}D_1$ ，于是

$$K + B = -\frac{1}{2}D_1 - D_2 - D_3 - D_4$$

属于 C 的行空间，从而验证了对 (谱 $S, \frac{1}{2}D_\rho$) 是 $\mathbb{Q}$-Gorenstein。因此我们看到，环面簇 谱S 不是 $\mathbb{Q}$-Goreinstein，且不承认非分歧非交换克雷潘分解；而对 (谱 S, $\frac{1}{2}D_\rho$) 存在一个分歧的非交换克雷潘奇分解。

在下一个例子中，众所周知，奇点 X 没有经典非交换 crepant 解消 [**7**, 定理 3.1 、注 3.2], ，但采用适当的除子 D，我们可以得到对（ X， D ）的扭曲分歧非交换克雷帕分解。这说明该对是川又对数终端且 $\mathbb{Q}$-Gorenstein。我们感谢 Michael Wemyss 提供这个例子。

EXAMPLE 6.4. 令 A 为由 a、 b、 c 生成、满足以下关系的 k-代数

$$ac + ca, \quad bc + cb, \quad ab - ba - 2c^3.$$

中心 $Z(A)$由以下元素生成

$$x := a^2, \quad y := b^2, \quad z := ab + ba, \quad t := c^2.$$

可以验证

$$z^2 - 4xy = (ab - ba)^2 = 4c^6 = 4t^3.$$

因此，该中心具有复合杜瓦奇点，其解消中含有一个二次锥 [**13**, 图 8-3-5]。该奇点没有非交换克雷潘特解消 [**7**, 定理 3.1、注 3.2]。

解消

$$0 \to A \xrightarrow{\begin{pmatrix} b & a & c \end{pmatrix}} A^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -c & 0 & -a \\ 0 & c & b \\ -b & a & -2c^2 \end{pmatrix}} A^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}} A \to k \to 0$$

这表明 A 是 Artin-Schelter 正则的，因此也是同调齐次的。最后，我们计算得出， A 在由 $t = 0$. 定义的除子 B 上分歧。因此，若令$X =$谱 $Z(A)$ 且 $D = \frac{1}{2}B$， 则 (X, D) 具有扭曲的非交换克雷潘特解消，因此是川俣对数终端且为 $\mathbb{Q}$-Gorenstein。

我们还指出， A 可以视为一个克利福德代数。令

$$Z = k[x, y, z, t]/(z^2 - 4xy - 4t^3)$$

并定义 Q 上的二次型，该二次型由格拉姆矩阵 Z 给出

$$\begin{pmatrix} 2x & z & 0 \\ z & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 2t \end{pmatrix}.$$

记 Cl(Q) 为该二次型的克利福德代数，它由 a、b、c 生成，是一个具有如下关系的 Z-代数：

$$2a^2 = 2x, \quad ab + ba = z, \quad 2b^2 = 2y, \quad ac + ca = bc + cb = 0, \quad 2c^2 = 2t.$$

注意，在这个代数中有 $(ab-ba)^2 = (2c^3)^2$，由此得到由 $(ab - ba - 2c^3)$ 生成的一个素理想，因此我们有

$$A = \mathrm{Cl}(Q)/(ab - ba - 2c^3).$$

这一描述可用来证明 A 是非平凡扭曲的。

参考文献

[1] M. Artin, *Left ideals in maximal orders*, 《环论与代数几何中的布劳尔群》（Wilrijk，1981年），《数学讲义》第917卷，施普林格，柏林-纽约，1982年，第182–193页。MR 657429[2] Michel Van den Bergh, *Non-commutative crepant resolutions, an overview*, 2022年。[3] Gavin Brown, *Flips arising as quotients of hypersurfaces*, 《剑桥哲学学会数学会刊》 **127** 1999 1, 13 31 1692523 （），第 – 期。MR K. A. Brown 和 K. R. Goodearl, [4] *Homological aspects of Noetherian PI Hopf algebras of irreducible modules and maximal dimension* **198** 1997 1, 240 265 ，《代数杂志》（），第 – 期。1482982 MR[5] *Homologically homogeneous rings* K. A. Brown 和 C. R. Hajarnavis, ，《美国数学会会刊》281（1984年），第1期，197–208页。MR 719665[6] Herbert Clemens、J´anos Koll´ar 和 Shigefumi Mori, *Higher-dimensional complex geometry*, 《Ast´erisque》（1988年），第166期，144页（1989年）。MR 1004926[7] Hailong Dao, *Remarks on non-commutative crepant resolutions of complete intersections*, 《数学进展》224（2010年），第3期，1021–1030页。MR 2628801[8] Hailong Dao、Osamu Iyama、Ryo Takahashi 和 Michael Wemyss, *and $\mathbb{Q}$-Gorenstein rings* **29** 2020 4, 729 751 4158464 ，《代数几何杂志》（），第 – 期。MR[9] Colin Ingalls, *Centres of nccrs are klt*, https://www.msri.org/workshops/643/schedules/16756 ，在 MSRI 举办的“非交换代数、表示论与代数几何的交互”研讨会上的报告，2013年。[10] Yujiro Kawamata, *Log canonical models of algebraic 3-folds*, 国际数学杂志 3（1992年），第 3 期，351–357。MR 1163730[11] J´anos Koll´ar 和 Shigefumi Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, 剑桥数学论丛，第 134 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1998年。C. H. Clemens 和 A. Corti 协助完成，译自1998年日语原版。MR 1658959[12] T. Y. Lam, *A first course in noncommutative rings*, 第 2 版，《数学研究生教材》，第 131 卷，施普林格出版社，纽约，2001年。MR 1838439[13] Kenji Matsuki, *Introduction to the Mori program*, Universitext，施普林格出版社，纽约，2002年。MR 1875410[14] Yuri G. Prokhorov, *Lectures on complements on log surfaces*，日本数学会回忆录，第 10 卷，日本数学会，东京， 2001 1830440 。MR Miles Reid, ，《算术与几何》，第 II 卷，数学进展，第 36 卷，Birkhäuser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1983年，第 395–418 页。MR 717617[16] I. Reiner, *Maximal orders*，伦敦数学会专著（新丛书），第 28 卷，克拉伦登出版社、牛津大学出版社，牛津，2003年。1975年原版的修订重印本，附有 M. J. Taylor 撰写的序言。MR 1972204 [17] Manuel L. Reyes 和 Daniel Rogalski, *Graded twisted Calabi-Yau algebras are generalized Artin-Schelter regular* **245** 2022 100 153 ，名古屋数学杂志（），–。MR [15] *Decomposition of toric morphisms* 4413364 [18] J. T. Stafford 和 M. Van den Bergh, *Noncommutative resolutions and rational singularities*，第 57 卷，2008年。Melvin Hochster 纪念专辑，第 659–674 页。MR 2492474

[19] J. T. Stafford 和 J. J. Zhang, *Homological properties of (graded) Noetherian* PI *rings*, 《代数杂志》168（1994年），第 3 期，988–1026。MR 1293638

School of Mathematics and Statistics, Carleton University, Canada
Email address: cingalls@math.carleton.ca

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan*Email address*: yasuda.takehiko.sci@osaka-u.ac.jp