arXiv:2302.08391v1 [math.CO] 16 Feb 2023

关于对应于数值半群的整数分拆

HANNAH E. BURSON

明尼苏达大学双城分校数学学院,
明尼阿波利斯，明尼苏达州 55455

HAYAN NAM

德成女子大学数学系,
首尔，大韩民国

SIMONE SISNEROS-THIRY

加利福尼亚州立大学东湾分校数学系,
加利福尼亚州海沃德，邮编 94542

Abstract. 数值半群是自然数中的余有限加法子幺半群。Keith 和 Nath 展示了从数值半群到整数分拆的一个单射 [8]。我们探讨分拆与数值半群之间的这种联系，重点是对出现在数值半群到分拆的单射之像中的分拆进行分类。特别地，我们根据亏格、弗罗贝尼乌斯数和重数（附带一些限制），统计与数值半群相对应的分拆数。

1. Introduction

数值半群可用于研究线性丢番图方程 [11]。具体而言，给定非负整数 $a_1, a_2, \ldots, a_k$，对于哪些整数 d，存在非负整数 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ 使得 $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k = d$? 所有这类整数 d 构成的集合称为由 $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$生成的数值半群，记作 $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k\rangle$。不存在非负整数解的最大 d 称为 $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k\rangle$ 的弗罗贝尼乌斯数；不存在非负整数解的 d的个数称为 $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k\rangle$的亏格。

弗罗贝尼乌斯数和亏格已得到广泛研究。Sylvester [16, 17] 证明，对于互素正整数 a和 b，数值半群 $\langle a,\ b\rangle$ 的弗罗贝尼乌斯数为 $ab - a - b$，相应的亏格为 $(a-1)\ (b-1)\ 2$。一般而言，寻找由三个正整数生成的数值半群的弗罗贝尼乌斯数和亏格公式，仍是一个未解决问题 [4]。例如，参见 [1, 6, 9, 13]，以进一步了解某些数值半群的弗罗贝尼乌斯数和亏格。近年来，许多研究人员致力于理解具有固定弗罗贝尼乌斯数或固定亏格的数值半群的数量。例如，参见 [2, 10, 12, 15]。

E-mail addresses: hburson@umn.edu、 hnam@duksung.ac.kr、 simone.sisnerosthiry@csueastbay.edu。
2020 *Mathematics Subject Classification.* 05A17、11P81、20M14。*Key words and phrases.* 分拆、数值半群、弗罗贝尼乌斯数、亏格、重数。

本文研究数值半群与整数分拆之间的联系。研究整数分拆的一个动机在于它们与表示论的联系。例如，$GL_n(\mathbb{C})$ 的不可约多项式表示由长度至多为 n 的分拆编号。此外，n 的分拆标记了 S_n 的共轭类，因而也标记了其非等价不可约复表示。关于这些联系的更多细节，请参见 [5] 和 [14]。这些联系通过钩长公式表现得尤为明显。该公式表明，与 λ 对应的 S_n 的不可约表示的维数为

$$\frac{n!}{\prod_{(i,j)\in\lambda} h_{(i,j)}(\lambda)},$$

其中，$h_{(i,j)}(\lambda)$ 是整数分拆 λ [7] 的杨图中对应于单元格 (i,j) 的钩长。这个公式促使人们研究整数分拆的钩长，以及避开给定钩长的分拆，这类分拆称为核分拆。

2011年，为了研究具有给定钩长集合的分拆，Keith 和 Nath [8] 引入了一个从数值半群到整数分拆的映射。后来，Constantin、Houston-Edwards 和 Kaplan 利用这个映射回答了关于整数分拆的更多问题 [3]。此外，他们还研究了函数 $S(N)$，该函数统计 Keith 和 Nath 的映射像中最大钩长为 N 的分拆数。他们证明了

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S(N)}{T(N)} = 0,$$

其中，$T(N)$ 统计最大钩长为 N 的所有分拆。此外，他们猜想，如果 $S'(n)$ 统计大小不超过 n 且属于 Keith 和 Nath 的映射像的分拆数，那么

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S'(n)}{P(n)} = 0,$$

其中，$P(n)$ 统计大小不超过 n 的所有分拆。

本文的主要目标是继续研究 $S'(n)$。我们通过考察具有给定部分数、最大钩长或大小为 1 的部分数的这类分拆的数量，从三个不同方面细化函数 $S'(n)$。这三种统计量分别与数值半群的不变量亏格、弗罗贝尼乌斯数和重数相关。对于数值半群 S，亏格是 S 的补集中非负整数的数量；弗罗贝尼乌斯数是 S 的补集中最大的整数；重数则是属于 S 的最小正整数。

本文余下部分的结构如下。第 2 节汇集定义和预备结果，并介绍 Keith 和 Nath 从数值半群到分拆的映射。第 3、4、5 节分别研究大小为 n、对应于具有给定亏格、弗罗贝尼乌斯数和重数的数值半群的分拆数量。

2. Preliminaries

2.1. 定义。令 $\mathbb{N}_0$ 为非负整数的集合。若 S 是 $\mathbb{N}_0$ 的子集，且 S 包含 0，同时 S 在 $\mathbb{N}_0$中具有有限补集，则称其为数值集。若数值集 S 进一步对加法封闭，即 S 对加法封闭，则称其为数值半群。考虑两个数值集 $S_1 = \{0,3,5,6,8,\to\}$ 和 $S_2 = \{0,4,7,9,\to\}$ 的例子，其中记号 x、$\to$ 表示数值集包含所有大于 x 的正整数。在我们的例子中，S_1 是数值半群，而 S_2 不是。有关数值半群的完整介绍，请参见 [11]。

将集合 $G = \mathbb{N}_0 \setminus S$ 定义为数值集 S 的间隙集合。于是，S的亏格记作 $g(S)$，等于 $|G|$（例如，$g(S_1) = 4$，而 $g(S_2) = 6$）；S 的弗罗贝尼乌斯数记作 $f(S)$，是 G 中的最大元素（$f(S_1) = 7$，而 $f(S_2) = 8$）。此外，对于数值集 S，其重数 $m(S)$ 是 S 中的最小非零元素（$m(S_1) = 3$，而 $m(S_2) = 4$）。注意，在 S 明确的情况下，我们通常将记号分别简写为 g、f 和 m。

正整数 n 的一个整数分拆 λ 是一个有限长度的非增正整数序列 $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell)$，满足 $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = n$。每个 λ_i 称为 λ 的一个部分。当存在重复的部分时，我们使用频数表示法 $(\lambda_1^{j_1}, \lambda_2^{j_2}, \ldots, \lambda_k^{j_k})$，其中 $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k$。例如，(3, 2, 2, 1, 1, 1) $= (3, 2^2, 1^3)$ 是将 10 分拆为 6 个部分的一个分拆。我们将 $\ell(\lambda)$ 定义为分拆 λ 的长度，即部分的个数（在我们的例子中，$\ell(\lambda) = 6$），而 $|\lambda|$ 是该分拆的大小（在我们的例子中，$|\lambda| = 10$）。

一个分拆可以用费雷尔图表示，它是一个左对齐的单元格阵列，其中从上往下第 i 行包含 λ_i 个单元格。我们将滥用记号，根据上下文用 λ 指代该分拆、其部分的多重集或其费雷尔图。对于图中与一个整数分拆对应的每个方格，钩子是由以下方格组成的集合：该方格本身、同一行中位于该方格右侧的所有方格（臂），以及同一列中位于该方格下方的所有方格（腿）。钩长是钩子中方格的数量。我们定义 $h_{(i,j)}(\lambda)$ 为 λ 的费雷尔图中单元格 (i,j) 的钩长。

2.2. 分拆与数值集之间的关系。在 [8], Keith 和 Nath 证明了每个数值集都唯一确定一个整数分拆。对于数值集中的每个元素，向“东”走一步；对于不属于数值集的每个整数，向“北”走一步。通过这一过程构造出的图示，就是所谓分拆的轮廓。这一过程展示了数值集与分拆之间的双射。

我们可以沿任一方向应用这一双射。如上所述，我们可以从一个数值集开始，确定与之对应的分拆。反过来，给定一个分拆 λ，令 S_λ 为其对应的数值集。定义$g_\lambda := g(S_\lambda)$ $f_\lambda := f(S_\lambda)$，以及 $m_\lambda = m(S_\lambda)$。根据 Keith 和 Nath 的双射，我们注意到数值半群的这些不变量与相应分拆的性质之间的关系。亏格 g_λ等于 λ 的部分数目（注意：$g_\lambda = \ell(\lambda)$），而重数 m_λ比大小为 1 的部分数目多一。 S_λ的弗罗贝尼乌斯数 f_λ 就是最大钩长。此外，间隙集 $G(S_\lambda)$恰好由 λ最左列中各单元格的钩长组成。作为例子，考虑图 1 所示的分拆 $\lambda = (6, 4, 3, 3, 1, 1)$。我们有 $m_\lambda = 3 = 2 + 1$、$g_\lambda = 6$ 和 $f_\lambda = 11$。我们将“重数为 m的分拆”与“对应于重数为 m的数值集的分拆”交替使用。类似地，我们将使用“亏格为 g的分拆”和“弗罗贝尼乌斯数为 f的分拆”。

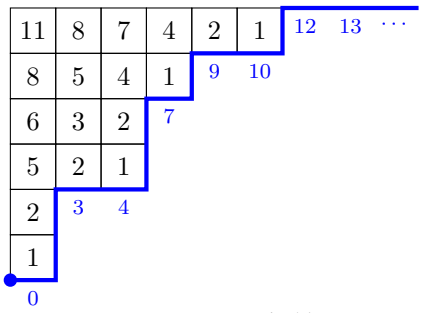

FIGURE 1. 具有所示轮廓、并标注了钩长及相应数值集的分拆 $(6, 4, 3^2, 1^2)$。

If 构造了从数值半群到分拆的数值单射，令 $\mathcal{P}(n)$ 表示 n 的分拆集。我们讨论从数值半群到分拆的单射的像的以下子集，它们对应于上文列出的不变量：

- $\mathcal{PG}(n, g)$，对应于亏格为 g 的数值半群的 n 的分拆集（对应于数值半群且恰有 g 个部分的 n 的分拆）
- $\mathcal{PF}(n, f)$，对应于弗罗贝尼乌斯数为f 的数值半群的 n 的分拆集（对应于数值半群且最大钩长为 f 的 n 的分拆）
- $\mathcal{PM}(n, m)$ 与数值半群对应的 n 的分拆集，其中这些数值半群的重数为 m（与数值半群对应且恰有 $m-1$ 个大小为 1 的部分的 n 的分拆）

此外，我们定义函数来枚举上述各集合： $p(n) = |\mathcal{P}(n)|$， $PG(n, g) = |\mathcal{PG}(n, g)|$， $PF(n, f) = |\mathcal{PF}(n, f)|$，以及 $PM(n, m) = |\mathcal{PM}(n, m)|$。

2.3. 关于分拆和数值半群的有用事实。我们陈述一些可直接由定义或第 2.2 节中描述的关系得出的观察结果。

- 与数值半群对应的分拆至少有一个大小为 1 的部分。这是因为唯一包含 1 的数值半群是非负整数集。
- 如果 $F_\lambda < 2m_\lambda$，那么 S_λ 是一个数值半群。这是因为，对于 x， $y \in S_\lambda$， $2m_\lambda \le x + y$，因此这个条件意味着 S_λ 对加法封闭。
- 对应于数值半群的分拆的任意两个部分之间的间隔不超过 m_λ。如果 S_λ中存在 m_λ 个连续整数，那么之后的每个数都必须属于S_λ，这将迫使这串 m_λ 个连续数字大于 F_λ。

3. Partitions of n that correspond to semigroups of Genus g

回顾一下， $\mathcal{PG}(n,g)$是由 n 的、具有 g 个部分且对应于亏格为 g的数值半群的分拆构成的集合。在本节中，我们汇集与 $PG(n,g)$相关的恒等式；后者是$\mathcal{PG}(n,g)$中的分拆数。我们首先证明， n 的所有具有 $\geq \frac{2}{3}n$ 个部分的分拆都对应于数值半群。然后，我们探讨一些情形：分拆的部分少于$\frac{2}{3}n$ 个，但分拆的大小与部分数之差是固定的。

定理1. 对于任意正整数 n 和 $g \geq \frac{2}{3}n$,

$$PG(n,g) = p(n-g).$$

证明. 对于 一个分拆 $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, 1^{g-k}\} \in \mathcal{PG}(n,g)$，其中 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k \geq 2$，定义

$$\phi(\lambda) := \{\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \ldots, \lambda_k - 1\}.$$

我们将证明

$$\phi : \mathcal{PG}(n,g) \to \mathcal{P}(n-g)$$

是一个双射。

注意到 ϕ 是单射，且 $\phi(\mathcal{PG}(n,g)) \subseteq \mathcal{P}(n-g)$。要证明 ϕ 是双射的，我们需要证明对于任意 $\mu \in \mathcal{P}(n-g)$， $\phi^{-1}(\mu)$ 对应于一个亏格为 g 的数值半群。为此，令$\mu \in \mathcal{P}(n-g)$，并令 $\lambda = \phi^{-1}(\mu)$。注意到 λ 是 n 的一个分拆，其中有 g 个不同的部分，且有 k 个大小为> 1的部分，其中 $k = \ell(\mu)$。

注意，对于任何此类分拆 λ，其中有 g 个部分，且有 k 个大小大于 1 的部分， $m_\lambda = g - k + 1$和 $k \leq n - g \leq \frac{3}{2}g - g = \frac{1}{2}g$。在 λ 的所有可能弗罗贝尼乌斯数中，当$\lambda = \{\lambda_1, 2^{k-1}, 1^{g-k}\}$时取最大值。因此，

$$f_\lambda \leq n - k + 1.$$

由于 $n \leq \frac{3}{2}g$和 $k \leq \frac{1}{2}g$，我们还可以进一步得出

$$f_\lambda \leq \frac{3}{2}g - k + 1 \leq \frac{3}{2}g - k + 1 + \left(\frac{1}{2}g - k\right) < 2(g - k + 1) = 2m_\lambda.$$

由于所有满足弗罗贝尼乌斯数小于其重数两倍这一性质的数值集都是数值半群， $\phi^{-1}(\mu)$对应于一个数值半群，且 ϕ 是一个双射。□

当$g \approx \frac{2}{3}n$时，我们也可以求出 $PG(n,g)$的显式值，但 $g < \frac{2}{3}n$。在下一个定理中，我们使用与上述逆映射相同的映射，但必须去除少数分拆不对应于数值半群的例外情形。

定理2. 对于 $n \geq 3$,

$$PG(3n-1, 2n-1) = p(n) - 1$$

and

$$PG(3n-2, 2n-2) = PG(3n-3, 2n-3) = p(n) - 2.$$

证明. 对于 $n \geq 3$ 以及每个 $i = 1,2,3$，定义映射

$$\phi_1 : \mathcal{P}(n) \mapsto \mathcal{PG}(3n-1, 2n-1) \cup \{\{2^n, 1^{n-1}\}\}$$

$$\phi_2 : \mathcal{P}(n) \mapsto \mathcal{PG}(3n-2, 2n-2) \cup \{\{2^n, 1^{n-2}\}, \{3, 2^{n-2}, 1^{n-1}\}\}$$

$$\phi_3 : \mathcal{P}(n) \mapsto \mathcal{PG}(3n-3, 2n-3) \cup \{\{2^n, 1^{n-3}\}, \{4, 2^{n-3}, 1^{n-1}\}\}$$

by

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell\} \mapsto \{\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \ldots, \lambda_\ell + 1, 1^{2n-i-\ell}\}.$$

注意，对于每个 $i = 1$、2、3 以及 ϕ_i 的定义域中的分拆 λ， $\mu_i := \phi_i(\lambda)$ 的大小为 $|\lambda| + \ell + (2n - i - \ell) = 3n - i$， μ_i 的长度为 $\ell + (2n - i - \ell) = 2n - i$，并且映射 ϕ_i 和 ϕ_i^{-1} 在各自的定义域上都是单射。为完成证明，我们需要证明 μ_i 对应于一个亏格为 $2n - i$ 的数值半群。

为了证明这三个映射的像中的所有分拆都对应于数值半群，我们先考虑一个大小为 n 的分拆 λ，使得 $\ell := \ell(\lambda) < n-2$。对于每个 $i = 1$、2、3，令$\mu_i = \phi_i(\lambda)$。那么，对于每种可能的 i，我们有 $m_{\mu_i} = 2n - i + 1 - \ell$ 并且

$$f_{\mu_i} \leq n + 1 + (2n - i - \ell) = 3n + 1 - i - \ell < 4n - 2\ell - 4 \leq 2m_{\mu_i}$$

因为 $n - \ell > 2$。当 $n \geq 4$ 时， n 有至少 $n-2$ 个部分的分拆共有四个，分别是 $\{1^n\}$、$\{2, 1^{n-2}\}$、$\{3, 1^{n-3}\}$ 和 $\{2, 2, 1^{n-4}\}$。在表1中，我们考察哪些数值集对应于这些分拆的像。我们注意到， $\{0, n, 2n+1, \to\}$、$\{0, n-1, 2n, \to\}$、 $\{0, n, 2n-1, 2n+1, \to\}$、 $\{0, n-2, 2n-1, \to\}$和 $\{0, n, 2n-2, 2n-1, n+1, \to\}$ 不是数值半群，因为每个集合的重数的两倍都不在该集合中。当 $n = 3$时， n 有至少 $n-2$ 个部分的分拆只有三个，我们可以类似地确定例外情况。□

λ	$\phi_1(\lambda)$	$S_{\phi_1(\lambda)}$
$\{1^n\}$	$\{2^n, 1^{n-1}\}$	$\{0, n, 2n+1 \to\}^*$
$\{2, 1^{n-2}\}$	$\{3, 2^{n-2}, 1^n\}$	$\{0, n+1, 2n, 2n+2 \to\}$
$\{3, 1^{n-3}\}$	$\{4, 2^{n-3}, 1^{n+1}\}$	$\{0, n+2, 2n, 2n+1, 2n+3 \to\}$
$\{2, 2, 1^{n-4}\}$	$\{3, 3, 2^{n-4}, 1^{n+1}\}$	$\{0, n+2, 2n-1, 2n+2 \to\}$
λ	$\phi_2(\lambda)$	$S_{\phi_2(\lambda)}$
$\{1^n\}$	$\{2^n, 1^{n-2}\}$	$\{0, n-1, 2n \to\}^*$
$\{2, 1^{n-2}\}$	$\{3, 2^{n-2}, 1^{n-1}\}$	$\{0, n, 2n-1, 2n+1 \to\}^*$
$\{3, 1^{n-3}\}$	$\{4, 2^{n-3}, 1^n\}$	$\{0, n+1, 2n-1, 2n, 2n+2 \to\}$
$\{2, 2, 1^{n-4}\}$	$\{3, 3, 2^{n-4}, 1^n\}$	$\{0, n+1, 2n-2, 2n+1 \to\}$
λ	$\phi_3(\lambda)$	$S_{\phi_3(\lambda)}$
$\{1^n\}$	$\{2^n, 1^{n-3}\}$	$\{0, n-2, 2n-1 \to\}^*$
$\{2, 1^{n-2}\}$	$\{3, 2^{n-2}, 1^{n-2}\}$	$\{0, n-1, 2n-2, 2n \to\}$
$\{3, 1^{n-3}\}$	$\{4, 2^{n-3}, 1^{n-1}\}$	$\{0, n, 2n-2, 2n-1, 2n+1 \to\}^*$
$\{2, 2, 1^{n-4}\}$	$\{3, 3, 2^{n-4}, 1^{n-1}\}$	$\{0, n, 2n-3, 2n \to\}$

TABLE 1. 将 n 分拆为至少含有 $n-2$ 个部分的分拆，以及它们在映射 ϕ_1、 ϕ_2 和 ϕ_3下的像。结果分拆不对应数值半群的例外情形以 * 标记在第三列中。

接下来，我们将由 $PG(n, g)$ 计数的两种特殊情形（其中 $n - g$为固定值）与其他分拆论函数联系起来。

定理 3. 令 $b(n)$ 表示将 $n+2$ 分拆为至多含有 n 个部分、且每个部分均不大于 n的分拆数。那么，对于 $n \geq 4$ 和 $k = 0$， 1、2，

$$PG(3n + 2 - k, 2n - k) = b(n) - (k + 2).$$

证明. 令 $\mathcal{B}(n)$ 为将 $n+2$ 分拆为至多含有 n 个部分、且每个部分均不大于 n的分拆集。此外，令 $k \in \{0, 1, 2\}$。对于分拆 $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n-k}\} \in \mathcal{PG}(3n + 2 - k, 2n - k)$，定义

$$\phi : \mathcal{PG}(3n + 2 - k, 2n - k) \setminus \{\{n + 2, 2, 1^{2n-k-2}\}, \{n + 3, 1^{2n-k-1}\}\} \to \mathcal{B}(n)$$

by

$$\phi(\lambda) := \{\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \ldots, \lambda_{2n-k} - 1\},$$

省略由此产生的大小为 0 的部分。我们将证明 ϕ 是一个单射，并且

$$\left|\mathcal{B}(n) \setminus \phi(\mathcal{PG}(3n + 2 - k, 2n - k) \setminus \{\{n + 2, 2, 1^{2n-k-2}\}, \{n + 3, 1^{2n-k-1}\}\})\right| = k + 2.$$

设 $\lambda \in \mathcal{PG}(3n+2-k, 2n-k) \setminus \{\{n+2, 2, 1^{2n-k-2}\}, \{n+3, 1^{2n-k-1}\}\}$，并设 $\mu = \phi(\lambda)$。由于 $|\lambda| = 3n+2-k$且 $\ell(\lambda) = 2n - k$， $\lambda_1 \leq n + 1$，因此 $\mu_1 \leq n$。要证明 $\mu \in \mathcal{B}(n)$，还需证明 $\ell(\mu) \leq n$。对于

矛盾起见，假设 μ 的部分数多于 n。那么， λ 中大小至少为 2 的部分多于 n 个。令 S_λ 为与分拆 λ对应的数值集。注意，由于 $|\lambda| = 3n+2-k$，$\ell(\lambda) = 2n-k$，且 λ中大小至少为 2 的部分至少有 $n+1$个，$m_\lambda \le n-k$，并且 λ的第三列至多由 1 个单元格组成。因此， λ 要么是 $\{2^{n+1}, 1^{n-2-k}\}$，要么是 $\{3, 2^n, 1^{n-k-1}\}$。这两种情况都会导致矛盾，因为它们并不对应数值半群：重数的两倍不属于相应的数值集。因此， μ 的部分数不超过 n，由此完成了对 $\mu \in \mathcal{B}(n)$ 的证明。此外， ϕ 是单射，因为给定 ϕ像中的一个分拆 μ，它唯一可能的原像分拆是 $\{\mu_1+1, \mu_2+1, \dots \mu_\ell+1, 1^{2n-k-\ell}\}$。

令 $\mathcal{E}(n,k) = \mathcal{B}(n) \setminus \phi(\mathcal{PG}(3n+2-k, 2n-k) \setminus \{\{n+2, 2, 1^{2n-k-2}\}, \{n+3, 1^{2n-k-1}\}\})$。接下来，我们考察 $\mathcal{E}(n,k)$ 的大小。令 $\pi \in \mathcal{B}(n)$，并定义 $\hat{}\pi = \{\pi_1+1, \pi_2+1, \dots, \pi_\ell+1, 1^{2n-k-\ell}\}$。注意

$$m_{\hat{\pi}} = 2n-k-\ell+1, \quad \text{or, equivalently,} \quad \ell = 2n-k-m_{\hat{\pi}}+1.$$

此外，由于 $|\pi| = n+2$, $\pi_1 + \ell \le n+3$，因此

$$\begin{aligned} \pi_1 &\le n+3-\ell \\ &= 2-n+k+m_{\hat{\pi}}. \end{aligned}$$

最后， $m_{\hat{\pi}} > 2n-k-n = n-k$ 由于 $\ell \le n$。

我们根据 $m_{\hat{\pi}}$ 的大小分情形讨论。这些情形表明， $\mathcal{B}(n)$ 中的所有分拆 π 都映射到 $\mathcal{PG}(3n+2-k, 2n-k)$ 中的分拆 $\hat{}\pi$，但下表中的例外分拆除外。

k	$\mathcal{E}(n,k)$
0	$\{4, 1^{n-2}\}, \{2, 2, 1^{n-2}\}$
1	$\{5, 1^{n-3}\}, \{3, 2, 1^{n-3}\}, \{3, 1^{n-1}\}$
2	$\{6, 1^{n-4}\}, \{4, 2, 1^{n-4}\}, \{2, 2, 2, 1^{n-4}\}, \{3, 1^{n-1}\}$

情况 1. 若 $m_{\hat{\pi}} > n+2$，则 $f_{\hat{\pi}} = 2n-k+\pi_1 \le n+2+m_{\hat{\pi}} < 2m_{\hat{\pi}}$，所以 $S_{\hat{\pi}}$ 是一个数值半群。

情况 2. 若 $m_{\hat{\pi}} = n+2$，则 $\pi_1 < k+4$ 或 $\pi = \{k+4, 1^{n-k-2}\}$。若 $\pi_1 < k+4$，则 $f_{\hat{\pi}} < 2n+4 = 2m_{\hat{\pi}}$，所以 $S_{\hat{\pi}}$ 是一个数值半群。若 $\pi = \{k+4, 1^{n-k-2}\}$，则 $\hat{}\pi = \{k+5, 2^{n-k-2}, 1^{n+1}\}$，这不对应一个数值半群，因此 $\{k+4, 1^{n-k-2}\} \in \mathcal{E}(n,k)$。

情形 3。若 $m_{\hat{\pi}} = n+1$，则 $\pi_1 \le k+3$。若 $\pi_1 < k+2$，则 $f_{\hat{\pi}} < 2n+2 = 2m$，因此 $S_{\hat{\pi}}$是一个数值半群。否则，$\pi = \{k+2, 2, 1^{n-k-2}\}$ 或 $\pi = \{k+3, 1^{n-k-1}\}$。在第一种情况下， $S_{\hat{\pi}}$ 不是数值半群，因此 $\{2+k, 2, 1^{n-k-2}\} \in \mathcal{E}(n,k)$。在后一种情况下， $f_{\hat{\pi}} = 2n+3$ 且 $2m = 2n+2 \in S_{\hat{\pi}}$。由于 $m+1 = n+2 \notin S_{\hat{\pi}}$， $S_{\hat{\pi}}$ 是一个数值半群。

情形 4 若 $m_{\hat{\pi}} = n$ 或 $m_{\hat{\pi}} = n-1$， π 的可能选项汇总如下表。

k	π
1	$\{2, 2, 1^{n-2}\}, \{3, 1^{n-1}\}$
2	$\{3, 2, 1^{n-3}\}, \{4, 1^{n-2}\}, \{2, 2, 2, 1^{n-4}\}, \{2, 2, 1^{n-2}\}, \{3, 1^{n-1}\}$

可以逐一分析每个分拆，以确定例外情形。

因此，我们看到，对于 $k = 0$, 1, 2, 有 $|\mathcal{E}(n,k)| = k+2$，正如所要求的那样。 □

推论 4。对于 $n \ge 4$ 和 $k = 0$, 1, 2,

$$PG(3n+2-k, 2n-k) = p(n+2) - 6 - k.$$

证明。注意， $n+2$ 恰好有 2 个部分数多于 n 的分拆（$\{2, 1^n\}$ 和 $\{1^{n+2}\}$），并且 $n+2$恰好有 2 个最大部分大小为 $> n$的分拆（$\{n+2\}$和 $\{n+1, 1\}$）。因此， $b(n) = p(n+2) - 4$. □

注 1。通过采用与定理 3 的证明类似的结构，我们可以针对任何特定的 i 找到 $p(n) - PG(3n-i, 2n-i)$ 和 $b(n) - PG(3n+2-i, 2n-i)$。然而，找到函数 $h_1(i)$ 和 $h_2(i)$，使得对于 i 的所有可能取值， $p(n) - PG(3n-i, 2n-i) = h_1(i)$ 且 $b(n) - PG(3n+2-i, 2n-i) = h_2(i)$，是一个开放问题。

定理 5。设 $\bar{p}(n)$ 表示 n 不含大小为 1 的部分的分拆数。对于 $j \in \mathbb{N}$ 和 $n \ge j+5$,

$$PG(3n+2-j, 2n-j) - PG(3(n-1)+2-j, 2(n-1)-j) = \bar{p}(n+2).$$

Pro $\bar{}$。令 $\mathcal{P}(n)$ 表示 n 不含大小为 1 的部分的分拆集。我们定义一个双射

$$\phi : \mathcal{PG}(3n+2-j, 2n-j) \to \mathcal{PG}(3(n-1)+2-j, 2(n-1)-j) \cup \bar{\mathcal{P}}(n+2)$$

by

$$\lambda \longmapsto \begin{cases} \lambda \setminus \{2,1\} & \text{if } 2 \in \lambda \\ \{\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \ldots, \lambda_{2n-j-m_\lambda+1} - 1\} & \text{if } 2 \notin \lambda. \end{cases}$$

我们回顾一下，对应于数值半群的非空分拆至少有一个大小为 1 的部分，因此此映射定义良好。为证明 ϕ 实际上是一个双射，我们将证明以下四个断言：

$\bar{}$(1) 对任意 $\lambda \in \mathcal{PG}(3n+2-j, 2n-j)$ 且 $2 \notin \lambda$, $\{\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \ldots, \lambda_{2n-j-m_\lambda+1} - 1\} \in \mathcal{P}(n+2)$。(2) 对任意 $\lambda \in \mathcal{PG}(3n+2-j, 2n-j)$ 且 $2 \in \lambda$, $\lambda \setminus \{2,1\} \in \mathcal{PG}(3(n-1)+2-j, 2(n-1)-j)$。(3) 对任意 $\lambda \in \bar{\mathcal{P}}(n+2)$ $\{\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \ldots, \lambda_\ell + 1, 1^{2n-j-\ell}\} \in \mathcal{PG}(3n+2-j, 2n-j)$，其中 $\ell := \ell(\lambda)$。(4) 对任意 $\lambda \in \mathcal{PG}(3(n-1)+2-j, 2(n-1)-j)$， $\lambda \cup \{2,1\} \in \mathcal{PG}(3n+2-j, 2n-j)$。

命题 1 的证明：设 $\lambda \in \mathcal{PG}(3n+2-j, 2n-j)$，使得 $2 \notin \lambda$。注意，若从 λ 的每个部分中减去 1，所得分拆的大小为 $3n+2-j-(2n-j) = n+2$，且不含大小为 1 的部分，由此完成第一个断言的证明。

命题 2 和 4 的证明：设 λ 是 $3n+2-j$ 的一个分拆，分为 $2n-j$ 个部分，使得 $2, 1 \in \lambda$。定义 $\mu = \lambda \setminus \{2,1\}$. 我们将证明， S_λ 是数值半群，当且仅当 S_μ 是数值半群。注意， $|\mu| = 3n+2-j-3 = 3(n-1)+2-j$，且 $\ell(\mu) = 2n-j-2 = 2(n-1)-j$。设 k 是 S_λ 中大于 m_λ 的最小元素，因此 λ 有 $(2n-j-m_\lambda+1)$ 个大小至少为 2 的部分，以及 $(2n-j-k+2)$ 个大小至少为 3 的部分。类似地，因为 $k-2$ 是 S_μ 中大于 m_μ 的最小元素， μ 有 $(2(n-1)-j-m_\mu+1)$ 个大小至少为 2 的部分，以及 $(2(n-1)-j-k+4)$ 个大小至少为 3 的部分。由于弗罗贝尼乌斯数对应于最大钩长，我们移除最大钩子内部的单元格，可知

$$\begin{aligned} F_\lambda &\leq (3n+2-j) - (2n-j-(m_\lambda-1)) - (2n-j-k+1) \\ &= m_\lambda + k + (j-n) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} F_\mu &\leq (3n-1-j) - (2(n-1)-j-m_\mu) - (2(n-1)-j-k+3) \\ &= m_\mu + j + k - 2 - n. \end{aligned}$$

因此，由于 $j < n-4$，我们得到 $F_\lambda < m_\lambda + k$ 和 $F_\mu < m_\mu + k - 2$。最后注意，由于 $m_\lambda = m_\mu + 1$和 $F_\lambda = F_\mu + 2$， $F_\lambda \neq 2m_\lambda \iff F_\mu \neq 2m_\mu$。

3 的证明：设 $\lambda \in \bar{\mathcal{P}}(n+2)$，并定义 $\ell := \ell(\lambda)$。定义 $\mu = \{\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \ldots, \lambda_\ell + 1, 1^{2n-j-\ell}\}$。注意， $m_\mu = 2n-j-\ell+1$，且由于 λ 没有大小为 1 的部分， $\lambda_1 \leq n+2-2(\ell-1)$。因此，

$$\begin{aligned} F_\mu &= (2n-j) + \lambda_1 \\ &\leq (2n-j) + (n+2-2(\ell-1)) \\ &= 3n+4-j-2\ell. \end{aligned}$$

因此，我们看到 $F_\mu - 2m_\mu \leq 2 + j - n < 0$，因为 $j+2 < n$。由于 $F_\mu < 2m_\mu$， S_μ 必须是一个数值半群。此外， $\ell(\mu) = 2n-j$ 且 $|\mu| = |\lambda| + 2n - j = 3n+2-j$，所以 $\mu \in \mathcal{PG}(3n+2-j, 2n-j)$，正如所期望的那样。

□

备注 2. 在 $j \in \{0,1,2\}$ 的情形下，定理 5 可直接由定理 3 得出。不过，在定理 5 中，对于范围广得多的可能 js，我们能够得到 $PG(3n+2-j, 2n-j) - PG(3(n-1)+2-j, 2(n-1)-j) = \bar{p}(n+2)$。

4. Partitions of n that correspond to semigroups with Frobenius number f

本节首先回顾：对于给定的分拆 λ，相应数值集的弗罗贝尼乌斯数 f_λ 等于 λ的最大钩长，并且 $PF(n, f)$表示具有弗罗贝尼乌斯数 f的 n的分拆数。本节将汇总与 $PF(n, f)$相关的恒等式。我们首先统计恰好有一个钩子且对应于数值半群的分拆数。我们

随后将扩展到统计分拆大小与弗罗贝尼乌斯数之差固定的分拆。

定理 6. 对于任意正整数 n，有

$$PF(n,n)=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil.$$

证明。设 λ 是一个大小为 n 的分拆，它对应于弗罗贝尼乌斯数为 n 的数值半群 S_λ。由于数值半群的弗罗贝尼乌斯数等于对应分拆的最大钩长，因此 λ 必须恰好由一个钩子组成，其钩长为 n。为了确定该钩子可能的构型数，我们考察钩子的腿可能具有的长度，其中腿指大小为 1 的部分。

我们将证明，S_λ 是数值半群，当且仅当钩子的腿长度至少为 $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$。首先，假设腿的长度至少为 $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$。由于 m_λ 是 S_λ 中最小的非零元素，且 $m_\lambda>\frac{n}{2}$，对于任意 x，$x+y>n$ $y\in S_\lambda$。由于 n 是 S_λ 的弗罗贝尼乌斯数，我们知道 S_λ 是封闭的，因此是一个数值半群。接着，假设钩子的腿长度小于 $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$。那么，$\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$，$\lceil\frac{n}{2}\rceil\in S_\lambda$，因此 $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+\lceil\frac{n}{2}\rceil=n\in S_\lambda$，这与 n 是 S_λ 的弗罗贝尼乌斯数这一事实矛盾。

存在 $n-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor=\lceil\frac{n}{2}\rceil$ 许多腿至少为 $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ 的分拆，因此我们看到 $PF(n,n)=\lceil\frac{n}{2}\rceil$. □

根据分拆大小的奇偶性，我们统计与数值半群相对应的分拆数，其中弗罗贝尼乌斯数接近分拆的大小。

定理 7。对于 $n>2$，我们有如下结果

(1) $PF(2n,2n-1)=n-1$(2) $PF(2n+1,2n)$
$=n-2$(3) $PF(2n,2n-2)=PF(2n-1,2n-3)$
$=2n-7$(4) $PF(2n,2n-3)=3n-11$(5) $PF($
$2n-1,2n-4)=3n-17$

证明。由命题 6，我们有 $PF(n,n)=\lceil\frac{n}{2}\rceil$。在每种情况下，我们都将 λ in$\mathcal{PF}(n,n-j)$ 中的每个分拆视为一个长度为 $n-j$ 的钩子（恰好是 $\mathcal{PF}(n-j,n-j)$ 中的那些分拆），并将其围绕一个大小为 j 的分拆π。然后，我们考虑所有可能的 $\left\lceil\frac{n-j}{2}\right\rceil p(j)$ 种钩子与大小为 j 的分拆的组合，并指出其中哪些不对应数值半群。

证明 1：考虑将一个大小为 1 的分拆嵌套到 $\mathcal{PF}(2n-1,2n-1)$ 中的每个 n 个分拆中。除了分拆 (1^{2n-1}) 之外，所有情况下都可行（否则得到的图示将不对应一个分拆）。因此，$PF(2n,2n-1)$ 中恰有 $n-1$ 个分拆。

2 的证明：考虑将一个大小为 1 的分拆嵌入 $\mathcal{PF}(2n,2n)$ 中的每个 n 分拆。所得图示表示一个对应于弗罗贝尼乌斯数为 $2n$ 的数值半群的分拆，但有两种情形例外：全由 1 组成的分拆（此时所得图示不对应任何分拆），以及由 n 个 1 和一个大小为 n 的部分组成的分拆（此时所得分拆 λ 将具有 $m_\lambda=n$ 和 $F_\lambda=2n$，不再对应数值半群）。

3 的证明：考虑两组分拆 $\mathcal{PF}(2n-2,2n-2)$ 和 $\mathcal{PF}(2n-3,2n-3)$，每组都含有 $n-1$ 个分拆。对于每组，考虑在最大钩子内插入一个大小为 2 的分拆的两种方式：映射 $\phi_1:\lambda\mapsto\phi_1(\lambda)$，将 λ 的第二部分加 2；或者映射 $\phi_2:\lambda\mapsto\phi_2(\lambda)$，将原分拆的第二部分和第三部分各加 1。此过程为每组生成 $2(n-1)$ 个图示。在两种情形中，都有五个图示不表示对应于数值半群的分拆。两种情形中，其余分拆都对应于数值半群，因此集合的大小为 $2(n-1)-5=2n-7$。

证明 4：考虑将大小为 3 的分拆嵌套到 $n-1$ 分拆中，位于 $\mathcal{PF}(2n-3,2n-3)$。这种加法有三种可能，分别表示为：映射 $\phi_1:\lambda\to\phi_1(\lambda)$，给 λ 的第二部分加上 3；映射 $\phi_2:\lambda\to\phi_2(\lambda)$，给 λ 的第二部分加上 2、第三部分加上 1；以及映射 $\phi_3(\lambda):\lambda\to\phi_3(\lambda)$，给 λ 的第二至第四部分各加上 1。此过程产生 $3(n-1)$ 个图示，其中有 8 个图示不表示对应于数值半群的分拆。

证明 5：考虑将大小为 3 的分拆嵌入 $n-2$ 在 $\mathcal{PF}(2n-4,2n-4)$ 中的分拆。再次考虑映射 $\phi_1:\lambda\to\phi_1(\lambda)$，将 3 加到 λ, ϕ_2 的第二个部分上：$\lambda\to\phi_2(\lambda)$，将 2 加到第二个部分上，并将

$\lambda \in \mathcal{PF}(2n-2, 2n-2)$	$\phi_1(\lambda)$	$\phi_2(\lambda)$	失败原因
$\{1^{2n-2}\}$	$\{1,3,1^{2n-4}\}$	$\{1,2^2,1^{2n-5}\}$	不是分拆
$\{2,1^{2n-4}\}$	$\{2,3,1^{2n-5}\}$		不是分拆
$\{n-1,1^{n-1}\}$	$\{n-1,3,1^{n-2}\}$		$2m_{\phi_1(\lambda)} = F$
$\{n,1^{n-2}\}$		$\{n,2^2,1^{n-4}\}$	$2m_{\phi_2(\lambda)} = F$

$\lambda \in \mathcal{PF}(2n-3, 2n-3)$	$\phi_1(\lambda)$	$\phi_2(\lambda)$	失败原因
$\{1^{2n-3}\}$	$\{1,3,1^{2n-5}\}$	$\{1,2^2,1^{2n-6}\}$	不是分拆
$\{2,1^{2n-5}\}$	$\{2,3,1^{2n-6}\}$		不是分拆
$\{n-1,1^{n-2}\}$	$\{n-1,3,1^{n-3}\}$	$\{n-1,2^2,1^{n-4}\}$	$m_{\phi_i(\lambda)} + k = F$
			对于某些 $k \in S_{\phi_i(\lambda)}$

TABLE 2. ($\mathcal{PF}$,$2n-2$) 中的分拆 [上部] 和 [下部], 在映射 ϕ_1 和 ϕ_2 下的像并非对应于数值半群的分拆。

$\lambda \in \mathcal{PF}(2n-3, 2n-3)$	$\phi_1(\lambda)$	$\phi_2(\lambda)$	$\phi_3(\lambda)$	失败原因
$\{1^{2n-3}\}$	$\{1,4,1^{2n-5}\}$	$\{1,3,2,1^{2n-6}\}$	$\{1,2^3,1^{2n-7}\}$	不是分拆
$\{2,1^{2n-5}\}$	$\{2,4,1^{2n-6}\}$	$\{2,3,2,1^{2n-7}\}$		不是分拆
$\{3,1^{2n-6}\}$	$\{3,4,1^{2n-7}\}$			不是分拆
$\{n-1,1^{n-2}\}$	$\{n-1,4,1^{n-3}\}$		$\{n-1,2^3,1^{n-5}\}$	$m_{\phi_i(\lambda)} + k = F$
				对于某个 $k \in S_{\phi_i(\lambda)}$

1 加到 λ 的第三个部分上，以及 $\phi_3(\lambda)$: $\lambda \to \phi_3(\lambda)$，分别将 1 加到 λ 的第二至第四个部分上。此过程产生 $3(n-2)$ 个图示，其中有 11 个图示不表示对应于数值半群的分拆。

$\lambda \in \mathcal{PF}(2n-4, 2n-4)$	$\phi_1(\lambda)$	$\phi_2(\lambda)$	$\phi_3(\lambda)$	失败原因
$\{1^{2n-4}\}$	$\{1,4,1^{2n-6}\}$	$\{1,3,2,1^{2n-7}\}$	$\{1,2^3,1^{2n-8}\}$	不是分拆
$\{2,1^{2n-6}\}$	$\{2,4,1^{2n-7}\}$	$\{2,3,2,1^{2n-8}\}$		不是分拆
$\{3,1^{2n-7}\}$	$\{3,4,1^{2n-8}\}$			不是分拆
$\{n-2,1^{n-2}\}$	$\{n-2,4,1^{n-3}\}$	$\{n-2,3,2,1^{n-4}\}$	$\{n-2,2^3,1^{n-5}\}$	$m_{\phi_i(\lambda)} + k = F$
$\{n-3,1^{n-1}\}$		$\{n-1,3,2,1^{n-3}\}$		对于某个 $k \in S_{\phi_i(\lambda)}$
$\{n-4,1^n\}$			$\{n-4,2^3,1^{n-3}\}$	$2m_{\phi_3(\lambda)} = F$

□

备注 3。我们注意到，上述过程可以推广。对于 $j < 2n$， $\mathcal{PF}(2n, 2n-j)$ 中的任意分拆 λ 都可以看作大小为 j 的分拆 π，其外面围绕着一个大小为 $2n-j$ 的钩子。根据命题 6，这样的钩子恰好有 $\lceil \frac{2n-j}{2} \rceil$ 个。通过这种包含关系，我们得到 $PF(2n, 2n-j) \leq p(j) \lceil \frac{2n-j}{2} \rceil$。对于 $j > 0$，该不等式是严格的；特别地，我们注意到

$$PF(2n, 2n-j) \leq p(j) \left\lceil \frac{2n-j}{2} \right\rceil - \sum_{i=1}^{n-\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} p(j,i),$$

其中， $p(j,i)$ 是计算 j 的最大部分大于或等于 i 的分拆数的函数。事实上，最右侧的项排除了费雷尔图的第二行长于第一行这一禁止情形。

接下来，我们得到一个递推关系，用于计算大小与弗罗贝尼乌斯数之差为常数的分拆数。

定理 8。对于 $n \geq 4k+3$,

$$PF(n, n-k) - PF(n-2, n-k-2) = p(k),$$

其中 $p(k)$ 表示 k 的分拆数。

证明。考虑分拆集 $\mathcal{PF}(n, n-k)$，并回忆一下，这些分拆各自的最大钩长均为 $n-k$。我们考虑由满足 $\lambda_1 > \lambda_2$ 的分拆 λ 组成的集合 $\mathcal{A}_{n,\ n-k} \subseteq \mathcal{PF}(n, n-k)$，以及由满足 $\lambda_1 = \lambda_2$ 的分拆 λ 组成的集合 $\mathcal{B}_{n,\ n-k} \subseteq \mathcal{PF}(n, n-k)$。

Note，其中 $\mathcal{PF}(n, n-k) = \mathcal{A}_{n,\ n-k} \cup \mathcal{B}_{n,\ n-k}$ 且 $\mathcal{A}_{n,\ n-k} \cap \mathcal{B}_{n,\ n-k} = \emptyset$。我们将证明 ：

(1) $|\mathcal{A}_{n,\ n-k}| = PF(n-2, n-k-2)$

(2) $|\mathcal{B}_{n,\ n-k}| = p(k)$

1 的证明：我们定义一个映射

$$\phi : \mathcal{PF}(n-2, n-k-2) \to \mathcal{A}_{n,n-k}$$

by

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell\} \mapsto \{\lambda_1 + 1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell, 1\}.$$

首先，我们将证明 ϕ 定义良好。$\phi(\lambda)$ 的大小恰好为 n，而弗罗贝尼乌斯数 $F_{\phi(\lambda)}$ 恰好为 $n-k$。

为了证明 $S_{\phi(\lambda)}$ 是一个数值半群，我们首先需要证明 $m_\lambda > k$。假设结论不成立，从而导致矛盾，即 $m_\lambda \leq k$。我们知道，λ 的最大钩长为 $n-k-2$，而 λ 的费雷尔图中不包含在最大钩子内的方格数恰好为 k。注意，λ 的最大钩长等于 $\lambda_1 - \lambda_2 + h_{(2,1)}(\lambda) + 1$，其中 $h_{(2,1)}$ 是 λ中单元格 (2, 1) 的钩长，并且对所有 $1 < i < \ell$，都有 $\lambda_i - \lambda_{i+1} < m_\lambda$。于是，由于钩子 $h_{(2,1)}(\lambda)$包含所有大小为1的部分，此外至多还包含 k个方格，因此我们有 $h_{(2,1)}(\lambda) \leq m_\lambda + k$，所以

$$n-k-2 = \lambda_1 - \lambda_2 + h_{(2,1)}(\lambda) + 1 \leq \lambda_1 - \lambda_2 + m_\lambda + k + 1 < 2m_\lambda + k + 1 \leq 3k+1.$$

由于我们假设 $n \geq 4k+3$，因此得出矛盾。所以 $m_\lambda > k$。

现在证明 $S_{\phi(\lambda)}$ 是一个数值半群。首先，我们有 $m_{\phi(\lambda)} = m_\lambda + 1$ 和 $f_{\phi(\lambda)} = f_\lambda + 2$。注意到 $h_{(2,1)}(\lambda) \leq m_\lambda + k < 2m_\lambda$，因此 $h_{(2,1)}(\phi(\lambda)) < 2m_\lambda + 1$。由此，$S_{\phi(\lambda)}$ 的补集中的任意元素要么等于 $f_{\phi(\lambda)}$，要么小于 $2m_\lambda + 1 < 2m_{\phi(\lambda)}$。为了证明 $S_{\phi(\lambda)}$ 对加法封闭，取 $S_{\phi(\lambda)}$ 中两个非零元素 x、y（如果 x 或 y 为零，那么 $x + y \in S_{\phi(\lambda)}$）。如果 $x > f_{\phi(\lambda)} - 1$ 或 $y > f_{\phi(\lambda)} - 1$，那么由于 x、$y > 1$，我们有 $x + y > f_{\phi(\lambda)}$。现在假设 x 和 y 都小于 $f_{\phi(\lambda)} - 1$。于是，存在 x'、$y' \in S_\lambda$，使得 $x = x' + 1$ 且 $y = y' + 1$。注意到 x'、$y' \geq m_\lambda$。那么，$x + y = x' + y' + 2 > 2m_\lambda + 1$。此外，$x' + y'$ 不可能等于 f_λ，因此 $x + y \neq f_\lambda + 2 = f_{\phi(\lambda)}$。由于 $S_{\phi(\lambda)}$ 的补集中的所有元素要么小于 $2m_\lambda + 1$，要么为 $f_{\phi(\lambda)}$，所以 $S_{\phi(\lambda)}$ 对加法封闭，因而是一个数值半群。因此，$\phi(\lambda) \in \mathcal{A}_{n,\ n-k}$。

接下来，我们考虑 ϕ^{-1} for $\mu \in \mathcal{A}_{n,\ n-k}$ 的逆映射。我们得到 $\phi^{-1}(\mu) = \{\mu_1 - 1, \mu_2, \ldots, \mu_{\ell-1}\}$，并注意到被移除的部分 $\mu_r = 1$。因此，$\phi^{-1}(\mu)$ 是一个从 $\mathcal{A}_{n,\ n-k}$ 到分拆 $\phi^{-1}(\mu)$ 的映射，其弗罗贝尼乌斯数为 $n-2$，即 $n-k-2$。

我们将证明，与这些分拆对应的数值集实际上是数值半群。注意，$m_{\phi^{-1}(\mu)} = m_\mu - 1$和 $f_{\phi^{-1}(\mu)} = f_\mu - 2$。与上文类似，$h_{(2,1)}(\mu) \leq m_\mu + k$，因此 $h_{(2,1)}(\phi^{-1}(\mu)) = h_{(2,1)}(\mu) - 1 \leq m_\mu + k - 1 \leq m_{\phi^{-1}(\mu)} + k$。于是 $n-k = h_{(2,1)}(\mu) + \mu_1 - \mu_2 + 1 \leq m_\mu + k + \mu_1 - \mu_2 + 1$。反设 $m_\mu \leq k+1$，那么 $n-k \leq 2k+1+\mu_1-\mu_2+1$，所以 $n-3k-2 \leq \mu_1 - \mu_2$。由于 n 必须至少为 $4k+3$，$\mu_1 - \mu_2 \geq k+1 \geq m_\mu$。这与 S_μ 是数值半群这一事实矛盾，因此 $m_\mu > k+1$。

我们有 $h_{(2,1)}(\mu) < 2m_\mu - 1$，因此 $h_{(2,1)}(\phi^{-1}(\mu)) < 2m_\mu - 2 = 2m_{\phi^{-1}(\mu)}$. 与上述类似，$S_{\phi^{-1}(\mu)}$ 的补集中的所有元素要么小于 $2m_{\phi^{-1}(\mu)}$，要么是 $f_{\phi^{-1}(\mu)}$。设 x、y 是 $S_{\phi^{-1}(\mu)}$ 的非零元素。x 和 y 要么都小于 $f_{\phi^{-1}(\mu)}$，要么至少有一个大于 $f_{\phi^{-1}(\mu)}$。我们可以看到，$x + y$ 必须属于 $S_{\phi^{-1}(\mu)}$。因此，$S_\phi^{-1}(\mu)$ 对加法封闭，是一个数值半群。由于 ϕ 是一个双射，我们得到$|\mathcal{A}_{n,\ n-k}| = PF(n-2,\ n-k-2)$。

关于 2 的证明：现在我们证明$|\mathcal{B}_{n,n-k}| = p(k)$。令 $\lambda \in \mathcal{B}_{n,n-k}$。定义一个映射

$$\psi :\ \mathcal{B}_{n,\ n-k} \to \mathcal{P}(k)$$

by

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell\} \mapsto \{\lambda_2 - 1, \lambda_3 - 1, \ldots, \lambda_\ell - 1\}$$

注意，该映射移除了 λ 的最大钩子，得到 $\psi(\lambda)$，这是一个大小为 k 的分拆。由于 $F_\lambda = n - k$，我们ℓ有 $\lambda_1 = n - k - (\ell - 1)$。因此， $|\psi(\lambda)| = \sum \lambda_i - (\ell - 1) = n - (n - k - (\ell - 1)) - (\ell - 1) = k$。剩下$i=2$要证明的是 ϕ 是满射。我们将证明 ψ^{-1} 是定义良好的。通过在 k 的分拆 μ 上添加一个长度为 $n - k$、臂恰好等于 μ_1 的钩子，我们得到分拆 $\psi^{-1}(\mu)$。现在我们证明 $\psi^{-1}(\mu)$ 对应于一个数值半群。由于 $\psi^{-1}(\mu)_1 = \psi^{-1}(\mu)_2$, , 我们有,

$$n - k = h_{(2,1)}(\psi^{-1}(\mu)) + 1 \leq m_{\psi^{-1}(\mu)} + k + 1.$$

将 $m_{\psi^{-1}(\mu)}$ 的不等式改写后，我们有

$$m_{\psi^{-1}(\mu)} \geq n - 2k - 1 \geq 2k + 2.$$

因为 $n \geq 4k+3$, $n-k < n-1 \leq n+(n-4k-2) = 2n-4k-2$。所以 $f_{\psi^{-1}(\mu)} < 2n-4k-2 = 2(n-2k-1) \leq 2m_{\psi^{-1}(\mu)}$。因此， $S_{\psi^{-1}(\mu)}$ 是一个数值半群，且 ψ 是一个双射。

□

5. Partitions of n that correspond to semigroups with multiplicity m

本节开始时，我们回顾：对于给定的分拆 λ，相应数值集的重数 m_λ 比 λ中大小为1的部分的数量多1，而 $PM(n, m)$ 表示与重数为 m的数值半群相对应的 n 的分拆数。因此，通过考察移除所有大小为1的部分后剩余的分拆，我们说明了 $PM(n, m)$ 与 $\bar{p}(n - m + 1)$ 之间的联系，其中 $\bar{p}(n)$ 统计不含大小为1的部分的 n 的分拆数。我们利用这一关系，进一步研究 $\mathcal{PM}(n, m)$ 中的分拆；这些分拆与由 $\overline{p}(n)$ 计数的分拆的特定子集等势。

命题9. 对所有正整数 m和 n，有 $PM(n, m) \leq \overline{p}(n + 1 - m)$。此外，当$m > \frac{n}{2}$时， $PM(n, m) = \overline{p}(n + 1 - m)$。

证明. 我们首先注意到,

$$p(n \mid \text{exactly } m \text{ parts of size } 1) = \bar{p}(n - m + 1).$$

由于 $PM(n, m) \leq p(n \mid$恰好有 m个大小为 1 的部分$)$，所需的不等式即可得出。

接下来，设 $m \geq \frac{n}{2}$，并令 λ为 n的一个分拆，其中恰有 $m - 1$ 个大小为 1 的部分。因此 $m_\lambda = m$ 由于 $m_\lambda > \frac{n}{2}$， $2m_\lambda > n$。此外，由于 n 是该分拆的大小， $F_\lambda \leq n$。因此， $2m_\lambda > F_\lambda$，这证明S_λ 是一个数值半群。□

对于接下来的结果，我们引入由 $\bar{p}(n)$ 计数的分拆新子集，以考察当 $m \approx \frac{n}{2}$，但 $m \leq \frac{n}{2}$时 $PM(n, m)$ 的精确值。令 $\mathcal{A}(n)$ 为 n 的分拆集中至少有两个部分且不含大小为 1 的部分的分拆，并令 $a(n) := |\mathcal{A}(n)|$。

定理 10. 对于 $n \geq 5$,

$$PM(2n, n) = a(n + 1), \tag{1}$$

$$PM(2n - 1, n - 1) = a(n + 1) - 1, \tag{2}$$

$$PM(2n - 2, n - 2) = a(n + 1) - 2, \tag{3}$$

$$PM(2n - 3, n - 3) = a(n + 1) - 5. \tag{4}$$

证明. 对于每个 $i \in \{0, 1, 2, 3\}$，我们定义一个单射

$$\phi_i : \mathcal{PM}(2n - i, n - i) \to \mathcal{A}(n + 1)$$

by

$$\lambda \mapsto \lambda \setminus \{1^{n-i-1}\}.$$

注意，由于我们可以通过向 $a(n + 1)$ 中的分拆添加 $n - i - 1$ 个大小为 1 的部分来定义一个逆映射，因此我们知道 ϕ_i 是单射。要证明该命题，我们必须证明以下断言:

(1) 对于任意 $i \in \{0,1,2,3\}$ 和 $\lambda \in \mathcal{PM}(2n-i, n-i)$，$\phi_i(\lambda) \in \mathcal{A}(n+1)$。(2) 对于 $i \in \{0,1,2\}$，$|\phi_i(\lambda)| = a(n+1) - i$，并且对于 $i = 3$，$|\phi_i(\lambda)| = a(n+1) - 5$。

1 的证明：固定 $i \in \{0,1,2,3\}$，并令 $\lambda \in \mathcal{PM}(2n-i, n-i)$。由于 $m_\lambda = n-i$，$\lambda \setminus \{1^{n-i-1}\}$ 没有大小为 1 的部分。此外，如果所得分拆只有一个部分，那么 $\lambda = \{n+1, 1^{n-i-1}\}$，且 $n-i, n \in S_\lambda$，但 $2n-i \notin S_\lambda$，这与 S_λ 是数值半群这一事实矛盾。因此，$\phi_i(\lambda) \in \mathcal{A}(n+1)$。

2 的证明：固定 $i \in \{0,1,2,3\}$。我们将证明，除 i 个例外情形（当 $i = 3$ 时为 5 个例外情形）之外，若取一个分拆 $\mu \in \mathcal{A}(n+1)$，则 $\phi_i^{-1}(\mu) = \mu \cup \{1^{n-i-1}\}$ 对应于一个数值半群。令 $\mu \in \mathcal{A}(n+1)$，并定义 $\lambda = \phi_i^{-1}(\mu)$。于是，$f_\lambda = f_\mu + n - i - 1 \leq n + n - i - 1 < 2n - i$。令 $x, y \in S_\lambda$ 满足 $x, y \neq 0$。则 $x + y \geq 2n - 2i$。因此，如果 S_λ 不是数值半群，我们必有 $f_\lambda \geq 2n - 2i$。表3汇总了可能的分拆 $\lambda \in \phi_i^{-1}(\mathcal{A}(n+1))$，其中 $f_\lambda \geq 2n - 2i$，并判断 S_λ 何时为数值半群。□

i	$\{\lambda \in \phi_i^{-1}(\mathcal{A}(n+1)) \mid f_\lambda \geq 2n-2i\}$	例外情形的数量
0	$\emptyset$	0
1	$\{n-1, 2, 1^{n-2}\}$	1
2	$\{\{n-2, 3, 1^{n-3}\}, \{n-3, 2, 2, 1^{n-3}\}, \{n-1, 2, 1^{n-3}\}^*\}$	2
3	$\{\{n-1, 2, 1^{n-4}\}, \{n-2, 3, 1^{n-4}\}, \{n-3, 4, 1^{n-4}\}, \{n-4, 3, 2, 1^{n-4}\}, \{n-5, 2, 2, 2, 1^{n-4}\}\}$	5

TABLE 3. 为证明命题10而收集的情形，其中 $f_\lambda \geq 2n - 2i$。标记为 $*$ 的分拆确实对应一个数值半群，因此不计为例外情形。

备注4. 按照类似的结构，对于任何特定的 i，我们都可以找到 $a(n+1) - PM(2n-i, n-i)$。然而，找到一个特定函数 $h(i)$，使得对于 i 的所有可能取值，$a(n+1) - PM(2n-i, n-i) = h(i)$，仍是一个开放问题。

引理 11. 对于满足 $n \leq 3j$ 的正整数 j 和 n，映射

$$\phi : \mathcal{PM}(n, j) \to \mathcal{PM}(n+2, j+1 \mid \text{first two parts distinct})$$

定义为

$$\mu = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k, 1^{j-1}\} \mapsto \{\mu_1 + 1, \mu_2, \ldots, \mu_k, 1^j\}$$

是双射的。

证明. 固定满足 $n \leq 3j$ 的整数 j、n。定义映射

$$\phi : \mathcal{PM}(n, j) \to \mathcal{PM}(n+2, j+1 \mid \text{first two parts distinct})$$

by

$$\mu = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k, 1^{j-1}\} \mapsto \{\mu_1 + 1, \mu_2, \ldots, \mu_k, 1^j\}.$$

注意，若 $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j, 1^j\} \vdash n$ 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，我们可以定义 $\phi^{-1}(\lambda) = \{\lambda_1 - 1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j, 1^{j-1}\}$。因此，$\phi$ 作为分拆集之间的映射是双射的，这一点显而易见。

定义 $\mathcal{P}_a(n, j)$ 为大小为 n、含有 $j-1$ 个大小为 1 的部分的分拆集，并定义 $\mathcal{P}_b(n, j)$ 为 $\mathcal{P}_a(n, j)$ 的子集，其中分拆的前两个部分互不相同。令 $\mu \in \mathcal{P}_a(n, j)$ 和 $\lambda \in \mathcal{P}_b(n+2, j+1)$ 满足 $\phi(\mu) = \lambda$。我们将证明，S_λ 是数值半群，当且仅当 S_μ 是数值半群。

注意，$|\lambda| = |\mu| + 2$、$m_\lambda = j = m_\mu + 1$和 $F_\lambda = F_\mu + 2$。因此，

$$F_\mu < 2m_\mu \iff F_\lambda < 2m_\lambda.$$

由于所有满足 μ 的分拆 $F_\mu < 2m_\mu$ 都对应于数值半群，因此我们看到，当 $F_\mu < 2m_\mu$或 $F_\lambda < 2m_\lambda$时，μ 和 λ 都是对应于数值半群的分拆。

因此，我们现在假设 $F_\mu > 2m_\mu$ 和 $F_\lambda > 2m_\lambda$。由于 $F_\mu \leq |\mu| = n$ 和 $n \leq 3j = 3m_\mu$，我们知道 $F_\mu \leq 3m_\mu$。类似地，$F_\lambda \leq 3m_\lambda - 1$。

设 k 为 μ中大小大于一的部分的数量。根据 ϕ的定义， k 也是 λ中大小大于一的部分的数量。因此，由于

$$F_\mu = (m_\mu - 1) + k + \mu_1 - 1 > 2m_\mu,$$

我们知道 $k + \mu_1 - 1 > m_\mu + 1$。定义 π 为从μ （或等价地，从 λ）中移除最大钩子后得到的分拆。于是,

$$\begin{aligned} |\pi| &= |\mu| - F_\mu \\ &= n - (m_\mu - 1) - k - (\mu_1 - 1) \\ &< n + 1 - m_\mu - (m_\mu + 1) \\ &= n - 2m_\mu \le j = m_\mu. \end{aligned}$$

考虑

$$\max(\mathbb{N} \setminus (S_\mu \cup \{F_\mu\})) \le m_\mu + |\pi| < 2m_\mu$$

and

$$\max(\mathbb{N} \setminus (S_\lambda \cup \{F_\lambda\})) \le m_\lambda + |\pi| < 2m_\lambda.$$

因此， F_μ （分别为 F_λ）是 $\mathbb{N} \setminus S_\mu$ （分别为 $\mathbb{N} \setminus S_\lambda$）中唯一满足 $\ge 2m_\mu$ （分别为 $2m_\lambda$）的元素。最后，注意到 $a, b \in S_\mu$满足 $a + b = F_\mu$ 当且仅当 $a + 1, b + 1 \in S_\lambda$满足 $a + b + 2 = F_\lambda$，这意味着 S_μ不是数值半群当且仅当 S_λ 不是数值半群，由此完成证明。□

令 $A(n)$ 表示 n 的分拆集，其中的分拆至少有两个部分，不含大小为 1 的部分，且满足 $\lambda_1 = \lambda_2$和 $\bar{a}(n) := |A(n)|$。

定理 12. 对于 $j \in \mathbb{N}$ 和 $n \ge 2j + 2$,

$$PM(2n - j, n - j) - PM(2(n-1) - j, (n-1) - j) = \bar{a}(n+1).$$

证明。我们定义一个双射

$$\phi : \mathcal{PM}(2n - j, n - j) \to \mathcal{PM}(2(n-1) - j, (n-1) - j) \cup \bar{\mathcal{A}}(n+1)$$

by

$$\lambda \mapsto \begin{cases} \lambda \setminus \{1^{n-j-1}\} & \text{if } \lambda_1 = \lambda_2 \\ \{\lambda_1 - 1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k, 1^{n-j-2}\} & \text{if } \lambda_1 > \lambda_2. \end{cases}$$

为了证明 ϕ 确实是一个双射，我们将证明以下四个断言：

(1) 对于任意满足 $\lambda_1 = \lambda_2$ 的 $\lambda \in \mathcal{PM}(2n - j, n - j)$， $\lambda \setminus \{1^{n-j-1}\} \in \bar{\mathcal{A}}(n+1)$。(2) 对于任意满足 $\lambda_1 > \lambda_2$ 的 $\lambda \in \mathcal{PM}(2n - j, n - j)$， $\{\lambda_1 - 1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k, 1^{n-j-2}\} \in \mathcal{PM}(2(n-1) - j, (n-1) - j)$。(3) 对于任意 $\mu \in \bar{\mathcal{A}}(n+1)$， $\mu \cup \{1^{n-j-1}\} \in \mathcal{PM}(2n - j, n - j)$。(4) 对于任意 $2(n-1) - j, (n-1) - j)$ $\{\mu_1 + 1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_k, 1^{n-j-1}\} \in \mathcal{PM}(2n - j, n - j)$。

注意，断言 1 和 2 表明 ϕ 定义良好。接着，我们注意到，如果 $\mu \in \mathcal{A}(n+1)$，则 $\phi(\mu \cup \{1^{n-j-1}\}) = \mu$。此外，如果 $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k, 1^{n-j-2}\} \in \mathcal{PM}(2(n-1) - j, (n-1) - j)$，那么 $\phi(\{\mu_1 + 1, \mu_2, \ldots, \mu_k, 1^{n-j-1}\}) = \mu$。因此，断言 3 和 4 表明 ϕ^{-1} 定义良好。

为证明断言 1–4，我们先指出，所有 $\lambda \in \mathcal{PM}(2n - j, n - j)$ 都恰有 $n - j - 1$ 个大小为 1 的部分，因此可以将这类 λ 写成 $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, 1^{n-j-1}\}$ 的形式。

命题 1 的证明：设 $\lambda \in \mathcal{PM}(2n - j, n - j)$，其中 $\lambda_1 = \lambda_2$。则， $\mu = \lambda \setminus \{1^{n-j-1}\}$ 没有大小为 1 的部分，并且$\mu_1 = \mu_2$，所以 $\lambda \setminus \{1^{n-j-1}\} \in \bar{\mathcal{A}}(n+1)$。

命题 2 的证明：注意，当 $n = 2j + 2$ 时，$2(n-1) - j = 3j$ 以及 $3((n-1) - j) = 3j + 4$。此外，如果将 n 增加 1，$2(n-1) - j$ 增加 2，而 $3((n-1) - j)$ 增加 3，因此，对于任意 $n \ge 2j + 2$，$2(n-1) - j \le 3((n-1) - j)$。所以，该结论直接由引理 11 得出。

3 的证明：设 λ 并令 ℓ 为 λ 的长度。通过考察 λ 的最大钩长，我们得到

$$\lambda_1 + \ell - 1 \le (n+1) - (\lambda_1 - 1) - (\ell - 2),$$

由此得到 $\lambda_1+\ell\le\frac{1}{2}(n+5)$。考虑 $\mu=\lambda\cup\{1^{n-j-1}\}$，并注意到 $m_\mu=n-j$。根据钩长的定义，我们得到

$$\begin{aligned}F_\mu&=(\lambda_1-1)+\ell+(n-j-1)\\&\le\frac{1}{2}n+(n-j)+1<2m_\mu,\end{aligned}$$

其中最后一个不等式源于这样一个事实：$j\le\frac{1}{2}n-1$。

证明 4：这一结论由引理 11 得出。 □

将定理 10 与定理 12 的情形 $j=0$ 结合，并分别验证满足 $1\le n<5$ 的情形，可得以下联系 $a(n)$ 与 $\overline{a}(n)$ 的恒等式。

推论 13。对于 $n\in\mathbb{N}$,

$$a(n+1)-a(n)=\overline{a}(n+1).$$

注意到，推论 13 也可以通过组合方法证明：只需指出，$\mathcal{A}(n+1)\setminus\mathcal{A}(n+1)$ 中的分拆恰好是那些可以从最大部分中减去 1，从而得到 $\mathcal{A}(n)$ 中一个分拆的分拆。

现在，我们将定理 12 中的递推关系推广到 $n=2j+1$ 的情形，随后再推广到情形 $n=2j$。这两个结果合在一起表明，定理 12 中对 n 的限制已是最优的。

定理 14。对于 $j\ge4$,

$$PM(3j+2,j+1)-PM(3j,j)=\bar{a}(2j+2)-j.$$

证明。考虑集合 $\mathcal{A}=\bar{\mathcal{A}}(2j+2)\setminus\mathcal{I}$，其中 $\mathcal{I}=\big\{\{s,s,2^{j-s+1}\}\mid2\le s\le j+1\big\}$。注意到 $|\mathcal{I}|=j$，因此我们的目标是证明 $\mathcal{PM}(3j+2,j+1)$ 与 $\mathcal{PM}(3j,j)\cup\mathcal{A}$具有相同的基数。为此，我们将证明映射

$$\phi:\mathcal{PM}(3j+2,j+1)\to\mathcal{PM}(3j,j)\cup\mathcal{A}$$

定义为

$$\lambda\mapsto\begin{cases}\lambda\setminus\{1^j\} & \text{if } \lambda_1=\lambda_2\\ \{\lambda_1-1,\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_k,1^{j-1}\} & \text{if } \lambda_1>\lambda_2\end{cases}$$

是一个双射。为了证明 ϕ 实际上是一个双射，我们将证明以下四个断言：

(1) For $\lambda\in\mathcal{PM}(3j+2,j+1)$ with $\lambda_1=\lambda_2$, $\lambda\setminus\{1^j\}\in\mathcal{A}$.
(2) For $\lambda\in\mathcal{PM}(3j+2,j+1)$ with $\lambda_1>\lambda_2$, $\{\lambda_1-1,\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_k,1^{j-1}\}\in\mathcal{PM}(3j,j)$.
(3) For $\lambda\in\mathcal{A}$, $\lambda\cup\{1^j\}\in\mathcal{PM}(3j+2,j+1)$ with $\lambda_1=\lambda_2$.
(4) For $\lambda\in\mathcal{PM}(3j,j)$, $\{\lambda_1+1,\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_k,1^{j-1}\}\in\mathcal{PM}(3j+2,j+1)$.

注意，对于 $2\le s\le j+1$，$\lambda=\{s,s,2^{j-s+1},1^j\}\notin\mathcal{PM}(3j+2,j+1)$ $m_\lambda=j+1$ 以及 $F_\lambda=2(j+1)$。断言1和2表明 ϕ 定义良好，而断言3和4表明 ϕ^{-1} 定义良好。

证明 1：设 $\lambda\in\mathcal{PM}(3j+2,j+1)$，其中 $\lambda_1=\lambda_2$。那么，$\lambda\setminus\{1^j\}$ 没有大小为 1 的部分，大小为 $(3j+2)-j=2j+2$，且 λ 的前两个部分相同，因此 $\lambda\setminus\{1^j\}\in\mathcal{A}$。

证明 2：该结论由引理 11 得出。

证明 3：设 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k)\in\mathcal{A}$，其中 $\lambda_1=\lambda_2$。令 $\mu=\lambda\cup\{1^j\}$。那么，我们有 $|\mu|=|\lambda|+j=(2j+2)+j=3j+2$ 以及 $m_\mu=j+1$。由于 $\lambda_1=\lambda_2$ 且对于所有 i都有 $\lambda_i\ge2$，可得 $|\lambda|\ge2(\lambda_1-1)+2k$，这意味着 $\lambda_1-1+k\le j+1$。因此，

$$F_\mu=j+k+(\lambda_1-1)\le2j+1=2m_\mu-1,$$

因此 S_μ 是一个数值半群。

证明 4：该结论由引理 11 得出。 □

对于下面的证明，该陈述不满足引理 11 的条件。然而，第三个和第六个断言中的论证与引理 11 的论证非常相似。

定理 15. 对于 $j\ge4$,

$$PM(3j,j)-PM(3j-2,j-1)=\bar{a}(2j+1)+1.$$

证明。考虑集合 $\mathcal{M} = \mathcal{PM}(3j, j) \setminus (3, 2^{j-1}, 1^{j-1})$。我们注意到，由于所有 $\lambda \in \mathcal{M}$ 都对应于重数为 j 的数值集，因此它们各自恰好有 $j-1$ 个大小为 1 的部分。于是，我们可以将每个 $\lambda \in \mathcal{M}$ 写成 $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, 1^{j-1}\}$ 的形式。我们定义一个映射

$$\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{PM}(3j-2, j-1) \cup \bar{\mathcal{A}}(2j+1)$$

by

$$\lambda \mapsto \begin{cases} \lambda \setminus \{1^{j-1}\} & \text{if } \lambda_1 = \lambda_2 \\ \{\lambda_1 - 1, \lambda_1 - 1, 3, 2^{j-\lambda_1}\} & \text{if } \lambda = \{\lambda_1, \lambda_1 - 1, 2^{j+1-\lambda_1}, 1^{j-1}\}. \\ \{\lambda_1 - 1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k, 1^{j-2}\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

为证明 ϕ 是一个双射，我们将证明以下六个结论：

(1) 对于满足 $\lambda_1 = \lambda_2$ 的 $\lambda \in \mathcal{M}$，$\lambda \setminus \{1^{j-1}\} \in \bar{\mathcal{A}}(2j+1)$。(2) 对于 $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_1 - 1, 2^{j+1-\lambda_1}, 1^{j-1}\} \in \mathcal{M}$，$\{\lambda_1 - 1, \lambda_1 - 1, 3, 2^{j-\lambda_1}\} \in \bar{\mathcal{A}}(2j+1)$ 且 $\{\lambda_1 - 1, \lambda_1 - 1, 3, 2^{j-\lambda_1}\} \neq \tilde{\lambda} \setminus \{1^{j-1}\}$ 对任意 $\tilde{\lambda} \in \mathcal{M}$。(3) 对于满足 $\lambda_1 > \lambda_2 + 1$ 或 $\lambda_1 = \lambda_2 + 1$ 且 $\lambda_3 \neq 2$ 的 $\lambda \in \mathcal{M}$，$\{\lambda_1 - 1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k, 1^{j-2}\} \in \mathcal{PM}(3j-2, j-1)$。(4) 对于满足 $F_\mu \neq j+1$ 的 $\mu \in \bar{\mathcal{A}}(2j+1)$，$\mu \cup \{1^{j-1}\} \in \mathcal{M}$。(5) 对于满足 $F_\mu = j+1$ 的 $\mu \in \bar{\mathcal{A}}(2j+1)$，$\{\mu_1 + 1, \mu_2, \mu_3 - 1, \ldots, \mu_k, 1^{j-1}\} \in \mathcal{M}$。(6) F

或 $\mu \in \mathcal{PM}(3j-2, j-1), \{\mu_1 + 1, \mu_2, \mu_3, \ldots\ldots, \mu_k, 1^{j-1}\} \in \mathcal{M}$ with $\mu_1 > \mu_2$ 或 $\mu_1 = \mu_2$ 一个 d / 2 μ_3。命题 1 的证明：设 $\lambda \in \mathcal{M}$ 使得 $\lambda_1 = \lambda_2$。由于 λ 恰好有 $j-1$ 个大小为 1 的部分，$\lambda \setminus \{1^{j-1}\}$ 没有大小为 1 的部分。此外，由于 $\lambda_1 = \lambda_2$，$\lambda \setminus \{1^{j-1}\}$ 的最大部分至少出现两次，从而证明了 $\lambda \setminus \{1^{j-1}\} \in \bar{\mathcal{A}}(2j+1)$。

命题 2 的证明：设 $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_1 - 1, 2^{j+1-\lambda_1}, 1^{j-1}\} \in \mathcal{M}$。注意，在 $\mathcal{PM}(3j, j)$ 中同时具有$\lambda_2 = 2$ 和 $\lambda_1 = \lambda_2 + 1 = 3$ 的唯一分拆是 $\{3, 2^{j-1}, 1^{j-1}\}$，因此可以假设 $\lambda_1 - 1 = \lambda_2 > 2$。因此$\{\lambda_1 - 1, \lambda_1 - 1, 3, 2^{j-\lambda_1}\}$ 是一个最大部分重复且没有大小为 1 的部分的分拆。此外，由于 $|\lambda| = 3j$ 且 $(\lambda_1 - 1) + (\lambda_1 - 1) + 3 + 2 \cdot (j - \lambda_1) = |\lambda| - (j-1)$，$|\{\lambda_1 - 1, \lambda_1 - 1, 3, 2^{j-\lambda_1}\}| = 2j+1$，从而得到 $\{\lambda_1 - 1, \lambda_1 - 1, 3, 2^{j-\lambda_1}\} \in \bar{\mathcal{A}}(2j+1)$。

还需证明 $\{\lambda_1 - 1, \lambda_1 - 1, \lambda_3, 2^{j-\lambda_1}, 1^{j-1}\} \notin \mathcal{M}$。定义 $\tilde{\lambda} = \{\lambda_1 - 1, \lambda_1 - 1, \lambda_3, 2^{j-\lambda_1}, 1^{j-1}\}$，并注意到 $F_{\tilde{\lambda}} = \lambda_1 - 1 + 2 + (j - \lambda_1) + j - 1 = 2j$。然而，$m_{\tilde{\lambda}} = j$，因此 $S_{\tilde{\lambda}}$ 不对加法封闭，从而 $\lambda \notin \mathcal{M}$，如所要求。

3 的证明：令 $\lambda \in \mathcal{M}$，使得 $\lambda_1 > \lambda_2 + 1$ 或 $\lambda_1 = \lambda_2 + 1$ 且 $\lambda_3 \neq 2$。定义 $\mu = \{\lambda_1 - 1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\ldots, \lambda_k, 1^{j-2}\}$。我们将证明 S_μ 是一个数值半群。

首先，注意到由于 $F_\lambda = F_\mu + 2$ 和 $m_\lambda = m_\mu + 1$，

$$F_\lambda < 2m_\lambda \iff F_\mu < 2m_\mu.$$

因此，我们可以专注于 $F_\lambda > 2m_\lambda$. 的情形。定义 π 为从 λ（或等价地，从 μ）中移去最大钩子后得到的分拆。于是

$$\begin{aligned} |\pi| &= |\lambda| - F_\lambda \\ &< |\lambda| - 2m_\lambda \\ &= j. \end{aligned}$$

然后，由于 $F_\pi \leq |\pi|$，我们有 $F_\pi < j$。此外，注意到如果 $\lambda_3 > 2$，则可得到更强的限制，即 $F_\pi < j - 1$。

接下来，考察 μ 的图示中的倒数第二个竖直步，可知

$$\begin{aligned} \max(\mathbb{N} \setminus (S_\mu \cup \{F_\mu\})) &= m_\mu + F_\pi \\ &< m_\mu + j \\ &= 2m_\mu + 1. \end{aligned}$$

因此，$\mathbb{N} \setminus S_\mu$ 中唯一可能大于 $2m_\mu$ 的元素是 F_μ。此外，由于 S_μ 的所有非零元素都至少为 m_μ，任意两个此类元素之和必定至少为 $2m_\mu$。因此，只需证明不存在满足 $a + b = F_\mu$ 和 $2m_\mu \in S_\mu$ 的元素 a、$b \in S_\mu$。

注意，对于所有的 $a \in S_\mu$, $a + 1 \in S_\lambda$。因此，如果 $a, b \in S_\mu$, $a + 1, b + 1 \in S_\lambda$。由于 S_λ 是一个数值半群，$a + b + 2 \in S_\lambda$。由于 $F_\lambda = F_\mu + 2 \notin S_\lambda$，对于任何 $a, b \in S_\mu$，我们都不可能有 $a + b = F_\mu$。

最后一步，我们考虑两种情形。

情况 1：假设 $\lambda_3 > 2$。在这种情况下，$F_\pi \le |\pi| - 1$，因此 $F_\pi < j - 1$。于是 $\max(\mathbb{N} \setminus (S_\mu \cup F_\mu)) < 2m_\mu$，so $2m_\mu \in S_\mu$.

情况 2：假设 $\lambda_1 > \lambda_2 + 1$。注意，若 $\lambda_3 > 2$，我们可以沿用情况 1 的证明，因此只需考虑 $\lambda_3 = 2$ 的情况。在这种情况下，我们注意到，若 $2m_\mu \notin S_\mu$，则以下陈述必有一项成立。

- 在 λ 中至少有 $m_\mu = j - 1$ 个大小为 2 的部分。在这种情况下，由于 $|\lambda| = 3j$, $\lambda_1 < 3j - (j-1) - 2(j-1) = 3$，这与 $\lambda_1 > \lambda_2 + 1$ 的假设矛盾。
- $F_\pi = m_\mu$。在这种情况下，由于 $|\lambda| = 3j$, $\lambda_1 < 3j - (j-1) - (j - \lambda_2) - (j-1) = \lambda_2 + 2$，这再次与假设 $\lambda_1 > \lambda_2 + 1$ 矛盾。

证明 4：设 $\mu \in \bar{\mathcal{A}}(2j+1)$，使得 $F_\mu \neq j + 1$。定义 $\lambda = \mu \cup \{1^{j-1}\}$。由于 μ 没有大小为 1 的部分，λ 恰有 $j - 1$ 个大小为 1 的部分，因此 $m_\lambda = j$。还需证明 S_λ 是一个数值半群。由于 μ 没有大小为 1 的部分，且 $\mu_1 = \mu_2$, $F_\mu \le \frac{2j+1}{2} + 1 < j + 2$，因此 $F_\lambda < 2j + 1$. 此外，由于$F_\mu \neq j + 1$, $F_\lambda \neq j + 1 + (j-1) = 2j$。因此 $F_\lambda < 2j = 2(m_\lambda)$，这证明了 $S_{\bar{\lambda}}$ 是一个数值半群。因此，由于 $|\lambda| = 2j + 1 + (j-1) = 3j$，$\lambda$ 恰有 $j - 1$ 个大小为 1 的部分，$\lambda \in \mathcal{M}$ 且 $\lambda_1 = \lambda_2$。

证明 5：设 $\mu \in \bar{\mathcal{A}}(2j+1)$，使得 $F_\mu = j + 1$。根据 $\mathcal{A}(2j+1)$ 的定义，对于所有 $3 < i \le k$，有 $\mu_3 = 3$ 且 $\mu_i = 2$，其中 k等于 μ的长度。定义 $\lambda := \{\mu_1 + 1, \mu_2, \mu_3 - 1, \mu_4, \ldots, \mu_k, 1^{j-1}\} = \{\mu_1 + 1, \mu_2, 2^{k-2}, 1^{j-1}\}$。首先，注意到 $|\lambda| = |\mu| + j - 1 = 3j$、$m_\lambda = j$和 $1 < \lambda_3 < \lambda_2$，因此只需证明 S_λ 是一个数值半群。注意到 $F_\lambda = F_\mu + 1 + j - 1 = 2j + 1$。由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，$F_\lambda - 1 = 2j \in S_\lambda$。因此，唯一可能的满足 $a + b \notin S_\lambda$ 的 a、$b \in S_\lambda$ 为 $a = j$ 和 $b = j + 1$。剩下要证明的是 $j + 1 \notin S_\lambda$。我们将根据 μ中部分的数量考虑两种情形。

情况 1：假设 $k = 3$。在这种情况下，$\lambda_k = \mu_k - 1$。由于 $|\mu| = 2j + 1$、$F_\mu = j + 1$和 $\mu_1 = \mu_2$，我们必有 $\mu_1 = \mu_2 = j - 1$。接着，由于 $|\mu| = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 2(j-1) + \mu_3$，我们知道 $\mu_3 = 3$。因此，$\lambda_3 = 2$ 和 $j + 1 = m_\lambda + 1 \notin S_\lambda$。

情况 2：假设 $k > 3$。由于 $F_\mu = j + 1$，我们有 $k - 1 + \mu_1 = j + 1$ 和 $k - 2 + \mu_1 = j$。由于 $\mu_k = 2 < 3$, $j + 1 = m_\lambda + 1 \notin S_\lambda$。

命题 6 的证明：设 $\mu \in \mathcal{PM}(3j-2, j-1)$。定义 $\lambda = \{\mu_1 + 1, \mu_2, \ldots, \mu_k, 1^{j-1}\}$。

首先，注意到，由于 $F_\lambda = F_\mu + 2$ 和 $m_\lambda = m_\mu + 1$,

$$F_\lambda < 2m_\lambda \iff F_\mu < 2m_\mu.$$

因此，我们现在聚焦于 $F_\mu > 2m_\mu$的情形。定义 π 为从 μ （或等价地，从 λ）中移除最大钩子后得到的分拆。于是

$$\begin{aligned} |\pi| &= |\mu| - F_\mu \\ &< |\mu| - 2m_\mu \\ &= j. \end{aligned}$$

那么，由于 $F_\pi \le |\pi|$，我们有 $F_\pi < j$。

接下来，我们考虑

$$\begin{aligned} \max(\mathbb{N} \setminus (S_\lambda \cup F_\lambda)) &= m_\lambda + F_\pi \\ &< m_\lambda + j \\ &= 2m_\lambda. \end{aligned}$$

因此，$\mathbb{N} \setminus S_\lambda$ 中大小至少为 $2m_\lambda$ 的唯一可能元素是 F_λ。此外，由于 S_λ 的所有非零元素都至少为 m_λ，任意两个这样的元素之和必至少为 $2m_\lambda$。现在我们将证明不存在满足 $a + b = F_\lambda$的元素 a、$b \in S_\lambda$。

注意，对于所有 $a \in S_\lambda$，$a - 1 \in S_\mu$。因此，如果 a、$b \in S_\lambda$、$a - 1$、$b - 1 \in S_\mu$。由于 S_μ是一个数值半群，$a + b - 2 \in S_\mu$。由于 $F_\mu = F_\lambda - 2 \notin S_\mu$，对于任意 a、$b \in S_\lambda$，我们不能有 $a + b = F_\lambda$。

还需证明，若 $\mu \in \mathcal{PM}(3j-2, j-1)$，则 $\mu_1 > \mu_2$或 $\mu_1 = \mu_2$，且 $\mu_3 \neq 2$。为导出矛盾，假设 $\mu_1 = \mu_2$ 且 $\mu_3 = 2$。我们用 k 表示 μ 中大于 1 的部分的数量。于是，

$$|\mu| = 2\mu_1 + 2(k-2) + (j-2).$$

由于 $|\mu| = 3j - 2$，我们可以看出

$$j = \mu_1 + k - 2.$$

如前所述，我们令 π 表示从 μ 中去除最大钩子后得到的分拆。在此情形下，$F_\pi = \mu_1 + k - 3 = j - 1 = m_\mu$。注意到 $m_\mu + F_\pi \notin S_\mu$，这与以下事实矛盾：若 S_μ 是一个数值半群，则必须有 $2m_\mu \in S_\mu$. □

6. Conclusion

上述许多结果都涉及以下形式的函数：$PG(L_1(n)-k, L_2(n)-k)$、$PM(L_3(n)-k, L_4(n)-k)$，以及 $PF(L_5(n)\ L_6(n)\ -k)$，其中 $L_i(n)$ 是某些特定的线性函数，而 k 取某些值。正如我们在备注 1、3 和 4 中指出的，我们可以通过明确计算例外情形，将这些结果扩展到 k 的任意特定值。然而，如何将这些结果一致地扩展为适用于 k 任意值的一般定理，仍是一个开放问题。

这些开放问题的解将涉及函数 $h(k)$（见备注 1 和 4）的一般形式，该函数用于计数例外情形。我们注意到，难点之一在于，成为“例外情形”的方式往往不止一种，函数 $h(k)$ 可能会统计几种不同类型的例外。备注 3 中给出的 $PF(2n, 2n-k)$ 上界说明了这一点：我们可以明确识别出一些例外情形，但随着 k 增大，还会出现其他例外。

7. 致谢

本材料基于作者于 2022 年夏季驻留加利福尼亚州伯克利数学科学研究所期间所开展的工作，该工作由美国国家科学基金会通过第 1440140 号资助项目提供支持。本研究获得韩国政府资助的韩国高等研究院（KIAS）项目支持。Hayan Nam 获得了韩国政府（科学技术信息通信部，MSIT）资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目支持（编号：2021R1F1A1062319）。

References

[1] Manuel B Branco、Isabel Cola¸co 和 Ignacio Ojeda。“广义重复数数值半群的弗罗贝尼乌斯问题”。载于：《地中海数学杂志》20.1（2023），第 16 页。[2] Maria Bras-Amor´os。“给定亏格的数值半群数量的界”。载于：《纯粹与应用代数杂志》213.6（2009），第 997–1001 页。[3] Hannah Constantin、Ben Houston-Edwards 和 Nathan Kaplan。“数值集、核分拆与多面体中的整数点”。载于：《组合与加法数论 II》。施普林格，2015，第 99–127 页。[4] Frank Curtis。“关于数值半群的弗罗贝尼乌斯数公式”。载于：《斯堪的纳维亚数学》（1990），第 190–192 页。[5] William Fulton 和 Joe Harris。《表示论：入门课程》。纽约：施普林格，1991。[6] Michael Hellus、Anton Rechenauer 和 Rolf Waldi。“关于某些数值半群的弗罗贝尼乌斯数”。载于：《代数与计算国际杂志》31.03（2021），第 519–532 页。[7] Robert M. Thrall、James S. Frame、Gilbert de B. Robinson。“对称群的钩图”。载于：Can. J. Math. 6（1954），第 316–324 页。[8] William J Keith 和 Rishi Nath。“具有预定钩集的分拆”。载于：J. Comb. Number Theory 3.1（2011），第 39 页。[9] Hirokatsu Nari、Takahiro Numata 和 Kei-ichi Watanabe。“由三个元素生成的数值半群的亏格”。载于：《代数杂志》358（2012），第 67–73 页。[10] Aureliano M Robles-P´erez 和 Jos´e Carlos Rosales。“关于具有固定弗罗贝尼乌斯数和固定第二类间隙数量的数值半群集合的枚举”。载于：《数学研究成果》77.1（2022），第 10 页。[11] J.C. Rosales 和 P.A. Garc´ıa S´anchez。《数值半群》。数学发展丛书。纽约：施普林格，2009。[12] JC Rosales 和 MB Branco。“关于具有固定重数、弗罗贝尼乌斯数或亏格的初等数值半群集合的枚举”。载于：《克拉古耶瓦茨数学杂志》46.3（2022），第 433–442 页。

[13] JC Rosales 和 MB Branco。“数值半群的弗罗贝尼乌斯问题”。载于：《数论杂志》131.12（2011），第 2310–2319 页。[14] Bruce Sagan。《对称群：表示、组合算法与对称函数》。第 2 版。施普林格，2001。[15] Deepesh Singhal。“具有固定弗罗贝尼乌斯数的数值半群中亏格的分布”。载于：《半群论坛》，第 104 卷，第 3 期。施普林格，2022，第 704–723 页。[16] James J Sylvester 等。“数学问题及其解答”。载于：《教育时报》41.21（1884），第 171–178 页。[17] James J Sylvester。“关于无限阶二元量子式的子变量式，即半不变量”。载于：《美国数学杂志》5.1（1882），第 79–136 页。