arXiv:2302.08396v1 [math.CA] 16 Feb 2023

Askey-Wilson 多项式的第一类刻画

D. Mbouna 和 A. Suzuki

本章通过若干第一类结构关系，对 Askey-Wilson 多项式及其特定情形和极限情形进行刻画。

1. Introduction

关于 Askey-Wilson 算子的经典正交多项式序列（OPS）称为 Askey-Wilson 多项式，包括其特殊情形或极限情形。过去十年间，这些正交多项式因其在其他数学分支和物理科学中的重要性与应用而备受关注。其最有用的性质包括三项递推关系、生成函数、矩、零点的渐近性质、导数序列、二阶线性差分方程以及 Rodrigues 型公式。这类正交多项式序列也可通过刻画定理来描述。这些定理是将正交多项式序列的连续项及其导数结合起来的线性与非线性结构关系。关于这类定理的更多参考资料，请读者参阅以下著作[2, 12, 17]。事实上，我们要指出，Al-Salam 多项式正是通过刻画定理发现的（见 [1]）。本章将研究其中的第一类刻画，即只涉及多项式一阶导数的刻画。例如，1972 年，Al-Salam 和 Chihara 证明（见 [4]），$(P_n)_{n\geq 0}$是一个 D-经典正交多项式序列，即 Hermite、Laguerre、Bessel 或 Jacobi族，当且仅当

$$(az^2+bz+c)\mathrm{D}P_n(z)=(a_nz+b_n)P_n(z)+c_nP_{n-1}(z)\quad (c_n\neq 0)\,, \tag{1.1}$$

其中 $\mathrm{D}=d/dz$。现在，将 (1.1) 中的 D 替换为以下 Askey-Wilson算子

$$\mathcal{D}_q f(x)=\frac{\breve{f}\big(q^{1/2}e^{i\theta}\big)-\breve{f}\big(q^{-1/2}e^{i\theta}\big)}{\breve{e}\big(q^{1/2}e^{i\theta}\big)-\breve{e}\big(q^{-1/2}e^{i\theta}\big)},$$

其中，对于每个多项式 f, $\breve{f}(e^{i\theta})=f(\cos\theta)$ 和 $e(x)=x$ (见 [10, 第 12.1 节])。Ismail 提出了刻画此类正交多项式序列的问题（见 [10, 猜想 24.7.8]）。Al-Salam 研究了 $a=b=0$ 和 $c=1$ 的情形（见 [3]）。[8], 对这一问题进行了全面研究，并由此刻画了连续的 q-Jacobi 多项式、第一类Chebyshev多项式以及 Al-Salam-Chihara 多项式的一些特殊情形。我们在此旨在获得 Askey-Wilson 多项式的完整刻画

Date: 2023年2月17日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 42C05，33C45。
Key words and phrases. Askey-Wilson多项式、第一类结构关系、格点。

，类似于 (1.1)。我们考虑如下定义的平均算子

$$\mathcal{S}_q f(x) = \frac{\breve{f}\big(q^{1/2}e^{i\theta}\big) + \breve{f}\big(q^{-1/2}e^{i\theta}\big)}{2}.$$

采用以下记号。取 $0 < q < 1$，定义 $z = x(s) = \cos\theta = (q^s + q^{-s})/2$，其中 $s \in \mathbb{C}$。为此，我们不考虑 (1.1)，而先考虑以下差分方程

$$(az^2 + bz + c)\mathcal{D}_q P_n(z) = a_n \mathcal{S}_q P_{n+1}(z) + b_n \mathcal{S}_q P_n(z) + c_n \mathcal{S}_q P_{n-1}(z)\,, \tag{1.2}$$

其中 $c_n \neq 0$。因此，我们的目标是刻画所有满足 (1.2) 的正交多项式序列。我们还将考虑以下情形

$$(az^2 + bz + c)\mathcal{D}_q \mathcal{S}_q P_n(z) = a_n P_{n+1}(z) + b_n P_n(z) + c_n P_{n-1}(z)\,.$$

我们回顾一下，首一 Askey-Wilson 多项式 $(Q_n(\cdot;\, a_1, a_2, a_3, a_4|q))_{n\geq 0}$ 满足 (2.2)（见 [12, (14.1.5)]），其中

$$2B_n = a_1 + \frac{1}{a_1} - \frac{(1-a_1a_2q^n)(1-a_1a_3q^n)(1-a_1a_4q^n)(1-a_1a_2a_3a_4q^{n-1})}{a_1(1-a_1a_2a_3a_4q^{2n-1})(1-a_1a_2a_3a_4q^{2n})}$$

$$- \frac{a_1(1-q^n)(1-a_2a_3q^{n-1})(1-a_2a_4q^{n-1})(1-a_3a_4q^{n-1})}{(1-a_1a_2a_3a_4q^{2n-1})(1-a_1a_2a_3a_4q^{2n-2})},$$

$$C_{n+1} = (1-q^{n+1})(1-a_1a_2a_3a_4q^{n-1})$$

$$\times \frac{(1-a_1a_2q^n)(1-a_1a_3q^n)(1-a_1a_4q^n)(1-a_2a_3q^n)(1-a_2a_4q^n)(1-a_3a_4q^n)}{4(1-a_1a_2a_3a_4q^{2n-1})(1-a_1a_2a_3a_4q^{2n})^2(1-a_1a_2a_3a_4q^{2n+1})}$$

并满足以下限制条件（见 [7]）：

$$(1-a_1a_2a_3a_4q^n)(1-a_1a_2q^n)(1-a_1a_3q^n)$$

$$\times(1-a_1a_4q^n)(1-a_2a_3q^n)(1-a_2a_4q^n)(1-a_3a_4q^n) \neq 0.$$

Rogers q-Hermite 多项式满足三项递推关系 (2.2)，其中

$$B_n = 0\,, \quad C_{n+1} = (1-q^{n+1})/4 \qquad (n = 0, 1, \ldots)\,.$$

本章的结构如下：第 2 节介绍正交多项式序列代数理论的一些基本事实及若干有用的结果。第 3 节给出我们的主要结果。第 4 节针对某些特殊情形给出一个更精细的结果。

2. Preliminaries

正交多项式代数理论由 P. Maroni 引入（见 [13]）。下面我们回顾该理论的一些基本事实。令 $\mathcal{P}$ 为所有复系数多项式构成的向量空间，令 $\mathcal{P}^*$ 为其代数对偶。$\mathcal{P}$ 中的单集是一个序列 $(P_n)_{n\geq 0}$，满足对每个 n，$\deg(P_n) = n$。

定义 2.1. 若单集 $(P_n)_{n\geq 0}$ 满足以下条件，则称其为关于 $\mathrm{u} \in \mathcal{P}^*$ 的正交多项式序列

$$\langle \mathbf{u}, P_n P_m\rangle = \kappa_n \delta_{n,m} \quad (m = 0, 1, \ldots;\ \kappa_n \in \mathbb{C}\setminus\{0\}),$$

其中，$\langle \mathrm{u}\ f\rangle$ 表示 u 对 $f \in \mathcal{P}$ 的作用。在这种情况下，我们称 u 是正则的。

定义 2.2。泛函 u 被多项式 ϕ 左乘定义为

$$\langle \phi \mathbf{u}, f\rangle = \langle \mathbf{u}, \phi f\rangle \quad (f \in \mathcal{P}).$$

命题 2.1. 设 u $\in \mathcal{P}^*$ 为一个泛函。假设 $\mathcal{P}$ 赋予了适当的严格归纳极限拓扑。则 u 可以在 $\mathcal{P}^*$ 中按弱拓扑意义写成

$$\mathbf{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \mathbf{u}, P_n\rangle \, \mathbf{a}_n \ ,$$

其中 $(\mathbf{a}_n)_{\geq 0}$ 是与单集序列 $(P_n)_{n\geq 0}$相关联的对偶基。特别地，如果 $(P_n)_{n\geq 0}$ 是关于 $\mathbf{u} \in \mathcal{P}^*$的首一正交多项式系。那么相应的对偶基可明确表示为

$$\mathbf{a}_n = \left\langle \mathbf{u}, P_n^2 \right\rangle^{-1} P_n \mathbf{u}. \tag{2.1}$$

以下定理是文献中称为 Favard定理的一个结果的一部分。

定理 2.1. 首一正交多项式系 $(P_n)_{n\geq 0}$ 由以下三项递推关系（三项递推关系）刻画:

$$P_{-1}(z) = 0, \quad P_{n+1}(z) = (z - B_n)P_n(z) - C_n P_{n-1}(z) \quad (C_n \neq 0), \tag{2.2}$$

因此,

$$B_n = \frac{\left\langle \mathbf{u}, zP_n^2 \right\rangle}{\left\langle \mathbf{u}, P_n^2 \right\rangle}, \quad C_{n+1} = \frac{\left\langle \mathbf{u}, P_{n+1}^2 \right\rangle}{\left\langle \mathbf{u}, P_n^2 \right\rangle}. \tag{2.3}$$

在本文中，我们将采用以下定义（见 [9]）。

定义 2.3. Askey-Wilson 算子和平 均算子在 $\mathcal{P}^*$ 上诱导出两个元素，分别记作 $\mathbf{D}_q$ 和 $\mathbf{S}_q$，定义如下:

$$\langle \mathbf{D}_q \mathbf{u}, f\rangle = -\langle \mathbf{u}, \mathcal{D}_q f\rangle, \quad \langle \mathbf{S}_q \mathbf{u}, f\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathcal{S}_q f\rangle.$$

命题 2.2. [7, 9, 16] 令 $f, g \in \mathcal{P}$ 和 u $\in \mathcal{P}^*$。则以下性质成立:

$$\mathcal{D}_q\big(fg\big) = \big(\mathcal{D}_q f\big)\big(\mathcal{S}_q g\big) + \big(\mathcal{S}_q f\big)\big(\mathcal{D}_q g\big), \tag{2.4}$$

$$\mathcal{S}_q\big(fg\big) = \big(\mathcal{D}_q f\big)\big(\mathcal{D}_q g\big)U_2 + \big(\mathcal{S}_q f\big)\big(\mathcal{S}_q g\big), \tag{2.5}$$

$$\alpha \mathcal{S}_q^2 f = \mathcal{S}_q\big(U_1 \mathcal{D}_q f\big) + U_2 \mathcal{D}_q^2 f + \alpha f, \tag{2.6}$$

$$f\mathcal{D}_q g = \mathcal{D}_q\left[\Big(\mathcal{S}_q f - \frac{U_1}{\alpha}\mathcal{D}_q f\Big)g\right] - \frac{1}{\alpha}\mathcal{S}_q\Big(g\mathcal{D}_q f\Big), \tag{2.7}$$

$$\mathcal{D}_q^n \mathcal{S}_q f = \alpha_n \mathcal{S}_q \mathcal{D}_q^n f + \gamma_n U_1 \mathcal{D}_q^{n+1} f, \tag{2.8}$$

$$f\mathbf{D}_q \mathbf{u} = \mathbf{D}_q\left(\mathcal{S}_q f \ \mathbf{u}\right) - \mathbf{S}_q\left(\mathcal{D}_q f \ \mathbf{u}\right), \tag{2.9}$$

$$\alpha \mathbf{D}_q^n \mathbf{S}_q \mathbf{u} = \alpha_{n+1} \mathbf{S}_q \mathbf{D}_q^n \mathbf{u} + \gamma_n U_1 \mathbf{D}_q^{n+1} \mathbf{u}, \tag{2.10}$$

其中 $n = 0$、1、.....，其中 $\alpha = (q^{1/2} + q^{-1/2})/2$、$U_1(z) = (\alpha^2 - 1)z$ 以及 $U_2(z) = (\alpha^2 - 1)(z^2 - 1)$。

命题 2.3。以下关系成立。

$$\mathcal{D}_q z^n = \gamma_n z^{n-1} + u_n z^{n-3} + \cdots, \quad \mathcal{S}_q z^n = \alpha_n z^n + \widehat{u}_n z^{n-2} + \cdots, \tag{2.11}$$

其中 $n = 0$, 1, .., 且

$$\alpha_n = \tfrac{1}{2}(q^{n/2} + q^{-n/2}), \quad \gamma_n = \frac{q^{n/2} - q^{-n/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}$$

并且, u_n 和 $\widehat{u}_n$ 是一些复数。

证明。对 $n \in \mathbb{N}$ 使用数学归纳法。 □

在本章节中, 我们设 $\gamma_{-1} := -1$ 和 $\alpha_{-1} := \alpha_0$。我们用 $P_n^{[k]}(k = 0, 1, \ldots)$ 表示由下式定义的次数为 n 的首一多项式

$$P_n^{[k]}(z) = \frac{\mathcal{D}_q^k P_{n+k}(z)}{\prod_{j=1}^k \gamma_{n+j}} = \frac{\gamma_n!}{\gamma_{n+k}!} \mathcal{D}_q^k P_{n+k}(z).$$

这里约定 $\mathrm{D}_x^0 f = f$, 空乘积等于 1, 并且 $\gamma_0! = 1, \gamma_{n+1}! = \gamma_1 \cdots \gamma_n \gamma_{n+1}$。

命题 2.4. 设 $(\mathrm{a}_n^{[k]})_{n \geq 0}$ 是与序列 $(P_n^{[k]})_{n \geq 0}$ 相关联的对偶基。那么

$$\mathbf{D}_q^k \mathbf{a}_n^{[k]} = (-1)^k \frac{\gamma_{n+k}!}{\gamma_n!} \mathbf{a}_{n+k} \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{2.12}$$

证明。此结果可直接由命题 2.1 得出。 □

我们回顾一些有用的定理。

定理 2.2. [10, 定理 20.1.3]
形式如下的二阶算子方程

$$\phi(z)\mathcal{D}_q^2 Y + \psi(z)\mathcal{S}_q\mathcal{D}_q Y + h(z) Y = \lambda_n Y \tag{2.13}$$

对于每个 $n = 0$, 1, ..., 二阶算子方程都有一个确切次数为 n 的多项式解 $Y_n(z)$, 当且仅当 $Y_n(z)$ 是 Askey-Wilson 多项式的倍数, 或是其特殊情形或极限情形。在所有这些情形下, ϕ、 ψ、 h 和 λ_n 化简为

$$\phi(z) = -q^{-1/2}(2(1 + \sigma_4)z^2 - (\sigma_1 + \sigma_3)z - 1 + \sigma_2 - \sigma_4),$$

$$\psi(z) = \frac{2}{1 - q}(2(\sigma_4 - 1)z + \sigma_1 - \sigma_3), \quad h(z) = 0,$$

$$\lambda_n = \frac{4q(1 - q^{-n})(1 - \sigma_4 q^{n-1})}{(1 - q)^2},$$

或它的特殊情形或极限情形, 其中 σ_j 是 Askey-Wilson 参数的第 j 个初等对称函数。

以下结果见于 [11], 是对 M. E. H. Ismail 在 [10] 中提出的一个猜想的部分解答。我们也请读者参阅 [5], 其中给出了该结果的简短证明。

定理 2.3. 唯一满足以下条件的正交多项式序列（$(P_n)_{n\geq 0}$）是

$$\pi(z)\mathcal{D}_q^2 P_n(z) = \sum_{j=n-2}^{n+2} a_{n,j} P_j(z)\,, \qquad a_{n,n-2}\neq 0\,, \quad n=0,1,\dots\,. \tag{2.14}$$

其中 π 是次数至多为四的多项式，这些多项式是 Askey-Wilson 多项式，包括其特殊情形或极限情形。

3. Results

现在我们可以证明我们的结果了。

定理 3.1. 若 $(P_n)_{n\geq 0}$ 是一个首一正交多项式系，使得

$$(az^2+bz+c)\mathcal{D}_q P_n(z) = a_n \mathcal{S}_q P_{n+1}(z) + b_n \mathcal{S}_q P_n(z) + c_n \mathcal{S}_q P_{n-1}(z) \quad (n=0,1,\dots)\,, \tag{3.1}$$

其中 $c_n\neq 0$ 对应于 $n=0$，1,...，常数参数 a、b 和 c 的选取满足

$$(4\alpha^2-1)aC_2C_3 + \frac{r_3}{2}\Big[(B_0+B_1)^2 + 4\alpha^2(C_1 - B_0B_1 + \alpha^2 - 1) - 2(2\alpha^2-1)C_2\Big] = 0\,, \tag{3.2}$$

whenever $a\neq 0$, *and*

$$aC_2C_3\Big(b_2 + 2aB_2 + \frac{b}{\alpha}\Big) - r_3\left(a(B_2+B_1)C_2 + \frac{b}{\alpha}C_2 - \frac{r_2}{2}(B_1-B_0)\right) = 0\,, \tag{3.3}$$

$r_i = c_i + 2aC_i$, $i=2$, 3, *then* $(P_n)_{n\geq 0}$ *are multiple of Askey-Wilson polynomials, or specialor limiting cases of them. Moreover* $(P_n)_{n\geq 0}$ *satisfy* (2.13) *with*

$$\phi(z) = \mathfrak{a}z^2 + \mathfrak{b}z + \mathfrak{c}\,,\ \psi(z) = z - B_0\,,\ h(z) = 0\,,\ \lambda_n = \gamma_n(\mathfrak{a}\gamma_{n-1} + \alpha_{n-1})\,, \tag{3.4}$$

where

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} &= -\frac{aC_3 + (\alpha^2-1)r_3}{\alpha r_3}\,;\\
\mathfrak{b} &= -\frac{1}{2\alpha}\left(\Big(1-2a\frac{C_3}{r_3}\Big)\Big(B_0+B_1\Big) - 2\alpha^2 B_0\right)\,;\\
\mathfrak{c} &= -\frac{1}{2\alpha}\left(\Big(1-2a\frac{C_3}{r_3}\Big)\Big(C_1 - B_0B_1\Big) + C_1 + B_0^2\right)\,;
\end{aligned}$$

being B_0, B_1, C_1, C_2 *and* C_3 *coefficients for the TTRR relation* (2.2) *satisfied by* $(P_n)_{n\geq 0}$.

证明。设 $(P_n)_{n\geq 0}$ 是关于泛函 $\mathfrak{u}\in\mathcal{P}^*$ 且满足 (3.1) 的首一正交多项式系。在条件 (3.2)–(3.3) 下，我们得到

$$\mathbf{D}_q(\phi\mathbf{u}) = \mathbf{S}_q(\psi\mathbf{u})\,,$$

其中，ϕ 和 ψ 在 (3.4) 中给出。由于 $\mathfrak{u}$ 是正则的，这等价于

$$\phi(z)\mathcal{D}_q^2 P_n(z) + \psi(z)\mathcal{S}_q\mathcal{D}_q P_n(z) = a_{n,n}P_n(z) \quad (n=1,2,\dots)\,,$$

其中 $a_{n,\,n} = \gamma_n(\mathfrak{a}\gamma_{n-1}+\alpha_{n-1}) \neq 0$。由定理 2.2 可得所需结果。该结果的完整证明及所有细节见 [15]。□

对于引言末尾提到的第二个结构关系，可得以下结果。我们强调，这一结果是新的，并推广了 [14] 中近期得到的结果。

定理 3.2. 设 $(P_n)_{n\geq 0}$ 是一个满足下列方程的正交多项式序列

$$(az^2+bz+c)\mathcal{D}_q\mathcal{S}_qP_n(z)=a_nP_{n+1}(z)+b_nP_n(z)+c_nP_{n-1}(z)\,, \tag{3.5}$$

其中 a、b、$c\in\mathbb{C}$ 和 $(a_n)_{n\geq 0}$、$(b_n)_{n\geq 0}$、$(c_n)_{n\geq 0}$ 是复数序列，满足 $c_n\neq 0$，对每个 n 均成立。于是，经过对变量进行仿射变换后，$(P_n)_{n\geq 0}$ 是 Askey-Wilson 多项式序列，或是其特殊情形或极限情形。

证明。设 $(P_n)_{n\geq 0}$ 是方程 (3.5) 的一个正交多项式序列解。首先，我们断言：

$$\alpha\mathcal{S}_q^2P_n=\big(\alpha^2\mathtt{U}_2-\mathtt{U}_1^2\big)\mathcal{D}_q^2P_n+\mathtt{U}_1\mathcal{D}_q\mathcal{S}_qP_n+\alpha P_n\,, \tag{3.6}$$

对每个 $n=0$，1，..... 均成立。事实上，利用 (2.5)、(2.8) 中的 $n=1$ 以及以下事实，可由 (2.6) 得到此方程：

$$\mathcal{S}_q\mathtt{U}_2=\alpha^2\mathtt{U}_2+\mathtt{U}_1^2,\ \mathcal{D}_q\mathtt{U}_2=2\alpha\mathtt{U}_1,\ \mathcal{D}_q\mathtt{U}_1=\alpha^2-1,\ \mathcal{S}_q\mathtt{U}_1=\alpha\mathtt{U}_1\,.$$

现在，我们将算子 S_q 作用于满足三项递推关系 (2.2) 的首一正交多项式系 $(P_n)_{n\geq 0}$ 上，该多项式系是方程 (3.5) 的解。利用 (2.5) 后，得到以下关系：

$$\mathtt{U}_2\mathcal{D}_qP_n+\alpha\mathcal{S}_qP_n=\mathcal{S}_qP_{n+1}+B_n\mathcal{S}_qP_n+C_n\mathcal{S}_qP_{n-1}\,.$$

我们还依次利用 (2.4)、(2.8)（针对 $n=1$）和 (3.6)，将算子 $\mathcal{D}_q$ 作用于上述方程，得到

$$\begin{aligned}&2\big(\alpha^2\mathtt{U}_2-\mathtt{U}_1^2\big)\mathcal{D}_q^2P_n+(4\alpha^2-3)z\mathcal{D}_q\mathcal{S}_qP_n+\alpha P_n\\&\qquad=\mathcal{D}_q\mathcal{S}_qP_{n+1}+B_n\mathcal{D}_q\mathcal{S}_qP_n+C_n\mathcal{D}_q\mathcal{S}_qP_{n-1}\,.\end{aligned} \tag{3.7}$$

最后，我们将 (3.7) 乘以多项式 az^2+bz+c，并依次利用三项递推关系 (2.2) 和 (3.5)，得到

$$\begin{aligned}&2\big(\alpha^2\mathtt{U}_2-\mathtt{U}_1^2\big)(az^2+bz+c)\mathcal{D}_q^2P_n\\&\qquad=r_n^{[1]}P_{n+2}+r_n^{[2]}P_{n+1}+r_n^{[3]}P_n+r_n^{[4]}P_{n-1}+r_n^{[5]}P_{n-2}\,,\end{aligned} \tag{3.8}$$

对每个 $n=0$，1，.....，其中

$$\begin{aligned}
r_n^{[1]}&=a_{n+1}-(4\alpha^2-3)a_n-\alpha a,\\
r_n^{[2]}&=b_{n+1}-(4\alpha^2-3)b_n-\alpha b+\big(B_n-(4\alpha^2-3)B_{n+1}\big)a_n-\alpha a(B_n+B_{n+1}),\\
r_n^{[3]}&=c_{n+1}-(4\alpha^2-3)c_n-\alpha c-4(\alpha^2-1)b_nB_n+a_{n-1}C_n-\alpha bB_n-v_n,\\
r_n^{[4]}&=\big(B_n-(4\alpha^2-3)B_{n-1}\big)c_n-\Big(\alpha b-b_{n-1}+(4\alpha^2-3)b_n+\alpha a(B_n+B_{n-1})\Big)C_n,\\
r_n^{[5]}&=c_{n-1}C_n-(4\alpha^2-3)c_nC_{n-1}-\alpha aC_nC_{n-1},
\end{aligned}$$

其中 $v_n=(4\alpha^2-3)a_nC_{n+1}+\alpha a(C_{n+1}+B_n^2+C_n)$。此外，不难看出，对每个 n，都有 $r_n^{[5]}\neq 0$。该方程属于 (2.14) 的形式，其中 $\pi(z)=2\big(\alpha^2\mathtt{U}_2-\mathtt{U}_1^2\big)(az^2+bz+c)$，因此由定理 2.3 可得结论。

□

沿用相同的思路，可以证明下面的结论。

推论 3.1. Askey-Wilson 多项式，或其特殊情形或极限情形，是下列方程的唯一正交多项式序列解

$$(az^2+bz+c)\mathcal{S}_q\mathcal{D}_qP_n(z)=a_nP_{n+1}(z)+b_nP_n(z)+c_nP_{n-1}(z)\,,$$

其中，对于每个 n，a、b、$c\in\mathbb{C}$ 和 $c_n\neq 0$。

4. Special cases

本节考察前一部分所述结果的一些特殊情形。为此，我们使用以下结果。

定理 4.1. [7] 设 $(P_n)_{n\geq 0}$ 是关于 $\mathrm{u}\in\mathcal{P}^*$ 的首一正交多项式系。假设 u 满足分布方程

$$\mathbf{D}_q(\phi\mathbf{u})=\mathbf{S}_q(\psi\mathbf{u})\,,$$

其中 $\phi(z)=az^2+bz+c$ 且 $\psi(z)=dz+e$，其中 $d\neq 0$。则 $(P_n)_{n\geq 0}$ 满足 (2.2)，其中

$$B_n=\frac{\gamma_n e_{n-1}}{d_{2n-2}}-\frac{\gamma_{n+1}e_n}{d_{2n}},\quad C_{n+1}=-\frac{\gamma_{n+1}d_{n-1}}{d_{2n-1}d_{2n+1}}\phi^{[n]}\left(-\frac{e_n}{d_{2n}}\right), \tag{4.1}$$

其中 $d_n=a\gamma_n+d\alpha_n$、$e_n=b\gamma_n+e\alpha_n$，以及

$$\phi^{[n]}(z)=\big(d(\alpha^2-1)\gamma_{2n}+a\alpha_{2n}\big)\big(z^2-1/2\big)+\big(b\alpha_n+e(\alpha^2-1)\gamma_n\big)z+c+a/2,$$

利用这一结果，我们得到如下结论。

推论 4.1. 满足下列条件的唯一首一正交多项式系 $(P_n)_{n\geq 0}$,

$$\mathcal{D}_qP_{n+1}(z)=\alpha_n^{-1}\gamma_{n+1}\mathcal{S}_qP_n(z), \tag{4.2}$$

是 Askey-Wilson 多项式

$$P_n(z)=Q_n\left(z;a,-a,iq^{-1/2}/a,-iq^{-1/2}/a\Big|q\right),$$

其中 $a\notin\big\{\pm q^{(n-1)/2},\pm iq^{-n/2}\,|\,n=0,1,\dots\big\}$。

证明. 只需证明方程 (4.2) 的所有首一正交多项式系解都是经典的，然后利用前一个定理即可得出结果。更多详情请参阅 [6]。□

推论 4.2. [14] Rogers $q^{\pm 2}$-Hermite 多项式是下列方程的唯一正交多项式序列解

$$\mathcal{D}_q\mathcal{S}_qP_n(z)=r_nP_{n-1}(z),\quad n=0,1,\dots\,. \tag{4.3}$$

证明. 设 $(P_n)_{n\geq 0}$ 是满足 (4.3) 的首一正交多项式系。我们断言，下列差分方程组成立

$$r_{n+2}\ -2(2\alpha^2-1)r_{n+1}+r_n=0\,, \tag{4.4}$$

$$t_{n+2}-2(2\alpha^2-1)t_{n+1}+t_n=0,\quad t_n:=r_n/C_n\,, \tag{4.5}$$

$$r_{n+1}B_{n+1}-(4\alpha^2-3)(r_n+r_{n+1})B_n+r_nB_{n-1}=0\,, \tag{4.6}$$

$$t_{n+3}B_{n+2}-(t_{n+2}+t_{n+1})B_{n+1}+t_nB_n=0\,, \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}t_{n+2}(C_{n+1}-1/4)-2t_n(C_n-1/4)+t_{n-2}(C_{n-1}-1/4)\\ =t_n\left[B_n^2-2(2\alpha^2-1)B_nB_{n-1}+B_{n-1}^2\right]\,,\end{aligned} \tag{4.8}$$

其中 B_n 和 C_n 是 $(P_n)_{n\geq 0}$所满足的三项递推关系 (2.2) 的系数。事实上，对三项递推关系 (2.2) 应用算子 $\mathcal{D}_q^2$，并结合 (2.4) 和 (2.8)，可得

$$2\mathcal{D}_q\mathcal{S}_qP_n(z)+(z-B_n)\mathcal{D}_q^2P_nz(z)=\mathcal{D}_q^2P_{n+1}(z)+C_n\mathcal{D}_q^2P_{n-1}(z)\,. \tag{4.9}$$

将该方程乘以 $2\big(\alpha^2\mathrm{U}_2-\mathrm{U}_1^2\big)$，依次使用 (3.8)，其中取 $a=0=b$ 和 $c=1$，再结合 (4.3) 和三项递推关系 (2.2)，得到一个为零的

多项式 P_{n+1}、P_n、P_{n-2}、P_{n-2} 和 P_{n-3} 的线性组合。因此，所述线性组合的系数都必须为零，由此得到方程组 (4.4)–(4.8)。现在，通过比较 (4.3) 中次数较高的项的前两个系数，可以得到

$$r_n = \gamma_{2n}/2, \quad B_n = B_0\alpha_{2n+1}/\alpha \quad n = 0, 1, \dots .$$

另一方面，方程 (4.5) 的解为

$$t_n = k_1 q^n + k_2 q^{-n}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{C}, \quad |k_1| + |k_2| \neq 0 .$$

由此不难看出，上述表达式 B_n 满足 (4.6) 当且仅当 B_0，因此

$$B_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots .$$

最后，由 (4.5) 中得到的 C_n 表达式可知，(4.8) 成立当且仅当 $k_1 k_2 = 0$，因此我们得到

$$C_{n+1} = (1 - q^{2n+2})/4 \quad or \quad C_{n+1} = (1 - q^{-2n-2})/4, \quad n = 0, 1, \dots .$$

结果得证。 □

注 4.1. 此处得到的结果已针对 q-二次格点 $x(s) = (q^{-s} + q^s)/2$ 证明，并可通过取适当的极限推广到二次格点 $x(s) = \mathfrak{c}_4 s^2 + \mathfrak{c}_5 s + \mathfrak{c}_6$，相关讨论见 [7]。

Acknowledgements

作者 D. Mbouna 得到了 CMUP（LASI 成员）的部分资助。CMUP 通过 FCT - Fundac˜ao para a Ciˆencia e a Tecnologia, I.P.，在项目编号 UIDB/00144/2020 和 UIDP/00144/2020 下，获得国家资金支持。A. Suzuki 获得了 FCT 资助项目 2021.05089.BD 的支持，并部分获得了科英布拉大学数学中心（UIDB/00324/2020）的资助；该中心由葡萄牙政府通过 FCT/MCTES 提供资金支持。

References

[1] W. Al-Salam 和 T. Chihara，标准正交多项式的卷积，SIAM数学分析杂志 7 (1976)，第 1 期，16-28。[2] W. Al-Salam，正交多项式的刻画定理，Orthogonal polynomials（美国俄亥俄州哥伦布，1989），北约高级科学研究所丛书C辑：数学与物理科学，第 294 卷，克吕维尔学术出版社，Dordrecht，1990，第 1-24 页。[3] W. Al-Salam，Rogers q-Hermite 多项式的一种刻画，Internat. J. Math. and Math. Sci. 18 (1995)，第 4 期，641–648。[4] W. Al-Salam 和 T. S. Chihara，经典正交多项式的另一种刻画，SIAM数学分析杂志 3 (1972) 65–70。[5] K. Castillo 和 D. Mbouna，关于 Askey-Wilson 多项式两个猜想的证明，Proc. Amer. Math. Soc.，DOI：10.1090/proc/16250。[6] K. Castillo、D. Mbouna 和 J. Petronilho，关于 Askey-Wilson 多项式与第二类Meixner多项式的若干备注，Ramanujan J.，58 (2022) 1159-1170。[7] K. Castillo、D. Mbouna 和 J. Petronilho，格点上经典正交多项式的泛函方程，J. Math. Anal. Appl. 515 (2022) 126390。[8] K. Castillo、D. Mbouna 和 J. Petronilho，连续q-Jacobi多项式、第一类Chebyshev多项式及Al-Salam Chihara多项式的一种刻画，J. Math. Anal. Appl. 514 (2022) 126358。[9] M. Foupouagnigni、M. Kenfack-Nangho 和 S. Mboutngam，非均匀格点上经典正交多项式的刻画定理：泛函方法，Integral Transforms Spec. Funct. 22 (2011) 739-758。

[10] M. E. H. Ismail，单变量经典与量子正交多项式。含有 W. Van Assche 撰写的两章，R. Askey 作序，数学及其应用百科全书第 98 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2005。[11] M. Kenfack Nangho 和 K. Jordaan，Askey-Wilson 多项式的一种刻画，Proc. Amer. Math. Soc.，147 (2019) 2465-2480。[12] R. Koekoek、P. A. Lesky 和 R. F. Swarttouw，超几何正交多项式及其 q-类似物，施普林格数学专著，施普林格出版社，柏林，2010。[13] P. Maroni，《正交多项式的代数理论。半经典正交多项式的应用》，载于 C. Brezinski 等编，《正交多项式及其应用》，埃里切 1990 会议录，IMACS，Ann. Comp. App. Math. 9 (1991) 95-130。[14] D. Mbouna 和 A. Susuki，格点上的若干 Appell 型正交多项式，arXiv:2301.06728 [math.CA] (2023)。[15] D. Mbouna 和 A. Suzuki，关于 Askey-Wilson 多项式的另一种刻画，Results Math 77，148 (2022)。[16] S. Mboutngam、M. Foupouagnigni 和 P. Njionou Sadjang，非均匀格点上半经典正交多项式的修正，J. Math. Anal. Appl. 445 (2017) 819-836。[17] P. Lesky，经典连续、离散及 q-正交多项式的一种刻画，Shaker，亚琛，2005。D. Mbouna, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Porto, Campo Alegre st. 687 4169-007 Porto Portugal ,
, ,*Email address*: dieudonne.mbouna@fc.up.ptA. Suzuki, University of Coimbra, CMUC, Dep. Mathematics, 3001-501 Coimbra, Por-tugal*Email address*: asuzuki@uc.pt