arXiv:2302.08419v1 [hep-th] 16 Feb 2023

从融合规则重构有限规范群

Rajath Radhakrishnan

国际理论物理中心，海岸大道11号，的里雅斯特34151，意大利

摘要：对量子场论（QFT）的有限群 0形式对称性 G 进行规范化，会得到一个具有由威尔逊线实现的 Rep(G) 对称性的量子场论。群 G决定威尔逊线的融合。然而，一般而言，威尔逊线的融合规则并不能确定 G。本文研究了可从威尔逊线融合规则以及由高阶规范化威尔逊线得到的曲面算符融合规则中确定的 G 的性质。这项研究秉承了 Richard Brauer 的思路：他曾提出，要确定一个有限群，除了其特征标表之外，还需要了解哪些信息。我们证明，由高阶规范化威尔逊线得到的曲面算符融合规则，可以区分无穷多对无法通过威尔逊线融合加以区分的群。我们推导出两个非同构群具有相同曲面算符融合所需满足的必要条件，并找到了一对这样的群。

2023年2月

目录

1. 引言 1

2. G 从威尔逊线融合 5

3. G-规范理论中的曲面算符 8
3.1. 群的2-表示.9 3.2. 曲面算符融合规则.11 3.3. 例子.13

4. G 从曲面算符融合 16
4.1. 从融合规则得到的正规子群.18 4.2. G/N 的2-表示.19 4.3. 群扩张与融合规则.21
4.4. 区分具有同构威尔逊线融合的群.26 4.5. 具有同构曲面算符融合的群.27

5. G 来自曲面上的线的融合 34

6. 结论 36

附录 A. G 来自 2-特征 38
A.1. 2-特征.38 A.2. 来自 2-特征的正规子群.39 A.3. G/N 的 2-特征.40 A.4. 群扩张与
2-特征.41

1. 引言

近年来，对对称性概念的各种推广一直是活跃的研究领域 [1]。对于有限群对称性，这一方向的早期工作涉及弦理论和二维共形场论中的轨形化研究。其中一个主要认识是，对一个 ˆ 量子场论 $\mathcal{T}$的非反常有限阿贝尔0形式对称性 G 进行规范化，会得到一个具有对偶对称性 $G = \mathrm{Hom}(G, U(1))$ [2]的量子场论 $\mathcal{T}/G$。对 $\mathcal{T}/G$ 量子场论的 ˆ ˆG 对称性进行规范化，会得到量子场论 $\mathcal{T}$。 G 和 G 作为群是同构的。这可以推广到对非阿贝尔群 G 进行规范化；在这种情况下，对偶对称性

记作 Rep(G) [3,4]。Rep(G) 是由标记为 G的表示 R 的威尔逊线 W_R 所实现的对称性。对于非阿贝尔 G，Rep(G) 不是一个群，而是一个环。环中的乘法由威尔逊线的融合给出。对于标记为不可约表示 R_i 和 R_j的威尔逊线，融合由将表示的张量积分解为不可约表示给出（见图 1）。

$$W_{R_i} \times W_{R_j} = \sum_{R_k} N_{R_i R_j}^{R_k} W_{R_k}, \quad N_{R_i R_j}^{R_k} \in \mathbb{N} \ . \tag{1.1}$$

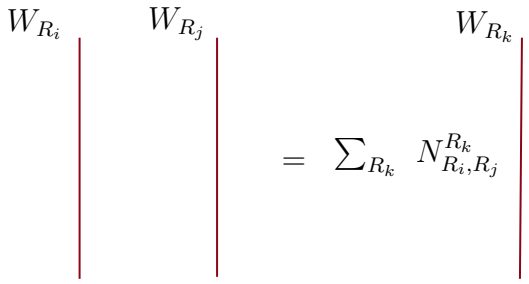


图 1：两条拓扑威尔逊线可以合并，形成一条荷为 $R_i \times R_j$ 的威尔逊线。威尔逊线 $W_{R_i \times R_j}$ 可以分解为简单威尔逊线 W_{R_k}，其中 $R_i \times R_k = \sum_{R_k} N_{R_i R_j}^{R_k} R_k$。

量子场论 $\mathcal{T}$ 的对称群 G 完全决定了融合系数$N_{R_i,\ R_j}^{R_j}$。由于对 $\mathcal{T}/G$ 的 Rep(G) 对称性进行规范化后，会得到具有 G 对称性的量子场论 $\mathcal{T}$，因此自然会想知道，Rep(G) 的环结构/融合系数是否能决定群 G。事实证明并非如此。例如，阶为 8 的二面体群 D_8 和四元数群 Q_8 的威尔逊线融合相同。换言之，环 Rep(D_8) 和 Rep(Q_8) 同构。存在许多这样的群对，甚至还有无限多个具有相同 Rep(G) 的非同构群族。事实上，要从 Rep(G) 确定 G ，仅有 Rep(G) 的融合系数是不够的，还需要 Rep(G) 的完整对称张量范畴结构 [5]。从物理角度看，这意味着除了融合规则之外，我们还需要威尔逊线交叉方程和编织的解，才能确定群 G。这些由 F 和R 矩阵[1] 决定（见图 2）。注意，即使数据 $N_{R_i R_j}^{R_k}$ 和 F 也无法将群 G唯一确定到同构意义下 [6]。这是因为融合范畴可能具有不同的对称编织，从而产生不同的 R 矩阵。尽管可以根据 $N_{R_i R_j}^{R_k}$、F、R重构群 G ，但确定 F和 R矩阵并非易事（参见 [7]，其中介绍了一种方法，用于

[1]矩阵 R 不应与 G 的不可约表示标签 R_i 混淆。在本文余下部分，我们将不再使用矩阵 R 。

计算某些有限群的 F 矩阵）。此外， F 和 R 矩阵取决于威尔逊线三价交汇点处局域算符希尔伯特空间的一组基的选择。因此，两组 F、R 数据[2]并不容易直接比较。这与融合系数 $N_{R_i,\ R_j}^{R_k}$ 不同，后者不依赖于基。

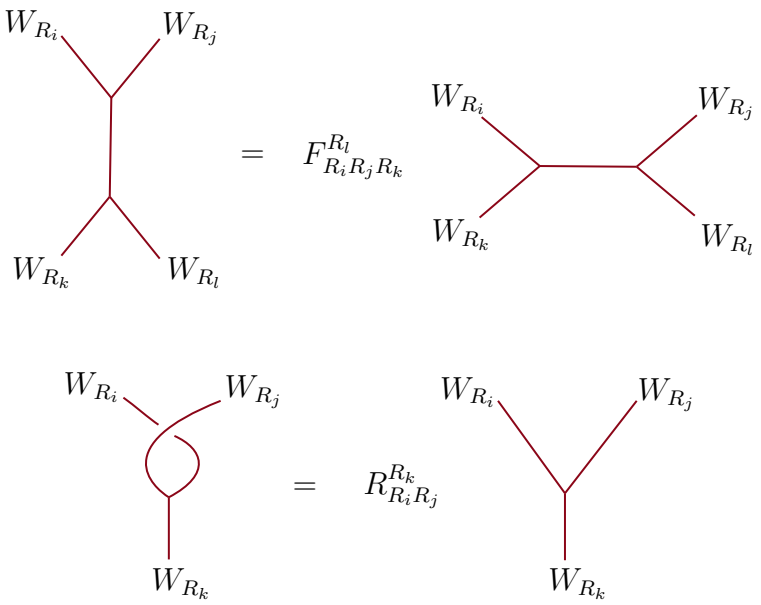


图 2：威尔逊线的交叉对称性及其编织定义了矩阵 F、R，这些矩阵与 $N_{R_i}^{R_k}{}_{、R_j}$ 一起，可用于在同构意义下重构规范群 G。

我们能否在 $N_{R_i,\ R_j}^{R_k}$ 中加入其他基底无关数据来确定群 G? 特别是，量子场论中其他算符的融合规则能告诉我们关于 G的什么信息? 为回答这个问题，我们假设量子场论 $\mathcal{T}$ 至少是三维的。考虑 $\mathcal{T}/G$ 的曲面算子 S_ρ，它们是通过在时空 [8–10][3]的二维子流形上对 Rep(G) 对称性进行高阶规范化而得到的。与威尔逊线类似，曲面算子 S_ρ 由群 G 的某些表示 ρ 标记。更准确地说， ρ 是群G [10]的一个 2-表示。对于由不可约 2-表示 ρ_i、ρ_j标记的两个曲面算子 S_{ρ_i}和 S_{ρ_j}，它们的融合由 2-表示的张量积向不可约 2-表示的分解给出（见图 3）。

[2] S 和 T 矩阵（它们与基的选择无关）无法区分不同的群，因为对于 Rep(G)，它们都是平凡的。[3]在本文中，“曲面算子”一词指通过对威尔逊线进行高阶规范化而得到的曲面算子。量子场论 $\mathcal{T}/G$ 还有许多其他曲面算子，但它们的融合取决于我们所研究的量子场论 $\mathcal{T}$，因此不会在本文讨论中发挥作用。

不可约 2-表示。

$$S_{\rho_i} \times S_{\rho_j} = \sum_k N_{\rho_i,\rho_j}^{\rho_k} S_{\rho_k}, \quad N_{\rho_i,\rho_j}^{\rho_k} \in \mathbb{N} \ . \tag{1.2}$$

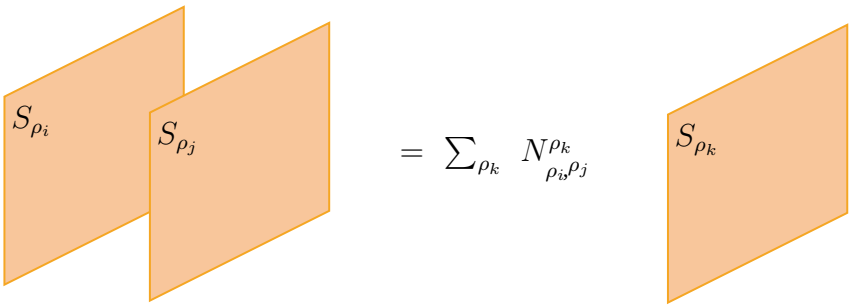


图 3：两个拓扑面算符可以合并为一个曲面算符 $S_{\rho_i\times\rho_j}$。 $S_{\rho_i\times\rho_j}$可以分解为简单曲面算符 S_{ρ_k}，其中 $\rho_i\times\rho_k = \sum_{\rho_k} N_{\rho_i\rho_j}^{\rho_k}\rho_k$。

曲面算符的融合赋予曲面算符集合一个环结构，我们将其记为 2Rep(G)。总而言之，威尔逊线 W_R 和曲面算符S_ρ 分别通过环 Rep(G) 和 2Rep(G)[4]实现 $\mathcal{T}/G$ 的不可逆对称性。

量子场论 $\mathcal{T}$ 的对称群 G 完全决定了融合系数$N_{R_iR_j}^{R_k}$和 $N_{\rho_i,\ \rho_j}^{\rho_k}$。根据数据 $N_{R_iR_j}^{R_k}$和 $N_{\rho_i,\ \rho_j}^{\rho_k}$，我们能了解到群 G的哪些信息？正如我们将在本文主体部分展示的那样，通过威尔逊线融合无法区分的群 D_8 和 Q_8，可以通过曲面算符融合加以区分。更一般地，我们将研究群 G 的哪些性质能够从威尔逊线和曲面算符的融合规则中确定。我们将利用这些性质证明，无穷多对无法通过威尔逊线融合加以区分的群，可以通过曲面算符融合加以区分。我们将推导两个非同构群具有相同曲面算符融合的必要条件。基于此，我们将证明，所有阶为 < 96的群都可以通过 $N_{\rho_i,\ \rho_j}^{\rho_k}$加以区分。另一方面，通过研究一个具体例子，我们将证明非同构群可能具有相同的曲面算符融合。

在介绍本文的结构之前，我们先简要讨论四维或更高维中的量子场论。对这类量子场论 $\mathcal{T}$ 的 G 对称性进行规范化后，我们得到一个量子场论 $\mathcal{T}/G$，其中包含威尔逊线、凝聚曲面以及凝聚膜算符 [9, 11]。这些

[4]一般来说，这些线和曲面中只有一部分能忠实地作用于量子场论。

分别由群 G 的表示、2-表示和3-表示标记 [11]。根据本文的结果，很自然可以预期，威尔逊线、曲面算符和膜算符的融合系数可以结合起来，用于推导群 G 的更多性质。这需要研究3-表示的张量积，我们将此留待未来工作。

本文的结构如下。第 2 节介绍威尔逊线融合，并将其与规范群 G 的特征标表联系起来。我们研究可由威尔逊线确定的 G 的各种性质。本节最后研究具有同构威尔逊线融合的群 D_8 和 Q_8 。第 3 节回顾有限群的 2-表示论。本节最后显式计算与 $G = \mathbb{Z}_6$、S_3、D_8 和 Q_8 对应的曲面算符融合规则。第 4 节继续研究曲面算符融合的性质。我们描述如何根据这些融合规则推导出 G 的各种性质。不同类型的融合规则，以及由此可以推导出的 G 的性质，总结于图 5 中。我们研究具有相同威尔逊线融合的无穷群对，并证明可以利用曲面算符融合区分这些群。本节最后推导两个群具有同构曲面算符融合所需的必要条件。我们利用这些条件确定了一对这样的群。最后，第 5 节研究非真实线算子的融合规则，并证明该规则可以确定 G ，且精确到同构。我们以结果总结和未来研究方向列表作为结语。

附录 A 回顾了 2-表示的特征理论，并用 2-特征描述了本文主体部分的结果。

2. 由威尔逊线融合得到的 G

对量子场论 $\mathcal{T}$ 规范化 0-形式有限群对称性 G ，会得到一个具有由威尔逊线实现的对称性 Rep(G) 的量子场论 $\mathcal{T}/G$ 。正如我们在引言中提到的，威尔逊线的融合由下式给出

$$W_{R_i} \times W_{R_j} = \sum_i N_{R_i R_j}^{R_k} W_{R_k} \ . \tag{2.1}$$

融合系数 $N_{R_i,\ R_j}^{R_k}$ 所包含的群的信息，与特征标表中的相同。事实上，通过计算矩阵 $(\hat{}N_{R_i})_{R_j,\ R_k} := N_{R_i,\ R_j}^{R_k}$ 的特征值，就可以构造出该群的完整特征标表（参见 [12] 中给出的具体构造）。

反过来，我们可以利用特征通过以下公式确定 $N_{R_i,\ R_j}^{R_k}$

$$N_{R_i,R_j}^{R_k} = \frac{1}{|G|} \sum_{C \in Cl(G)} |C|\ \chi_{R_i}(C)\chi_{R_j}(C)\chi_{R_k}(C)^{-1}\ , \tag{2.2}$$

其中，C 是 G 的一个共轭类，而 $Cl(G)$是 G的所有共轭类构成的集合。在此公式中，$\chi_{R_i}(C)$是特征在共轭类 C的代表元上的取值。因此，所有能够根据特征确定的 G 的性质，也都能够根据威尔逊线融合确定。我们用不可约表示标记特征标表的行，用共轭类标记列。不可约表示的维数平方和给出群的阶

$$|G| = \sum_R (\chi_R(1))^2\ . \tag{2.3}$$

更一般地，特征标表每一列的元素之和为

$$|N_C| := \sum_R |\chi_R(C)|^2\ , \tag{2.4}$$

其中，$|N_C|$ 是 C的一个代表元的中心化子的大小。群 G的正规子群、它们的阶及其交集都可以利用特征标表确定。当且仅当存在某个（可能是可约的）表示 R 的特征 χ_R，使得 [13]时，N 才是 G 的正规子群。

$$N = \ker(\chi_R) := \{C \in Cl(G)\ |\ \chi_R(C) = |R|\}\ , \tag{2.5}$$

其中，$|R|$是表示 R的维数。特别地，我们得到一些正规子群 N_i

$$N_i = \ker(\chi_{R_i})\ , \tag{2.6}$$

来自不可约表示 R_i。所有正规子群都可以通过对 N_i 取交集得到。当然，如果一开始就没有群 G，我们便不知道 G 的群乘法和子群。因此，通过特征标表确定正规子群 $N \lhd G$，意思是我们可以将 N 识别为 G 的共轭类之并。特别地，可以根据特征标表确定正规子群的模格。G 的特征标表也能确定任意正规子群 N 属于 G 时，群 G/N 的特征标表。更多详情参见 [13, 14]。如果该群是单群，那么利用单群分类可以证明，特征标表能够唯一确定这个单群。

尽管威尔逊线的融合规则（等价地说，特征标表）包含了大量关于群的信息，但众所周知，它并不能唯一确定一个群。 G 的特征标表并不能确定 $N \triangleleft G$ 的特征标表。此外，尽管它能确定所有正规子群的阶，但并不总能确定这些正规子群的同构类。我们无法判断给定的正规子群是否为阿贝尔群。更多详情参见 [15]。一般而言，非同构群可能具有同构的特征标表（此类群的数据库见 [16] ）。拥有相同特征标表的最小阶群，是阶为 8 的二面体群 D_8 和四元数群 Q_8 。为了理解并对照后续各节的讨论，深入研究这个例子很有帮助。 D_8 群的表示为

$$D_8 := \langle r, s | r^4 = s^2 = (sr)^2 = 1 \rangle \ . \tag{2.7}$$

该群的共轭类为

$$[1], [r^2], [r], [s], [rs] \ . \tag{2.8}$$

其中， $[c]$ 表示以 c为代表元的共轭类。特征标表为

	$[1]$	$[r^2]$	[r]	$[s]$	$[rs]$
R_1	1	1	1	1	1
R_2	1	1	1	-1	-1
R_3	1	1	-1	1	-1
R_4	1	1	-1	-1	1
R_5	2	-2	0	0	0

(2.9)

我们可以通过考察上表中特征的核来确定 D_8 的正规子群。我们得到以下正规子群

$$D_4, \ \{[1], [r], [r^2]\} \simeq \mathbb{Z}_4, \ \{[1], [r^2], [s]\} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \ \{[1], [r^2], [rs]\} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \ \{[1]\} \ . \tag{2.10}$$

D_8 的所有其他正规子群都是这些正规子群的交集。事实上，我们得到 $\{1, r^2\} \simeq \mathbf{Z}_2$ ，这穷尽了 D_8的所有正规子群。正规子群的同构类无法由特征标表确定。一般而言，群的非正规子群无法从特征标表中确定。 D_8的非正规子群为 $\{1, s\}$、 $\{1, rs\}$、 $\{1, r^2 s\}$、 $\{1, r^3 s\}$，它们都同构于$\mathbf{Z}_2$。

Q_8 群的表示为

$$Q_8 := \langle i, j, k | i^2 = j^2 = k^2 = ijk, (ijk)^2 = 1 \rangle \ . \tag{2.11}$$

该群的共轭类为

$$[1],[ijk],[i],[j],[k]\ . \tag{2.12}$$

特征标表为

	$[1]$	$[ijk]$	[i]	$[j]$	$[k]$
R_1	1	1	1	1	1
R_2	1	1	1	-1	-1
R_3	1	1	-1	1	-1
R_4	1	1	-1	-1	1
R_5	2	-2	0	0	0

(2.13)

我们可以通过查看上表中特征的核来识别 Q_8 的正规子群。我们得到以下正规子群

$$Q_4,\{[1],[ijk],[i]\}\simeq\mathbb{Z}_4,\{[1],[ijk],[j]\}\simeq\mathbb{Z}_4,\{[1],[ijk],[k]\}\simeq\mathbb{Z}_4,\{[1]\}\ . \tag{2.14}$$

Q_8 的所有其他正规子群都是这些正规子群的子群。事实上，我们得到 $\{1,ijk\}\simeq \mathbf{Z}_2$，这穷尽了 Q_8 的所有正规子群。由于 Q_8 的所有子群都是正规子群，因此可以从特征标表确定 Q_8 的所有子群。

由于 D_8 和 Q_8 具有相同的特征标表，威尔逊线融合显然无法区分 D_8 和 Q_8。除了威尔逊线融合之外，我们还需要哪些额外数据才能区分 Q_8 和 D_8? 这等价于询问，除了特征标表之外，还需要了解哪些信息才能确定该群。在有限群论中，这是 Richard Brauer 于 [14] 提出的一个关键问题。一种可行的方法是利用威尔逊线的交叉对称性并计算 F 矩阵。D_8 和 Q_8 的 F 矩阵并不相同（见 [7], [6] 和 [17]）。然而，F 矩阵依赖于基，通常很难计算。自然会想知道，我们能否利用基底无关数据区分 D_8 和 Q_8。特别是，我们能否利用量子场论 $\mathcal{T}/G$ 中其他算符的融合规则来区分这些群? 在接下来的章节中，我们将展示曲面算符融合包含有关规范群非正规子群的信息，可用来区分 D_8 和 Q_8，以及其他具有相同特征标表的无穷群对。

3. G-规范理论中的曲面算符

考虑一个具有非反常有限群对称性 G 的 $d\geq 3$ 维量子场论 $\mathcal{T}$。该量子场论 $\mathcal{T}/G$ 具有构成环 Rep(G) 的威尔逊线。Rep(G)

是 $\mathcal{T}/G$ 的一种非可逆对称性，可以通过规范化得到 $\mathcal{T}$。我们不必在完整的 d 维时空上对 Rep(G) 进行规范化，而是可以在二维曲面上对 Rep(G) 进行高阶规范化，从而得到一个曲面算子 [8–10]。此外，还可以对 Rep(G) 的子范畴进行高阶规范化，以定义其他曲面算子。理解这些曲面算子的另一种视角，是考察具有 G 对称性的二维拓扑量子场论。考虑具有 0形式对称性 G 的量子场论$\mathcal{T}$。我们可以将该理论与一个具有 G 对称性的二维拓扑量子场论 $\mathcal{C}$ 耦合。对该系统的对角 G 对称性进行规范化后，得到量子场论 $\mathcal{T}/G$，而 $\mathcal{C}$ 则成为 $\mathcal{T}/G$ 中的一个曲面算子（见图 4）。我们可以通过对具有 G 对称性的二维拓扑量子场论 [9]进行分类，来分类这类曲面算子。

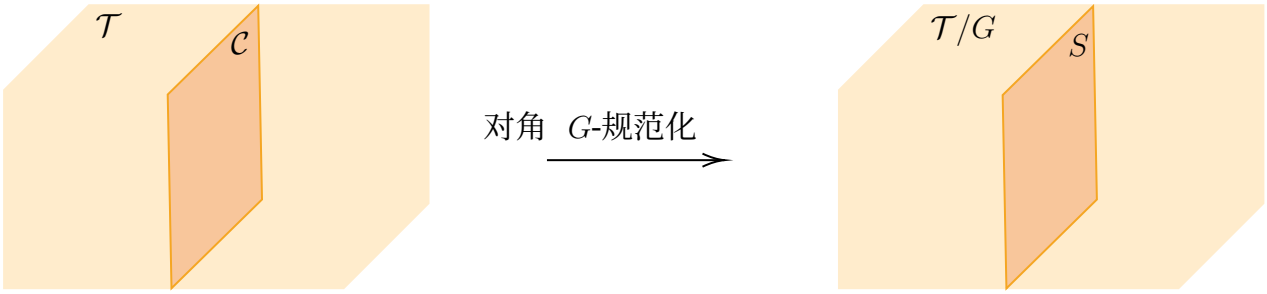


图 4：将 G-对称 TQFT $\mathcal{C}$ 耦合到量子场论 $\mathcal{T}$，并对角地规范化G-对称性，得到其中的一个曲面缺陷 S： $\mathcal{T}/G$。

威尔逊线由 G 的表示标记。很自然会想知道，上文描述的曲面算符是否由群 G 的表示论量标记。在 [10], 中，作者表明这些曲面算符由 G 的2-表示描述。曲面算符的融合由2-表示的张量积给出。在接下来的小节中，我们将沿用 [10] 中以 G 的2-表示及其张量积来描述曲面算符的方式。从曲面算符/2-表示的融合确定 G，是从威尔逊线/1-表示确定 G 这一问题的自然推广。

3.1. 群的2-表示

在描述 2-表示之前，我们先定义 2-矩阵。 $n \times n$ 2-矩阵 M 是一个条目为向量空间的矩阵。也就是说，每个 M_{ij} $1 \leq i$、$j \leq n$ 都是一个向量空间。矩阵乘法通过向量空间的直和与张量积定义为

$$(M \times W)_{ij} := \bigoplus_k M_{ik} \otimes W_{kj} \ , \tag{3.1}$$

其中， $\oplus$ 和 $\otimes$ 分别表示向量空间的直和与张量积。请注意，2-矩阵乘法仅在同构意义下满足结合律

$$M \times (W \times K) \simeq (M \times W) \times K \ . \tag{3.2}$$

回顾一下，群 G 的复表示（1-表示）是一个同态 R ，它将该群映射到复数域上可逆矩阵构成的群。这个同态为每个群元素 $g \in G$ 指派一个矩阵 $R(g)$。固定一个整数 n（2-表示的维数），一个 2-表示 ρ 为每个群元素 $g \in G$ [18 指派一个 $n \times n$ 2-矩阵 $\rho(g)$ – 20]。对于群的 1-表示，我们要求 $R(g)R(h) = R(gh)$。类似地，对于 2-表示，我们要求同构

$$\phi_{g,h} : \rho(g) \times \rho(g) \to \rho(gh), \ \phi_1 : \rho(1) \to \mathbb{1}_n \ , \tag{3.3}$$

其中 1 是群的单位元， $\mathbb{1}_n$ 是一个 2-矩阵，其对角线上是 1 维向量空间，其余所有分量都是零向量空间。我们可以使用同构 $\phi_{g,\ h}$ ，以两种不同的方式从 2-矩阵乘积 $\rho(g) \times \rho(h) \times \rho(k)$ 得到 $\rho(ghk)$

$$\begin{array}{ccc} \rho(g) \times \rho(h) \times \rho(k) & \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\rho(g)} \circ \phi_{h,k}} & \rho(g) \times \rho(hk) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_{g,h} \circ \mathrm{Id}_{\rho(k)}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_{g,hk}} \\ \rho(gh) \times \rho(k) & \xrightarrow[\phi_{g,hk}]{} & \rho(ghk) \end{array} \tag{3.4}$$

我们要求该图表可交换。

这些约束的解很直接。同构 $\rho(g)\rho(g^{-1}) \simeq \mathbb{1}_n$ 意味着 $\rho(g)$ 是一个 $n \times n$ 置换2-矩阵。也就是说， $\rho(g)$ 是一个每行每列都只有一个非零元素的矩阵。此外，这个非零元素是一个 1 维向量空间。将 $\rho(g)$ 中的每个非零元素替换为整数 1，即可得到一个置换矩阵。令 σ_g 表示该置换。同构 $\phi_{g,\ h}$完全由 n 相位 $\tilde{c}_i(g,h)$、 $1 \leq i \leq n$指定。这些相位应满足约束 (3.4)，该约束可以写成

$$\tilde{c}_{\sigma_g^{-1}(i)}(h,k)\tilde{c}_i(g,hk) = \tilde{c}_i(g,h)\tilde{c}_i(gh,k) \ . \tag{3.5}$$

令 $\tilde{c}(g,h)$ 表示 n 相位 $\tilde{c}_i(g,h)$ 的集合。那么，约束 (3.5) 意味着 $\tilde{c}(g,h)$ 是群 $Z^2_\sigma(G, U(1)^n)$ 中的一个 2- 余循环，其中 G 通过置换 $U(1)$ 个因子作用于 $U(1)^n$。因此，群 G 的每个 2-表示都由一个置换标记

σ_n 和一个 2-余循环 $\tilde{c}(g,h)$。事实上，通过研究诱导表示，可以证明不可约 2-表示由子群 $K \subset G$ 和上同调类 $[c] \in H^2(K, U(1))$ 的选择标记，并且视共轭 [19]而定。因此，在本文余下部分，我们将用元组 $(K,[c])$ 标记不可约 2-表示，其中记号$[c]$ 表示 2-余循环 c的上同调类。如果两个不可约 2-表示 $(K,[c])$ 和 $(H,[d])$ 同构，则

$$H = {}^gK, \ [d] = [{}^gc] \ , \tag{3.6}$$

其中，${}^gK$ 表示 K 的元素被 $g \in G$ 共轭，而 ${}^gc := c(gag^{-1}, gbg^{-1})$。因此，不可约 2-表示的同构类由 G 的子群共轭类及相应 2-余循环的上同调类标记。我们将群 G 的 2-表示范畴记为$2\mathrm{Rep}(G)$[5]。

3.2. 曲面算符融合规则

在 [10], 中，作者表明，通过在曲面上高阶规范化威尔逊线得到的简单曲面算符由不可约 2-表示标记。我们将这些曲面算符标记为 $S_{(K,[c])}$ ，其中$(K,[c])$是 G的一个不可约 2-表示。由 G 的不可约 2-表示$(K,[c])$和$(H,[d])$标记的两个曲面算符 $S_{(K,[c])}$ 和 $S_{(H,[d])}$ 的融合，由 2-表示张量积分解为不可约 2-表示 $[10,21]$给出。

$$S_{(K,[c])} \times S_{(H,[d])} = \sum_{g \in K\backslash G/H} S_{(K\cap {}^gH, [c\cdot {}^gd])} \ . \tag{3.7}$$

其中 $[c \cdot {}^gd]$ 隐含表示限制到群 $K \cap {}^gH$ 上的 2-余循环 $c \cdot {}^gd$ 的上同调类。我们可以将此表达式改写为

$$S_{(K,[c])} \times S_{(H,[d])} = \sum_{(L,[e])} N^{(L,[e])}_{(K,[c]),(H,[d])} \ S_{(L,[e])} \ , \tag{3.8}$$

其中整数 $N^{(L,[e])}_{(K,\ [c]),\ (H,\ [d])}$ 定义如下

$$N^{(L,[e])}_{(K,[c]),(H,[d])} := |\{g \in K\backslash G/H \mid (L,[e]) = (K \cap {}^gH, [c\cdot {}^gd])\}| \tag{3.9}$$

标记为两个表示的曲面算符融合规则满足

$$S_{(K,[c])} \times S_{(H,[d])} = \sum_{g \in K\backslash G/H} S_{(K\cap {}^gH, [c\cdot {}^gd])} = \sum_{g \in K\backslash G/H} S_{({}^{g^{-1}}K\cap H, [{}^{g^{-1}}c\cdot d])} \tag{3.10}$$

$$= \sum_{g^{-1} \in H\backslash G/K} S_{({}^{g^{-1}}K\cap H, [{}^{g^{-1}}c\cdot d])} = S_{(H,[d])} \otimes S_{(K,[c])} \ , \tag{3.11}$$

[5] $2\mathrm{Rep}(G)$ 实际上是一个 2-范畴。

在上面的第一个等式中，我们使用了以下事实：由 $(K\cap {}^{g}H, [c\cdot {}^{g}d])$ 和 $({}^{g^{-1}}K\cap H, [{}^{g^{-1}}c\cdot d])$ 标记的 2-表示是等价的。在上面的第二个等式中，我们使用了双陪集 $g\in K\backslash G/H \to g^{-1}\in H\backslash G/K$ 之间的同构。换句话说，由高阶规范化 Rep(G) 产生的凝聚缺陷的融合是交换的。请注意，一般凝聚缺陷的融合可以是非交换的 [8]。

根据融合规则，我们发现平凡曲面算符为 $S_{(G,[1])}$。 $S_{(K,[c])}$ 是可逆曲面算符，当且仅当存在另一个曲面算符 $S_{(H,[d])}$ 使得

$$S_{(K,[c])}\times S_{(H,[d])} = S_{(G,[1])}\ . \tag{3.12}$$

利用 (3.7)，我们发现可逆曲面算符恰好是由 2-表示 $(G,[c])$ 标记的那些，其中 $[c]\in H^2(G, U(1))$。因此，可逆曲面算符组成的群为 $H^2(G,U(1))$。这表明，任何具有由线算符实现的 Rep(G) 对称性的 $d\geq 3$ 维量子场论，都包含实现 $H^2(G,U(1))$ $(d-3)$- 形式对称性的可逆凝聚曲面。请注意，这些曲面不一定对该量子场论具有忠实作用。

形式为 $S_{(K,[1])}$ 的曲面算符的融合，其中 $[1]$ 表示 $H^2(K,U(1))$ 的单位元，由下式给出

$$S_{(K,[1])}\times S_{(H,[1])} = \sum_{g\in K\backslash G/H} S_{(K\cap {}^{g}H,[1])}\ . \tag{3.13}$$

这是群 G [22] 的伯恩赛德环 $B(G)$。 $B(G)$ 是该群表示环（Rep(G)）的类似物，不过它描述的是 G 在有限集上的表示，其中群为 G 。G规范理论中的威尔逊线与曲面算符的融合，为理解 G 在向量空间和有限集上的表示提供了统一视角。在后续各节的讨论中，引入有限群的标记表很有用。群 G 的标记表，其行和列由 G 的子群共轭类索引。表中的元素由下式给出

$$m_{K,H} := |\{g\in K\backslash G/H \mid K\subseteq {}^{g}H\}|\ . \tag{3.14}$$

融合系数 $N^{(L,[1])}_{(K,\ [1]),\ (H,\ [1])}$ 可以通过标记表按以下公式写出

$$N^{(L,[1])}_{(K,[1]),(H,[1])} = \sum_{M} m_{K,M}\, m_{H,M}\, m^{-1}_{M,L}\ . \tag{3.15}$$

其中求和遍历 G的子群共轭类。令 $CS(G)$表示 G的子群共轭类集合。若存在同构的

伯恩赛德环，则称两个群 σ 和 CS具有同构的伯恩赛德环；当且仅当存在集合双射G_1: $\to CS(G_2)$ ()，使得

$$N^{(L,[1])}_{(K,[1]),(H,[1])} = N^{(\sigma(L),[1])}_{(\sigma(K),[1]),(\sigma(H),[1])} \ . \tag{3.16}$$

类似地，如果存在集合之间的双射 $\sigma: CS(G_1) \to CS(G_2)$，使得.....，则称两个群 G_1 和 G_2 具有同构的标记表。

$$m^{(G_1)}_{K,H} = m^{(G_2)}_{\sigma(K),\sigma(H)} \ . \tag{3.17}$$

具有同构标记表的两个群具有同构的伯恩赛德环。保持子群共轭类标准基的伯恩赛德环同构意味着标记表同构。

由 G 的 2-表示标记的曲面算符融合，是伯恩赛德环的一种推广，即利用 $H^2(K,U(1))$、$K \subseteq G$ [21][6]定义的扭曲 Burnside 环。在凝聚缺陷的背景下，曲面算符融合规则与扭曲 Burnside 环之间的关系已在 [9]中阐述。与上述定义类似，在第 4.5 节中，我们将通过定义扭曲 Burnside 环同构，并研究这种同构存在的必要条件，找出具有同构曲面算符融合的群。

3.3. 例子

3.3.1. Z_6

群 Z_6 的子群同构于 Z_1、Z_2、Z_3、Z_6。这些子群的上同调群均为平凡 2nd 。因此，我们有 4 个不可约 2-表示，分别标记为 $(Z_1,[1])$、$(Z_2,[1])$、$(Z_3,[1])$、$(Z_6,[1])$。由这些表示标记的曲面算符的融合规则如下：

$$\begin{aligned}
&S_{(\mathbb{Z}_1,[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_1,[1])} = 6S_{(\mathbb{Z}_1,[1])} \ , \ S_{(\mathbb{Z}_1,[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_2,[1])} = 3S_{(\mathbb{Z}_1,[1])} \ , \\
&S_{(\mathbb{Z}_1,[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_3,[1])} = 2S_{(\mathbb{Z}_1,[1])} \ , \ S_{(\mathbb{Z}_2,[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_2,[1])} = 3S_{(\mathbb{Z}_2,[1])} \ , \\
&S_{(\mathbb{Z}_2,[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_3,[1])} = S_{(\mathbb{Z}_1,[1])} \ , \ \ S_{(\mathbb{Z}_3,[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_3,[1])} = 2S_{(\mathbb{Z}_3,[1])} \ .
\end{aligned} \tag{3.18}$$

4 $S_{(\mathbb{Z}_6,[1])}$ 是平凡曲面算符。注意，非可逆曲面算符$S_{(\mathbb{Z}_2,[1])}$ 和 $S_{(\mathbb{Z}_3,[1])}$ 融合后只有唯一结果[7]。这种融合源于该群的直

[6]基于 $H^n(K,U(1))$ 的广义伯恩赛德环及相关标记表在 [23] 中进行了研究。[7]即使规范群不是直积，非可逆线算符也可以具有此类融合[24]。

积结构 $\mathsf{Z}_6 \simeq \mathsf{Z}_2 \times \mathsf{Z}_3$。在第4.3节中，我们将说明，曲面算符的融合规则可用于确定该群是否为更小群的直积。

3.3.2. S_3

在共轭意义下，S_3 群的子群为 $\mathsf{Z}_1, \mathsf{Z}_2 = \{(), (23)\}$、$\mathsf{Z}_3 = \{(123), (132)\}, S_3$。所有这些群的 2nd 上同调群都是平凡的。因此，不可约 2-表示由 $(\mathsf{Z}_1, [1])$、$(\mathsf{Z}_2, [1])$、$(\mathsf{Z}_3, [1])$、$(S_3, [1])$ 标记。2-表示的数量与 Z_6 群相同。由这些表示标记的曲面算符融合规则如下：

$$
\begin{aligned}
&S_{(\mathbb{Z}_1,[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_1,[1])} = 6S_{(\mathbb{Z}_1,[1])}\ ,\ S_{(\mathbb{Z}_1,[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_2,[1])} = 3S_{(\mathbb{Z}_1,[1])},\\
&S_{(\mathbb{Z}_1,[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_3,[1])} = 2S_{(\mathbb{Z}_1,[1])}\ ,\ S_{(\mathbb{Z}_2,[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_2,[1])} = S_{(\mathbb{Z}_1,[1])} + S_{(\mathbb{Z}_2,[1])}\ ,\\
&S_{(\mathbb{Z}_2,[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_3,[1])} = S_{(\mathbb{Z}_1,[1])}\ ,\quad S_{(\mathbb{Z}_3,[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_3,[1])} = 2S_{(\mathbb{Z}_3,[1])}\ .
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

$S_{(S_3,[1])}$ 是平凡曲面算符。注意，非可逆曲面算符$S_{(\mathbb{Z}_2,[1])}$和 $S_{(\mathbb{Z}_3,[1])}$ 融合后只有一种结果。这种融合源于群 $S_3 \simeq \mathsf{Z}_3 \rtimes \mathsf{Z}_2$ 的半直积结构。在第4.3节中，我们将说明融合规则可用于判定一个群是否为较小群的半直积。

3.3.3. D_8

D_8 有以下正规子群

$$
D_4,\ \{[1],[r],[r^2]\} \simeq \mathbb{Z}_4,\ \{[1],[r^2],[s]\} \simeq \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,\ \{[1],[r^2],[rs]\} \simeq \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,\ \{1,r^2\} \simeq \mathbb{Z}_2, \{[1]\}
\tag{3.20}
$$

这些子群在共轭作用下保持不变。D_8 还有以下非正规子群

$$
\{1,s\}, \{1,rs\}, \{1,r^2s\}, \{1,r^3s\}\ ,
\tag{3.21}
$$

它们都同构于 Z_2。在共轭作用下，这些子群分为两类 s

$$
\{\{1,s\},\{1,r^2s\}\}, \{\{1,rs\},\{1,r^3s\}\}\ .
\tag{3.22}
$$

除 $H^2(\mathsf{Z}_2 \times \mathsf{Z}_2, U(1)) = \mathsf{Z}_2$ 外，所有子群的 2nd 上同调群均为平凡。不可约 2-表示标记为

$$
(\mathbb{Z}_1,[1]),\ (\mathbb{Z}_2^{(r^2)},[1]),\ (\mathbb{Z}_2^{(s)},[1]),\ (\mathbb{Z}_2^{(rs)},[1]),\ (\mathbb{Z}_4^{(r)},[1]),\ (D_8,[1]),
$$

$$(\mathbb{Z}_2^{(r^2)} \times \mathbb{Z}_2^{(s)}, [1]), (\mathbb{Z}_2^{(r^2)} \times \mathbb{Z}_2^{(s)}, [c]), (\mathbb{Z}_2^{(r^2)} \times \mathbb{Z}_2^{(rs)}, [1]), (\mathbb{Z}_2^{(r^2)} \times \mathbb{Z}_2^{(rs)}, [d]) \ . \quad (3.23)$$

循环分量的上标表示子群的生成元。$[c]$ 是 $H^2(\mathbf{Z}^{(r^2)}{}_2 \times \mathbf{Z}_2^{(s)}, U(1))$ 中非平凡的上同调类，而 $[d]$ 是 $H^2(\mathbf{Z}^{(r^2)}{}_2 \times \mathbf{Z}_2^{(rs)}, U(1))$ 中非平凡的上同调类。曲面算子 $S_{(D_8,[1])}$ 在融合下为单位元。$S_{(\mathbb{Z}_1,[1])}$ 与任意曲面算子的融合为

$$S_{(\mathbb{Z}_1,[1])} \times S_{(L,[e])} = \frac{|G|}{|L|} S_{(\mathbb{Z}_1,[1])} \ . \quad (3.24)$$

我们还有以下融合

$$\begin{aligned}
&S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)},[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)},[1])} = 4S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)},[1])} \ , && S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)},[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_2^{(s)},[1])} = 2S_{(\mathbb{Z}_1,[1])} \ , \\
&S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)},[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_2^{(r)},[1])} = 2S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)},[1])} \ , && S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)},[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)}\times\mathbb{Z}_2^{(s)},[1])} = 2S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)},[1])} \ , \\
&S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)},[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)}\times\mathbb{Z}_2^{(s)},[c])} = 2S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)},[1])} \ , && S_{(\mathbb{Z}_2^{(s)},[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_2^{(s)},[1])} = S_{(\mathbb{Z}_1,[1])} + 2S_{(\mathbb{Z}_2^{(s)},[1])} \ , \\
&S_{(\mathbb{Z}_2^{(s)},[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_2^{(rs)},[1])} = 2S_{(\mathbb{Z}_1,[1])} \ , && S_{(\mathbb{Z}_2^{(s)},[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_4^{(r)},[1])} = S_{(\mathbb{Z}_1,[1])} \ , \\
&S_{(\mathbb{Z}_2^{(s)},[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)}\times\mathbb{Z}_2^{(s)},[1])} = 2S_{(\mathbb{Z}_2^{(s)},[1])} \ , && S_{(\mathbb{Z}_2^{(s)},[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)}\times\mathbb{Z}_2^{(s)},[c])} = 2S_{(\mathbb{Z}_2^{(s)},[1])} \\
&S_{(\mathbb{Z}_2^{(s)},[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)}\times\mathbb{Z}_2^{(rs)},[1])} = S_{(\mathbb{Z}_1,[1])} \ , && S_{(\mathbb{Z}_2^{(s)},[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)}\times\mathbb{Z}_2^{(rs)},[d])} = S_{(\mathbb{Z}_1,[1])} \ , \\
&S_{(\mathbb{Z}_2^{(r)},[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_2^{(r)},[1])} = 2S_{(\mathbb{Z}_2^{(r)},[1])} \ , && S_{(\mathbb{Z}_2^{(r)},[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)}\times\mathbb{Z}_2^{(s)},[1])} = S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)},[1])} \ , \\
&S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)}\times\mathbb{Z}_2^{(s)},[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)}\times\mathbb{Z}_2^{(s)},[1])} = 2S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)}\times\mathbb{Z}_2^{(s)},[1])} \ , && S_{(\mathbb{Z}_2^{(r)},[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)}\times\mathbb{Z}_2^{(s)},[c])} = S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)},[1])} \ , \\
&S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)}\times\mathbb{Z}_2^{(s)},[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)}\times\mathbb{Z}_2^{(s)},[c])} = 2S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)}\times\mathbb{Z}_2^{(s)},[c])} \ , && S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)}\times\mathbb{Z}_2^{(s)},[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)}\times\mathbb{Z}_2^{(rs)},[1])} = S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)},[1])} \ , \\
&S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)}\times\mathbb{Z}_2^{(s)},[1])} \times S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)}\times\mathbb{Z}_2^{(rs)},[d])} = S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)},[1])} \ , && S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)}\times\mathbb{Z}_2^{(s)},[c])} \times S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)}\times\mathbb{Z}_2^{(rs)},[d])} = S_{(\mathbb{Z}_2^{(r^2)},[1])} \ .
\end{aligned} \quad (3.25)$$

其他融合规则可通过置换 $r \to r, s \to rs, c \to d$ 得到。

3.3.4. Q_8

Q_8 群具有子群 $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2 = \{1, ijk\}$、$\mathbf{Z}_4 = \{1, i, i^2, i^3\}$、$\mathbf{Z}_4 = \{1, j, j^2, j^3\}$、$\mathbf{Z}_4 = \{1, k, k^2, k^3\}$、$Q_8$。这些都是在共轭作用下保持不动的正规子群。所有这些群的 2nd 上同调群都是平凡的。因此，不可约 2-表示由 $(\mathbf{Z}_1, [1])$、$(\mathbf{Z}_2, [1])$、$(\mathbf{Z}_4^{(i)}, [1])$、$(\mathbf{Z}_4^{(j)}, [1])$、$(\mathbf{Z}_4^{(k)}, [1])$、$(Q_8, [1])$ 标记。

此时曲面算符的融合规则为

$$
\begin{aligned}
&S_{(\mathbb{Z}_1,[1])}\times S_{(\mathbb{Z}_1,[1])}=8S_{(\mathbb{Z}_1,[1])}\ , \quad && S_{(\mathbb{Z}_1,[1])}\times S_{(\mathbb{Z}_2,[1])}=4S_{(\mathbb{Z}_1,[1])}\ ,\\
&S_{(\mathbb{Z}_1,[1])}\times S_{(\mathbb{Z}_4^{(i)},[1])}=2S_{(\mathbb{Z}_1,[1])}\ , \quad && S_{(\mathbb{Z}_2,[1])}\times S_{(\mathbb{Z}_2,[1])}=4S_{(\mathbb{Z}_2,[1])}\ ,\\
&S_{(\mathbb{Z}_2,[1])}\times S_{(\mathbb{Z}_4^{(i)},[1])}=2S_{(\mathbb{Z}_2,[1])}\ , \quad && S_{(\mathbb{Z}_2,[1])}\times S_{(Q_8,[1])}=S_{(\mathbb{Z}_2,[1])}\ ,\\
&S_{(\mathbb{Z}_4^{(i)},[1])}\times S_{(\mathbb{Z}_4^{(i)},[1])}=2S_{(\mathbb{Z}_4^{(i)},[1])}\ , && S_{(\mathbb{Z}_4^{(i)},[1])}\times S_{(\mathbb{Z}_4^{(j)},[1])}=S_{(\mathbb{Z}_2,[1])}\ .
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

其他融合规则可通过置换 i、j、k得到。$S_{(Q_8,[1])}$ 是平凡曲面算符。

我们发现， D_8 和 Q_8中按共轭分类的子群数量不同，导致这两个群的不可约 2-表示数量不同。因此，曲面算符融合（甚至曲面算符的数量）可以区分它们。然而，正如 $\mathbf{Z}_6$ 和 S_3的例子清楚表明的那样，仅凭曲面算符的数量并不总能区分两个群。

4. G 曲面算符融合

在本节中，我们将研究曲面算符融合，以及能够从中重构出的群 G的性质。让我们考察曲面算符融合规则的一些性质。回顾曲面算符融合的表达式。

$$
S_{(K,[c])}\times S_{(H,[d])}=\sum_{g\in K\backslash G/H} S_{(K\cap {}^gH,[c\cdot {}^gd])}\ . \tag{4.1}
$$

由融合系数（3.9）的表达式，我们得到 $N^{(L,[e])}_{(K,\ [c])\ ,\ (H,\ [d])}\ \le\ |G|$。当 $K=H=\mathbf{Z}_1$ 时，2-余循环 c 是平凡的，并且 $|\mathbf{Z}_1\backslash G/\mathbf{Z}_1|=|G|$。因此，融合规则化简为

$$
S_{(\mathbb{Z}_1,[1])}\times S_{(\mathbb{Z}_1,[1])}=|G|\ S_{(\mathbb{Z}_1,[1])}\ . \tag{4.2}
$$

此外， $|H\backslash G/K|=|G|$ 当且仅当 $H=K=\mathbf{Z}_1$。因此，$S_{(\mathbb{Z}_1,[1])}$ 是满足上述融合规则的唯一曲面算子。 G 的子群阶可以从融合规则中得出

$$
S_{(K,[c])}\times S_{(\mathbb{Z}_1,[1])}=\frac{|G|}{|K|}S_{(\mathbb{Z}_1,[1])}\ . \tag{4.3}
$$

给定一个 2-表示（K， $[c]$），如果融合系数

$$
N^{(K,[c])}_{(K,[c]),(K,[c])}\neq 0 \tag{4.4}
$$

那么 $[c] = [1]$。事实上，上述非平凡融合系数意味着存在$g \in K\backslash G/K$，使得 $[c \cdot {}^g c] = [c]$，这意味着 $[c] = [1]$。更一般地，给定一个 2-表示（K，$[c]$），如果融合系数

$$N^{(H,[d])}_{(H,[d]),(K,[c])} \neq 0 \tag{4.5}$$

对于满足 $|K| = |H|$的某个 $(H,[d])$，则 K 和 H 属于同一个子群共轭类，并且 $[c] = [1]$。事实上，上述非平凡融合系数意味着存在 $g \in H\backslash G/K$，使得

$$H \cap {}^g K = H,\ [d \cdot {}^g c] = [d]\ . \tag{4.6}$$

由于 $|K| = |H|$、$H \cap {}^g K = H$，可知 ${}^g K = H$。此外，由 $[d \cdot {}^g c] = [d]$ 可知 $[c] = [1]$。

让我们运用上述讨论的曲面算符融合规则的性质，来推导群 G 的性质。该群由标记为 ρ_1、...、ρ_N 的 N 个凝聚曲面算符抽象地确定，其融合规则为

$$S_{\rho_1} \times S_{\rho_2} = \sum_{i=1}^{N} N^{\rho_i}_{\rho_1,\rho_2}\ S_{\rho_i}\ . \tag{4.7}$$

一个 2-表示 ρ 对应于某个 $K_\rho \subseteq G$ 和 $[c_\rho] \in H^2$（K_ρ、$U(1)$）。首先，在融合下存在一个唯一的单位元曲面算符。我们将相应的 2-表示标记为 1。我们知道

$$K_{\mathbb{1}} = G,\ [c_{\mathbb{1}}] = [1]\ . \tag{4.8}$$

此外，存在唯一的曲面算子，记作 $S_{\rho_{\max}}$，使融合系数 $N^{\rho_{\max}}_{\rho_{\max},\ \rho_{\max}}$取最大值。于是，

$$|G| = N^{\rho_{\max}}_{\rho_{\max},\rho_{\max}}\ . \tag{4.9}$$

我们知道

$$K_{\rho_{\max}} = \mathbb{Z}_1,\ [c_{\rho_{\max}}] = [1]\ . \tag{4.10}$$

通过在所有曲面算子中识别出曲面算子 $S_{\rho_{\max}}$，我们可以利用以下方法求出任意 2-表示 ρ 的 K_ρ 的阶

$$|K_\rho| = \frac{|G|}{N^{\rho_{\max}}_{\rho,\rho_{\max}}}\ . \tag{4.11}$$

此外，根据（4.4）附近的讨论，我们得出，$[c_\rho] = [1]$ 当且仅当

$$N^{\rho}_{\rho,\rho} \neq 0\ . \tag{4.12}$$

由于我们可以识别出具有平凡 $[c_\rho]$的2-表示子集，因此可以从曲面算符融合构造 G 的伯恩赛德环。

对于两个 2-表示 ρ 和 ρ'， $|K_\rho| = |K_\rho|$、 K_ρ 和 $K_{\rho'}$ 属于同一子群共轭类，当且仅当

$$N_{\rho,\rho'}^{\rho} \neq 0 \ . \tag{4.13}$$

该判据使我们能够找出所有在共轭意义下对应于同一 K_ρ 的 2-表示。

我们能否判定群 G 是否为阿贝尔群? 在以下小节中，我们将表明，可以从曲面算符融合规则中识别出 G 的所有正规子群及其交集。随后可利用这些信息判定G 是否为阿贝尔群。若 G为阿贝尔群，我们将表明可由融合规则在同构意义下构造出 G 。

4.1. 从融合规则得到的正规子群

我们可以从曲面算符融合规则中推断正规子群的存在与否。

一个曲面算子 S_ρ 满足如下融合规则

$$S_\rho \times S_\rho = \sum_{i=1}^{\frac{|G|}{|K_\rho|}} S_{\rho_i} \ , \tag{4.14}$$

其中，对于所有 i， K_{ρ_i} 和 K_ρ 属于同一个子群共轭类，当且仅当 K_ρ 是 G 的正规子群。

为了解释这一点，考虑融合规则

$$S_{(K_\rho,[c_\rho])} \times S_{(K_\rho,[c_\rho])} = \sum_{i=1}^{\frac{|G|}{|K_\rho|}} S_{(K_\rho,[c_{\rho_i}])} \ . \tag{4.15}$$

由融合规则（3.7）的表达式可得

$$^gK_\rho = K_\rho \ \forall \ g \in K_\rho \backslash G / K_\rho \implies {}^gK_\rho = K_\rho \ \forall \ g \in G \ , \tag{4.16}$$

这意味着 K_ρ 是一个正规子群。反过来，考虑正规子群$K_\rho \subset G$。利用 (3.7)，我们得到融合规则

$$S_{(K_\rho,[c_\rho])} \times S_{(K_\rho,[c_\rho])} = \sum_{i=1}^{\frac{|G|}{|K_\rho|}} S_{(K_\rho,[c_{\rho_i}])} \ . \tag{4.17}$$

如果 $N_{\rho}^{\rho''}{}_{,\rho'} \neq 0$ ，其中 2-表示 ρ 和 ρ' 分别对应正规子群K_{ρ}、$K_{\rho'} \subseteq G$，那么融合规则 (3.7) 的表达式意味着

$$K_{\rho''} = K_{\rho} \cap K_{\rho'} \ . \tag{4.18}$$

这表明，可以由曲面算符融合规则确定 G 的正规子群的模格。回顾一下，G的正规子群的模格也可以由特征标表确定（见第 2 节）。更一般地，若 K_{ρ}不是正规子群而 $K_{\rho'}$ 是正规子群，则我们得到

$$K_{\rho''} = K_{\rho} \cap K_{\rho'} \ , \tag{4.19}$$

然后

$$|K_{\rho} \cap K_{\rho'}| = \frac{|G|}{N_{\rho'',\rho_{\max}}^{\rho_{\max}}} \tag{4.20}$$

其中 ρ为某个元素。因此，可以由曲面算符融合规则确定一个正规子群与一个非正规子群的交的阶。请注意，这一信息无法从特征标表中获得（见第 2 节中关于 D_8 v/s Q_8 的讨论）。

4.2. G/N的 2-表示

在上一小节中，我们了解到，给定曲面算符 S_{ρ}的融合规则，我们可以识别 G的正规子群。在本节中，我们将证明，给定 G的一个正规子群 N ，商群 G/N 的不可约 2-表示也由 G 的 2-表示所确定。 G/N 的不可约 2-表示由 $(M, [d])$ 标记，其中 M是 G 的一个子群，且 $d \in H^2(M, U(1))$。对应定理指出，包含 N 的 G 的子群与 G/N 的子群之间存在一个双射（例如见 [25]）。对于每个子群 $M \subseteq G/N$ ，都存在某个包含 N 的$K \subseteq G$ ，使得

$$K/N \cong M \ . \tag{4.21}$$

这是一个双射。因此， G/N 的不可约 2-表示也可以等价地标记为 $(K/N, [r])$，其中 $[r] \in H^2(K/N, U(1))$。 G/N的一个 2-表示 $(K/N, [r])$ 对应于 G 的一个 2-表示 $(K, [c])$，其中 $[c] \in H^2(K, U(1))$ 是 2-余循环 r 经膨胀所得的上同调类，其定义为

$$c = r \circ \pi \ , \tag{4.22}$$

其中 $\pi:\ G \to G/N$ 是投影 $\pi(g) = Ng$。如果存在 $\pi(l) \in G/N$ 使得

$$(K/N, [r]) = ({}^{\pi(l)}(H/N), [{}^{\pi(l)}p])\ . \tag{4.23}$$

于是我们得到关系

$$\pi(l)\pi(h)\pi(l)^{-1} = \pi(lhl^{-1}) = \pi(k) \tag{4.24}$$

对于 $h \in H$ 和 $k \in K$。这意味着，对于某个 $n \in N$，有 $lhl^{-1} = nk$ 。由于 $N \subseteq K$，$k' := nk \in K$。因此，$lhl^{-1} = k'$ ，这表明 H 和 K 是 G的共轭子群。此外，2-余循环 r和 p分别膨胀到 $H^2(K, U(1))$ 和 $H^2(H, U(1))$ 后，在共轭 ${}^lH = K$作用下互相映射。这表明，G/N的等价 2-表示 $(K/N, [r])$ 和 $(H/N, [p])$ 分别对应于 G的等价 2-表示 $(K, [c])$ 和 $(H, [d])$，其中 $c := r \circ \pi$和 $d := p \circ \pi$。

考虑融合系数

$$N^{(L/N,[p])}_{(K/N,[r]),(H/N,[s])} = |\{l \in (K/N)\backslash(G/N)/(H/N) \mid (K/N) \cap {}^l(H/N) = (L/N), [r \cdot {}^l s] = [r]\}| \tag{4.25}$$

对于 G/N的三个 2-表示 $(K/N, [r])$、$(H/N, [s])$ 和 $(L/N, [r])$。设 $[c], [d], [e]$ 分别是 2-余循环 $[r], [s], [p]$的膨胀。我们有

$$N^{(L,[e])}_{(K,[c]),(H,[d])} = |\{g \in K\backslash G/H \mid K \cap {}^gH = L, [c \cdot {}^g d] = [e]|\ . \tag{4.26}$$

双陪集 $K\backslash G/H$ 是关于等价关系$g_1 \sim g_2$ 的等价类集合：若存在某些 $k \in K$、$h \in H$使得 $g_1 = kg_2h$ ，则有 N 是 K的正规子群，H 和 G，那么

$$kg_1h = g_2 \implies \pi(kg_1h) = \pi(g_2) \implies \pi(k)\pi(g_1)\pi(h) = \pi(g_2) \tag{4.27}$$

注意，$\pi(k) \in K/N, \pi(h) \in H/N$ 以及 $\pi(g_1)\ \pi(g_2) \in G/N$。因此，若 $g_1 \sim g_2$，则$\pi(g_1)$ 和 $\pi(g_2)$ 属于 $(K/N)\backslash(G/N)/(H/N)$ 中的同一个等价类。类似地，若 $g_1 \not\sim g_2$ ，则 $\pi(g_1) \not\sim \pi(g_2)$。投影 π 定义了集合$K\backslash G/H$与 $(K/N)\backslash(G/N)/(H/N)$之间的双射。现在，若 $g \in K\backslash G/H$满足

$$K \cap H^g = L, [c \cdot d^g] = [e]\ , \tag{4.28}$$

then

$$\begin{aligned} K \cap {}^gH = L \Leftrightarrow (K \cap {}^gH)/N = L/N &\Leftrightarrow (K/N) \cap ({}^gH)/N = L/N \\ &\Leftrightarrow (K/N) \cap {}^{\pi(g)}(H/N) = L/N \end{aligned} \tag{4.29}$$

and

$$[c \cdot {}^{g}d] = [e] \Leftrightarrow [r \circ \pi \cdot {}^{g}(s \circ \pi)] = [p \circ \pi] \Leftrightarrow [r \cdot {}^{\pi(g)}s] = [p] \ . \tag{4.30}$$

其中 $\pi(g) \in (K/N)\backslash(G/N)/(H/N)$。因此，

$$N^{(L/N,[p])}_{(K/N,[r]),(H/N,[s])} = N^{(L,[e])}_{(K,[c]),(H,[d])} \ . \tag{4.31}$$

这表明，对于任意正规子群$N \lhd G$，子环 2Rep(G/N) 都包含于 2Rep(G)。给定一个 2-表示 ρ，我们如何判断 $\rho \in 2\text{Rep}(G/N)$? 首先，如果 $\rho \in 2\text{Rep}(G/N)$，那么 K_ρ应包含正规子群 N。这可以利用曲面算符的融合规则和方程 (4.20) 进行检验。最后，我们还要求 $[c_\rho]$是 $H^2(K_\rho/N, U(1))$ 中某个 2-余循环的膨胀。对此，一个必要条件是，2-余循环 c_ρ 在正规子群 N 上的限制应为平凡的。这可以利用融合规则进行检验

$$S_\rho \times S_{\rho_N} = S_{\rho'} \ , \tag{4.32}$$

其中 ρ_N 是满足 $K_{\rho_N} = N$ 和 $[c_{\rho_N}] = [1]$的 2-表示。然后，利用 (3.7)，我们发现 $[c_{\rho'}] = [1]$ 当且仅当 $[c_\rho|_N] = [1]$。

注意，通常无法确定 N 本身的 2-表示。这是因为， G 的 2-表示只能“获知” N 的子群在 G 的共轭作用下的情况。然而， N 的 2-表示则由 N 的子群在 N 的元素作用下的共轭类确定。一般而言，后者的集合比前者大。

4.3. 群扩张与融合规则

如果群 G 可以通过群扩张（包括直积和半直积）由更小的群构造而成，那么 G 就包含正规子群。既然我们已经知道如何根据融合规则判断正规子群是否存在，接下来可以考虑以下情况。假设除 $K_\rho = G$、Z_1 外，不存在形如 (4.14) 的融合规则。这意味着群 G 不包含任何真正规子群。因此，G 是一个单群，不能写成由更小的群构成的群扩张。在接下来的小节中，我们将考虑这样的情况：对于某个真非平凡子群 $N \subset G$，存在一个或多个形如 (4.14) 的融合。随后，我们将说明，类似的融合规则可用于判断群 G 能否写成直积、半直积或非分裂群扩张。

4.3.1. 直积

假设群 G 是群 N、K 的直积。那么 G 中有两个分别同构于 N 和 K 的正规子群。我们将滥用记号，直接用 N、K 表示这两个正规子群。此外，这些正规子群应满足

$$N \cap K = \mathbb{Z}_1, \ G = NK \ . \tag{4.33}$$

第二个条件等价于要求 $|G| = |N||K|$（注意$|NH| = \frac{|N||H|}{|N \cap H|}$）。因此，群 G 是 N、K 的直积，当且仅当满足以下三个条件

1. $N \triangleleft G$、
$K \triangleleft G$。2.
$N \cap K = \mathsf{Z}_1$。
3. $|G| = |N||K|$。

群的直积结构可以通过曲面算符的融合来确定。

两个 2-表示 ρ 和 ρ' 满足融合规则

$$\begin{aligned} S_\rho \times S_\rho &= \sum_{i=1}^{\frac{|G|}{|K_\rho|}} S_{\rho_i} \ , \\ S_{\rho'} \times S_{\rho'} &= \sum_{j=1}^{\frac{|G|}{|K_{\rho'}|}} S_{\rho'_j} \ , \\ S_\rho \times S_{\rho'} &= S_{\rho_{max}} \ . \end{aligned} \tag{4.34}$$

当且仅当 $G = K_\rho \times K_{\rho'}$ 时，对于所有 i， K_{ρ_i} 和 K_ρ 属于同一个子群共轭类；对于所有 j， $K_{\rho'_j}$ 和 $K_{\rho'}$ 属于同一个子群共轭类。

为了理解这一说法，假设存在上述三种融合。根据第 4.1 节，我们知道，第一种和第二种融合意味着 K_ρ 和 $K_{\rho'}$ 是 G 的正规子群。上述第三种融合意味着（利用 (3.7)）

$$|K_\rho \backslash G / K_{\rho'}| = 1 \text{ and } K_\rho \cap K_{\rho'} = \mathbb{Z}_1 \ . \tag{4.35}$$

由于 K_ρ 和 $K_{\rho'}$ 是正规子群，我们有

$$|K_\rho \backslash G / K_{\rho'}| = \frac{|G|}{|K_\rho K_{\rho'}|} \ . \tag{4.36}$$

上述融合规则表明 $|K_\rho K_{\rho'}| = |G|$，利用 $K_\rho \cap K_{\rho'} = \mathbf{Z}_1$ 可推出$|K_\rho||K_{\rho'}| = |G|$。因此，正规子群 K_ρ 和 $K_{\rho'}$ 满足使 G 成为直积 $K_\rho \times K_{\rho'}$的三个条件。

反过来，如果 $G = K_\rho \times K_{\rho'}$，那么 K_ρ 和 $K_{\rho'}$ 是满足 $K_\rho \cap K_{\rho'} = \mathbf{Z}_1$ 和 $|K_\rho||K_{\rho'}| = |G|$的正规子群。然后，利用 (3.7) 可以很容易验证，相应的 2-表示 ρ 和 ρ' 满足融合规则 (4.34)。

重构阿贝尔 G

根据第 4.1 节，我们知道，可以从曲面算符的融合规则中确定 G 的所有正规子群的阶及其交集。特别地，我们可以检验所有子群是否都是正规子群。如果不是，那么群 G 不是阿贝尔群。如果所有子群都是正规子群，那么 G 具有 $Q_8 \times A$ 的形式，其中 A 是阿贝尔群 [8] [26]。如果 $G = Q_8 \times A$，那么 Q_8 以及 Q_8 的所有子群都是 G 中的正规子群。特别地，标记为 2-表示的曲面算符在 2Rep(G) 中的融合规则包含融合规则 (3.26)。下面证明，Q_8 是唯一一个具有 (3.26) 中给出的曲面算符集合及融合规则的 8 阶群。事实上，8 阶群在同构意义下为 $\mathbf{Z}_8, \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_4, \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$、$D_8$ 和 Q_8。群 $\mathbf{Z}_8, \mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_2$ 和 $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ 分别有 4 、 8 和 16 个子群。因此，这些群分别有 4 、 8 和 16 个不可约 2- 表示。此外，根据第 3.3.3 节的讨论，我们知道 D_8 有 10 个不可约 2-表示。由 (3.26) 可知，Q_8 有 6 个不可约 2-表示。这意味着，仅通过统计 2-表示的数量，就可以将 Q_8 与其他所有 8 阶群区分开来。因此，我们可以利用曲面算符的融合规则来确定 Q_8 是否是 G 的子群，而这反过来决定了 G 是否为阿贝尔群。

如果 G 是阿贝尔的，那么我们可以如下确定群 G ，直至同构。 G是如下形式的直积

$$G = \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \times ... \times \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}} \ , \tag{4.37}$$

其中，$|G| = p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_k^{n_k}$是将 G 的阶分解为素数幂所得的分解。利用第 4.1 节中的讨论，可以根据融合规则求出正规子群及其交集的阶。因此，可以根据曲面算符的融合规则确定整数 p_i 和 n_i 。注意，我们只需要曲面算符S_ρ 与 $[c_\rho] = [1]$ 的融合规则，就能确定阿贝尔群 G。换言之，伯恩赛德环

阿贝尔群 A 具有一些额外性质，但在我们的讨论中不需要用到它们。

G 可以确定一个阿贝尔群。这与 [27], 的结论一致：作者证明，若 G 是阿贝尔群、哈密顿群或极小单群，则伯恩赛德环可以确定群 G。

导出子群

既然我们已经知道如何利用其 2-表示来判断一个群是否为阿贝尔群，就也可以通过 2-表示确定 G 的导出子群。导出子群 $[G,G]$ 是使得 $G/[G,G]$ 成为阿贝尔群的最小正规子群。利用第 4.1 节中的结果，我们可以从融合规则中确定 G 的所有正规子群及其阶。此外，利用第 4.2 节中的结果，我们还可以构造商群的所有 2-表示及其融合规则。这样便可以判断商群是否为阿贝尔群。因此，可以根据 G的 2-表示的融合规则确定导出子群。

4.3.2. 半直积与群扩张

假设群 G 是群 N和 K的半直积。那么，在 G 中有两个分别同构于 N 和 K的子群。我们将滥用记号，直接用 N和 K来标记这些子群。此外，这些子群应满足

$$N \triangleleft G,\ N \cap K = 1,\ G = NK\ . \tag{4.38}$$

请注意，除了 K 不是正规子群之外，该定义与直积情形中的定义相同。由 (4.34) 可知，我们有以下融合规则

$$\begin{aligned} S_\rho \times S_\rho &= \sum_{i=1}^{\frac{|G|}{|K_\rho|}} S_{\rho_i}\ , \\ S_\rho \times S_{\rho'} &= S_{\rho_{\max}}\ . \end{aligned} \tag{4.39}$$

其中，对于所有 i ， K_{ρ_i} 和 K_ρ 属于同一个子群共轭类，当且仅当 $G = K_\rho \rtimes K_{\rho'}$。请注意，由于 $K_{\rho'}$ 不是正规子群，它不满足形如 (4.14) 的融合规则。

最一般的情形是， G 是群 N、K的非分裂扩张。 G 具有一个与 N 同构的正规子群，我们将其记为 N 本身以及 $G/N \simeq K$。在这种情况下， K 不是 G的子群。如果曲面算符融合规则不包含形如 (4.34) 或 (4.39) 的融合，那么规范群 G 无法表示为直积或半直积。本节结果总结于图 5。

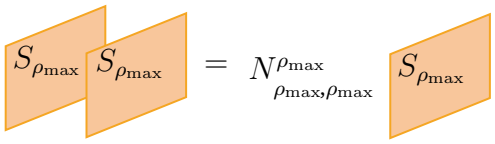
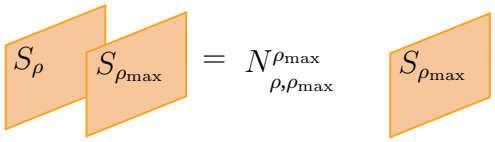
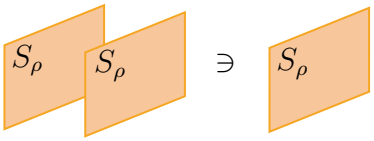
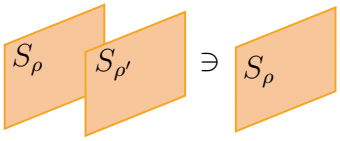
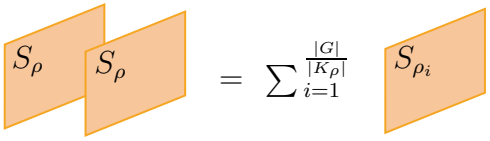
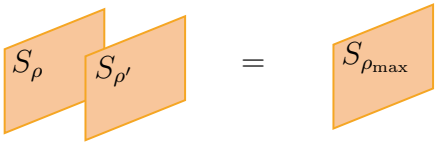
融合类型	G的性质
1. 	$\lvert G\rvert = N^{\rho_{\max}}_{\rho_{\max},\rho_{\max}}$
2. 	$\lvert K_\rho\rvert = \frac{\lvert G\rvert}{N^{\rho_{\max}}_{\rho,\rho_{\max}}}$
3. 	$\rho = (K_\rho, [1])$
4.  和 $\lvert K_\rho\rvert = \lvert K_{\rho'}\rvert$.	$K_\rho \sim K_{\rho'}$
5.  和 $K_\rho \sim K_{\rho_i}\ \forall\ i$.	K_ρ 是一个正规子群。
6. 	
6.1 and S_ρ、S'_ρ 满足融合类型 5。	$G = K_\rho \times K_{\rho'}$
6.2 and S_ρ 满足融合类型 5。	$G = K_\rho \rtimes K_{\rho'}$
6.3 不存在满足融合类型 5 和 6 的 S_ρ 。	G 是一个非分裂群扩张。

图 5：根据曲面算符融合规则得出的 G 的性质。所用记号为 $\sim$ ：相差共轭的等价，$\ni$ ：包含于融合结果中。

4.4. 区分具有同构威尔逊线融合的群

4.4.1. D_n 对比 Q_n

正如我们在第 3.3 节中所见， D_8 群和 Q_8 群可利用 2-表示的数量加以区分。为将此与我们在第4.3节中的讨论联系起来，注意到 $D_8 \simeq \mathbf{Z}_4 \rtimes \mathbf{Z}_2$，而 Q_8 不是半直积。由于曲面算符融合规则可用于区分可写为半直积的群与并非半直积的群，因此 D_8 和 Q_8 可以被区分。

更一般地，考虑二面体群 D_n 和广义四元数群Q_m。这些群具有如下表示:

$$D_n := \langle r, s | r^{\frac{n}{2}} = s^2 = (sr)^2 = 1 \rangle \ , \tag{4.40}$$

$$Q_{2^m} := \langle a, b | a^{2^{n-1}} = b^4 = 1, a^{2^{n-2}} = b^2, bab^{-1} = a^{-1} \rangle \ , \tag{4.41}$$

其中， n 是偶整数，而 m 是任意整数。已知对于所有 $r \geq 3$ ， D_{2^r} 和 Q_{2^r}不同构且具有相同的特征标表（见 [28]第64页）。然而，我们可以利用曲面算符融合来区分这一无限族群对。这是因为二面体群 D_n 是半直积 $\mathbf{Z}_n \rtimes \mathbf{Z}_2$，而广义四元数群不能写成半直积。为理解这一说法，注意任意 $x \in Q_{2^r}$ 对于某个 $1 \leq l \leq 2^r$都具有阶 2^l 。于是， $x^{2^{l-1}}$ 的阶为2。因此， Q_{2^r} 的任意子群都包含阶为二的元素。若对于某些子群 N和 K 以及 $N \cap K = 1$, 有$Q_{2^r} = N \rtimes K$，则 Q_{2^r} 应至少有两个阶为二的元素。然而， Q_{2^r} 只有一个阶为二的元素。因此， Q_{2^r}不是半直积。

4.4.2. 阶为 p^3的群

注意， D_8 和 Q_8 都是阶为 2^3的群。我们可以将这个例子推广，以研究任意素数 p对应的阶为 p^3 的群。已知阶为 p^3 [29]的非阿贝尔群只有两个。它们的特征标表相同（见 [30]第562页，16.14），因此无法通过威尔逊线融合加以区分。它们也都是半直积。其中一个是海森堡群 $H_p := (\mathbf{Z}_p \rtimes \mathbf{Z}_p) \rtimes \mathbf{Z}_p$，另一个是$G_p := \mathbf{Z}_{p^2} \rtimes \mathbf{Z}_p$。利用以下事实可以区分 H_p和 G_p : H_p 的所有非平凡元素的阶都是 p ，而 G_p 有一个同构于$\mathbf{Z}_{p^2}$的正规子群。

假设我们给出了由某个阶为 p^3 的非阿贝尔群的 2-表示范畴 2Rep(G) 中的 2-表示 S_ρ 标记的曲面算符融合规则。利用（4.11），我们可以确定 K_ρ 的阶为 p^2 的曲面算符。 K_ρ 同构于 $\mathbf{Z}_{p^2}$

或 $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2}$。此外，$H^2(\mathbb{Z}_{p^2}, U(1)) = \mathbb{Z}_1$，而 $H^2(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p, U(1)) = \mathbb{Z}_p$。利用（4.12），我们可以确定具有相同 K_ρ 但不同 c_ρ 的不同 2-表示。如果我们只找到一个具有相同 K_ρ 的 2-表示，那么这意味着 $H^2(K_\rho, U(1)) = \mathbb{Z}_1$，从而 $K_\rho = \mathbb{Z}_{p^2}$，进而意味着该群 $G = G_p$。否则，$G = H_p$。

4.4.3. 等范畴群

如果两个群 G 和 G' 具有相同的表示张量范畴，则称它们为等范畴群。这类群在 [6]中得到了定义和刻画。文中构造了一个由无限多个非同构等范畴群组成的族，构造如下。设 $V = Y \oplus Y^*$是由二元域上一个维数为 ≥ 3 的向量空间 Y 构造而成的辛向量空间。考虑群 $G = V \rtimes \mathrm{Sp}(V)$，其中 $\mathrm{Sp}(V)$ 是 V上的辛线性变换群。 G 是等范畴的，但不同构于群G_b；后者是利用上同调类 b对 $\mathrm{Sp}(V)$按 V扩张得到的。 V是 G 和 G_b 中阶为 $|V|$ [6]的唯一正规子群。因此，可以通过曲面算符融合识别子群 V。由于 G 是半直积，而 G_b 是非分裂群扩张，根据第4.3节的结果，我们显然可以利用曲面算符融合区分这两个群。

4.5. 具有同构曲面算符融合的群

本节将推导两个群具有同构曲面算符融合的必要条件，并找出一对这样的群。考虑两个群 G_1 和 G_2，其 2-表示集合分别为 $2\mathrm{Rep}(G_1)$ 和 $2\mathrm{Rep}(G_2)$。考虑曲面算符的融合

$$S_{(K_1,[c_1])} \times S_{(K_2,[c_2])} = \sum_{(K_3,[c_3])} N^{(K_3,[c_3])}_{(K_1,[c_1]),(K_2,[c_2])} S_{(K_3,[c_3])} \ , \tag{4.42}$$

其中 $(K_i, [c_i]) \in 2\mathrm{Rep}(G_1)$，并且

$$S_{(H_1,[d_1])} \times S_{(H_2,[d_2])} = \sum_{(H_3,[d_3])} N^{(H_3,[d_3])}_{(H_1,[d_1]),(H_2,[d_2])} S_{(H_3,[d_3])} \ , \tag{4.43}$$

其中 $(H_i, [d_i]) \in 2\mathrm{Rep}(G_2)$。如果存在一个双射，则称这些融合同构

$$\Theta : \ 2\mathrm{Rep}(G_1) \to \ 2\mathrm{Rep}(G_2) \tag{4.44}$$

使得

$$N^{\Theta((K_3,[c_3]))}_{\Theta((K_1,[c_1])),\Theta((K_2,[c_2]))} = N^{(K_3,[c_3])}_{(K_1,[c_1]),(K_2,[c_2])} \ . \tag{4.45}$$

Θ的存在条件比底层扭曲 Burnside 环同构更为严格。事实上， Θ 表明，群 G_1 和 G_2 的扭曲 Burnside 环同构，并且保持简单二维表示的标准基。

让我们推导映射 Θ[9] 的一些性质。令 1_{G_i} 为 G_i 的平凡子群。考虑融合

$$S_{(1_{G_i},[1])} \times S_{(1_{G_i},[1])} = |G_i| \; S_{(1_{G_i},[1])} \; . \tag{4.46}$$

$S_{(1_{G_i},[1])}$ 是 2Rep(G_i) 中具有此融合规则的唯一曲面算子。由于 Θ 保持融合规则，因此我们有 $\Theta((1_{G_1},[1])) = (1_{G_2},[1])$ 和 $|G_1| = |G_2|$。 Θ 也应将平凡二维表示 $(G_1,[1])$ 映射到平凡二维表示 $(G_2,[1])$。

考虑 $(K,[c]) \in 2\text{Rep}(G_1)$，并设 $\Theta((K,[c])) = (H,[d])$，其中 $(H,[d]) \in 2\text{Rep}(G_2)$。我们将证明 $|K| = |H|$。为证明这一点，考虑融合

$$S_{(K,[c])} \times S_{(1_{G_1},[1])} = \frac{|G_1|}{|K|} S_{(1_{G_1},[1])} \; . \tag{4.47}$$

由于 Θ 保持融合规则，上述融合应等于

$$S_{(H,[d])} \times S_{(1_{G_2},[1])} = \frac{|G_2|}{|H|} S_{(1_{G_2},[1])} \; . \tag{4.48}$$

利用 $|G_1| = |G_2|$，我们得到 $|K| = |H|$。注意， G 和 H 不一定是同构群。

利用这一结果，我们可以证明，如果 $\Theta((K,[c_1])) = (H_1,[d_1])$ 且 $\Theta((K,[c_2])) = (H_2,[c_2])$，那么 H_1 和 H_2 是 G_2的共轭子群。为证明这一点，考虑融合规则

$$S_{(K,[c_1])} \times S_{(K,[c_2])} = \sum_{g \in K\backslash G_1/K} S_{K\cap {}^gK,[c_1\cdot {}^gc_2]} \; . \tag{4.49}$$

我们有 $N^{(K,[c_1\cdot c_2])}_{(K,\;[c_1]),\;(K,\;[c_2])} \neq 0$。由于 Θ 保持融合规则，我们有

$$N^{(H_3,[d_3])}_{(H_1,[d_1]),(H_2,[d_2])} \neq 0 \; , \tag{4.50}$$

其中 $\Theta((K,[c_1\cdot c_2])) = (H_3,d_3)$。这意味着存在 $g_1,g_2 \in G_2$ 使得 $H_3 = H_1 \cap {}^gH_2$。利用 $|K| = |H_1| = |H_2| = |H_3|$ ，我们得到 $H_1 = {}^gH_2$。因此， Θ 给出了集合 $H^2(K,U(1))$ 与 $H^2(H,U(1))$ 之间的双射。一般而言，这个双射并非上同调群的同构。然而，对于具有额外性质的子群，可以证明这个映射是一个同构。设 K 是一个正规子群。我们有如下融合规则

$$S_{(K,[c_1])} \times S_{(K,[c_2])} = \sum_{g \in K\backslash G_1/K} S_{(K\cap {}^gK,[c_1\cdot {}^gc_2])} = \sum_{g \in G_1/K} S_{(K,[c_1\cdot {}^gc_2])} \; . \tag{4.51}$$

[9]对于纤维化 Burnside 环的同构， [31,32]中证明了类似的结果

商群 G_1/K 通过共轭作用作用于 K。这在上同调群 $H^2(K,U(1))$ 上诱导出 G_1/K 的一个作用。如果这个作用是平凡的，那么融合规则可简化为

$$S_{(K,[c_1])} \times S_{(K,[c_2])} = \frac{|G_1|}{|K|}\, S_{(K,[c_1\cdot c_2])} \ . \tag{4.52}$$

设 $\Theta(K,[c_1]) = (H,[d_1])$，以及 $\Theta(K,[c_2]) = (H,[d_2])$。注意到 K 为正规群意味着 H 也是正规的（因为正规性由融合规则决定）。对于 2-表示 $(H,[d_1])$ 和 (H,d_2)，我们得到融合

$$S_{(H,[d_1])} \times S_{(H,[d_2])} = \sum_{g\in H\backslash G_2/H} S_{(H\cap {}^gH,[d_1\cdot {}^gd_2])} = \sum_{g\in G_2/H} S_{(H,[d_1\cdot {}^gd_2])} \ . \tag{4.53}$$

由于 Θ 保持融合规则，比较 (4.52) 和 (4.53) 可知，右侧应具有如下形式 (4.53)

$$\frac{|G|}{|H|}\, S_{(H,d)} \tag{4.54}$$

对于某个 $d \in H^2(H,U(1))$。当且仅当 G_2/H 在 2-余循环 d_2 和 $d = d_1\cdot d_2$ 上平凡作用时，这一结论成立。$(H,[d_1])$ 与 (H,d_2) 的融合规则简化为

$$S_{(H,[d_1])} \times S_{(H,[d_2])} = \frac{|G_2|}{|H|}\, S_{(H,[d_1\cdot d_2])} \ . \tag{4.55}$$

由于我们最初选取的余循环 c_1 和 c_2 是任意的，我们发现，在映射 Θ 下，对于所有 c_1，$c_2 \in H^2(K,U(1))$，余循环 $c_1\cdot c_2$ 都被映射为 $d_1\cdot d_2$。因此，在这种情况下，Θ 诱导了群 $H^2(K,U(1))$ 与 $H^2(H,U(1))$ 之间的群同构。

考虑 $(K,[c]) \in 2\mathbf{Rep}(G_1)$，并令 $\Theta((K,[c])) = (H,[d])$，其中 $(H,[d]) \in 2\mathbf{Rep}(G_2)$。我们将证明，若 $[c]=[1]$，则 $[d]=[1]$。为证明这一点，令 $\Theta((K,[c])) = (H,[1])$ 且 $\Theta((K,[1])) = (H,[d])$。考虑融合

$$S_{(K,[1])} \times S_{(K,[c])} = \sum_{g\in K\backslash G_1/K} S_{(K\cap {}^gK,[{}^gc])} \ . \tag{4.56}$$

我们有 $N^{(K,[c])}_{(K,[1]),\ (K,[c])} \neq 0$。由于 Θ 保持融合，并利用 $\Theta((K,[1])) = (H,[d])$，我们有

$$N^{(H,[1])}_{(H,[d]),(H,[1])} \neq 0 \ . \tag{4.57}$$

这表明存在 $g\in G_2$ 使得 $[{}^gd]=1$，这意味着 $[d]=[1]$。因此，同构 Θ 限制为一个同构

$$\Theta_B : B(G_1) \to B(G_2) \tag{4.58}$$

G_1 和 G_2 的 Burnside 环。由于该同构保持 Burnside 环的标准基，我们得到以下结果：

如果群 G_1 和 G_2 的凝聚面缺陷具有同构的融合规则，那么群 G_1 和 G_2 具有同构的标记表。

已知所有阶为 < 96 的群都有不同的标记表 [33]。因此，由 2-表示标记的曲面算符融合能够唯一确定任意满足 $|G| < 96$ 的规范群 G 。注意，具有同构标记表的群共享许多性质 [34]。

4.5.1. 例子

本节将构造两个曲面算符融合同构的群。根据上一节的结果，我们知道，两个群的曲面算符融合同构的必要条件是它们具有同构的伯恩赛德环。在 [35], 中，作者构造了一个具有同构伯恩赛德环的群的无限族。下面回顾这一构造。

考虑两个素数 p、q，使得 $q|(p-1)$ 且 $q \geq 3$。令 a、$b \in$ 为阶为 q 的 $\mathbf{Z}_p^\times$。考虑循环群

$$Q = \mathbb{Z}_q = \langle z \rangle,\ P_a = \mathbb{Z}_p = \langle x \rangle,\ P_b = \mathbb{Z}_p = \langle y\ . \rangle, \tag{4.59}$$

考虑 Q 对 P_a 和 P_b 的作用，其定义为

$$z \cdot x = ax,\ z \cdot y = by\ . \tag{4.60}$$

令 $G(a,b)$ 为利用该作用构造的半直积 $(P_a \times P_b) \rtimes Q$ 。文献 [35] 中表明， $G(a,b)$ 的伯恩赛德环与 a, b 无关。此外，文献还表明，当且仅当对于某个 $1 \leq n < q$ 有 $G(a,b) \simeq G(c,d)$ 时， $c = a^n, d = b^n$ ；对于给定的 p, q，存在 $\frac{q-1}{2}$ 个具有相同伯恩赛德环的群的同构类。最简单的例子出现在 $p = 1, q = 5$，群 $G(3, 4)$ 和 $G(3, 5)$ 即为此例。在 GAP 小群库 [36], 中，可以通过命令 SmallGroup(605,5) 和 SmallGroup(605,6) 访问这两个群。尽管这两个群具有相同的伯恩赛德环，但可以利用曲面算符融合将它们区分开来。我们知道，可逆面的群由 $H^2(G, U(1))$ 给出。利用 GAP，可以很容易地验证

$$H^2(\mathrm{SmallGroup}(605,5), U(1)) = \mathbb{Z}_1\ , H^2(\mathrm{SmallGroup}(605,5), U(1)) = \mathbb{Z}_{11}\ . \tag{4.61}$$

对于 $p = 29, q = 7$ ，我们得到三个具有同构伯恩赛德环的非同构群。它们是 GAP 中的群 SmallGroup(5887,5)、SmallGroup(5887,6) 和 SmallGroup(5887,7)。我们可以计算这三个群的 2nd 上同调群，从而得到

$$H^2(\text{SmallGroup}(5887,5), U(1)) = \mathbb{Z}_1 \ , H^2(\text{SmallGroup}(5887,6), U(1)) = \mathbb{Z}_1 \ , \tag{4.62}$$

$$H^2(\text{SmallGroup}(5887,7), U(1)) = \mathbb{Z}_{29} \ . \tag{4.63}$$

因此，可逆曲面算子的融合能够区分第三个群与前两个群。那么群 G_1:= SmallGroup(5887,5), G_2:=SmallGroup(5887,6) 呢? 这两个群具有同构的曲面算符融合。为说明这一点，我们来考察这些群中在同构意义下的子群共轭类。对于 G_1，我们得到

$$[1,1],[7,1],[29,1],[29,1],[29,1],[29,1],[29,1],[29,1],[203,1],[203,1],[841,2],[5887,5] \ . \tag{4.64}$$

其中列表包含 Small Groups Library 中各群的标签。对于 G_2，我们得到

$$[1,1],[7,1],[29,1],[29,1],[29,1],[29,1],[29,1],[29,1],[203,1],[203,1],[841,2],[5887,6] \ . \tag{4.65}$$

因此， G_1 和 G_2 的子群共轭类的同构类相同，唯一的例外是群本身。我们可以计算这些群的 2nd 上同调群，发现 H^2(SmallGroup(841,2) U(1)) $= \mathbb{Z}_{29}$，而所有其他子群的上同调群均为平凡。因此， G_1 的2-表示由以下元组标记

$$\begin{aligned}&(K_1,[1]),(K_7,[1]),(K_{29}^{(1)},[1]),(K_{29}^{(2)},[1]),(K_{29}^{(3)},[1]),(K_{29}^{(4)},[1]),(K_{29}^{(5)},[1]),(K_{29}^{(6)},[1]),\\&(K_{203}^{(1)},[1]),(K_{203}^{(2)},[1]),(K_{841},[c]),(K_{5887},[5]) \ .\end{aligned} \tag{4.66}$$

其中各群对应于列表 (4.64) 中的群，并且 $[c] \in H^2$(SmallGroup(841,2) U(1)) $= \mathbb{Z}_{29}$。类似地，G_2 的2-表示由以下元组标记

$$\begin{aligned}&(H_1,[1]),(H_7,[1]),(H_{29}^{(1)},[1]),(H_{29}^{(2)},[1]),(H_{29}^{(3)},[1]),(H_{29}^{(4)},[1]),(H_{29}^{(5)},[1]),(H_{29}^{(6)},[1]),\\&(H_{203}^{(1)},[1]),(H_{203}^{(2)},[1]),(H_{841},[d]),(H_{5887},[5]) \ .\end{aligned} \tag{4.67}$$

其中群分别对应于列表 (4.65) 中的群，并且 $[d] \in H^2$(SmallGroup(841,2) U(1)) $= \mathbb{Z}_{29}$。

我们将证明该映射

$$\Theta : 2\text{Rep}(G_1) \to 2\text{Rep}(G_2) \tag{4.68}$$

由下式定义：

$$(K_i^{(n)}, [l]) \to (H_i^{(n)}, [l]) \tag{4.69}$$

定义了一个保持融合规则的曲面算子同构。由于群 G_1和 G_2 的标记表同构，融合系数满足

$$N_{\rho_1,\rho_2}^{\rho_3} = N_{\Theta(\rho_1),\Theta(\rho_2)}^{\Theta(\rho_3)} \ , \tag{4.70}$$

其中 ρ_1、ρ_2、ρ_3 是 (4.66) 中 G_1 的任意 2-表示，且具有平凡的 $[c_{\rho_i}]$。为了证明 Θ 是一个保持融合规则的同构，我们必须证明

$$N_{(K_{841},[c]),\rho_2}^{\rho_3} = N_{\Theta((K_{841,[c]})),\Theta(\rho_2)}^{\Theta(\rho_3)} = N_{(H_{841,[d]}),\Theta(\rho_2)}^{\Theta(\rho_3)} \tag{4.71}$$

对于任意 2-表示 ρ_2、ρ_3 属于 G_1。首先，假设 $[c_{\rho_2}] = [1]$，则利用 (3.9) 可得

$$N_{(K_{841},[c]),\rho_2}^{\rho_3} = |\{g \in K_{841}\backslash G_1/K_{\rho_2} \mid (K_{\rho_3}, [c_{\rho_3}]) = (K_{841} \cap {}^g K_{\rho_2}, [c])\}| \tag{4.72}$$

and

$$N_{(H_{841},[d]),\Theta(\rho_2)}^{\Theta(\rho_3)} = |\{g \in H_{841}\backslash G_2/H_{\Theta(\rho_2)} \mid (H_{\Theta(\rho_3)}, [d_{\Theta(\rho_3)}]) = (K_{841} \cap {}^g H_{\Theta(\rho_2)}, [d])\}| \ . \tag{4.73}$$

由于群 G_1 和 G_2 具有相同的标记表

$$|\{g \in K_{841}\backslash G_1/K_{\rho_2} \mid K_{\rho_3} = K_{841} \cap {}^g K_{\rho_2}\}| = |\{g \in H_{841}\backslash G_2/H_{\Theta(\rho_2)} \mid H_{\Theta(\rho_3)} = K_{841} \cap {}^g H_{\Theta(\rho_2)}\}| \ . \tag{4.74}$$

因此，

$$N_{(K_{841},[c]),\rho_2}^{\rho_3} = N_{(H_{841},[d]),\Theta(\rho_2)}^{\Theta(\rho_3)} \ , \tag{4.75}$$

其中 $[c_{\rho_2}] = [1]$。唯一剩下的情况是证明融合的相等性

$$N_{(K_{841},[c_1]),(K_{841},[c_2])}^{(K_{841},[c_3])} = N_{(H_{841},[d_1]),(H_{841},[d_2])}^{(H_{841},[d_3])} \ . \tag{4.76}$$

其中 $c_i \in H^2(K_{841}, U(1)) = \mathbb{Z}_{29}$ 以及 $d_i \in H^2(H_{841}, U(1)) = \mathbb{Z}_{29}$。我们有 e,

$$\begin{aligned} N_{(K_{841},[c_1]),(K_{841},[c_2])}^{(K_{841},[c_3])} &= \{g \in K_{841}\backslash G_1/K_{841} \mid (K_{841}, [c_3]) = (K_{841} \cap {}^g K_{841}, [c_1 \cdot {}^g c_2])\}| \\ &= |\{g \in G_1/K_{841} \mid [c_3] = [c_1 \cdot {}^g c_2])\}| \ , \end{aligned} \tag{4.77}$$

其中我们用到了如下事实：群 K_{841}、H_{841} 分别是 G_1、G_2 的正规子群。我们需要理解群 G_1/K_{841} 在上同调群 $H^2(K_{841}, U(1)) = \mathbb{Z}_{29}$ 上的作用。按照本节开头引入的记号，群 K_{841} 和 G_1/K_{841} 是

$$K_{841} = \langle x, y\rangle \cong \mathbb{Z}_{29} \times \mathbb{Z}_{29} \text{ and } G_1/K_{841} = \langle z\rangle \cong \mathbb{Z}_{29} \ . \tag{4.78}$$

$z \in G_1/K_{841}$ 通过共轭在 K_{841} 上的作用为

$$x \to x^{20};\ y \to x^{23}\ . \tag{4.79}$$

2-余循环 $c_k \in Z^2(K_{841}, U(1))$ 可以明确写为

$$c_k((x^a, y^b), (x^c, y^d)) = e^{\frac{2\pi ik}{29}ad}\ , \tag{4.80}$$

其中 $k \in \{0, ..., 28\}$。 $z \in G_1/K_{841}$ 通过共轭对 K_{841} 的作用会在 2-余循环上诱导出如下作用：

$$c_k \to c_k^{25}\ . \tag{4.81}$$

全群 G_1/K_{841} 在 2-余循环上的作用轨道为

$$c_k \to c_k^{25} \to c_k^{16} \to c_k^{23} \to c_k^{24} \to c_k^{20} \to c_k^{7}\ . \tag{4.82}$$

类似地，我们需要理解群 G_2/H_{841} 在上同调群 $H^2(H_{841}, U(1)) = \mathbb{Z}_{29}$上的作用。按照本节开头引入的记号，群 H_{841} 和 G_2/H_{841} 为

$$H_{841} = \langle x, y\rangle \cong \mathbb{Z}_{29} \times \mathbb{Z}_{29} \text{ and } G_2/H_{841} = \langle z\rangle \cong \mathbb{Z}_{29}\ . \tag{4.83}$$

$z \in G_2/H_{841}$ 通过共轭对 H_{841} 的作用为

$$x \to x^{20};\ y \to x^{25}\ . \tag{4.84}$$

2-余循环 $d_k \in Z^2(H_{841}, U(1))$ 可以明确写为

$$d_k((x^a, y^b), (x^c, y^d)) = e^{\frac{2\pi ik}{29}ad}\ . \tag{4.85}$$

其中 $k \in \{0, ..., 28\}$。 $z \in G_2/H_{841}$ 通过共轭对 H_{841} 的作用，会在该 2-余循环上诱导出如下作用：

$$d_k \to d_k^{7}\ . \tag{4.86}$$

全群 G_2/H_{841} 对一个 2-余循环的作用轨道为

$$d_k \to d_k^{7} \to d_k^{20} \to d_k^{24} \to d_k^{23} \to d_k^{16} \to d_k^{25}\ . \tag{4.87}$$

在映射 $c_k \to d_k$ 下，轨道 (4.82) 和 (4.87) 中的 2-余循环是相同的。因此，在映射 Θ下，

$$N^{(K_{841},[c_3])}_{(K_{841},[c_1]),(K_{841},[c_2])} = N^{(H_{841},[d_3])}_{(H_{841},[d_1]),(H_{841},[d_2])} \tag{4.88}$$

对于所有 $c_i \in H^2(K_{841}, U(1)) = \mathbb{Z}_{29}$ 以及 $d_i \in H^2(H_{841}, U(1)) = \mathbb{Z}_{29}$，如所要求。

这表明，曲面算符融合无法将一个群确定到同构意义下。可以使用 GAP 验证，群 G_1:= SmallGroup(5887,5) 和 G_2:=SmallGroup(5887,6) 的特征标表不同。因此，威尔逊线融合能够区分这两个群。这表明，无法从曲面算符融合规则构造出特征标表。与正规子群的模格类似，规范群的许多性质可以通过威尔逊线融合或曲面算符融合来确定。然而，一般而言，威尔逊线融合包含一些关于规范群的信息，这些信息无法通过曲面算符融合获取，反之亦然。

5. 从曲面上的线融合得到 G

到目前为止，我们考察了线算符和曲面算符的融合。更确切地说，我们考察了真实线算符和曲面算符，它们的描述不依赖于高维流形。本节将研究非真实线算符的融合。特别是，我们将研究“存在于”曲面算符上的线算符的融合 S_ρ。为展开这项讨论，我们先来研究威尔逊线的结点。威尔逊线在 W_{R_1} 和 W_{R_2} 处的结点处的局域算符集合由交织算子空间给出（例如参见 [3]）

$$\mathrm{Hom}(R_1, R_2) \ . \tag{5.1}$$

根据舒尔引理，我们知道，对于不可约表示 R_1 和 R_2，$\mathrm{Hom}(R_1, R_2) = \delta_{R_1,\ R_2}\mathbb{C}$。因此，标记为不同不可约表示的两条威尔逊线不能形成交汇点。

两个曲面算符 $S_{(K,[c])}$ 和 $S_{(H,[d])}$ 可以形成一个交汇点，而交汇点处的线算符集合是态射 [10] 的集合

$$\mathrm{Hom}((K,[c]),(H,[d])) \ . \tag{5.2}$$

在 2-表示 $(K,[c])$ 和 $(K,[c])$ 之间（见图 6）。这在 [18] 中被计算为

$$\mathrm{Hom}((K,[c]),(H,[d])) = \bigoplus_{g\in K\backslash G/H} \mathrm{Rep}^{c\cdot {}^g d}(K\cap {}^g H) \ , \tag{5.3}$$

其中 $\mathrm{Rep}^{c\cdot {}^g d}(K\cap {}^g H)$ 是带有 2-余循环$c\cdot {}^g d$的 $K\cap {}^g H$ 的射影表示集合。

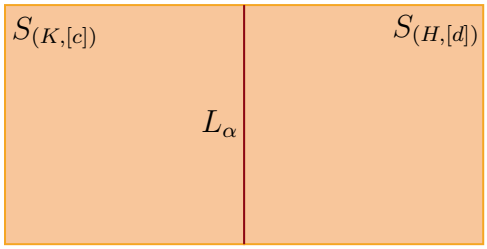


图 6：两个曲面算符 $S_{(K,[c])}$ 和 $S_{(H,[d])}$ 可以形成一个交汇点，而交汇点处的线算符L_α 由 $\alpha \in \bigoplus_{g\in K\backslash G/H} \mathbf{Rep}^{c\cdot {}^g d}(K \cap {}^g H)$ 标记。

端同态

$$\mathrm{End}((K,[c])) = \mathrm{Hom}((K,[c]),(K,[c])) = \bigoplus_{g\in K\backslash G/K} \mathrm{Rep}^{d\cdot {}^g d}(K \cap {}^g K) \tag{5.4}$$

是在曲面 $S_{(K,[c])}$上“存在”的线的集合。这些线算符遵循由自同态的复合给出的融合规则（见图 7）。我们尤其关注

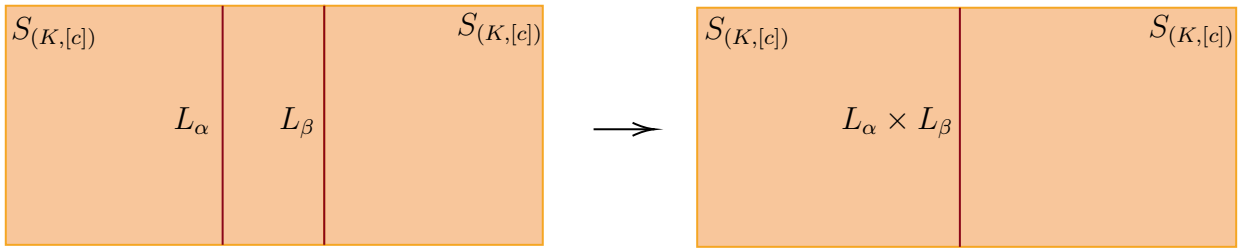


图 7：曲面上的线算符融合由自同态的复合给出。

情形 $K = \mathbf{Z}_1$。于是我们得到

$$\mathrm{End}((\mathbb{Z}_1,[1])) = \bigoplus_{g\in G} \mathrm{Rep}(\mathbb{Z}_1)\ . \tag{5.5}$$

曲面 $S_{(\mathbb{Z}_1,[1])}$ 上的线算符可以标记为 L_g，其中 $g \in G$，其融合由下式给出

$$L_g \times L_h = L_{g\cdot h}\ . \tag{5.6}$$

因此，显然，如果我们知道曲面 $L_{(\mathbb{Z}_1,[1])}$ 上线算符的融合，就可以将群 G 重构到同构意义下。这与以下预期一致：通过对称性进行高阶规范化所得到的曲面算符，应当包含实现对偶对称性的线算符。特别地，曲面算符 $S_{(\mathbb{Z}_1,[1])}$源自对完整 $\mathbf{Rep}(G)$ 对称性进行高阶规范化。$S_{(\mathbb{Z}_1,[1])}$ 包含实现 $\mathbf{Rep}(G)$ 的对偶对称性的线算符，而这正是群 G。

请注意，尽管曲面算符上线算符的融合能够确定规范群，但这并不是对重构问题的令人满意的回答。这是因为，将 $S_{(\mathbb{Z}_1,[1])}$ 视为具有 G 0-形式对称性的平凡二维量子场论，本节的结果可以表述为如下命题： $\mathcal{T}/G$ 的规范群可以从实现$\mathcal{T}$的 G-对称性的线算符的融合规则中重构出来；这显然为真，但只是同义反复。

6. 结论

本文探讨了 G规范理论中由高阶规范化威尔逊线得到的威尔逊线融合规则和凝聚曲面算符，以及可从这些融合规则推导出的规范群性质。我们发现，威尔逊线融合无法唯一确定群 G，即无法确定到同构意义下。然而，我们可以据此确定它的若干性质 G ，包括 G 的正规子群格。随后，我们研究了通过在曲面上凝聚威尔逊线而得到的曲面算符融合。我们证明，曲面算符融合同样可以确定正规子群格。此外，我们还可以确定正规子群与所有其他子群的交集的阶。借助融合规则，这使我们能够判断 G 是否可表示为直积、半直积或非分裂群扩张。我们利用这一事实证明了无穷多对群：它们无法通过威尔逊环融合加以区分，却可以通过曲面算符融合加以区分。

我们定义了两个群的曲面算符融合规则之间的同构，并推导出若要存在这种同构，必须满足若干必要条件。这些必要条件使我们发现了一对群 SmallGroup(5887,6) 和 SmallGroup(5887,7)，它们的曲面算符融合规则同构。利用威尔逊线融合可以区分这两个群，这表明无法从曲面算符融合中确定一个群的特征标表。我们了解到，一般而言，威尔逊线融合包含一些无法从曲面算符融合中获取的规范群信息，反之亦然。最后，我们考察了存在于曲面算符上的非真实线算符的融合，并证明其融合规则能够将规范群确定到同构意义下。

讨论　本文中的讨论引出了若干值得在未来研究中探讨的自然问题 s:

•这将是　找到一对威尔逊线和曲面算符融合规则同构的群，会很有意思。 s

这样的群对必然具有同构的特征标表和标记表。满足这些必要条件的群已为人所知（参见 [33] 和 [37]第 385 页），确定这些群的威尔逊线与曲面算符融合是否确实同构，将会很有意思。

- 一个乐观的目标是证明，可以根据真算符的融合规则，将群 G 恢复至同构意义下。人们或许会疑惑，为何这种重构应当是可能的。毕竟，用于重构 G 的对称张量范畴 Rep(G)似乎包含了大量数据。然而，已知可以利用群 [38]的 1、2、3-特征标，将一个群确定至同构意义下。这些特征标是由 Frobenius [39]定义的群特征标的推广。群的高阶表示的张量积结构支配着 G规范理论中扩展算符的融合规则；同样也可以利用这些高阶表示来定义某些高阶特征标（如附录 A 中所研究的那样）。确定由 Frobenius 定义的高阶特征标与源自群的高阶表示的高阶特征标之间的关系，是判断能否根据真算符的融合规则重构规范群的一种潜在途径。

- 与构造 G的 2-表示类似，我们可以通过研究从群到 3-向量空间 [40]的映射来构造 3-表示。3-表示标记了支撑在四维 G-规范理论 [11]中的三维子流形上的一部分膜算子。3-表示由数据 $(K,[c])$分类，其中 K是 G的子群，而 $[c]\in H^3(K,U(1))$。这与 2-表示形成对照，后者由子群及其二阶上同调群元素标记。3-表示的融合规则（至少从表面上看）包含了 2-表示中未包含的群的额外信息。例如，上同调群 $H^3(G,U(1))$可以从G的 3-表示的张量积中推导出来。

- 确定两个群具有同构的曲面算子融合所需的充分条件，将会很有意思。[10]

- 尽管 Rep(G) 的 S 和 T 矩阵是平凡的，但若能找到并从物理角度诠释能够捕捉其中基底无关数据的不变量，将会很有意思。

[10]参见 [41]，其中给出了两个群的特征标表同构的充要条件。在纤维化伯恩赛德环的语境下，[32]证明了一个充分条件。

the F、R 矩阵[11]。

- 探索本文所讨论之外的其他线算符和曲面算符中所包含的规范群的性质，将会很有趣。例如，在无扭曲离散规范理论中，可以通过磁通线的融合，确定一个群的两个共轭类的乘积如何分解为共轭类。此外，要完整识别规范化过程，我们还需要重构离散挠率。这必然要求考察非威尔逊线。

- 本文聚焦于有限群及其相关的扩展算符。通过算符的融合规则来确定李群的性质，将会很有趣。对于李群，威尔逊线通常并非拓扑的。不过，存在一些拓扑算符，它们标记了规范化李群所产生的"对偶"对称性 [42]。

致谢

作者感谢 ICTP 提供支持。我们感谢 Matthew Buican 和 Adrian Padellaro 与我们进行了多次讨论、合作开展相关项目，并对本文草稿提出了详细意见。我们感谢 Sanjaye Ramgoolam 与我们合作开展相关项目。

附录 A. G 来自 2-特征

A.1. 2-特征

为了定义 2-表示的特征，我们考虑

$$\tilde{\chi}_\rho(g) := \mathrm{Tr}(\rho(g)) := \bigoplus_i \rho(g)_{ii} \ . \tag{A.1}$$

$\tilde{\chi}_\rho(g)$ 的取值为向量空间。我们希望构造一个取值为复数的函数，该函数在对各项进行共轭时保持不变。为定义这样的函数，请注意，同构 $\phi_{g,\ h}$ 意味着同构 [19] 的存在

$$\psi_\rho(g,h) := \mathrm{Tr}(\rho(g)) \to \mathrm{Tr}(\rho(hgh^{-1})) \ . \tag{A.2}$$

[11]感谢 Matthew Buican 提出这个问题。

当 g 和 h 可交换时，这是 Tr($\rho(g)$) 的一个端同态。因此，对于任意两个可交换元素 g、$h \in G$，我们可以将 2-表示 $\rho(g)$ 的 2-特征定义为

$$\chi_\rho(g,h) := \mathrm{Tr}(\psi_\rho(g,h)) \ . \tag{A.3}$$

$\psi_\rho(g,h)$ 是一个取值于复数的矩阵。因此，上面的迹也取值于复数。对于由置换 σ_n 和 2-余循环 $\tilde{c}$标记的任意 2-表示，特征的显式表达式已在 [20]中计算得到，其形式为

$$\chi_\rho(g,h) = \sum_{i=\sigma_g(i)=\sigma_h(i)} \frac{\tilde{c}_i(h,g^{-1})\tilde{c}_i(g,hg^{-1})}{\tilde{c}_i(g,g^{-1})\tilde{c}_i(1,1)} \ . \tag{A.4}$$

2-特征满足

$$\chi_{\rho_1\times\rho_2} = \chi_{\rho_1}\chi_{\rho_2}, \quad \chi_{\rho_1+\rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2} \ . \tag{A.5}$$

不同于群的 1-表示的特征，不同的 2-表示可能具有相同的 2-特征 [20]。

由于我们关注由 $(K,[c])$ 标记的不可约 2-表示，因此用这些数据来表示特征的表达式会很方便。利用 [19] 中关于 2-表示的诱导特征的表达式，可以得到

$$\chi_\rho(g,h) = \frac{1}{|K|} \sum_{s\in G, sgs^{-1}\in K, shs^{-1}\in K} \frac{c(shs^{-1},sg^{-1}s^{-1})c(sgs^{-1},shg^{-1}s^{-1})}{\tilde{c}_i(sgs^{-1},sg^{-1}s^{-1})} \ . \tag{A.6}$$

由于 2-表示 ρ 由标记 $(H,[c])$ 决定，在以下各节中，我们将把这个 2-特征记为 $\chi_{(H,[c])}(g,h)$。

A.2. 从 2-特征得到正规子群

假设群 G 有一个正规子群 N，那么 2-表示 $(N,[1])$ 的 2-特征为，其中 $[1]$ 是上同调群 $H^2(N,U(1))$ 的单位元

$$\chi_{(N,[1])}(g,h) = \frac{1}{|N|} \sum_{s\in G, sgs^{-1}\in N, shs^{-1}\in N} 1 \ . \tag{A.7}$$

由于 N是正规的，sgs^{-1}，$shs^{-1} \in N$当且仅当 g，$h \in N$。此外，若 g，$h \in N$，则对所有 $s \in G$，都有sgs^{-1}，$shs^{-1} \in N$。因此，该 2-特征由下式给出

$$\chi_{(N,[1])}(g,h) = \begin{cases} \frac{|G|}{|N|} & \text{if } g,h \in N \ , \\ 0 & \text{otherwise} \ . \end{cases} \tag{A.8}$$

特别地，对于正规子群 $\mathbf{Z}_1$，G 我们得到 2-特征

$$\chi_{(\mathbb{Z}_1,[1])}(g,h) = \begin{cases} \frac{|G|}{|N|} & \text{if } g=h=1 \ , \\ 0 & \text{otherwise} \ , \end{cases} \tag{A.9}$$

$$\chi_{(G,[1])}(g,h) = 1 \ \forall \ g,h \in G \ . \tag{A.10}$$

反过来，若已知某个 2-表示 $(H,[c])$ 的 2-特征 $\chi_{(K,[c])}(g,h)$，我们能否确定 H 是否为正规子群？为回答这个问题，考虑

$$\begin{aligned} |\chi_{(K,[c])}(g,h)| &= \left| \frac{1}{|K|} \sum_{s\in G, sgs^{-1}\in K, shs^{-1}\in K} \frac{c(shs^{-1},sg^{-1}s^{-1})c(sgs^{-1},shg^{-1}s^{-1})}{\tilde{c}_i(sgs^{-1},sg^{-1}s^{-1})} \right| \\ &\leq \frac{1}{|K|} \sum_{s\in G, sgs^{-1}\in K, shs^{-1}\in K} \left| \frac{c(shs^{-1},sg^{-1}s^{-1})c(sgs^{-1},shg^{-1}s^{-1})}{\tilde{c}_i(sgs^{-1},sg^{-1}s^{-1})} \right| \\ &= \frac{1}{|K|} \sum_{s\in G, sgs^{-1}\in K, shs^{-1}\in K} 1 \leq \frac{|G|}{|K|} \ . \end{aligned} \tag{A.11}$$

特别地，若 $|\chi_{(K,[c])}(g,h)| = \frac{|G|}{|K|}$，则

$$sgs^{-1} \in K, shs^{-1} \in K \ \forall \ s \in G \ . \tag{A.12}$$

若 K 不是正规子群，则存在某个 $g',h',s' \in G$，使得 $s'g's'^{-1}, s'h's'^{-1} \notin K$，因此 $|\chi_{(K,[c])}(g',h')| < \frac{|G|}{|K|}$。

综上，

$$|\chi_{(K,[1])}(g,h)| = \begin{cases} \frac{|G|}{|K|} & \textit{if } g,h \in K \ , \\ 0 & \textit{otherwise} \ , \end{cases} \tag{A.13}$$

当且仅当 K 是 G 的正规子群。此外，若 K 不是正规子群，则对于某个 $g \notin K$，有 $\chi_{(K,[1])}(g,0) \neq 0 < \frac{|G|}{|K|}$。

因此，通过考察 2-特征，我们可以确定群 G 是否有正规子群；若有，该正规子群的阶由 $\frac{|G|}{|\chi_{(K,[c])}(1,1)|}$ 给出。

A.3. G/N 的 2-特征

在第 4.2 节中，我们研究了 G/N 的 2-表示，并了解到它们对应于 G 的某个子集，其形式为 $(K,[c])$，其中 K 是包含N的 G 子群，而 $[c] \in H^2(K,U(1))$ 是某个 $[r] \in H^2(K/N, U(1))$ 的膨胀。G/N 的 2-表示 $(K/N,[r])$ 的特征为

$$\chi_{(K/N,[r])}(k,l) = \chi_{(K,[c])}(g,h) \ , \tag{A.14}$$

其中 g 和 h 满足 $\pi(g) = k$、$\pi(h) = l$。g、h 的选择无关紧要。事实上，考虑 $n_1 g$ 和 $n_2 h$，其中 n_1、$n_2 \in N$ 以及 g、$h \in G$ 满足 $\pi(n_1 g) = k$ 且 $\pi(n_2 h) = l$。k 和 l 在 G/N 中交换，当且仅当对所有 n_1、$n_2 \in N$，$n_1 g$ 和 $n_2 h$ 在 G 中交换。考虑

$$\chi_{(K,[c])}(n_1 g, n_2 h) = \frac{1}{|K|} \sum_{s \in G, s n_1 g s^{-1} \in K, s n_2 h s^{-1} \in K} \frac{c(s n_2 h s^{-1}, s(n_1 g)^{-1} s^{-1}) c(s n_1 g s^{-1}, s h g^{-1} s^{-1})}{\tilde{c}_i(s n_1 g s^{-1}, s(n_1 g)^{-1} s^{-1})} \ . \tag{A.15}$$

如果 $s n_1 g s^{-1} \in K$，那么 $s n_1 s^{-1} s g s^{-1} \in K$，这意味着 $s g s^{-1} \in K$（注意，n_1、$n_2 \in N \subseteq K$）。此外，由于 $c = r \circ \pi$，$c(s g s^{-1}, s h s^{-1}) = c(s n_1 g s^{-1}, s n_2 h s^{-1})$。因此，我们有

$$\chi_{(K/N,[r])}(k, l) = \chi_{(K,[c])}(n_1 g, n_2 h) = \chi_{(K,[c])}(g, h) \ , \tag{A.16}$$

对所有 n_1、$n_2 \in N$。

A.4. 群扩张与 2-特征

在第4.3节中，我们推导出了曲面算符的若干特殊融合规则，这些规则揭示了群 G 的群扩张结构。特别地，我们研究了融合规则（4.34），它意味着 G 是一个直积。利用我们在上文研究过的正规子群的 2-特征性质，我们可以用 2-特征的语言重新表述（4.34）。当且仅当 G 是 K 和 N 的正规子群的直积时，

$$|\chi_{(K,[1])}(g,h)| = \begin{cases} \frac{|G|}{|K|} & \text{if } g,h \in K \ , \\ 0 & \text{otherwise} \ , \end{cases} \qquad |\chi_{(N,[1])}(g,h)| = \begin{cases} \frac{|G|}{|N|} & \text{if } g,h \in N \ , \\ 0 & \text{otherwise} \ , \end{cases} \tag{A.17}$$

and

$$\chi_{(K,[1])}(g,h) \cdot \chi_{(N,[1])}(g,h) = \chi_{(\mathbb{Z}_1,[1])}(g,h) \ . \tag{A.18}$$

G 是半直积或非分裂群扩张的条件（见（4.39）及后续讨论）同样可以用特征来重新表述。当且仅当满足以下条件时，G 是子群 K 和 $N \triangleleft G$ 的半直积:

$$|\chi_{(N,[1])}(g,h)| = \begin{cases} \frac{|G|}{|N|} & \text{if } g,h \in N \ , \\ 0 & \text{otherwise} \ , \end{cases} \tag{A.19}$$

and

$$\chi_{(K,[1])}(g,h) \cdot \chi_{(N,[1])}(g,h) = \chi_{(\mathbb{Z}_1,[1])}(g,h) \ , \tag{A.20}$$

且 K 不满足 (A.17)。最后，如果不存在满足上述条件的 G 2-特征，G 则只能表示为非分裂群扩张。

参考文献

[1]C. Cordova、T. T. Dumitrescu、K. Intriligator 和 S.-H. Shao，《Snowmass 白皮书：量子场论及其他领域中的广义对称性》，arXiv:2205.09545 [hep-th]，载于《2022 年 Snowmass 夏季研究》

[2]C. Vafa，《弦真空的量子对称性》，Mod. Phys. Lett. A 4, 1615 (1989)✦ D. Gaiotto、A. Kapustin、N. Seiberg 和 B. Willett，《广义全局对称性》，JHEP 1502, 172 (2015),arXiv:1412.5148 [hep-th][3] L. Bhardwaj 和 Y. Tachikawa，《关于二维中的有限对称性及其规范化》，JHEP 1803, 189 (2018)，arXiv:1704.02330 [hep-th][4] M. Bischoff、Y. Kawahigashi、R. Longo 和 K.-H. Rehren，《张量范畴与 von Neumann 代数的自同态》，Springer International Publishing (2015)✦ I. Brunner、N. Carqueville 和 D. Plencner，《离散扭结缺陷》，Communications in Mathematical Physics 337, 429 (2015)✦ N. Carqueville 和 I. Runkel，《缺陷双范畴的轨形完备化》，《Quantum Topology》7, 203 (2016)✦ P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik，《张量范畴》，美国数学会 (2016)[5] A. Joyal 和 R. Street，《Tannaka 对偶性与量子群导论》，载于《范畴论》，编者：A. Carboni、M. C. Pedicchio 和 G. Rosolini，413–492，Springer Berlin Heidelberg (1991)，柏林、海德堡[6]P. Etingof 和 S. Gelaki，《等范畴群》，https://arxiv.org/abs/math/0007196[7] Y.-T. Hu，《二维拓扑相精确可解离散模型中的涌现性质》，犹他大学 (2013)，博士论文[8] K. Roumpedakis、S. Seifnashri 和 S.-H. Shao，《高阶规范化与不可逆凝聚缺陷》，arXiv:2204.02407 [hep-th][9] L. Bhardwaj、S. Schafer-Nameki 和 J. Wu，《普适不可逆对称性》，Fortsch. Phys. 70, 2200143 (2022)，arXiv:2208.05973 [hep-th][10] T. Bartsch、M. Bullimore、A. E. V. Ferrari 和 J. Pearson，《不可逆对称性与高阶表示论 I》，arXiv:2208.05993 [hep-th][11] T. Bartsch、M. Bullimore、A. E. V. Ferrari 和 J. Pearson，《不可逆对称性与高阶表示论 II》，arXiv:2212.07393 [hep-th]

[12] A. Padellaro、R. Radhakrishnan 和 S. Ramgoolam，《行列对偶与组合拓扑弦》，即将出版[13] I. M. Isaacs，《有限群表示特征理论》，美国数学会 (2006)[14] R. Brauer，《有限群表示》，载于《现代数学讲座》，编者 TL Saaty，纽约 70，R. Brauer (1963)[15] S. Mattarei，《从特征标表获取群的信息》，博士论文 (1992)✦ S. Mattarei，《具有相同特征标表但导出长度不同的 p 群示例》，《数学档案》62, 12 (1994)[16] W. Cocke、S. Goldstein 和 M. Stemper，《具有等价特征标表的群数据库》，https://arxiv.org/abs/1907.07633[17]D. E. Speyer，《特征标表不能确定群，与 Tannaka 对偶性之比较》，https://mathoverflow.net/q/11346[18] J. Elgueta，《有限维2向量空间上的2群表示论》，https://arxiv.org/abs/math/0408120[19]N. Ganter 和 M. Kapranov，《2-范畴中的表示论与特征标理论》，https://arxiv.org/abs/math/0602510[20]A. M. Osorno，《2-特征的显式公式》，《拓扑学及其应用》157, 369 (2010)[21]J. Greenough，《双模范畴的幺半2-结构》，《代数学杂志》324, 1818 (2010)[22] S. Bouc，《Burnside 环》，载于《代数学手册》，爱思唯尔 (2000)，739–804[23]R. Hartmann 和 E. Yalcın，《广义Burnside环与群上同调》，《代数学杂志》310, 917 (2007)[24]M. Buican、L. Li 和 R. Radhakrishnan，《$a \times b = c$ 在 $2+1$D TQFT 中》，《Quantum》5, 468 (2021), arXiv:2012.14689 [hep-th]✦ M. Buican、L. Li 和 R. Radhakrishnan，《非阿贝尔任意子与 Arad–Herzog猜想的若干近亲》，《物理学杂志A辑》54, 505402 (2021), arXiv:2012.03394 [hep-th][25] J. F. Humphreys，《群论教程》，牛津大学出版社 (1996)[26] R. Dedekind，《关于其所有子群均为正规子群的群》，《数学年刊》48, 548 (1897)[27] A. G. Raggi-C´ardenas 和 L. Valero-Elizondo，《具有同构Burnside环的群》，《数学档案》84, 193 (2005)

[28] W. Feit, 《有限群的特征标》，耶鲁大学数学系（1965）[29] K. Conrad, 《阶为 p^3 的群》，群论评述论文 84，K. Conrad（2014），https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/groupsp3.pdf[30] B. Huppert, 《有限群 I》，施普林格出版社（2013）[31]B. Garc´ıa, 《纤维化 Burnside 环的物种同构》，《代数通讯》84，1（2022）[32]R. Boltje 与 B. Garc´ıa, 《具有同构纤维化 Burnside 环的群》，https://arxiv.org/abs/2209.11692[33] W. Kimmerle 与 K. Roggenkamp, 《具有同构谱表和 Burnside 矩阵的非同构群》，《数学学报》15，273（2005）[34]L. Huerta-Aparicio、A. Molina-Rueda、A. Raggi-C´ardenas 与 L. Valero-Elizondo, 《关于由标记表同构所保持的一些不变量》，Revista Colom- biana de Matem´at 43，165（2009）[35] J. The´evenaz, 《同构的伯恩赛德环》，《代数通讯》16，1945（1988）[36]《GAP——群、算法与编程，4.12.2 版》，https://www.gap-system.org[37] K. Lux 与 H. Pahlings, 《有限群表示论的计算方面 II》，载于《算法代数与数论》，Springer（1999），381–397[38] H.-J. Hoehnke 与 K. W. Johnson, 《1-、2-和 3-特征决定一个群》，《美国数学学会通报》27，243（1992）.[39] G. Frobenius, 《关于群行列式的素因子》，Reimer（1903）[40]W. Wang, 《关于群的 3-表示和 2-范畴迹》，https://arxiv.org/abs/1502.04191[41] A. Davydov, 《具有相同特征标表的有限群、Drinfel'd 代数和 Galois 代数》，https://arxiv.org/abs/math/0001119[42] M. Cheng、P.-S. Hsin 与 C.-M. Jian, 《在（*2+1*）维拓扑相中规范化李群对称性》， arXiv:2205.15347 [cond-mat.str-el]✦ M. Cheng 与 C.-M. Jian, 《在（*2+1*）维拓扑相中规范化 U(1) 对称性》，SciPost Phys. 12，202（2022），arXiv:2201.07239 [cond-mat.str-el]