arXiv:2302.08426v1 [math.CV] 16 Feb 2023

高斯 非紧复流形上的全纯截面 S

Alexander Drewitz、Bingxiao Liu 和 George Marinescu

摘要。我们给出厄米复流形（X， Θ）上厄米全纯线丛（L， h_L）的类高斯随机全纯截面的两种构造。特别地，我们关注 $\mathcal{L}^2$-全纯截面$H^0_{(2)}$（X， L）空间为无限维的情形。首先，我们给出 L上高斯随机全纯截面的一般构造；当 $\dim H^0_{(2)}$（X， L） $= \infty$ 时，这些截面几乎必然不是 X上的 $\mathcal{L}^2$-可积函数。第二种构造将抽象维纳空间理论与Berezin-Toeplitz量子化相结合，得到一个随机 $\mathcal{L}^2$-全纯截面。此外，我们在半经典极限的背景下研究其随机零点，包括等分布、大偏差估计和空洞概率。

目录

1. 引言 2 1.1. 高斯随机全纯截面的零点 4 1.2. L 的高次张量幂：等分布与大偏差 6 1.3. 随机 $\mathcal{L}^2$-全纯截面与 Toeplitz 算子 7 1.4. L 的高次张量幂：在 f 8 的支集上的等分布 2. 高斯随机全纯截面 9 2.1. 全纯线丛与伯格曼核 9 2.2. 高斯随机全纯截面 10 2.3. 随机零点的期望：定理 1.1 的证明 13 2.4. 几何例子 15 3. 线丛高次张量幂的等分布与大偏差 17 3.1. 高斯随机全纯截面零点的等分布 17 3.2. 大偏差估计与空穴概率 20 3.3. 命题 3.10 的证明 21 3.4. 关于空穴概率下界的注 26 4. 随机 $\mathcal{L}^2$-全纯截面与 Toeplitz 算子 29 4.1. 抽象 Wiener 空间 29 4.2. $H^0_{(2)}$(X, L) 上的 Toeplitz 算子 30 4.3. 随机 $\mathcal{L}^2$-全纯截面 32 4.4. 随机 $\mathcal{L}^2$-全纯截面的零点：定理 1.4 的证明 34 5. 高次张量幂的随机 $\mathcal{L}^2$-全纯截面 35 5.1. Toeplitz 算子的渐近性 35 5.2. 支集上的随机零点：定理1.6和1.7的证明 37 5.3. 二阶消失点附近随机零点的高阶涨落 41 5.4. 取负值实函数的情形 44 参考文献 45

日期：2023年2月17日。作者的部分研究经费来自德国研究联合会优先计划2265“随机几何系统”（项目编号422743078）。G. M. 的部分研究经费来自德国研究联合会资助的项目 SFB/TRR 191（项目编号281071066-TRR 191）以及 ANR-DFG项目QuaSiDy（项目编号490843120）。

1. 引言

设 (X, J, Θ) 是一个无边界的连通复 n 维流形，其中J 表示复结构， Θ 是一个厄米形式。由 Θ 可关联一个J-不变的黎曼度量 $g^{TX}(\cdot,\cdot) = \Theta(\cdot, J\cdot)$。设 L 是 X 上的一个全纯线丛，且 h_L 是 L上的光滑厄米度量。我们将 L 对应的 Chern 曲率形式记作 R^L。

本文旨在研究$H^0(X, L)$中某些随机全纯截面的零点，尤其关注非紧 X的情形。当 X 是非紧的时，我们主要关注 $H^0(X, L)$中由 $\mathcal{L}^2$-可积全纯截面构成的子空间，记为 $H^0_{(2)}(X, L)$。这是一个配备 $\mathcal{L}^2$-度量的可分希尔伯特空间。我们设 $d := \dim_{\mathbb{C}} H^0_{(2)}(X, L)$。请注意，若不对 X或 L作任何进一步假设，维数 d 可以为0、正整数或 ∞。我们主要关注 $d = \infty$ 的情形，此时一些构造随机截面的自然方法（例如由 $\mathcal{L}^2$-度量在 $H^0_{(2)}(X, L)$上给出的高斯概率测度）将无法使用。为解决这一困难，我们将介绍两种不同的方法，从无限维的 $H^0_{(2)}(X, L)$构造随机全纯截面；这两种方法都是有限维情形的自然推广。

第一种方法是将对 $\mathbb{C}^n$ 上随机全纯函数的研究直接推广到复几何领域。Littlewood-Offord [LO1、LO2], Offord [Of1、Of2、Of3], 以及 Edelman-Kostlan [EK1、EK2], 等人研究了由 $\mathbb{C}$ 上的幂级数给出的随机全纯函数，以及其零点（或其他取值）的分布。随后，针对高斯随机全纯函数，Sodin [S], Sodin-Tsirelson [ST1、ST2、ST3]，进一步拓展了相关结果；之后，Zrebiec [Zr] 又将其推广至 $\mathbb{C}^n$ 上。特别是，对 $\mathbb{C}$ 中区域上的一般高斯随机全纯函数（也称为高斯解析函数，GAF）已从概率论角度进行了大量研究（参见 [HKPV]），它们是 $\mathbb{C}$ 上点过程的实例。

事实上，构造一般随机函数及研究其性质（包括 Rademacher 级数、随机傅里叶级数、随机泰勒级数等）的工作可以追溯到 Paley 和 Zygmund [PZ] 以及 Paley-Wiener-Zygmund [PWZ] 。一种通用框架是在函数的巴拿赫空间或希尔伯特空间中构造随机变量。关于这一方法，可参阅 Kahane 的著作 [Ka] 及其中的参考文献。

现在我们介绍第一种方法：利用 $H^0_{(2)}(X, L)$ 的一组正交归一基构造高斯随机截面；不过，作为全纯截面，其分布与所选基无关（由命题 2.3 可知）。更具体地说，若 $\{S_j\}_{j=1}^d$ 是相对于 $\mathcal{L}^2$-度量的 $H^0_{(2)}(X, L)$ 的一组正交归一基，且若 $\{\eta_j\}_{j=1}^d$ 表示一列独立同分布（i.i.d.）标准复高斯变量，则可通过以下方式定义 L 的随机全纯截面：

$$\psi_\eta^S := \sum_{j=1}^{d} \eta_j S_j, \tag{1.1}$$

利用与 $H^0_{(2)}(X, L)$ 相关的伯格曼核的基本性质（参见命题 2.1）。我们将称 ψ_η^S 为 L 的标准高斯随机全纯截面。

当 $d = \infty$ 时，上述事实并非显然。特别是，在这种情况下，事实证明，按 (1.1) 构造的 ψ_η^S 几乎必然在 X 上不可-$\mathcal{L}^2$-可积（参见引理 2.5）。这一观察表明，非紧复流形上某些全纯线丛的全纯截面极为丰富。对于 $\mathbb{C}^n$ 上的 Bargmann-Fock 空间（参见例 2.11），如前所述， ψ_η^S 只是 $\mathbb{C}^n$ 上的一个高斯全纯函数

在这种情况下，上述构造等价于赋予 $H^0_{(2)}(X,L)$ 与 $\mathcal{L}^2$ 内积相关联的标准高斯概率测度。

根据上述观察，自然引出的一个有趣问题是，如何以自然的方式随机化 $\mathcal{L}^2$-全纯截面，或者等价地，如何以几何方式在 $H^0_{(2)}(X,L)$上构造高斯概率测度。我们的第二种方法将概率论中的抽象维纳空间方法与几何量子化中的托普利兹算子工具相结合，为这个问题提供了答案。

理解这种方法的一个简单方式如下：固定一个非零元素 $\mathbf{a}=(a_j)_{j=1}^d\in\ell^2(\mathbb{C})$；我们不采用 (1.1)，而是定义

$$\psi^S_{\mathbf{a},\eta}:=\sum_{j=1}^d \eta_j a_j S_j. \tag{1.2}$$

那么$\psi^S_{\mathbf{a},\,\eta}$ 几乎必然是 X上的 L 的 $\mathcal{L}^2$-可积全纯截面，这由断言 $\mathbb{P}(\sum_j |a_j|^2|\eta_j|^2<\infty)=1$推出。在我们的方法中，某些 Toeplitz 算子的（点）谱将发挥序列 $\mathbf{a}=(a_j)_{j=1}^d$的作用，这些算子在几何量子化理论中有重要应用。

构造随机截面（1.2）的方法是考虑一个单射的 Hilbert–Schmidt Toeplitz 算子 T_f on $H^0_{(2)}(X,L)$，它与某个正函数 f on$X$ 相关（例如，具有紧支撑的光滑正函数）。由此定义了 $\|T_f\cdot\|$ on $H^0_{(2)}(X,L)$上的一个可测范数（参见定义4.1）。根据 Gross [Gr], 的抽象 Wiener 空间理论，我们可以唯一地构造一个与 T_f相关的高斯型概率测度 $\mathbb{P}_f$ on $H^0_{(2)}(X,L)$。这样，服从概率律 $\mathbb{P}_f$ 的随机 $\mathcal{L}^2$全纯截面恰好如（1.2）所示，其中每个 $a_j>0$ 都是 T_f 的一个特征值，而正交归一基 $\{S_j\}_{j=1}^d$ 满足

$$T_f S_j=a_j S_j. \tag{1.3}$$

关于 Gross 抽象 Wiener 空间的简要介绍，请参阅 [J，例1.25]。

基于上述随机全纯截面的构造，我们旨在半经典极限框架下研究它们的零点作为 X 上的（1,1）流的分布，即考察给定正厄米线丛（L,h_L）的高次张量幂序列（L^p,h^p）：=（$L^{\otimes p},h_L^{\otimes p}$）、 $p\in\mathbb{N}$的随机全纯截面。当 $p\to\infty$时，起普朗克常数作用的数值 h：$=1/p$趋于 0。

为此，我们需要对（X,J,Θ）和（L,h_L）作进一步假设，稍后将对此作出精确定义。随后，我们考虑由希尔伯特空间 $H^0_{(2)}$（X,L^p）、 $p\in\mathbb{N}$按（1.1）所构造的随机截面序列 $\psi_\eta^{S_p}$。设 $d_p:=\dim_{\mathbb{C}} H^0_{(2)}$（$X,L^p$） $\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$。当 $p\to\infty$时，归一化零点的等分布

$\psi^S{}_\eta{}^p$在 X上是预期的，其中极限由第一Chern形式 $c_1(L,h_L)$给出。本文将从这一范围出发，把关于紧K¨ahler流形上随机零点的经典结果推广到一般的非紧致情形。

当 SU(2) 多项式的次数趋于无穷时，其零点的等分布由 Bogomolny、Bohigas 和 Leboeuf 在论文 [BBL], 中证明，其中次数的倒数起到普朗克常数的作用 h。在量子混沌动力学的背景下，Nonnenmacher 和 Voros 的论文 [NV]也研究了二维环面上的一个相关问题。随后，Shiffman 和 Zelditch [SZ1] 通过考虑上述高次张量幂，将这些结果进一步推广到配备预量子线丛的紧 K¨ahler 流形情形。他们还讨论了量子遍历特征截面的零点等分布。他们方法中的一个关键要素是

相关伯格曼核的渐近展开（参见 [T], [Ze1], [MM1] 及其中的参考文献）。Dinh 和 Sibony [DS] 运用复动力系统中的思想，提出了另一种方法，该方法还给出了随机零点分布的收敛速度估计。随后，Dinh、Marinescu 和 Schmidt [DMS]将这类结果推广到了非紧致情形，此时他们需要假设 $d_p = \mathcal{O}(p^n)$ 对于 $p \gg 0$成立。沿着这些思路，人们还将结果推广到了许多不同的几何或概率情形，参见 [BCM, BL, CM1, CMM, CMN1, CMN2, DMM]。关于这一主题的更多细节和参考文献，可参阅综述论文 [Ze2] 和 [BCHM] 。

特别地，对于紧 K¨ahler 流形，Shiffman、Zelditch 和 Zrebiec [SZZ]证明了，随着张量幂 p 趋于无穷，高斯全纯截面的随机零点满足大偏差估计；由此，他们还得到了空洞概率按预期呈指数衰减的结论。空洞概率指的是高斯随机全纯截面在 X的给定区域内不消失的概率。在我们之前的论文 [DLM], 中，我们将他们的结果推广到了非紧情形，尤其是在假设 $d_p = \mathcal{O}(p^n)$适用于 $p \gg 0$的条件下，推广到了带尖点的黎曼曲面情形。如今，在本文中，我们终于补上了这块拼图的最后一片，使这些结果也适用于$\psi_\eta^{S_p}$无需假设 $d_p < \infty$的高斯随机全纯截面。

在这种半经典情形下，在构造随机 $\mathcal{L}^2$-全纯截面时采用 Toeplitz 算子是自然而然的做法。Toeplitz 算子族$T_{f,\,p} \in \mathrm{End}(H^0_{(2)}(X, L^p))$，$p \in \mathbb{N}$，称为给定实光滑函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 的 Berezin-Toeplitz量子化；该函数也称为经典力学中的经典可观测量，其相空间为（X, Θ）（参见 [BMS]）。这类算子是研究 K¨ahler 流形（或一般而言辛流形上的几何量子化）的核心对象。关于更多细节，请参阅 Ma 和 Marinescu 的论文 [MM2, MM3, MM4]以及他们的著作 [MM1，第 7]章。

这里我们引入一类定义在 X 上的函数 f，使得对于所有$p \gg 0$，$T_{f,p}$ 都是 Hilbert-Schmidt 的。对于该类中的正光滑函数 f，我们规范地构造出一列概率空间（$H^0_{(2)}$（X，L^p）$\mathbb{P}_{f,p}$），$p \gg 0$。接下来，我们研究随机 $\mathcal{L}^2$-全纯截面的零点在 $p \to \infty$ 时的渐近行为。它们作为（1,1）流的极限将由 c_1（L，h_L）给出，但仅在 f的支集上成立（其零点的阶数至多为 2）。当我们考察普朗克尺度的小球（即半径为$\sim \frac{1}{\sqrt{p}}$）内的随机零点时，f 的精确取值会影响随机零点的涨落。另一个值得研究的问题是描述 f支集之外随机零点的渐近分布。

我们研究上述结果的方法依赖于算子$T^2_{f,p} = T_{f,p} \circ T_{f,p}$的对角线上的施瓦茨核的渐近展开，其中前几项在 [MM1 的第 7] 章以及 [MM4] 中（针对配备预量子线丛的 K¨ ahler 情形）得到了显式计算。请注意，在 [MM4], 中，这些公式是针对紧 K¨ahler 流形陈述的，但相关计算实际上是局部的，因此这些公式可推广到某些非紧流形情形。特别是，我们可以将其应用于 [MM1 第 7.5] 节所考虑的情形，以及 [MM5]和 [F2]中讨论的有界几何情形。

接下来的四节将介绍相关背景并阐述我们的主要结果。

1.1. 高斯随机全纯截面的零点。 我们从复流形（X，J，Θ）上的厄米全纯线丛（L，h_L）开始，其中该复流形是（旁紧的），具有任意的 $d = \text{维}_{\mathbb{C}}\, H^0_{(2)}$（$X$，$L$）$\geq 1$.

对于 $s \in H^0(X, L) \setminus \{0\}$，令 $Z(s)$ 表示 s 的零点集，它是 X 中纯 1 余维解析子集。于是，s 的除子 Div(s) 定义为形式

sum

$$\mathrm{Div}(s) = \sum_{V \subset Z(s)} \mathrm{ord}_V(s) V, \tag{1.4}$$

其中 V 遍历包含于 $Z(s)$ 中的所有不可约解析超曲面，而 $\mathrm{ord}_V(s) \in \mathbb{N}^+$ 表示 s 沿 V 的消失阶。对于任意解析超曲面 $V \subset X$，我们用 $[V]$ 表示 V 上的积分流，定义为 $\varphi \mapsto \int_V \varphi$，其中 φ 属于 X 中具有紧支撑的 $(n-1,n-1)$ 形式所构成的空间 $\Omega_0^{(n-1,n-1)}(X)$。除子 $\mathrm{Div}(s)$ 上带重数的积分流定义为

$$[\mathrm{Div}(s)] = \sum_{V \subset Z(s)} \mathrm{ord}_V(s)[V], \tag{1.5}$$

我们的第一个结果涉及高斯随机全纯截面 ψ_η^S（定义于（1.1））的零除子上的积分流的期望，即在 X 上作为流的随机（1,1）流 $[\mathrm{Div}(\psi_\eta^S)]$。对于任意测试形式 $\varphi \in \Omega_0^{(n-1,n-1)}(X)$，随机变量 $\langle [\mathrm{Div}(\psi_\eta^S)], \varphi \rangle$ 是可测的（参见 [CM1，命题 4.2] 的证明）。如果对于任意测试形式 φ，随机变量 $\langle [\mathrm{Div}(\psi_\eta^S)], \varphi \rangle$ 都是可积的，那么线性映射

$$\varphi \mapsto \mathbb{E}\left[\langle [\mathrm{Div}(\psi_\eta^S)], \varphi \rangle\right], \quad \varphi \in \Omega_0^{(n-1,n-1)}(X),$$

定义了 X 上的一个（1,1）流，称为 $[\mathrm{Div}(\psi_\eta^S)]$ 的期望，并记作 $\mathbb{E}[[\mathrm{Div}(\psi_\eta^S)]]$。

接下来，我们在 X 上定义 *Fubini-Study* 流 $\gamma(L, h_L)$。令

$$P : \mathcal{L}^2(X, L) \to H^0_{(2)}(X, L) \tag{1.6}$$

为 $\mathcal{L}^2$-正交投影，称为 *Bergman* 投影。它具有一个光滑施瓦茨核 $P(x,y)$，称为伯格曼核，参见第 2.1 小节。Bergman 核函数 $X \ni x \mapsto P(x,x)$ 是 X 上的非负光滑函数，而函数 $\log P(x,x)$ 在 X 上局部可积。记

$$\gamma(L, h_L) = c_1(L, h_L) + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log P(x,x), \tag{1.7}$$

其中，$c_1(L, h_L)$ 是 (L, h_L) 的 Chern 形式。

定理 1.1。假设 $d \geq 1$。则随机变量 $[\mathrm{Div}(\psi_\eta^S)]$ 的期望作为 X 上的 $(1,1)$-流存在。此外，我们有

$$\mathbb{E}[[\mathrm{Div}(\psi_\eta^S)]] = \gamma(L, h_L) \tag{1.8}$$

作为 $(1,1)$-流的恒等映射。

在 $d < \infty$ 的情形下，对于基点集为空的线丛，式 (1.8) 已经为人所知（参见 [SZ1，引理 3.1]）；在度量 h_L 或底空间 X 奇异的若干情形下，也已有相关结果（例如参见 [CM1，命题 4.2]，[CM2，定理 1.4]）。当 $d = \infty$，在随机全纯函数的背景下也已知该结果的类似结论，其中函数定义在 $\mathbb{C}^m$ 上；例如，Edelman 和 Kostlan [EK1，第 7 节及 8] 节研究了随机幂级数的复零点期望（在他们的论文中，主要目标是研究实零点的分布）。复几何中的其他有趣例子见第 2.4 小节；定理 1.1 适用于这些例子。

1.2. **线丛的高次张量幂 L：等分布与大偏差**。我们关注将 L 替换为其高次张量幂时，高斯全纯截面零点的半经典极限。为此，我们需要对 (X, J, Θ) 以及 (L, h_L) 作进一步假设，具体如下。假设黎曼度量g^{TX}是完备的，并且存在 $C, C_0, \varepsilon > 0$，使得在 X 上，

$$\sqrt{-1}R^L \geq \varepsilon\Theta,\ \ \sqrt{-1}R^{\det} \geq -C_0\Theta,\ \ |\partial\Theta|_{g^{TX}} \leq C\,, \tag{1.9}$$

其中，$R^{\det}$ 是 $K_X^* = \det(T^{(1,0)}(X))$上的全纯联络 $\nabla^{\det}$ 的曲率。

在此情形下，根据 [MM1，第 6] 章，$P_p(x,x)$中的对角伯格曼核在张量幂 p中具有渐近展开，该展开在 X的任意给定紧子集上一致。作为推论，我们有流的收敛

$$\frac{1}{p}\gamma(L^p, h^p) \to c_1(L, h_L) \quad \text{as } p \to \infty. \tag{1.10}$$

下文中，我们将由 $H^0_{(2)}(X, L^p)$的一个正交归一基$S_p = \{S_j^p\}_{j=1}^{d_p}$ 构造的高斯随机全纯截面（如（1.1）中所示）记为$\psi_\eta^{S_p}$。按照自然的做法，在表述我们的集中估计之前，我们首先陈述期望 $\mathbb{E}[[\mathrm{Div}(\psi_\eta^{S_p})]]$的极限结果。尽管这些结果在我们的特定情形下是新颖的，并在下文的定理 3.1 和 3.6 中给出了精确表述，但粗略地说，我们证明了以下结论：

- as $p \to \infty$, $\frac{1}{p}\mathbb{E}[[\mathrm{Div}(\psi_\eta^{S_p})]] \to c_1(L, h_L)$;
- for each $\varphi \in \Omega_0^{(n-1,n-1)}(X)$, we have that

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\langle[\mathrm{Div}(\psi_\eta^{S_p})], \varphi\rangle = \langle c_1(L, h_L), \varphi\rangle\Big) = 1. \tag{1.11}$$

显然，第一点是定理 1.1 与 (1.10) 相结合的推论。第二点中的几乎必然收敛可通过伯格曼核推得。

有了这些关于随机零点的等分布结果，自然的下一步是像[SZZ] 和 [DLM], 那样，利用大偏差估计研究收敛速度，同时考虑 $d_p = \infty$的可能性。

定理 1.2。我们假设黎曼度量 g^{TX} 是完备的，且满足 (1.9) 。若 U是 X的相对紧开子集，那么对于任意 $\delta > 0$ 和 $\varphi \in \Omega_0^{(n-1,n-1)}(U)$，存在一个常数 $c = c(U, \delta, \varphi) > 0$，使得对于 $p \in \mathbb{N}$，有

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\Big\langle\frac{1}{p}[\mathrm{Div}(\psi_\eta^{S_p})] - c_1(L, h), \varphi\Big\rangle\Big| > \delta\Big) \leq e^{-cp^{n+1}}. \tag{1.12}$$

另一个自然的问题是，当 $p \to \infty$时，$\psi_\eta^{S_p}$的零点分布是否满足中心极限定理；我们将在注 3.16 中简要讨论这一问题。

由于 $c_1(L, h_L)$ 是正的，$\frac{1}{n!}c_1(L, h_L)^n$ 也定义了 X 上的一个正体积元。若$U \subset X$ 是开子集，则令

$$\mathrm{Vol}_{2n}^L(U) = \int_U \frac{1}{n!}c_1(L, h_L)^n. \tag{1.13}$$

对于 $s_p \in H^0(X, L^p) \setminus \{0\}$，我们定义开子集 $U \subset X$ 中除子 $\mathrm{Div}(s_p)$（参见 (1.4)）相对于$c_1(L, h_L)$ 的 $(2n-2)$ 维体积如下：

$$\mathrm{Vol}_{2n-2}^L\big(\mathrm{Div}(s_p) \cap U\big) = \sum_{V \subset Z(s_p)} \mathrm{ord}_V(s_p) \int_{V\cap U} \frac{c_1(L, h_L)^{n-1}}{(n-1)!}\,. \tag{1.14}$$

若用此体积来度量 s_p 在 U中的零点大小，则定理 1.2 得出以下结果。

定理 1.3. 我们假设黎曼度量 g^{TX} 是完备的，且满足(1.9) 。若 U 是 X 的一个非空相对紧开子集，且 ∂U 在 X中是零测度的，那么对于任意 $\delta > 0$，存在一个常数 $c_{U,\delta} > 0$，使得当 p 足够大时，有

$$\mathbb{P}\Big(\Big| \frac{1}{p} \operatorname{Vol}^L_{2n-2}(\operatorname{Div}(\psi_\eta^{S_p}) \cap U) - n \operatorname{Vol}^L_{2n}(U) \Big| > \delta \Big) \leq e^{-c_{U,\delta} p^{n+1}}. \tag{1.15}$$

此外，存在一个常数 $C_U > 0$，使得对于 $p > 0$,

$$\mathbb{P}\big(\operatorname{Div}(\psi_\eta^{S_p}) \cap U = \varnothing \big) \leq e^{-C_U p^{n+1}}. \tag{1.16}$$

上述两个定理的证明将在第 3.2 小节给出。这些证明的一个重要要素是命题 3.10, 为此我们需要对 X 上全纯截面的局部上确界范数进行更精细的研究（参见第 3.3 小节）。

(1.16) 中的概率称为随机截面 $\psi_\eta^{S_p}$ 在子集 U 上的空穴概率 。该估计进而给出了 $p > 0$ 的空洞概率上界。在附加假设 U 下， [SZZ 的定理 1.4] 和 [DLM 的命题 1.7], 证明了空洞概率具有 $e^{-C'_U p^{n+1}}$ 形式的下界。不过，一般而言，在 $d_p = \infty$ 的情形下, 这样的下界仍不清楚。

对于 Bargmann-Fock 空间，在 $\mathbb{C}^n$ 上的标准高斯随机全纯函数（参见（2.44））的情形下，当 $U = \mathbb{B}(0, r)$ 为 $r \to \infty$ 时，空洞概率的双侧界由 Sodin-Tsirelson（对于 $\mathbb{C}$, [ST2，定理 1]）和 Zrebiec（对于 $\mathbb{C}^n$, [Zr，定理 1.2]）分别证明。在第 3.4 小节中，我们将说明如何从我们的一般结果出发，将其专门应用于缩放的 Bargmann-Fock 空间，从而重新得到他们的结果。

1.3. 随机 $\mathcal{L}^2$全纯截面与 Toeplitz 算子。 在第1.1节的设置下，我们对 X 上的有界函数 f 引入相应的 Toeplitz 算子T_f，其定义为 $T_f\colon\ H^0_{(2)}(X, L) \ni S \mapsto P(fS) \in H^0_{(2)}(X, L)$，其中 P 是 Bergman 投影（1.6）（进一步的细节见定义 4.4）。

若 f 光滑且还满足

$$\int_X |f(x)| P(x, x) \mathrm{dV}(x) < \infty, \tag{1.17}$$

则算子 T_f 是 Hilbert-Schmidt 算子（参见命题 4.7）。此外，若 f 是实值非负函数（且不恒等于零），则 T_f 是单射。

对于这样的非负光滑函数 f，我们在$H^0_{(2)}(X, L)$上得到 Hilbert 度量 $\langle T_f \cdot, T_f \cdot \rangle_{\mathcal{L}^2(X,L)}$，它是 Gross 意义下的可测范数（参见 [Gr]）。设 $\mathcal{B}_f(X, L)$ 是在此可测范数下对 $H^0_{(2)}(X, L)$ 完备化所得的希尔伯特空间。抽象 Wiener 空间理论表明，对于上述给定的 f，存在唯一的高斯概率测度 $\mathcal{P}_f$，定义在 $\mathcal{B}_f(X, L)$上，并且其在任何有限维子空间 $\operatorname{Im}(T_f)$ 上的限制，都是与标准 $\mathcal{L}^2$-度量相关联的高斯概率测度。

单射线性算子 T_f 延拓为希尔伯特空间之间的等距映射

$$\widehat{T}_f : \big(\mathcal{B}_f(X, L), \|T_f \cdot\|\big) \to \big(H^0_{(2)}(X, L), \|\cdot\|_{\mathcal{L}^2(X,L)}\big). \tag{1.18}$$

$\widehat{}$将 $\mathcal{P}_f$ 通过 T_f推前后，我们得到 $H^0_{(2)}(X, L)$ 上的高斯概率测度 $\mathbb{P}_f$。

施瓦茨核的对角限制 $T^2_f(x, x)$ 在 X 上局部可积（参见引理 4.13）。作为（1.7）的类似定义，我们在 X 上定义一个闭正 (1, 1)-流如下：

$$\gamma_f(L, h_L) = c_1(L, h^L) + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log T^2_f(x, x). \tag{1.19}$$

在第 4.4 小节中，我们证明了关于 $\mathcal{L}^2$-全纯截面的随机零点期望的以下结果。

定理 1.4。 记 s 为 $(H^0_{(2)}(X,L)\ \mathbb{P}_f)$ 上的恒等映射，并考虑取值于 X 上的 (1,1)-流空间的随机变量 $[\mathrm{Div}(s)]$ 。那么

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}_f}\left[[\mathrm{Div}(s)]\right] = \gamma_f(L, h_L). \tag{1.20}$$

注 1.5。 在撰写本文期间，我们了解到 Ancona 和 Le Floch [ALF] 关于紧 K¨ahler X 情形下 Toeplitz 算子 T_f 作用于随机截面的研究。对于紧 X，有 $d < \infty$ （我们假设 $d > 0$），在这种情况下， $H^0(X, L)$ 中配备上述概率测度 $\mathbb{P}_f$ 的随机截面 s 与 Ancona 和 Le Floch 考虑的随机截面 $T_f s'$ 具有相同的分布；后者是 $H^0(X, L)$ 中配备由 $\mathcal{L}^2$- 度量给出的标准高斯概率测度的随机截面 s' 。

1.4. **的高次张量幂：** f**支集上的等分布**。 为考察非紧致情形下的半经典极限，我们需要作出与第 1.2 小节相同的假设。为简便起见，本小节中我们只考虑 X 上一个非平凡的非负光滑函数 f，且其具有紧支撑。请注意，我们的结果对一类更一般的非负光滑函数 f 仍然成立，这些函数不要求具有紧支撑（参见第 5.1 和 5.2 小节）。

由于 f 具有紧支撑，因此对于每个 p，线丛 L^p 都满足条件 (1.17)。这样，我们可以利用相应的 Toeplitz 算子 $T_{f,\ p}$ 构造一列概率空间 $(H^0_{(2)}(X, L^p)\ \mathbb{P}_{f,\ p})$。我们记 $\mathbf{S}_{f,\ p}$ 为典范概率空间 $(H^0_{(2)}(X, L^p)\ \mathbb{P}_{f,\ p})$ 上的恒等映射。

In 借助定理 5.3 和 5.5，我们证明以下结果的一般形式 .

定理 1.6。 *(1)* 设 U 是 X 的一个开子集，使得 $f > 0$ 在 $U.$ 上成立。则当 $p \to \infty$ 时，我们有 $(1,\ 1)$-流在 U 上的弱收敛，

$$\frac{1}{p}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_{f,p}}[[\mathrm{Div}(\mathbf{S}_{f,p})]|_U] \to c_1(L, h_L)|_U\,. \tag{1.21}$$

(2) 此外，对于任意 $\varphi \in \Omega_0^{(n-1,n-1)}\,(\overline{U})$，我们有

$$\mathbb{P}\left(\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\langle[\mathrm{Div}(\mathbf{S}_{f,p})], \varphi\rangle = \langle c_1(L, h_L), \varphi\rangle\right) = 1. \tag{1.22}$$

事实上， f 可能在 supp f 中的某些点处消失。由于 $f \geq 0$，因此 f 在零点处的最小消失阶为 2。若进一步假设 Θ 是 K¨ähler，并且 (L, h_L) 是一个预量子线丛（即 $c_1(L, h_L) = \Theta$），那么我们可以允许这类零点属于定理 1.6 中的集合 U 。

定理 1.7. 对于上述 f，进一步假设（L， h_L）满足预量子线丛条件。设 U 是$\mathrm{supp}\, f$ 的一个开子集，并且 f 在U 中仅有不超过二阶的零点，且在这些零点处 Δf 非零。那么当 $p \to \infty$ 时，

- 我们有 U 上$(1,\ 1)$-流的弱收敛

$$\frac{1}{p}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_{f,p}}[[\mathrm{Div}(\mathbf{S}_{f,p})]|_U] \to c_1(L, h_L)|_U. \tag{1.23}$$

- 对于任意 $\varphi \in \Omega_{(n-1,n-1)\ 0}\,(\overline{U})$，我们有

$$\mathbb{P}\left(\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\langle[\mathrm{Div}(\mathbf{S}_{f,p})], \varphi\rangle = \langle c_1(L, h_L), \varphi\rangle\right) = 1. \tag{1.24}$$

上述定理的一个一般版本见定理 5.8。

上述结果证明中的一个重要环节，是定理 1.4 中的下列恒等式，

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}_{f,p}}[[\mathrm{Div}(\mathbf{S}_{p,f})]] - pc_1(L,h_L) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log(T^2_{f,p}(x,x)). \tag{1.25}$$

接着，在第 5.3 小节中，我们通过与测试形式 $\varphi \in \Omega_0^{(n-1,n-1)}(X)$ 配对，考察以 x 为中心的小测地球 $B(x,R/\sqrt{p})$ 内的零点；我们的计算（特别是利用定理 5.14）表明

(1.26)

$$\left\langle \mathbb{E}^{\mathbb{P}_{f,p}}[[\mathrm{Div}(\mathbf{S}_{f,p})]] - pc_1(L,h_L), \chi_{B\left(x,\frac{R}{\sqrt{p}}\right)}\varphi \right\rangle = \begin{cases} \mathcal{O}(p^{-n}), & \text{if } f(x) > 0; \\ \mathcal{O}(p^{-n+1}), & \text{if } f(x) = 0,\ \Delta f(x) < 0, \end{cases}$$

其中，$\chi_{B(x,R/\sqrt{p})}$ 是集合 $B(x,R/\sqrt{p})$ 的示性函数，并且我们给出了上述估计中 p^{-n} 和 p^{-n+1} 的系数的显式公式。（1.26）中的不同幂次表明，在普朗克尺度下，与 f 的二阶零点附近相比，随机零点在非消失点附近可能有更高阶的涨落。

最后，在第 5.4 小节中，我们考虑一个不一定非负的实光滑函数 f，它满足 L^p、$p \gg 0$ 的（1.17）。在这种情况下，$T_{f,\,p}$ 可能不是单射；在对 f 的零点施加适当条件后，我们仍可将定理 1.7 推广到这种情形。

本文接下来的四节与上述阐述主要结果的四个小节一一对应：前两节讨论高斯随机全纯截面，后两节则借助 Toeplitz 算子讨论随机 $\mathcal{L}^2$-全纯截面。

致谢： 我们衷心感谢德国研究联合会优先计划2265“随机几何系统”提供的支持。作者感谢马晓南教授所进行的有益讨论。

2. 高斯随机全纯截面

本节定义 L 上的高斯随机全纯截面，并研究其在 X 上作为 (1,1)-流的零点。

尽管本节证明的一些结果在随机函数或幂级数这一特殊情形下并非新结果，但据我们所知，文献中尚未见到针对具有 $d=\infty$ 的全纯截面的这些结果。

2.1. 全纯线丛与伯格曼核。 设 (X,J,Θ) 是一个连通的 n 维流形（无边界），其中 J 表示复结构，Θ 是一个厄米形式。由 Θ 可关联一个 J-不变的黎曼度量 $g^{TX}(\cdot,\cdot) = \Theta(\cdot, J\cdot)$。设 L 是 X 上的一个全纯线丛，h_L 是 L 上的一个光滑厄米度量。我们将 L 对应的 Chern 曲率形式记为 R^L，并将 (L,h_L) 的第一Chern形式记为

$$c_1(L,h_L) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R^L. \tag{2.1}$$

令 $\mathscr{C}_0^\infty(X,L)$ 表示 X 上 L 的紧支撑光滑截面空间。结合度量 g^{TX} 和 h_L，对于 $s_1, s_2 \in \mathscr{C}_0^\infty(X,L)$，我们定义 $\mathcal{L}^2$-内积如下：

$$\langle s_1, s_2\rangle_{\mathcal{L}^2(X,L)} := \int_X \langle s_1(x), s_2(x)\rangle_{h_L}\mathrm{dV}(x), \tag{2.2}$$

其中，$\mathrm{dV} = \frac{1}{n!}\,\Theta^n$ 是由 Θ. 诱导的体积形式。我们还令 $\mathcal{L}^2(X, L)$ 表示关于由 (2.2) 诱导的范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2(X,\ L)}$，将 $\mathscr{C}_0^\infty(X, L)$ 完备化后得到的可分希尔伯特空间。令 $H^0(X, L)$ 表示 L 在 X 上的全纯截面向量空间。设

$$H^0_{(2)}(X, L) := \mathcal{L}^2(X, L) \cap H^0(X, L). \tag{2.3}$$

由全纯函数的柯西估计可知，对于每个紧集 $K \subset X$ 都存在 $C_K > 0$ 使得

$$\sup_{x\in K} |s(x)| \le C_K \|s\|_{\mathcal{L}^2(X,L)} \quad \text{for } s \in H^0_{(2)}(X, L), \tag{2.4}$$

这反过来意味着 $H^0_{(2)}(X, L)$ 是 $\mathcal{L}^2(X, L)$ 的闭子空间。此外，$H^0_{(2)}(X, L)$ 是一个带有诱导 $\mathcal{L}^2$-度量的可分希尔伯特空间（参见 [W，第 60] 页）。

根据（2.4），取值泛函 $H^0_{(2)}(X, L) \ni S \mapsto S(x)$ 是连续的，因此根据里斯表示定理，对每个 $x \in X$ 都存在 $P(x, \cdot) \in \mathcal{L}^2(X, L_x \otimes L^*)$ 使得

$$s(x) = \int_X P(x, y)s(y)\,\mathrm{dV}(y)\,, \quad \text{for all } s \in H^0_{(2)}(X, L).$$

Set

$$d = \dim H^0_{(2)}(X, L) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}. \tag{2.5}$$

如果 X 是紧的，则 $d < \infty$。如果 $d \ge 1$，取 $\{S_j\}_{j=1}^d$ 为 $H^0_{(2)}(X, L)$ 的一个正交归一基。则级数 $\sum_{j=1}^d S_j(x) \otimes (S_j(y))^*$ 在每个紧集上一致收敛，且其所有导数也一致收敛（参见 [At，命题 2.4]，[MM1，注 1.4.3]，[W，第 63] 页）。特别地，$P(x, y)$ 在 $X \times X$ 上是光滑的。由此可得

$$P(x, y) = \sum_{j=1}^{d} S_j(x) \otimes (S_j(y))^*\,. \tag{2.6}$$

因此，我们得到伯格曼投影 (1.6)：

$$(Ps)(x) = \int_X P(x, y)s(y)\,\mathrm{dV}(y),$$

即，$P(x, y)$ 是伯格曼投影的积分核。回顾一下，线丛 $L \boxtimes L^*$ 在 $X \times X$ 上的纤维为 $(L \boxtimes L^*)_{(x,y)} := L_x \otimes L_y^*$，其中 $(x, y) \in X \times X$。$P(\cdot, \cdot)$ 这一 $L \boxtimes L^* \to X \times X$ 的截面称为伯格曼核。

典范同一映射 $L_x \otimes L_x^* = \mathrm{End}(L_x) = \mathbb{C},\ s \otimes s^* \mapsto s^*(s) = |s|^2_{h_L}$ 使我们可以将 $P(x, x)$ 识别为光滑函数

$$P(x, x) = \sum_{j=1}^{d} |S_j(x)|^2_{h_L}, \tag{2.7}$$

称为*Bergman* 核函数。我们推得 $d = \int_X P(x, x)\,\mathrm{dV}(x) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.因此，Bergman 核函数是 $H^0_{(2)}(X, L)$ 的维数密度。若 $d = 0$，则上述论述显然成立。

2.2. 高斯随机全纯截面。 本小节证明的结果，是将关于 $\mathbb{C}^n$ 上随机幂级数或随机解析函数的著名结果（参见 [Ka] or [EK1，第 3] 节）推广到复几何背景。为求完整起见，我们列出证明的详细过程。

设 $\eta = \{\eta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是一列独立同分布的中心化实或复高斯随机变量，并以 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{E}$ 分别表示其底层概率测度及其期望。

对 $d \geq 1$，设 $S = \{S_j\}_{j=1}^d$ 是 $H^0_{(2)}(X, L)$ 的一组正交归一基。定义

$$\psi_\eta^S(x) = \sum_{j=1}^d \eta_j S_j(x). \tag{2.8}$$

如果 $d = 0$，我们就简单地令 $\psi_\eta^S \equiv 0$。

命题 2.1。截面 ψ_η^S 几乎必然是 L 在 X上的全纯截面。

证明。如果 d 是有限的，则该断言显然成立。因此，只需证明情形$d = \infty$. 在此情形下，X 是非紧的。设 $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 的一个递增紧子集序列，满足 $X = \cup_{i\in\mathbb{N}} K_i$。我们可以令每个 K_i 都是 X的一个相对紧开子集 U_i 的闭包。于是，为证明此命题，我们只需证明对于每个 i， ψ_η^S几乎必然是 L 在 U_i上的全纯截面。

设 K 是 X的一个紧子集，并设 U是 K的一个相对紧开邻域。与（2.4）类似，存在一个常数 $C_U > 0$，使得对于 $s \in H^0_{(2)}(X, L)$，

$$\sup_{x\in K} |s(x)|_{h_L} \leq C_U \|s\|_{\mathcal{L}^2(\overline{U},L)}. \tag{2.9}$$

由 (2.7)，可得

$$\sum_{j=1}^d \|S_j\|^2_{\mathcal{L}^2(\overline{U},L)} = \int_{x\in\overline{U}} P(x, x)\mathrm{dV}(x) < +\infty. \tag{2.10}$$

对于 $j \in \mathbb{N}_{>0}$， $x \in X$，令

$$X_j(x) = \eta_j S_j(x), \tag{2.11}$$

它是一个取值于 L_x的随机变量。由于 η_j 是中心化的，我们推得

$$\mathbb{E}[X_j(x)] = 0 \in L_x. \tag{2.12}$$

因此，将方差定义为

$$\mathrm{Var}(X_j(x)) = \mathbb{E}[|X_j(x)|^2_{h_L}],$$

并且可以计算得

$$\mathrm{Var}(X_j(x)) = \mathbb{E}[|X_j(x)|^2_{h_L}] = \mathrm{Var}(\eta_j)|S_j(x)|^2_{h_L} = \mathrm{Var}(\eta_1)|S_j(x)|^2_{h_L}. \tag{2.13}$$

接下来证明，对于任意 $k \in \mathbb{N}$、 $N \in \mathbb{N}_{>0}$ 以及 $r > 0$，都有

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{\ell=1,\ldots,N}\sup_{x\in K} \big|\sum_{j=1}^\ell X_{k+j}(x)\big|_{h_L} > r\Big) < \frac{C_U^2 \mathrm{Var}(\eta_1)}{r^2} \sum_{j=1}^N \|S_{k+j}\|^2_{\mathcal{L}^2(\overline{U},L)}. \tag{2.14}$$

为此，定义随机过程

$$Y_\ell = \big\|\sum_{j=1}^\ell X_{k+j}\big\|^2_{\mathcal{L}^2(\overline{U},L)}, \quad \ell = 1, \ldots, N, \tag{2.15}$$

并注意到，由 (2.9) 可得

$$\sup_{x\in K} \big|\sum_{j=1}^\ell X_{k+j}(x)\big|_{h_L} \leq C_U Y_\ell^{\frac{1}{2}}. \tag{2.16}$$

因此，我们得到

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{\ell=1,\ldots,N}\sup_{x\in K} \big|\sum_{j=1}^\ell X_{k+j}(x)\big|_{h_L} > r\Big) \leq \mathbb{P}\Big(\sup_{\ell=1,\ldots,N} C_U^2 Y_\ell > r^2\Big). \tag{2.17}$$

现在，过程 (Y_ℓ)，$\ell = 1, \dots, N$ 是关于滤子 $(\mathcal{F}_\ell)$ 的次鞅，其中

$$\mathcal{F}_\ell = \sigma\big(\langle X_{k+i}, X_{k+j}\rangle_{\mathcal{L}^2(\overline{U},L)},\ i,j = 1,\dots,\ell\big). \tag{2.18}$$

T因此，Doob 次鞅不等式（例如参见 [Kl，引理 11.1]）给出

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{\ell=1,\dots,N} Y_\ell > \frac{r^2}{C_U^2}\Big) \le C_U^2 \frac{\mathbb{E}[Y_N]}{r^2}, \tag{2.19}$$

这立即推出 (2.14)。现在，在 (2.14) 中令 $N \to +\infty$，得到

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{\ell\in\mathbb{N}_{>0}} \sup_{x\in K} |\sum_{j=1}^{\ell} X_{k+j}(x)|_{h_L} > r\Big) \le \frac{C_U^2 \mathrm{Var}(\eta_1)}{r^2} \sum_{j=1}^{+\infty} \|S_{k+j}\|^2_{\mathcal{L}^2(\overline{U},L)}. \tag{2.20}$$

然后令 $k \to \infty$，并利用 (2.10)，对 (2.20) 取极限可得

$$\mathbb{P}\Big(\limsup_{k\to+\infty} \sup_{\ell\in\mathbb{N}_{>0}} \sup_{x\in K} |\sum_{j=1}^{\ell} X_{k+j}(x)|_{h_L} > r\Big) = 0. \tag{2.21}$$

因此 沿着 $r = \frac{1}{n}$ 序列应用并集界，立即可得

$$\mathbb{P}\Big(\limsup_{k\to+\infty} \sup_{\ell\in\mathbb{N}_{>0}} \sup_{x\in K} |\sum_{j=1}^{\ell} X_{k+j}(x)|_{h_L} > 0\Big) = 0. \tag{2.22}$$

若取 V 为 X 的一个相对紧开子集，并取 $K = \overline{V}$，则由 (2.22)，级数 $\sum_{j=1}^{\infty} X_j$ 几乎必然在 K 上一致收敛，因此它几乎必然定义了 V 上的一个全纯截面。这就完成了命题的证明。□

为便于理解下面的定义，我们在此指出，标准复高斯变量是一个分布为 $\frac{1}{\sqrt{2}}($ $X + \sqrt{-1}Y)$ 的随机变量，其中 X 和 Y 是标准实高斯变量。

定义 2.2. 在 (2.8) 中定义的随机截面 ψ_η^S 称为 X 上 L 的标准高斯随机全纯截面，条件是 $\eta = \{\eta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是一列独立同分布的标准复高斯随机变量。

现在我们证明，标准高斯随机全纯截面 ψ_η^S 的分布与正交归一基的选取无关。

命题 2.3. 假设 $d \ge 1$，并假设 $\eta = \{\eta_j\}_{j=1}^d$ 是一列独立同分布的标准复高斯随机变量。若 $S' = \{S'_j\}_{j=1}^d$ 是 $H^0_{(2)}(X,\ L)$ 的另一组正交归一基，则 $\psi_\eta^{S'}$ 和 ψ_η^S 作为随机全纯截面具有相同的分布。

证明。只需取一列 $\eta' = \{\eta'_j\}_{j=1}^d$ 独立同分布的标准复高斯随机变量，使得几乎处处 $\psi_\eta^{S'} = \psi_{\eta'}^S$。

令 $\ell^2(\mathbb{C})$ 表示由 ℓ^2-可和复数序列构成的希尔伯特空间。若 $u = (u_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C})$，则定义

$$(\eta, u)_{\ell^2} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \eta_j \bar{u}_j. \tag{2.23}$$

根据柯尔莫哥洛夫三列定理（参见 [Va]），(2.23) 中的级数几乎必然收敛，因此 $(\eta, u)_{\ell^2}$ 是一个定义良好的随机变量。由高斯随机变量的性质可知，$(\eta, u)_{\ell^2}$ 是一个方差为 $|u|^2_{\ell^2}$ 的中心复高斯随机变量。特别地，如果 $|u|_{\ell^2} = 1$，那么 $(\eta, u)_{\ell^2}$ 与

η_1具有相同的分布。此外，如果非零的 $u, v \in \ell^2$ 满足 $(u, v)_{\ell^2} = 0$，那么 $(\eta, u)_{\ell^2}$ 和 $(\eta, v)_{\ell^2}$ 相互独立。

取 $(a_{ij} \in \mathbb{C})_{i,\ j\in\mathbb{N}}$ 使得对每个 i,

$$S_i' = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{ij} S_j. \tag{2.24}$$

对于 $j \in \mathbb{N}$，令 $b_j = (\bar{a}_{ij})_{i\in\mathbb{N}}$。则 $b_j \in \ell^2(\mathbb{C})$ 的范数为 1；此外，若 $j \neq j'$，则 $(b_j, b_{j'})_{\ell^2} = 0$。现在定义

$$\eta_j' = (\eta, b_j)_{\ell^2}. \tag{2.25}$$

于是，$\eta' = (\eta_j')_{j\in\mathbb{N}}$ 是一列独立同分布的中心化高斯随机变量，其分布与 η 相同。根据定义，我们几乎必然有，

$$\psi_\eta^{S'} = \psi_{\eta'}^{S}. \tag{2.26}$$

因此，$\psi_\eta^{S'}$ 和 ψ_η^S 具有相同的分布。 □

注释2.4. (a) 当 $d = \infty$ 时，注意到通过取一列紧子集 $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，如命题 2.1 的证明中所示，我们可以为 $H^0(X, L)$ 定义一列半范数，从而得到一个 Fr´echet 距离，使得 $H^0(X, L)$ 是一个 Fr´echet 空间。在命题 2.1 的证明中，我们实际上证明了 ψ_η^S 是取值于 Fr´echet 空间 $H^0(X, L)$ 的随机变量。(b) 在命题 2.1 的证明中，高斯性对于 η_j 并非本质所需。因此，我们可以考虑任意一列 η 两两不相关的中心化随机变量，且其方差一致有界。然而，在这种情况下，随机截面 ψ_η^S 的分布可能取决于基 S 的选择。通常，需要对 η 施加适当的矩条件，才能获得良好的性质，例如 ψ_η^S 的零点的普适性结果；相关细节参见 [KZ], [BCM], [DLM] 。

引理 2.5. 如果 $d = \infty$，那么以概率 *1*，ψ_η^S 在 X 上不是 $\mathcal{L}^2$-可积的。

证明。 ψ_η^S是 $\mathcal{L}^2$-可积的事件等价于事件 $\{\sum_{j=1}^\infty |\eta_j|^2 < \infty\}$。然而，例如由大数定律可知，

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^\infty |\eta_j|^2 < \infty\Big) = 0, \tag{2.27}$$

引理的结论由此得证。 □

2.3. **随机零点的期望：定理 1.1 的证明**。 在下文中，我们始终假设 $d = \dim H^0_{(2)}(X, L) \geq 1$。我们先讨论一些关于 Fubini–Study 流的事项。

引理 2.6。 假设 $d \geq 1$。那么函数 $X \ni x \mapsto \log P(x, x) \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ 在 X 上关于 dV 局部可积。因此，$\frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log P(x, x)$ 在 X 上定义了一个 $(1, 1)$-流。

证明。令 $e_L : U \to L$ 为 L 的局部全纯标架。令 $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(U)$ 为相对于 e_L 的 h_L 的局部权重，即在 U 上有 $|e_L|^2_{h_L} = e^{-2\varphi}$。我们考虑 $H^0_{(2)}(X, L)$ 的一个正交归一基 $\{S_j\}_{j=1}^d$，并记 $S_j(x) = f_j(x)e_L(x)$，$x \in U$，其中 f_j 是 U 上的非平凡全纯函数。于是 $P(x, x)$ 在 U 上满足 $= \sum_{j=1}^d |S_j|^2_{h_L} = \sum_{j=1}^d |f_j|^2 e^{-2\varphi}$，因此

$$\log P(x, x) = \log\Big(\sum_{j=1}^d |f_j|^2\Big) - 2\varphi\,. \tag{2.28}$$

级数 $\sum_{j=1}^d |f_j|^2$在 U 上局部一致收敛，因此 $\log\big(\sum_{j=1}^d |f_j|^2\big)$ 是一个不恒等于 $-\infty$ 的多复变调和函数，因而局部可积。□

引理 2.6 表明，Fubini-Study 流 (1.7) 定义良好。注意，$c_1(L,h_L)|_U = \frac{\sqrt{-1}}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi$。对 (2.28) 两边应用 $\partial\overline{\partial}$，并考虑到 (1.7)，我们得到

$$\gamma(L,h_L)\big|_U = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\big(\sum_{j=1}^{d}|f_j|^2\big), \tag{2.29}$$

因此，$\gamma(L,h_L)$ 是一个闭正 (1, 1)-流。$H^0_{(2)}(X,L)$ 的基 locus 是真解析集

$$\mathrm{Bl}(X,L) := \big\{x\in X \mid s(x)=0 \text{ for all } s\in H^0_{(2)}(X,L)\big\}. \tag{2.30}$$

因此，$\{x\in X\colon P(x,x)=0\}=\mathrm{Bl}(X,L)$。由此可知，若 $\mathrm{Bl}(X,L)=\varnothing$，则 $\gamma(L,h_L)$ 是光滑形式。注意，若 X 是紧的且 $\mathrm{Bl}(X,L)=\varnothing$，则 $\gamma(L,h_L)$ 是由 $H^0(X,L)$ 定义的 Kodaira 映射对射影空间上的 Fubini-Study 形式的拉回。这也说明了称其为 Fubini-Study 流的原因。

现在我们可以证明定理 1.1。设 $\eta=\{\eta_j\}_{j=1}^d$ 是一列独立同分布的标准复高斯随机变量。设 ψ_η^S 是式 (2.8) 中定义的随机全纯截面，并令 $[\mathrm{Div}(\psi_\eta^S)]$ 表示由其零点给出的（1,1）流（参见式 (1.4)）。

定理 *1.1* 的证明。由 Lelong-Poincar´e 公式（参见 [MM1，定理 2.3.3]），对于$s\in H^0(X,L)$，我们有

$$[\mathrm{Div}(s)] = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar\partial\log|s|^2_{h_L} + c_1(L,h_L). \tag{2.31}$$

取一个测试形式 $\varphi\in\Omega_0^{(n-1,n-1)}(X)$，并计算 $\mathbb{E}[\langle[\mathrm{Div}(\psi_\eta^S)],\varphi\rangle]$。将 (2.31) 应用于$\psi_\eta^S$，得到

$$\begin{aligned}\langle[\mathrm{Div}(\psi_\eta^S)],\varphi\rangle &= \int_X\big(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar\partial\log|\psi_\eta^S|^2_{h_L}+c_1(L,h_L)\big)\wedge\varphi\\ &= \int_X c_1(L,h_L)\wedge\varphi + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_X\log|\psi_\eta^S|^2_{h_L}\partial\bar\partial\varphi\\ &= \int_X c_1(L,h_L)\wedge\varphi + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{X\setminus\mathrm{Bl}(X,L)}\log|\psi_\eta^S|^2_{h_L}\partial\bar\partial\varphi.\end{aligned} \tag{2.32}$$

对于 $x\in X\setminus\mathrm{Bl}(X,L)$，我们有 $P(x,x)\neq 0$，并令 $e_L(x)$ 为 L 在 x 处的一个单位向量，定义

$$b(x) = \big(P(x,x)^{-1/2}S_j(x)/e_L(x)\big)_{j\in\mathbb{N}}\in\ell^2(\mathbb{C}). \tag{2.33}$$

我们有 $|b(x)|_{\ell^2}=1$。注意到

$$P(x,x)^{-1/2}\psi_\eta^S = (\eta,\overline{b(x)})_{\ell^2}\,e_L(x). \tag{2.34}$$

Then

$$\mathbb{E}[\log|P(x,x)^{-1/2}\psi_\eta^S|^2_{h_L}] = \mathbb{E}[\log\big|(\eta,\overline{b(x)})_{\ell^2}\big|^2] = \mathbb{E}[\log|\eta_1|^2] \tag{2.35}$$

注意，$\mathbb{E}[|\log|\eta_1|^2|]<\infty$。由引理 2.6，$\log P(x,x)$ 在 X 上局部可积，因此我们可以对以下积分应用 Fubini 定理，从而得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big[\int_{X\setminus\mathrm{Bl}(X,L)}\log|P(x,x)^{-1/2}\psi_\eta^S|^2_{h_L}\partial\bar\partial\varphi\big]\\ &= \int_{X\setminus\mathrm{Bl}(X,L)}\mathbb{E}\big[\log|P(x,x)^{-1/2}\psi_\eta^S|^2_{h_L}\big]\partial\bar\partial\varphi\\ &= \mathbb{E}[\log|\eta_1|^2]\int_X\partial\bar\partial\varphi = 0.\end{aligned} \tag{2.36}$$

由此，再根据 (2.32)，可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\langle[\mathrm{Div}(\psi_\eta^S)],\varphi\rangle\right] &= \int_X c_1(L,h_L)\wedge\varphi + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{X\setminus \mathrm{Bl}(X,L)} \log P(x,x)\cdot\partial\bar\partial\varphi \\ &= \left\langle c_1(L,h_L) + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar\partial\log(P(x,x)),\varphi\right\rangle.\end{aligned} \tag{2.37}$$

证明完成。 □

2.4. **几何例子**。 本小节介绍一些有趣的伯格曼空间和 Fubini-Study 流的例子，在这些例子中我们的结果适用。我们先从一些简单的观察开始。

(i) 如果 $P(x,x)>0$（等价地， x 不在 $H^0_{(2)}(X,L)$ 的基 locus 中），那么 (1, 1)-形式 $\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log P(x,x)$ 在 x 的某个邻域内是光滑的，因此 $\gamma(L,h_L)$ 也是如此。特别地，如果 $\mathrm{Bl}(X,L)=\varnothing$，那么 $\gamma(L,h_L)$ 是光滑的。

(ii) 如果 $P(x,x)>0$ 令 $s_0\in H^0_{(2)}(X,L)$，其中 $s_0(x)\neq 0$。假设存在 $s_1,\ldots,s_n\in H^0_{(0)}(X,L)$，使得 $d(s_1/s_0)(x)\ldots,d(s_n/s_0)(x)$ 线性独立（即， $H^0_{(2)}(X,L)$ 的截面在 x 处给出局部坐标）。那么 $\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log P(x,x)$ 在 x 附近严格为正。

(iii) 因此，如果 $\mathrm{Bl}(X,L)=\varnothing$ 和 $H^0_{(2)}(X,L)$ 的截面在 X 的任意一点给出局部坐标，那么 $\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log P(x,x)$ 就在 X 上定义了一个 K¨ahler 度量。

例 2.7 （伯格曼度量）。我们考虑 X 的典范丛 L （参见 [W]）的情形。 K_X 的全纯截面空间就是全纯 $(n,0)$-形式的空间 $H^{n,\,0}(X)$。这样的形式在局部坐标 $(z_1,\ldots,z_n)$ 下可写为 $f(z)dz_1\wedge\ldots\wedge dz_n$，其中 f 是一个全纯函数。我们称一个可测的 $(n,0)$-形式β 是 K_X 的一个 $\mathcal{L}^2$ 截面，如果

$$\|\beta\|^2 := 2^{-n}(\sqrt{-1})^{n^2}\int_X \beta\wedge\overline{\beta}<\infty. \tag{2.38}$$

我们用 $H^{n,\,0\,(2)}(X)$ 表示全纯 $(n,0)$-形式的空间。我们有 $H^{n,\,0\,(2)}(X)=H^0_{(2)}(X,K_X)$，其中右侧是相对于 X 上任意度量 Θ 定义的，而 K_X 上的度量由 Θ 诱导。

我们假设 $H^{n,\,0\,(2)}(X)\neq\{0\}$ 并令 $\{\beta_j\}_{j=1}^d$ 为 $H^{n,\,0\,(2)}(X)$ 的正交归一基。在局部坐标（U； z_1， ...， z_n）中，写作 $\beta_j=f_j(z)dz_1\wedge\ldots\wedge dz_n$。根据（2.29），Fubini-Study 流在 U 上由 $\gamma(K_X,h_{K_X})|_U=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log(\sum_j|f_j|^2)$ 给出。如果 Fubini-Study 流实际上是 X 上的 K¨ahler 度量，则称其为 X 的 伯格曼度量。我们将其记为 ω_B。度量 ω_B 在 X 的双全纯变换群作用下保持不变。

如果 X 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个开集，则典范丛是平凡的，因此我们将空间$H^{n,\,0\,(2)}(X)$ 中的 $\mathcal{L}^2$-全纯（n， 0）-形式空间，视为由 $H^0_{(2)}(X)$ 表示的全纯函数空间；这些函数关于 Lebesgue测度 $\mathcal{L}^2$。关于 $\mathbb{C}^n$ 中区域上的伯格曼空间和核，有大量文献可供参考，例如 [HKZ、JP] 及其中的参考文献。

为了给出具体例子，我们先回顾一下Stein流形的定义。由于其丰富的函数论结构，Stein流形颇具研究价值 [GR1]。对于复流形X，令 $\mathcal{O}(X)$ 表示 X 上所有全纯函数构成的空间。

定义 2.8. 若复流形 X 满足以下两个条件，则称其为 Stein流形：(1) X 是全纯凸的，即对于每个紧子集 $K\subset X$，其全纯凸包 $\widehat{K}=\left\{z\in X:\ |f(z)|\leq\sup_{w\in K}|f(w)|,\ \forall\, f\in\mathcal{O}(X)\right\}$是紧的。(2) X 是全纯可分的，即若 $x\neq y$ 属于 X，则存在$f\in\mathcal{O}(X)$，使得 $f(x)\neq f(y)$。

设 $L \to X$ 是一个全纯线丛。Stein流形上相干解析层的上同调消失定理（Cartan定理B，参见 [GR1]）给出如下结论：

(i) 全纯截面 $H^0(X, L)$ 在 X 的每一点处给出局部坐标。

(ii) 对于任意闭离散集 $A = \{p_k : k \in \mathbb{N}\}$ 以及任意族 $\{v_k \in L_{p_k} : k \in \mathbb{N}\}$，存在 $s \in H^0(X, L)$，使得对所有 $k \in \mathbb{N}$，$s(p_k) = v_k$。特别地，对于每个 $p \in X$，赋值映射 $H^0(X, L) \to L_p$ 是满射，并且有 $\dim H^0(X, L) = \infty$。

例 2.9。设 X 是一个 Stein流形，$D \Subset X$ 是一个相对紧域。我们考虑 X 上的一个厄米度量，其关联的 (1, 1)型式记为 Θ。令 $\mathrm{dV}_\Theta = \Theta^n/n!$ 为由 Θ 诱导的体积形式，其中 $\dim X = n$。设 (L, h_L) 是一个厄米全纯线丛。考虑可测截面 S 的空间 $\mathcal{L}^2(D, L, h_L, \mathrm{dV}_\Theta)$，其中这些截面属于 L，定义在 D 上，并满足 $\int_D |S|^2_{h_L} \mathrm{dV}_\Theta < \infty$；令 $H^0_{(2)}(D, L, h_L, \mathrm{dV}_\Theta) = \mathcal{L}^2(D, L, h_L, \mathrm{dV}_\Theta) \cap H^0(X, L)$。限制映射 $H^0(X, L) \to H^0_{(2)}(D, L, h_L, \mathrm{dV}_\Theta)$ 是良定义且为单射。由此可知，空间 $H^0_{(2)}(D, L, h_L, \mathrm{dV}_\Theta)$ 是无限维的，具有空基点集，并且该空间的截面在 D 的任意一点处给出局部坐标。因此，$\gamma(L, h_L)$ 在 X 上是光滑的；如果 (L, h_L) 是半正的（即 $c_1(L, h_L)$ 是半正定的），则它是一个 K¨ahler形式。

由定理 1.1以及例 2.7中的讨论，我们得到如下结论。

推论 2.10。 对于*Stein*流形中的任意相对紧域 $D \Subset X$，由 $\mathcal{L}^2$-全纯$(n,0)$-形式定义的标准高斯随机全纯$(n,$0-形式的零除子的期望由 D上的伯格曼度量给出。如果$D \Subset \mathbb{C}^n$由$\mathcal{L}^2$-全纯函数定义的标准高斯随机全纯函数在 D上满足这一结论。

最简单的例子之一是赋予Lebesgue测度的单位圆盘 $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$。于是 $P(z, z) = \frac{1}{\pi(1-|z|^2)^2}$，而伯格曼度量

$$\omega_B = \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2} \tag{2.39}$$

是圆盘上的双曲度量（相差一个常数因子）。从这个例子可以看出，当 $|z| \to 1$时，伯格曼度量会趋于无穷，因此零点会向 $\mathbb{D}$边界聚集。这是一个更普遍的现象，即当 D 是 $\mathbb{C}^n$ 中的全纯域时，伯格曼度量是完备的。

例 2.11（Bargmann-Fock 空间：平坦高斯全纯函数）。令 L 为 $\mathbb{C}^n$ 上的平凡线丛，并赋予其厄米度量 h_L，使得$|1|^2_{h_L,\, z} = e^{-|z|^2}$，$z \in \mathbb{C}^n$。在这种情况下，

$$R^L = \sum_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j. \tag{2.40}$$

我们在 $\mathbb{C}^n$ 上赋予平坦度量 $\Theta = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j$，则

$$\mathrm{dV}_\Theta = \frac{1}{\pi^n} \Pi_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j. \tag{2.41}$$

对于多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$，我们记作

$$S_\alpha(z) = \frac{z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}}{\sqrt{\alpha_1! \ldots \alpha_n!}}. \tag{2.42}$$

经过直接计算可验证， $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ 构成了$H^0_{(2)}(\mathbb{C}^n, L)$的一组正交归一基。在这种情况下，我们有

$$P(z,z)=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{|z_1|^{2\alpha_1}\dots|z_n|^{2\alpha_n}}{\alpha_1!\dots\alpha_n!}e^{-|z|^2}=1. \tag{2.43}$$

记 $\eta=(\eta_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ 为一族独立同分布的标准复高斯变量，我们定义 $\mathbb{C}^n$ 上的标准高斯随机全纯函数如下:

$$\psi^S_\eta=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\eta_\alpha S_\alpha. \tag{2.44}$$

由定理 1.1 可得

$$\mathbb{E}[[\mathrm{Div}(\psi^S_\eta)]]=\gamma(L,h_L)=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_{j=1}^n dz_j\wedge d\bar{z}_j. \tag{2.45}$$

3. 线丛高次张量幂的等分布与大偏差

在下文中，假设 $\eta=\{\eta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是一列独立同分布的标准复高斯随机变量，并注意到 Var(η_1) $=1$。

本节中，我们考虑第 1.2 小节的情形，特别是假设 (1.9)。令 $\dot{R}^L\in$ End($T_{(1,0)}X$)，使得 $x\in X$，对于 $u,v\in T^{(1,0)}_x X$,

$$R^L_x(u,v)=g^{TX}_x(\dot{R}^L u,v). \tag{3.1}$$

由 (1.9) 可得 $a_0(x)$ $=$ det $\dot{R}^L_x\geq\varepsilon^n$。

3.1. **高斯随机全纯截面零点的等分布**。我们考- 虑希尔伯特空间序列 $H^0_{(2)}(X,L^p)$，其中 $p\in\mathbb{N}$ 充分大。令

$$d_p=\dim H^0_{(2)}(X,L^p)\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}. \tag{3.2}$$

我们在 L^p 上赋予由 h_p 诱导的Hermitian度量$=h_L^{\otimes p}$ 。令 P_p 表示从 $\mathcal{L}^2(X,L^p)$到 $H^0_{(2)}(X,L^p)$的正交投影，并令 P_p表示相对于dV(x) $=\frac{\Theta^n}{n!}$而言， X 上相应的伯格曼核。

对于 $p\in\mathbb{N}_{>0}$，令$\psi^{S_p}_\eta$为由 $H^0_{(2)}(X,L^p)$构造的标准高斯随机全纯截面，即，取 $H^0_{(2)}(X,L^p)$的一个关于$\mathcal{L}^2$-度量的正交归一基$\{S^p_j\}_{j=1}^{d_p}$，并令

$$\psi^{S_p}_\eta=\sum_{j=1}^{d_p}\eta_j S^p_j. \tag{3.3}$$

定理3.1. 我们假设黎曼度量 g^{TX} 是完备的，且(1.9) 成立。则当 $p\to+\infty$时，我们有如下弱收敛

$$\frac{1}{p}\mathbb{E}[[\mathrm{Div}(\psi^{S_p}_\eta)]]\to c_1(L,h_L) \tag{3.4}$$

的 $(1,1)$-流，即，对于任意 $\varphi\in\Omega^{(n-1,n-1)}_0(X)$，当 $p\to+\infty$ 时，

$$\left\langle\frac{1}{p}\mathbb{E}[[\mathrm{Div}(\psi^{S_p}_\eta)]],\varphi\right\rangle\to\langle c_1(L,h_L),\varphi\rangle. \tag{3.5}$$

在任意给定的紧子集 $K\subset X$ 上，当 $p\in\mathbb{N}$充分大时， $\frac{1}{p}\mathbb{E}[[\mathrm{Div}(\psi^{S_p}_\eta)]]$ 是一个光滑的$(1,1)$形式，并且对于任意 $\ell\in\mathbb{N}$，(3.4) 在 $\mathscr{C}^\ell(K)$范数下成立。

证明。 由定理 1.1，对于 L^p,

$$\mathbb{E}[[\mathrm{Div}(\psi_\eta^{S_p})]] = \gamma(L^p, h_p), \tag{3.6}$$

其中， $\gamma(L^p, h_p)$ 是通过（1.7）定义的相应 Fubini-Study 流 .

根据 [MM1，定理 6.1。1], 对于 X 的任意紧子集 K，当 p 充分大时， $P_p(x,x) > 0$，因此 $\gamma(L^p, h_p)$ 是 K 上的光滑 (1, 1)型式。将 [MM1，推论 6.1.2] 应用于 $\gamma(L^p, h_p)$，对任意 $l \in \mathbb{N}$，我们有 $\mathscr{C}^l(K)$-收敛，当 $p \to +\infty$ 时,

$$\frac{1}{p}\gamma(L^p, h_p) \to c_1(L, h_L). \tag{3.7}$$

特别地，对于任意给定的测试形式 $\varphi \in \Omega_0^{(n-1,n-1)}(X)$，我们得到（3.5）。 □

通过施加进一步的几何假设，例如有界几何假设，可以改进（3.4）中的收敛。若 J, g^{TX}, R^L 及其任意阶导数在 X 上关于 g^{TX} 所诱导的范数一致有界，且 (X, g^{TX}) 的单射半径严格为正，则称 (X, J, Θ), (L, h_L) 具有有界几何。有界几何复流形的一个重要例子是紧 K¨ahler 流形 M 的伽罗瓦覆盖，其甲板变换群作用于其上，并取线丛为 M 上一个正全纯线丛的拉回。

我们回顾以下在 [MM5，定理 3]中证明的结果。

定理 3.2 ([MM5])。 在有界几何及(1.9)的假设下，我们有展开式

$$P_p(x,x) = \frac{a_0(x)}{(2\pi)^n}p^n + \mathcal{O}(p^{n-1}) \tag{3.8}$$

在 X上的 $\mathscr{C}^\infty$拓扑中。

此外，存在 $p_0 \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $p > p_0$， X 关于丛 L^p 是全纯凸的，并且 $H^0_{(2)}(X, L^p)$ 能分离 X中的点并给出局部坐标。

作为推论，我们得到以下结果。

命题3.3。 假设具有有界几何以及(1.9)。记$\psi_\eta^{S_p}$为由 $H^0_{(2)}(X, L^p)$构造的高斯随机截面，则当 p充分大时， $\mathbb{E}[[\mathrm{Div}(\psi_\eta^{S_p})]]$ 是 X上的光滑$(1,1)$形式。于是我们有

$$\frac{1}{p}\,\mathbb{E}\left[[\mathrm{Div}(\psi_\eta^{S_p})]\right] \to c_1(L, h_L), \ \textit{as } p \to +\infty, \textit{ in the } \mathscr{C}^\infty\textit{-topology on } X. \tag{3.9}$$

注 3.4. 注意，在有界几何且 X 非紧的假设下，我们有 $d_p = \infty, p \gg 0$。

例 3.5 （缩放的 Bargmann-Fock 空间）。 我们考虑例 2.11 中的 $\mathbb{C}^n$ 上的线丛（L, h_L），它满足上述假设。对于 $p \geq 1$， $H^0_{(2)}(\mathbb{C}^n, L^p)$ 的一组正交归一基由以下族给出

$$S_\alpha^p(z) = p^{\frac{n}{2}} S_\alpha(\sqrt{p}z), \quad \alpha \in \mathbb{N}^n. \tag{3.10}$$

于是伯格曼核函数为

$$P_p(z,z) \equiv p^n. \tag{3.11}$$

回顾一下， $\mathbb{C}$ 上的平坦高斯随机全纯函数 ψ_η^S 由式 (1.8) 定义。于是对于 $p \geq 1$，我们有

$$\psi_\eta^{S_p}(z) = p^{n/2}\psi_\eta^S(\sqrt{p}z). \tag{3.12}$$

直接计算可得

$$\frac{1}{p}\mathbb{E}[[\mathrm{Div}(\psi_\eta^{S_p})]] = \mathbb{E}[[\mathrm{Div}(\psi_\eta^{S})]] = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j. \tag{3.13}$$

定理 3.6. 设(L, h_L)和(X, Θ)如定理*3.1*中所述。对于任意给定的测试形式 $\varphi \in \Omega_0^{(n-1,n-1)}(X)$，我们有

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{p}\big\langle[\mathrm{Div}(\psi_\eta^{S_p})], \varphi\big\rangle = \langle c_1(L, h_L), \varphi\rangle\Big) = 1. \tag{3.14}$$

证明。为证明此定理，我们主要沿用 [MM1 定理 5.3.3], 证明中的论证；在这种情形下，无限维的可能性并不会带来复杂性。固定一个非平凡的测试形式 $\varphi \in \Omega_0^{(n-1,n-1)}(X)$。注意，根据定理3.1的证明，我们有如下收敛

$$\lim_{p\to\infty}\Big\langle\frac{1}{p}\gamma(L^p, h_p), \varphi\Big\rangle = \langle c_1(L, h_L), \varphi\rangle. \tag{3.15}$$

定义随机变量

$$Y_p = \frac{1}{p}\Big\langle[\mathrm{Div}(\psi_\eta^{S_p})] - \gamma(L^p, h_p), \varphi\Big\rangle, \tag{3.16}$$

陈述式 (3.14) 等价于证明几乎必然收敛

$$Y_p \to 0. \tag{3.17}$$

对于任意 $x \in \mathrm{supp}\,\varphi$，令 $e_L(x)$ 表示 $(L_x, h_{L,x})$ 的一个单位向量。设

$$b_p(x) = (P_p(x,x)^{-1/2}S_j^p(x)/e_L^{\otimes p}(x)) \in \ell^2(\mathbb{C}). \tag{3.18}$$

那么 $\eta \cdot b_p(x)$ 是一个标准复高斯随机变量。高斯向量 $(\eta \cdot b_p(x)\ \eta \cdot b_p(y))$ 的协方差矩阵随 $(x, y) \in \mathrm{supp}\ \varphi \times \mathrm{supp}\,\varphi$ 平滑变化。

对于 $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2$ 且满足 $\|v\| = 1$，我们考虑积分

$$\rho(v) := \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{C}^2} e^{-\frac{1}{2}(|z_1|^2+|z_2|^2)}\big|\log|z_1| \cdot \log|v_1z_1 + v_2z_2|\big|\mathrm{dV}(z). \tag{3.19}$$

[MM1 中的计算，即式 (5.3.13) 至 (5.3.15)] ，表明

$$C := \sup_{v\in\mathbb{C}^2, \|v\|=1}\rho(v) < \infty, \tag{3.20}$$

因此，对于 $x, y \in \mathrm{supp}\,\varphi$，我们有

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\log\big|P_p(x,x)^{-1/2}\sum_j \eta_j S_j^p(x)\big|_{h_p}\log\big|P_p(y,y)^{-1/2}\sum_j \eta_j S_j^p(y)\big|_{h_p}\Big|\Big] \le C. \tag{3.21}$$

注意

$$\mathbb{E}[|Y_p|^2] = \frac{1}{p^2}\mathbb{E}\big[\,\big|\langle[\mathrm{Div}(\psi_\eta^{S_p})], \varphi\rangle\big|^2\,\big] - \frac{1}{p^2}\big|\langle\gamma(L^p, h_p), \varphi\rangle\big|^2. \tag{3.22}$$

由 (2.31)、(3.21) 和富比尼-托内利定理可知

$$\mathbb{E}[|Y_p|^2] = \frac{1}{\pi^2p^2}\int_{X\times X}\big(\partial\overline{\partial}\varphi(x)\big)\big(\overline{\partial\overline{\partial}\varphi(y)}\big) \tag{3.23}$$
$$\mathbb{E}\Big[\log\big|P_p(x,x)^{-1/2}\sum_j \eta_j S_j^p(x)\big|_{h_p}\log\big|P_p(y,y)^{-1/2}\sum_j \eta_j S_j^p(y)\big|_{h_p}\Big],$$

由 (3.21) 可得

$$\mathbb{E}[|Y_p|^2] = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{p^2}\Big). \tag{3.24}$$

因此 $\mathbb{E}[\sum_{p\geq 1}|Y_p|^2]=\sum_{p\geq 1}\mathbb{E}[|Y_p|^2]<\infty$，从而 $Y_p\to 0$ 几乎必然成立。 □

推论3.7。 如果 Θ 是一个 ***K¨ahler*** 形式且 $\int_X c_1(L,h_L)\wedge\Theta^{n-1}<\infty$，或者如果 $\int_X c_1(L,h_L)^n<\infty$，那么

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{p}[\mathrm{Div}(\psi_\eta^{S_p})]=c_1(L,h_L)\Big)=1, \tag{3.25}$$

其中，极限是关于 X上$(1,1)$-流的弱收敛取得的。

证明。由这些假设，存在一个常数 $C>0$，使得对于所有的 $\varphi\in\Omega_0^{(n-1,n-1)}(X)$ 和 $s_p\in H^0(X,L^p)$,

$$\frac{1}{p}|\langle[\mathrm{Div}(s_p)],\varphi\rangle|\leq C|\varphi|_{\mathscr{C}^0(X)}. \tag{3.26}$$

通过考虑 $\Omega_0^{(n-1,n-1)}(X)$ 中 φ 的一个可数 $\mathscr{C}^0$-稠密族，并应用定理3.6，我们得到（3.25）。 □

注记3.8。 上述推论中的附加假设对于我们采用的方法得到结论（3.25）是必要的；然而，这些附加假设是否确实可以去除，仍然是一个有趣的问题。

注 3.9。 对于每个 $p\in\mathbb{N}_{>0}$，我们可以取一列独立同分布的标准复高斯随机变量 $\eta^p=\{\eta_j^p\}_{j=1}^{d_p}$，并假设对于不同的 $p.$，它们相互独立。我们定义平坦高斯随机截面

$$\psi_{\eta^p}^{S_p}=\sum_{j=1}^{d_p}\eta_j^p S_j^p, \tag{3.27}$$

其中 $S_p=\{S_j^p\}_{j=1}^{d_p}$ 是 $H^0_{(2)}(X,L^p)$ 的一个正交归一（Hilbert）基。那么，对于随机截面序列 $\psi_{\eta^p}^{S_p},p\geq 1$，定理3.1、定理3.6、命题3.3和推论3.7中的结论仍然成立。

3.2. **大偏差估计与空穴概率**。 在本小节中，我们研究关于 [SZZ], [DMS] 和 [DLM] 中高次张量幂所对应的给定区域内随机零点的大偏差估计。特别地，我们证明定理1.2和定理1.3。上述定理证明过程中的一个关键中间结果是如下命题，其证明将推迟到下一小节。

命题 3.10. 设 U 是 X中的一个相对紧开子集。对于任意 $\delta>0$，存在$C_{U,\delta}>0$ 使得对所有 $p\gg 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\int_U\Big|\log|\psi_\eta^{S_p}(x)|_{h^p}\Big|\,\mathrm{dV}(x)\geq\delta p\Big)\leq e^{-C_{U,\delta}p^{n+1}}. \tag{3.28}$$

定理 *1.2* 的证明. Poincar´e-Lelong 公式 (2.31) 表明

$$\frac{\sqrt{-1}}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|\psi_\eta^{S_p}|_{h^p}=[\mathrm{Div}(\psi_\eta^{S_p})]-pc_1(L,h) \tag{3.29}$$

作为 $X.$ 上的（1,1）流的恒等式。现在固定 $\varphi\in\Omega_0^{(n-1,n-1)}(U)$。于是

$$\Big(\frac{1}{p}[\mathrm{Div}(s_p)],\varphi\Big)-\int_X c_1(L,h)\wedge\varphi=\frac{\sqrt{-1}}{p\pi}\int_X\log|\psi_\eta^{S_p}|_{h^p}\,\partial\overline{\partial}\varphi. \tag{3.30}$$

由于 φ 在 U中具有紧支撑，因此 $\partial\overline{\partial}\varphi$也具有紧支撑。令

$$S_\varphi=\max_{x\in U}\Big|\frac{\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi(x)}{\mathrm{dV}(x)}\Big|. \tag{3.31}$$

我们可以且不妨假设 $S_\varphi > 0$。那么

$$\left|\frac{\sqrt{-1}}{p\pi}\int_X \log|\psi_\eta^{S_p}|_{h^p}\,\partial\overline{\partial}\varphi\right| \le \frac{S_\varphi}{p\pi}\int_U \big|\log|\psi_\eta^{S_p}(x)|_{h^p}\big|\,\mathrm{dV}(x). \tag{3.32}$$

将命题 3.10 应用于 (3.32) 的右边，即得 (1.12)。 □

定理 *1.3* 的证明。 取 $\delta = n\,\mathrm{Vol}_{2n}^L(U)$，由 (1.15) 可直接推出估计 (1.16)。因此，只需证明 (1.15)。为此，令 χ_U 表示 U 在 X 上的示性函数。任取 $\delta > 0$，并取 $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(X, \mathbb{R})$ 使得 $0 \le \psi_1 \le \chi_U \le \psi_2 \le 1$，且

$$\int_X \psi_1 \frac{c_1(L,h_L)^n}{n!} \ge \mathrm{Vol}_{2n}^L(U) - \delta, \quad \int_X \psi_2 \frac{c_1(L,h_L)^n}{n!} \le \mathrm{Vol}_{2n}^L(U) + \delta\,. \tag{3.33}$$

注意到，由于假设 ∂U 关于 dV 的测度为 0，因此这类函数的存在性有保证；相对于 $\frac{1}{n!}\,c_1(L,h_L)^n$ 也同样如此。对于 $j \in \{1,2\}$，令 $\varphi_j = 1_{(n-1)!}\,\psi_j c_1(L,h_L)^{n-1}$。分别将定理 1.2 应用于 $\overline{\varphi_j}$，即可得到 (1.15)。□

3.3. **命题 3.10 的证明**。 令 $U \subset X$ 为一个相对紧开子集。对于$s_p \in H^0(X, L^p)$，我们设

$$\mathcal{M}_p^U(s_p) = \sup_{x\in U}|s_p(x)|_{h^p} < +\infty. \tag{3.34}$$

在证明命题 3.10 之前，我们需要考察 $\mathcal{M}_p^U(\psi_\eta^{S_p})$分别取异常大的值和异常小的值的概率。

命题 3.11。 对于任意 $\delta > 0$，存在一个常数$C_{U,\,\delta} > 0$ 使得对于 $p \in \mathbb{N}_{>1}$，

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{M}_p^U(\psi_\eta^{S_p}) \ge e^{\delta p}\big) \le e^{-\delta p^{n+1} + C_{U,\delta} p^n \log p}. \tag{3.35}$$

证明。 证明的基本思路是，正如 (2.9) 中所示，全纯函数的局部 $\mathcal{L}^2$-范数由其局部上确界范数控制。我们固定 $\delta > 0$，并令 $r > 0$ 充分小，从而可以选取有限个点 $\{x_j\}_{j=1}^\ell \subset U$，使得测地开球$B^X(x_j, r)$、 $j = 1$、.....、 ℓ构成U的一个开覆盖。由于 r充分小，我们可以假设每个较大的球 $B^X(x_j, 2r)$都包含在一个复坐标图中（因而可视为 $\mathbb{C}^n$的一个开子集），并且对于每个 j，我们可以在$B_{x_j}^X$的一个邻域上为 L固定一个局部全纯标架$e_{L,\,j}$，其中 $\sup_{x\in B^X(x_j,\,2r)}|e_{L,\,j}(x)|_{h_L} = 1$。设

$$\nu = \min\Big\{\inf_{x\in B^X(x_j,2r)}|e_{L,j}(x)|_{h_L} \,:\, j = 1,\dots,\ell\Big\}. \tag{3.36}$$

It 显然， $0 < \nu \le 1$。通过将 r 固定得足够小，我们可以并且确实假设

$$-\log\nu \le \frac{\delta}{6}\cdot \tag{3.37}$$

与 (2.9) 中一样，由于 U 相对紧，存在一个常数 $C > 0$，使得对于每个 $j = 1$、.....、 ℓ，如果 f 是定义在 $B^X(x_j, 2r)$ 的某个邻域上的全纯函数，那么

$$\sup_{x\in B^X(x_j,r)}|f(x)| \le C\|f\|_{\mathcal{L}^2(B^X(x_j,2r))}, \tag{3.38}$$

其中，在 X 上的体积形式 dV(x) 用于范数$\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2\,(B^X\,(x_j,\,2r)}$。注意， x_j、 r、 ℓ 的选取以及常数 ν、 C 均独立于张量幂 p。令$\mathcal{U} = \cup_j B^X(x_j, 2r) \supset U$。对于 $p \in \mathbb{N}$、 $s_p \in H^0(X, L^p)$，在每个 $B^X(x_j, 2r)$ 上，我们记

$$s_p|_{B^X(x_j,2r)} = f_j e_{L,j}^{\otimes p}, \tag{3.39}$$

其中， $\mathbb{C}^n$ 中坐标图上的全纯函数 f_j 对应于 $B^X(x_j,2r)$。于是有

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_p^U(s_p)=\sup_{x\in U}|s_p(x)|_{h^p}&\le\max_j\sup_{x\in B^X(x_j,r)}|f_j(x)|\\&\le C\max_j\{\|f_j\|_{\mathcal{L}^2(B^X(x_j,2r))}\}\\&\le\frac{C}{\nu^p}\max_j\{\|s_p\|_{\mathcal{L}^2(B^X(x_j,2r),L^p)}\}\\&\le\frac{C}{\nu^p}\|s_p\|_{\mathcal{L}^2(\widetilde{U},L^p)}.\end{aligned}\tag{3.40}$$

下一步是估计量 $\mathbb{E}[\|\psi_\eta^{S_p}\|^{2p^n}_{\mathcal{L}^2\ (\widetilde{U},L^p)}]$，其中 $p\ge 2$。对 $\frac{1}{p^n}+\frac{p^n-1}{p^n}=1$ 应用 H¨older 不等式，得到

$$\mathbb{E}\big[\|\psi_\eta^{S_p}\|^{2p^n}_{\mathcal{L}^2(\widetilde{U},L^p)}\big]\le\mathrm{Vol}(\widetilde{U})^{p^n-1}\mathbb{E}\Big[\int_{\widetilde{U}}|\psi_\eta^{S_p}(x)|^{2p^n}_{h^p}(x)\mathrm{dV}\Big].\tag{3.41}$$

与 (3.38) 中一样，在 $B^X(x_j,2r)$ 的一个邻域上，写作

$$S_i^p=f_i^p e_{L,i}^{\otimes p}.\tag{3.42}$$

若 $x\in B^X(x_j,2r)$，令

$$F_j(x)=\sum_{i=1}^{d_p}\eta_i f_i^p(x).\tag{3.43}$$

那么 $F_j(x)$ 是一个复高斯随机变量，其（总）方差为 $\sum_{i=1}^{d_p}|f_i^p(x)|^2$。根据我们对局部标架 $e_{L,\ j}$ 的假设，得到

$$\sum_{i=1}^{d_p}|f_i^p(x)|^2\le\frac{1}{\nu^{2p}}P_p(x,x).\tag{3.44}$$

于是有

$$\mathbb{E}\big[|F_j(x)|^{2p^n}\big]=p^n!\Big(\sum_{i=1}^{d_p}|f_i^p(x)|^2\Big)^{p^n}.\tag{3.45}$$

~因此，对于 $x\in U$，有

$$\mathbb{E}\big[|\psi_\eta^{S_p}(x)|^{2p^n}_{h^p}\big]\le\frac{1}{\nu^{2p^{n+1}}}\mathbb{E}\big[|F_j(x)|^{2p^n}\big]\le\frac{p^n!}{\nu^{4p^{n+1}}}(P_p(x,x))^{p^n}.\tag{3.46}$$

由于我们处于 σ-有限测度的情形，且被积函数非负，托内利定理适用，因此

$$\mathbb{E}\Big[\int_{\widetilde{U}}|\psi_\eta^{S_p}(x)|^{2p^n}_{h^p}\mathrm{dV}(x)\Big]\le\frac{p^n!}{\nu^{4p^{n+1}}}\int_{\widetilde{U}}(P_p(x,x))^{p^n}\mathrm{dV}(x).\tag{3.47}$$

此外，由给定紧子集上伯格曼核的对角线估计，~存在一个常数 $C_{\widetilde{U}}>0$（与 p无关），使得对于 $p\in\mathbb{N}$、 $x\in U$，

$$P_p(x,x)\le C_{\widetilde{U}}p^n.\tag{3.48}$$

将 (3.41) 与上述不等式结合起来，我们推得

$$\mathbb{E}\Big[\|\psi_\eta^{S_p}\|^{2p^n}_{\mathcal{L}^2(\widetilde{U},L^p)}\Big]\le\big(C_{\widetilde{U}}\,\mathrm{Vol}(\widetilde{U})\big)^{p^n}\frac{p^n!}{\nu^{4p^{n+1}}}(p^n)^{p^n}.\tag{3.49}$$

将 (3.40) 应用于 $\psi_\eta^{S_p}$，可得

$$\mathbb{E}\big[\mathcal{M}_p^U(\psi_\eta^{S_p})^{2p^n}\big] \le \Big(\frac{C}{\nu^p}\Big)^{2p^n}\mathbb{E}\big[\|\psi_\eta^{S_p}\|^{2p^n}_{\mathcal{L}^2(\widetilde{U},L^p)}\big] \le \frac{(\widetilde{C}p^n)^{2p^n}}{\nu^{6p^{n+1}}}, \tag{3.50}$$

~其中 $C>0$、 $C>0$ 是与 p无关的常数。

于是，由切比雪夫不等式以及来自 (3.37) 的不等式 $\frac{1}{\nu} \le e^{\frac{\delta}{6}}$ ，可得 (3.35)。□

注记 3.12。 考虑 $\|\psi_\eta^{S_p}\|^2$ 的 p^n 阶矩，会使所得概率估计的指数中出现指数p^{n+1} 。也可以考虑任意的 N 阶矩，从而得到关于该概率上界的更一般结论。

当 X 是紧的，或者 X 是非紧的但 d_p 在 p中按多项式有界时，可以像 [SZZ] 和 [DLM]中那样，以更简单的方式得到上界 $Ce^{-cp^{n+1}}$ （当然，上界也会尖锐得多）。

现在我们考虑 $\mathcal{M}_p^U(\psi_\eta^{S_p})$ 取小值的概率，并将借鉴 [SZZ], [DLM]中的思路。首先，我们介绍伯格曼核的近对角估计结果。

回忆一下， $\dot{R}^L$ 在（3.1）中定义。现在固定一点 $x\in X$。设 $\{\mathbf{f}_j\}_{j=1}^n$ 是（$T^{1,0}_xX, g_x^{TX}(\cdot,\cdot)$ 的正交归一基，使得

$$\dot{R}^L_x\,\mathbf{f}_j = \mu_j(x)\mathbf{f}_j, \tag{3.51}$$

其中， $\mu_j(x)$、 $j=1$、……、 n是 $\dot{R}^L_x$的特征值。由（1.9）中的第一个不等式，我们得到

$$\mu_j(x) \ge \varepsilon. \tag{3.52}$$

设 $\mathbf{e}_{2j-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{f}_j+\overline{\mathbf{f}_j})$、 $\mathbf{e}_{2j}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}(\mathbf{f}_j-\overline{\mathbf{f}_j})$、 $j=1$、……、 n。那么它们构成（实）切向量空间（T_xX, g_x^{TX}）的正交归一基。若 $v=\sum_{j=1}^{2n}v_j\mathbf{e}_j\in T_xX$，则可写为

$$v=\sum_{j=1}^{n}(v_{2j-1}+\sqrt{-1}v_{2j})\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{f}_j+\sum_{j=1}^{n}(v_{2j-1}-\sqrt{-1}v_{2j})\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\mathbf{f}}_j. \tag{3.53}$$

设 $z=(z_1,\ldots,z_n)$，其中 $z_j=v_{2j-1}+\sqrt{-1}v_{2j}$, $j=1,\ldots,n$。我们称 z为 $v\in T_xX$的复坐标。由（3.53），

$$\frac{\partial}{\partial z_j}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{f}_j,\ \frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\mathbf{f}}_j, \tag{3.54}$$

因此

$$v=\sum_{j=1}^{m}\Big(z_j\frac{\partial}{\partial z_j}+\overline{z}_j\frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}\Big). \tag{3.55}$$

注意，$|\frac{\partial}{\partial z_j}|^2_{g^{TX}}=|\frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}|^2_{g^{TX}}=\frac{1}{2}$。对于 $v,v'\in T_xX$，令 z,z' 表示相应的复坐标。

定义加权距离函数 $\Phi_x^{TX}(v,v')$ 如下:

$$\Phi_x^{TX}(v,v')^2=\sum_{j=1}^{n}\mu_j(x)|z_j-z'_j|^2. \tag{3.56}$$

当 $\delta_0>0$ 充分小时，我们通过测地坐标将 X 中的小开球 $B^X(x,2\delta_0)$ 与 T_xX 中的球 $B^{T_xX}(0,2\delta_0)$ 视为相同。令 $\mathrm{dist}(\cdot,\cdot)$ 表示 (X,g^{TX}) 的黎曼距离。存在 $C_1>0$，使得对于 $v,v'\in B^{T_xX}(0,2\delta_0)$，有

$$C_1\mathrm{dist}(\exp_x(v),\exp_x(v'))\ge\Phi_x^{TX}(v,v')\ge\frac{1}{C_1}\mathrm{dist}(\exp_x(v),\exp_x(v')). \tag{3.57}$$

特别地,

$$\Phi_x^{TX}(0,v) \geq \varepsilon^{1/2}\mathrm{dist}(x,\exp_x(v)). \tag{3.58}$$

此外，如果我们考虑紧子集 $K \subset X$，那么对于所有 $x \in K$，常数 δ_0 和 C_1 都可以一致选取。

对于 $p \in \mathbb{N}$、x、$y \in X$，归一化 Bergman 核定义为

$$N_p(x,y) = \frac{|P_p(x,y)|_{h_x^p \otimes h_y^{p,*}}}{\sqrt{P_p(x,x)}\sqrt{P_p(y,y)}}. \tag{3.59}$$

以下结果在 [DLM, 定理 5.1], 中得到证明，其中我们主要运用了 [MM1, 定理 4.2.1 和 6.1.1]中的 Bergman 核近对角线展开。

定理 3.13. 设 U 是 $X.$ 的相对紧开子集。则归一化 *Bergman* 核满足以下一致估计：对于 $x,y \in U$：固定 $k \geq 1$ 和 $b > \sqrt{16k/\varepsilon}$后，对于 $p \gg 0$（使得 $b\sqrt{\text{对数}_p\, p} \leq 2\delta_0$），有

$$N_p(x,y) = \begin{cases} \big(1+o(1)\big)\exp\Big(-\dfrac{p}{4}\,\Phi_x(0,v')^2\Big), \\ \qquad\qquad \textit{uniformly for } \mathrm{dist}(x,y) \leq b\sqrt{\frac{\log p}{p}},\ \textit{with } y = \exp_x(v'), v' \in T_xX; \\ \mathcal{O}(p^{-k}),\ \ \textit{uniformly for } \mathrm{dist}(x,y) \geq b\sqrt{\frac{\log p}{p}}. \end{cases} \tag{3.60}$$

命题 3.14. 存在常数 $C_U > 0, C_U' > 0$，使得对于所有 $\delta > 0$ 和 $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{M}_p^U(\psi_\eta^{S_p}) \leq e^{-\delta p}\big) \leq e^{-C_U\delta p^{n+1} + C_U' p^n \log p}. \tag{3.61}$$

证明。对于 $x \in X$，我们固定某个 $\lambda_x \in L_x$，使得 $|\lambda_x|_h = 1$，并令

$$\xi_x = \frac{\langle \lambda_x^{\otimes p}, \psi_\eta^{S_p}(x)\rangle_{h^p}}{\sqrt{P_p(x,x)}}. \tag{3.62}$$

则 ξ_x 是一个复高斯随机变量。此外，对于任意两个点 x、$y \in X$，有

$$\big|\mathbb{E}[\xi_x\overline{\xi}_y]\big| = N_p(x,y). \tag{3.63}$$

然后，根据 (3.60) 中的渐近方程，利用 [SZZ 的第 3.2] 小节中的类似论证，或 [DLM 的定理 1.13], 的证明，我们可以证明 (3.61) 的一个更一般版本如下：对于一列正数 $\{\lambda_p\}_{p\in\mathbb{N}}$,

$$\mathbb{P}\big(\mathcal{M}_p^U(\psi_\eta^{S_p}) \leq \lambda_p\big) \leq e^{Cp^n\log\lambda_p + C'p^n\log p}, \quad p \gg 0. \tag{3.64}$$

于是，对于任意 $\delta > 0$，在 (3.64) 中取 $\lambda_p = e^{-\delta p}$，即可得到 (3.61)。证明完毕。□

结合命题 3.11 和 3.14，我们得到如下结论。

推论 3.15。对于任意相对紧开子集 $U \subset X$，以及 $\delta > 0$，存在一个常数 $C = C(U,\ \delta) > 0$，使得对于 $p \gg 1$,

$$\mathbb{P}\left(\big|\log\mathcal{M}_p^U(\psi_\eta^{S_p})\big| \geq \delta p\right) \leq e^{-Cp^{n+1}}. \tag{3.65}$$

命题 *3.10* 的证明。命题 3.10 的证明结合了 [SZZ 第 4.1] 小节中的论证以及推论 3.15。这里我们仅简要概述证明。

对于 $t > 0$，令

$$\log^+ t = \max\{\log t, 0\},\ \log^- t := \log^+(1/t) = \max\{-\log t, 0\}. \tag{3.66}$$

Then

$$|\log t| = \log^+ t + \log^- t. \tag{3.67}$$

设 U 是 X. 中的一个相对紧非空开子集。那么，对于任意非零全纯截面 $s_p \in H^0(X, L^p)$，我们有 $\big|\log |s_p|_{h^p}\big|$ 关于 dV 在 $\overline{U}$ 上是可积的。现在我们开始证明

$$\mathbb{P}\left(\int_U \log^+ |\psi_\eta^{S_p}(x)|_{h^p}\, \mathrm{dV}(x) \geq \frac{\delta}{2}p\right) \leq e^{-C_{U,\delta}p^{n+1}}. \tag{3.68}$$

为此，注意到在 U 上有

$$\log^+ |\psi_\eta^{S_p}|_{h^p} \leq \big|\log \mathcal{M}_p^U(\psi_\eta^{S_p})\big|, \tag{3.69}$$

于是得到

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\int_U \log^+ |\psi_\eta^{S_p}(x)|_{h^p}\, \mathrm{dV}(x) \geq \frac{\delta}{2}p\right)\\ &\leq \mathbb{P}\left(\big|\log \mathcal{M}_p^U(\psi_\eta^{S_p})\big| \geq \frac{\delta}{2\,\mathrm{Vol}(U)}p\right),\end{aligned} \tag{3.70}$$

其中 Vol(U) 表示关于 dV 的 U 的体积。结合推论 3.15，立即可得 (3.68)。

下一步是证明

$$\mathbb{P}\left(\int_U \log^- |\psi_\eta^{S_p}(x)|_{h^p}\, \mathrm{dV}(x) \geq \frac{\delta}{2}p\right) \leq e^{-C_{U,\delta}\,p^{n+1}}. \tag{3.71}$$

假设 U 含有一个环带 $B(2, 3) := \{z \in \mathbb{C}^n :\ 2 < |z| < 3\}$（必要时可对坐标重新缩放），且线丛 L 在 $B(1, 4)$ 上（仍包含于 U 中）有一个全纯局部标架 e_L。令 $\alpha(x) = \log |e_L(x)|^2_h$。于是可以写成

$$\psi_\eta^{S_p} = F_p e_L^{\otimes p}, \tag{3.72}$$

其中 F_p 是 $B(1, 4)$ 上的随机全纯函数。于是

$$\log |\psi_\eta^{S_p}|_{h^p} = \log |F_p| + \frac{p}{2}\alpha. \tag{3.73}$$

在以下估计中，每个 K_i、$i \in \mathbb{N}$ 都表示一个充分大的正常数。由 (3.67) 和 (3.70)，可得

$$\mathbb{P}\left(\int_{B(2,3)} \log^+ |F_p|\, \mathrm{dV} \geq K_1 p\right) \leq e^{-C_{U,K_1}\,p^{n+1}}. \tag{3.74}$$

利用泊松核以及对 $\log(|F_p|)$ 的次平均不等式，我们可以将 (3.74) 改进为

$$\mathbb{P}\left(\int_{B(2,3)} \log |F_p|\, \mathrm{dV} \geq K_2 p\right) \leq e^{-C_{U,K_2}\,p^{n+1}}. \tag{3.75}$$

从这里开始，我们按照 [SZZ，第 4.1 小节，第 1992] 页的处理进行。对于 $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$，我们可以得到 $B(2, 3)$ 中的一个（几乎均匀分布的）有限点集 $\{z_j\}_{j=1}^q$，使得对于所有 $s_p \in H^0(X, L^p)$，$B(1, 4)$ 上的 $p \in \mathbb{N}$、$s_p = f_p e_L^{\otimes p}$，都有

$$\begin{aligned}&-\int_{B(2,3)} \log |s_p|_{h^p} \mathrm{dV}\\ &\leq -\sum_{j=1}^q \mu_j \log |s_p|_{h^p}(z_j) + K_3\delta \int_{B(2,3)} \big|\log |f_p|\big|\, \mathrm{dV} + p\delta K_3 \sup_{z\in B(2,3)} |d\alpha(z)|_{g^{T^*X}},\end{aligned} \tag{3.76}$$

其中，量 q 和 $\mu_j > 0$ 仅依赖于 δ，且我们有 $\sum_{j=1}^q \mu_j \simeq 1$。注意，常数 K_3 不依赖于 δ。将上述不等式应用于 $\psi_\eta^{S_p}$和

F_p，对每一项 $\log|\psi_\eta^{S_p}|_{h^p}(z_j)$ 使用推论 3.15，并利用 (3.74)，我们可推出

$$\mathbb{P}\left(-\int_{B(2,3)}\log|\psi_\eta^{S_p}|_{h^p}\,\mathrm{dV}\geq K_4\delta p\right)\leq e^{-C_{U,\delta}p^{n+1}},\ \forall\, p\gg 0. \tag{3.77}$$

注意到 $\log^- = -\log + \log^+$，且有限个形如 $B(2,3)$ 的环带覆盖U，由此可从 (3.70) 和 (3.77) 推得 (3.71)。证明至此完成。□

注 3.16. 既然我们已经掌握了大数定律和大偏差各自适用情形的结果，一个自然引出的问题便是中心极限定理型行为。事实上，Sodin-Tirelson [ST1, Main Theorem] 针对 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{D}$ 上的某些随机全纯函数，Shiffman-Zelditch [SZ3, Theorem 1.2] 针对紧 Kähler 流形上线丛的随机全纯截面，分别提出并证明了随机全纯函数或截面零点（的泛函）的渐近正态性。Bayraktar [Ba1]还证明了该结果对 $\mathbb{C}^n$ 上一般随机多项式的推广。他们的方法中一个关键要素是式 (3.59) 中定义的归一化 Bergman 核，将其视为 $\mathbb{C}$ 或 X 上的归一化高斯过程的协方差函数；该过程是在命题 3.14 的证明中构造的。接着，利用定理 3.13 给出的估计以及 Sodin 和 Tirelson 在 [ST1, Theorem 2.2], 中证明的开创性结果，可以将 [ST1, Main Theorem]、[SZ3, Theorem 1.2] 推广到我们的非紧致情形。

3.4. **关于空穴概率下界的注。** 要为（1.16）中的空穴概率提供阶数匹配的下界 $e^{-cp^{n+1}}$，通常要复杂得多。对于缩放的 Bargmann-Fock 空间（参见例 3.5），我们可以给出一个下界，并在下文概述其证明。

回顾一下，对于任意 $p\in\mathbb{N}$，族 $\{S_\alpha^p\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ 表示 $H^0_{(2)}(\mathbb{C}^n,L^p)$ 的一个正交归一基。对于 $K>0$，定义指标集

$$I(K)=\big\{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n\ :\ 0\leq\alpha_j\leq K, j=1,\ldots,n\big\}, \tag{3.78}$$

令集合 $I^*(K)=I(K)\backslash\{(0,\ldots,0)\}$，并记

$$q_p:=\sharp I(Kp)=(1+\lfloor Kp\rfloor)^n=\mathcal{O}(p^n). \tag{3.79}$$

对于这组典范的正交归一基，可以直接验证以下局部集中条件：对于任意相对紧子集 $U\subset\mathbb{C}^n$ 以及任意$c>0$，存在常数 $K=K(U,c)>0, C'=C'(U,c)>0$，使得

$$\sup_{z\in\bar{U}}\sum_{\alpha\notin I(Kp)}|S_\alpha^p(z)|^2_{h^p}\leq C'e^{-cp}. \tag{3.80}$$

令 $\psi_\eta^{S_p}$为例 3.5 中构造的 $\mathbb{C}^n$ 上的随机全纯截面（实际上是函数）。

引理 3.17。 对于任意相对紧开子集 $U\subset\mathbb{C}^n$，存在一个常数$C'_U>0$，使得对于 $p\gg 1$,

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{Div}(\psi_\eta^{S_p})\cap U=\varnothing\right)\geq e^{-C'_Up^{n+1}}. \tag{3.81}$$

证明。对于 $U=\varnothing$，该结论显然成立，因此假设 U 非空且满足假设条件。取 $\overline{U}$ 的一个相对紧开邻域 U'，并定义严格正量

$$\widetilde{M}:=\min_{z\in\overline{U'}}e^{-\frac{|z|^2}{2}}\in(0,1). \tag{3.82}$$

令常数 K 和 C' 为式 (3.80) 中对应于常数 $c = -2\log M > 0$ 以及 U' 的常数。对于 $p \in \mathbb{N}$，记 $S_0^p \equiv p^{n/2}$ 为 $H^0_{(2)}(\mathbb{C}^n, L^p)$ 中对应于 $\alpha = (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^n$ 的单位常数截面。那么

$$\min_{z\in\overline{U'}} |S_0^p(z)|_{h^p} = p^{n/2}\widetilde{M}^p. \tag{3.83}$$

定义随机全纯截面

$$\begin{aligned} \psi^{S_p}_{\eta,\mathrm{I}}(z) &:= \sum_{\alpha\in I^*(Kp)} \eta_\alpha S^p_\alpha(z) \quad \text{and} \\ \psi^{S_p}_{\eta,\mathrm{II}}(z) &:= \sum_{\alpha\notin I(Kp)} \eta_\alpha S^p_\alpha(z). \end{aligned} \tag{3.84}$$

我们可以分解为

$$\psi^{S_p}_{\eta} = \eta_0 S^p_0 + \psi^{S_p}_{\eta,\mathrm{I}} + \psi^{S_p}_{\eta,\mathrm{II}}. \tag{3.85}$$

请注意，(3.85) 右侧的三个随机截面彼此独立。

在证明的其余部分，我们将上述截面视为 $\mathbb{C}^n$ 上的全纯函数，并令 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{C}$ 上的标准模（而不考虑线丛上的范数 $|\cdot|_{h^p}$）。

将 (2.9) 应用于函数 $\psi^{S_p}_{\eta}$，II 并利用估计式 (3.80)，我们得到上界

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big[\sup_{z\in U}\Big|\psi^{S_p}_{\eta,\mathrm{II}}(z)\Big|^2\Big] &\le C_{U'}\sigma^2 \int_{U'} \sum_{\alpha\notin I(Kp)} |S^p_\alpha(z)|^2 \mathrm{dV}(z) \\ &\le \widetilde{C}_{U'}\,\mathrm{Vol}(U')\sigma^2 \widetilde{M}^{-2p} e^{-cp} \\ &= \widetilde{C}_{U'}\,\mathrm{Vol}(U')\sigma^2 =: \widetilde{C}', \end{aligned} \tag{3.86}$$

其中，最后一个等式由我们对 $c = -2\log M$ 的选择得出。对于任意 $\lambda > 0$，根据切比雪夫不等式并结合 (3.86)，我们有

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{z\in U}\Big|\psi^{S_p}_{\eta,\mathrm{II}}(z)\Big| < \lambda\Big) \ge 1 - \frac{\widetilde{C}'}{\lambda^2}. \tag{3.87}$$

我们定义良事件

$$\Omega_p = \left\{ |\eta_0| \ge 1\,;\, |\eta_\alpha| \le \frac{1}{3\sqrt{q_p-1}}\widetilde{M}^p, \alpha \in I^*(Kp)\,;\, \sup_{z\in U}\Big|\psi^{S_p}_{\eta,\mathrm{II}}(z)\Big| < \frac{1}{3}p^{n/2} \right\}. \tag{3.88}$$

对于所有充分大的 $p \in \mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Omega_p) &= \mathbb{P}(|\eta_0| \ge 1)\cdot \mathbb{P}\left(\sup_{z\in U}\Big|\psi^{S_p}_{\eta,\mathrm{II}}(z)\Big| < \frac{1}{3}p^{n/2}\right) \\ &\quad \cdot \mathbb{P}\left(|\eta_\alpha| \le \frac{1}{3\sqrt{q_p-1}}\widetilde{M}^p, \alpha \in I^*(Kp)\right) \\ &\ge e^{-1}\Big(1 - \frac{9\widetilde{C}'}{p^n}\Big)\cdot \Pi_{\alpha\in I^*(Kp)}\left(\frac{1}{18(q_p-1)}\widetilde{M}^{2p}\right). \end{aligned} \tag{3.89}$$

那么由 (3.79) 可知，存在 $C'_U > 0$，使得对于 $p \gg 1$，

$$\mathbb{P}(\Omega_p) \ge e^{-C'_U p^{n+1}}. \tag{3.90}$$

只要证明以下包含关系，我们的引理便得证

$$\Omega_p \subset \left\{\mathrm{Div}(\psi_\eta^{S_p}) \cap U = \varnothing\right\}. \tag{3.91}$$

事实上，若 $|\eta_\alpha| \le \frac{1}{3\sqrt{q_p-1}}\widetilde{M}^p$, $\alpha \in I^*(Kp)$，则对于 $z \in U$，

$$\begin{aligned}\left|\psi_{\eta,\mathrm{I}}^{S_p}(z)\right|^2 &\le \Big(\sum_{\alpha\in I^*(pK)}|\eta_\alpha|^2\Big)\Big(\sum_{\alpha\in I^*(pK)}|S_\alpha^p(z)|^2\Big)\\ &\le \frac{1}{\widetilde{M}^{2p}}\Big(\sum_{\alpha\in I^*(pK)}|\eta_\alpha|^2\Big)P_p(z,z)\\ &\le \frac{1}{9}p^n.\end{aligned} \tag{3.92}$$

因此，在 Ω_p 上且对于 $z \in U$，我们得到

$$\begin{aligned}\left|\psi_{\eta,\mathrm{I}}^{S_p}(z)+\psi_{\eta,\mathrm{II}}^{S_p}(z)\right| &\le \left|\psi_{\eta,\mathrm{I}}^{S_p}(z)\right|+\left|\psi_{\eta,\mathrm{II}}^{S_p}(z)\right| \le \frac{1}{3}p^{n/2}+\frac{1}{3}p^{n/2}\\ &< p^{n/2} \le \left|\eta_0 S_0^p(z)\right|.\end{aligned} \tag{3.93}$$

上述严格不等式意味着 (3.91) 得以满足。这就完成了该引理的证明。□

现在我们简要说明，如何将我们的结果应用于 Bargmann-Fock 空间这一特殊情形，从而恢复 Sodin-Tsirelson（对于 $\mathbb{C}$, [ST2，定理 1]）和 Zrebiec（对于 $\mathbb{C}^n$, [Zr，定理 1.2]）关于空穴概率的结果。他们证明，存在常数 $c_1 \ge c_2 > 0$，使得当 $r > 0$ 足够大时，

$$\exp(-c_1 r^{2n+2}) \le \mathbb{P}\big(\psi_\eta^S(z) \ne 0, \text{ for all } z \in \mathbb{B}(0,r)\big) \le \exp(-c_2 r^{2n+2}), \tag{3.94}$$

其中 $\mathbb{B}(0,r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < r\}$。现在令 $r_0 > 0$ 固定。则由 (1.16) 和 (3.81)，我们得到

$$\exp(-c\sqrt{p}^{2n+2}) \le \mathbb{P}\big(\psi_\eta^{S_p}(z) \ne 0, \text{ for all } z \in \mathbb{B}(0,r_0)\big) \le \exp(-c'\sqrt{p}^{2n+2}). \tag{3.95}$$

利用 (3.12)，不等式 (3.95) 等价于

$$\exp(-c\sqrt{p}^{2n+2}) \le \mathbb{P}\big(\psi_\eta^{S}(z) \ne 0, \text{ for all } z \in \mathbb{B}(0,\sqrt{p}r_0)\big) \le \exp(-c'\sqrt{p}^{2n+2}). \tag{3.96}$$

因此，通过用一个足够大的 $r > 0$ 逼近 $\sqrt{p}r_0$，我们可以得到 (3.94) 中的估计。

注 3.18. 在一般完备 K¨ahler 流形 X的背景下，(3.80) 的类似问题如下：对于任意相对紧开子集 $U \subset X$，求一列 $H^0_{(2)}(X, L^p)$ 的标准正交基 $\{\widetilde{S}_j^p\}_{j=1}^{d_p}$， $p \in \mathbb{N}$，使得

$$\sup_{x\in\bar{U}}\sum_{j>K'p^n}|\widetilde{S}_j^p(x)|_{h^p}^2 \le Ce^{-cp}, \tag{3.97}$$

其中 C、 K'、 c 是某些与 p 无关的正常数；若 $d_p = \dim H^0_{(2)}(X, L^p) \le K'p^n$，则左侧的和取为 0。对于 $p \gg 0$，当 $d_p = \mathcal{O}(p^n)$ 时，这个问题是平凡的。

这样一列基的存在表明，在相对紧子集上，Bergman 投影或伯格曼核可以用 $H^0_{(2)}(X, L^p)$ 的一列有限维子空间的正交投影或其核来近似。此外，可以预期上述子空间的数量（或维数） $K'p^n$ 与 U 上维数密度的积分之间存在联系。

$$\int_U P_p(x,x)\mathrm{dV}(x). \tag{3.98}$$

4. 随机 $\mathcal{L}^2$-全纯截面与 Toeplitz 算子

本节中，我们始终假设 (X,Θ) 和 (L,h_L) 满足与第 2 节相同的条件：(X,Θ) 是一个复 Hermitian 流形（无边界），而 (L,h_L) 是 X 上的一个 Hermitian 线丛。不过，我们不假设 Θ 完备，也不假设 (L,h_L) 具有正性。

本节旨在介绍一种方法，对 L on X 上的 $\mathcal{L}^2$-全纯截面进行“规范随机化”，尤其是在 $d=\dim H^0_{(2)}(X,L)=\infty$ 时。

如引言中所述，这一方法通过概率论中的抽象 Wiener 空间构造，并借助几何量子化理论中的 Toeplitz 算子来实现。由此可在 $\mathcal{L}^2$-全纯截面空间上诱导出一个高斯概率测度。

4.1. **抽象 Wiener 空间**。为了在无限维希尔伯特空间上定义高斯概率测度，我们采用 Gross 引入的抽象 Wiener 空间构造 [Gr]。关于这一主题的更多动机与进展，也可参阅 Sheffield 的文章 [Sh] 。

对于一个（复）向量空间 $\mathcal{H}$，Hermitian 范数是由其上的厄米内积诱导的范数。

定义4.1. 设 $(\mathcal{H},\|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ 是一个无限维可分希尔伯特空间。若对于所有 $\epsilon>0$，都存在一个有限维子空间 $F_\epsilon\subset\mathcal{H}$，使得对于满足 $F\perp F_\epsilon$ 的任一有限维子空间 $F\subset\mathcal{H}$，都有，则称厄米范数 $\|\cdot\|$ 是可测的

$$\mu_{F,\,\|\cdot\|_{\mathcal{H}}}\big(\{x\in F\,:\,\|x\|\geq\epsilon\}\big)<\epsilon, \tag{4.1}$$

其中，$\mu_{F,\ \|\cdot\|_{\mathcal{H}}}$ 表示关于与 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ 相关联的Hermitian度量，在 F 上的标准高斯测度。

命题4.2 (参见 [Gr],[K，第I章：定理4。3])。设 $\mathcal{H}$ 是一个范数为 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ 的可分希尔伯特空间，且 $\|\cdot\|$ 是 $\mathcal{H}$ 上关于 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ 连续的厄米范数。则以下两个条件等价：

(1) $\|\cdot\|$ 是可测的。*(2)* 存在 $\mathcal{H}$ 的一个单射*Hilbert–Schmidt* 算子 T，使得对 $x\in\mathcal{H}$有 $\|x\|=\|Tx\|_{\mathcal{H}}$。

给定 $\mathcal{H}$ 上的可测厄米范数 $\|\cdot\|$，令 $\mathcal{B}$ 为相对于 $\|\cdot\|$对 $\mathcal{H}$ 的完备化。那么 $(\mathcal{B},\|\cdot\|)$ 是一个可分希尔伯特空间，其中 $\mathcal{H}$ 是稠密子空间。

令 $\mathcal{B}^*$ 为 $\mathcal{B}$ 的拓扑对偶空间。若 $\alpha\in\mathcal{B}^*$，则 $\alpha|_{\mathcal{H}}$ 是 $(\mathcal{H},\|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ 上的连续线性泛函。若 α 在 $\mathcal{H}$ 上恒为零，则它在 $\mathcal{B}$ 上也恒为零。这样，我们可以将 $\mathcal{B}^*$ 视为 $\mathcal{H}^*$ 的一个（稠密）子空间，其中 $\mathcal{H}^*$ 可通过与 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ 相关的 Hilbert 度量与 $\mathcal{H}$ 相识别。

稍微滥用一下记号，我们用 $\mathcal{S}$ 表示 $\mathcal{B}$ 的博雷尔 σ-代数。于是，每个 $\alpha\in\mathcal{B}^*$ 都是从 $\mathcal{B}$ 到 $\mathbb{C}$ 的博雷尔可测函数。对于任意有限维子空间 $F\subset\mathcal{B}^*\subset\mathcal{H}$，我们引入如下记号

$$\begin{aligned}&\phi_F:\mathcal{B}\to F,\\&\phi_F(b)=\sum_{j=1}^{\dim_{\mathbb{C}}F}(b,v_j)v_j,\end{aligned} \tag{4.2}$$

其中，$\{v_j\}$ 是（F，$\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$）的正交归一基。

接着，Gross [Gr] 证明了以下结果。

定理 4.3. 固定如上所述的 $\|\cdot\|$ 上的一个可测范数 $\mathcal{H}$。存在唯一的概率测度 $\mathcal{P}$ 定义在$(\mathcal{B},\mathcal{S})$ 上，使得对于 $F\subset\mathcal{B}^*$ 任意有限维子空间，

$$\mathcal{P}(\phi_F^{-1}(U))=\mu_{F,\,\|\cdot\|_{\mathcal{H}}}(U), \tag{4.3}$$

*fo*所有 U 的博雷尔子集 F。三元组 （$\mathcal{B}$， $\mathcal{S}$， $\mathcal{P}$）称为抽象 *Wiener* 空间 .

若 $\alpha\in\mathcal{B}^*$，则作为定义在 $\mathcal{B}$ 上的函数，它是 $\mathcal{L}^2(\mathcal{B},\mathcal{S},\mathcal{P})$ 的一个元素。我们将此映射记为

$$\Phi_0:\mathcal{B}^*\to\mathcal{L}^2(\mathcal{B},\mathcal{S},\mathcal{P}). \tag{4.4}$$

此外，对于 $\alpha\in\mathcal{B}^*$， $\Phi_0(\alpha)$ 是一个零均值、方差为 $\|\alpha\|_{\mathcal{H}}^2$ 的高斯随机变量。映射 Φ_0 可延拓为一个连续线性映射

$$\Phi:\mathcal{H}^*\simeq\mathcal{H}\to\mathcal{L}^2(\mathcal{B},\mathcal{S},\mathcal{P}), \tag{4.5}$$

其中对于 $y\in\mathcal{H}$， $\Phi(y)$ 是一个零均值、方差为 $\|y\|_{\mathcal{H}}^2$ 的高斯随机变量。

注：如果 $\mathcal{H}$ 是有限维的，那么上述构造是平凡的；事实上，在这种情况下，希尔伯特空间 $\mathcal{B}$ 就是 $\mathcal{H}$ 本身。定理 4.3 中构造的概率测度是相对于范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ 而定义在 $\mathcal{H}$ 上的标准高斯概率测度。

4.2. **作用于 $H^0_{(2)}(X,L)$ 上的 Toeplitz算子**。回顾一下， P 表示从 $\mathcal{L}^2(X,L)$ 到 $H^0_{(2)}(X,L)$ 的正交投影，而 $P(x,y)$， $x,y\in X$ 表示相应的伯格曼核。无妨，以下我们始终假设 $d=\dim H^0_{(2)}(X,L)\geq 1$。

定义 4.4。对于有界函数 $f\in\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{C})$，定义

$$T_f:H^0_{(2)}(X,L)\to H^0_{(2)}(X,L),\quad T_f:=PfP, \tag{4.6}$$

其中， f 的作用是对 f进行逐点乘法。算子 T_f 称为与 f相关联的 Toeplitz 算子。

T_f 的积分核由以下表示式给出

$$T_f(x,x')=\int_X P(x,x'')f(x'')P(x'',x')\mathrm{dV}(x''). \tag{4.7}$$

另请注意， T_f 的希尔伯特伴随为 $T_{\overline{f}}$。

我们引入一类定义在 X 上的有界光滑函数，其相关联的 Toeplitz算子属于 Hilbert-Schmidt 类。

定义4.5。令 $\mathcal{Q}(X,L;\,\mathbb{C})$ 表示由定义在 X 上且满足以下条件的有界光滑复值函数 f 构成的向量空间

$$\int_X|f(x)|P(x,x)\mathrm{dV}(x)<\infty, \tag{4.8}$$

其中 P 是 L 的伯格曼核。

例4.6。 (1) 显然，$\mathscr{C}_c^\infty(X,\mathbb{C})$ 是 $\mathcal{Q}(X,L;\,\mathbb{C})$ 的子空间。特别地，若X 是紧的，则

$$\mathcal{Q}(X,L\,;\,\mathbb{C})=\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{C}). \tag{4.9}$$

(2) 令 $\mathscr{C}_b^\infty(\mathbb{C}^n,\mathbb{C})$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 上有界光滑函数的集合。在 Bargmann-Fock 空间的情形下（见例 2.11），我们有

$$\mathcal{Q}(\mathbb{C}^n,L\,;\,\mathbb{C})=\mathscr{C}_b^\infty(\mathbb{C}^n,\mathbb{C})\cap\mathcal{L}^1(\mathbb{C}^n,\mathrm{dV}). \tag{4.10}$$

(3) 一般而言，在第3节的假设下，若进一步假设 (X, J, Θ)、(L, h_L) 具有有界几何，则由 [MM5 定理 6]，，存在 $c > 0$、$C > 0$ 和 $p_0 \in \mathbb{N}^*$，使得对于 $p \geq p_0$，

$$cp^n \leq \inf_{x\in X} P_p(x,x) \leq \sup_{x\in X} P_p(x,x) \leq Cp^n, \tag{4.11}$$

也就是说，伯格曼核函数 $P_p(x,x)$ 在 X 上有上界，且与零保持正距离。因此，对于 $p \geq p_0$，我们得到，

$$\mathcal{Q}(X, L^p; \mathbb{C}) = \mathscr{C}_b^\infty(X, \mathbb{C}) \cap \mathcal{L}^1(X, \mathrm{dV}). \tag{4.12}$$

命题 4.7。对于 $f \in \mathcal{Q}(X, L; \mathbb{C})$，作用于 $H^0_{(2)}(X, L)$ 上的算子 T_f 具有光滑施瓦茨核，且为 *Hilbert-Schmidt* 算子。

证明。如果 $d = \dim H^0_{(2)}(X, L) < \infty$，那么结论显然成立。因此，以下不妨设 $d = \infty$。令 $\{S_j\}_{j=1}^\infty$ 为 $H^0_{(2)}(X, L)$ 的完备Hilbert基。

注意，对于任意紧集 $K \subset X$，级数

$$\sum_{j=1}^\infty |S_j(x)|^2_{h_L} \tag{4.13}$$

在 $x \in K$ 上一致收敛。因此，对于紧的 $K_1, K_2 \subset X$，级数

$$\sum_{j=1}^\infty S_j(x) \otimes (S_j(y))^* \tag{4.14}$$

在 $x \in K_1$ 和 $y \in K_2$ [上绝对且一致收敛。据命题 (2.4)]，由全纯函数的性质可知，如果将 $S_j(x)$、$(S_j(y))^*$ 替换为各自的协变导数，那么式 (4.13) 和 (4.14) 中的级数在任意给定的紧子集上仍然绝对收敛。

注意，根据定义4.5，对于 $j \in \mathbb{N}^*$，函数 $X \ni x \mapsto f(x)|S_j(x)|^2_{h_L}$ 在 X 上关于 dV 可积。此外，对于 $x' \in X, i, j \in \mathbb{N}^*$，我们有

$$f(x')(S_i(x'))^* S_j(x') = f(x') h_{L,x'}\left(S_j(x'), S_i(x')\right), \tag{4.15}$$

and

$$\int_X \left| f(x') \left(S_i(x')\right)^* S_j(x') \right| \mathrm{dV}(x') \leq \left\| \sqrt{|f|} S_i \right\|_{\mathcal{L}^2(X,L)} \cdot \left\| \sqrt{|f|} S_j \right\|_{\mathcal{L}^2(X,L)} \tag{4.16}$$

现在我们固定两个紧子集 $K_1, K_2 \subset X$。对于 $x \in K_1, y \in K_2$ 和 $i, j \in \mathbb{N}^*$，我们有

$$\left| S_i(x) \otimes (S_i(x'))^* f(x') S_j(x') \otimes (S_j(y))^* \right| \leq |S_i(x)|_{h_L} \cdot \left| f(x') (S_i(x'))^* S_j(x') \right| \cdot |S_j(y)|_{h_L}, \tag{4.17}$$

w这里，左侧的范数由 $h^p_x \otimes h^{p,}{}_y{}^*$ 给出。由 (4.16) 可知 s

$$\begin{aligned} &\int_X \left| S_i(x) \otimes (S_i(x'))^* f(x') S_j(x') \otimes (S_j(y))^* \right| \mathrm{dV}(x') \\ &\leq |S_i(x)|_{h_L} \left\| \sqrt{|f|} S_i \right\|_{\mathcal{L}^2(X,L)} \cdot \left\| \sqrt{|f|} S_j \right\|_{\mathcal{L}^2(X,L)} |S^p_j(y)|_{h^p}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

综上所述，我们得到

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^\infty |S_i(x)|_{h_L} \| \sqrt{|f|} S_i \|_{\mathcal{L}^2(X,L)} &\leq \Big(\sum_{i=1}^\infty |S_i(x)|^2_{h_L} \Big)^{1/2} \Big(\sum_{i=1}^\infty \| \sqrt{|f|} S_i \|^2_{\mathcal{L}^2(X,L)} \Big)^{1/2} \\ &= \Big(\sum_{i=1}^\infty |S_i(x)|^2_{h_L} \Big)^{1/2} \Big(\int_X |f(x')| P(x', x') \mathrm{dV}(x') \Big)^{1/2} \\ &< \infty, \end{aligned} \tag{4.19}$$

以及 th 如果将 $S_i(x)$ 替换为其在 x 处的协变导数，上述估计仍然成立 .

回顾由 (4.7) 得到的 T_f 的施瓦茨核，上述计算表明，$T_f(x,y)$ 是 $X\times X$ 上的一个光滑截面。要证明 T_f 是 Hilbert-Schmidt 算子，只需证明

$$\sum_{i,j}\left|\langle T_fS_i,S_j\rangle_{\mathcal{L}^2(X,L)}\right|^2<\infty. \tag{4.20}$$

事实上，由 (4.16) 可得

$$\left|\langle T_fS_i,S_j\rangle_{\mathcal{L}^2(X,L)}\right|^2\leq\left\|\sqrt{|f|}S_i\right\|^2_{\mathcal{L}^2(X,L)}\cdot\left\|\sqrt{|f|}S_j\right\|^2_{\mathcal{L}^2(X,L)} \tag{4.21}$$

Then

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}\left|\langle T_fS_i,S_j\rangle_{\mathcal{L}^2(X,L)}\right|^2&\leq\sum_{i,j=1}^{\infty}\left\|\sqrt{|f|}S_i\right\|^2_{\mathcal{L}^2(X,L)}\cdot\left\|\sqrt{|f|}S_j\right\|^2_{\mathcal{L}^2(X,L)}\\&=\Big(\int_X|f(x)|P(x,x)\mathrm{dV}(x)\Big)^2<\infty.\end{aligned} \tag{4.22}$$

证明至此完成。 □

推论 4.8. 如果 $f\in\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{C})$ 具有紧支撑，那么 T_f 是作用在 $H^0_{(2)}(X,L)$ 上的 *Hilbert–Schmidt* 算子。此外， T_f 是迹类，并且

$$\mathrm{Tr}[T_f]=\int_X f(x)P(x,x)\mathrm{dV}(x). \tag{4.23}$$

4.3. **随机 $\mathcal{L}^2$-全纯截面**。令 $\mathcal{Q}(X,L;\ \mathbb{R}_{\geq0})$ 为 $\mathcal{Q}(X,L;\ \mathbb{C})$ 中由取值于 $\mathbb{R}_{\geq0}$ 的函数构成的子空间。对于 $f\in\mathcal{Q}(X,L;\ \mathbb{R}_{\geq0})$， T_f 是作用在 $H^0_{(2)}(X,L)$ 上的非负自伴 Hilbert-Schmidt（因而是紧）算子。

引理 4.9. 对于 $0\neq f\in\mathcal{Q}(X,\ L;\ \mathbb{R}_{\geq0})$，算子 $T_f\colon\ H^0_{(2)}(X,\ L)\to H^0_{(2)}(X,\ L)$ 是单射。

证明。由于 $f\neq0$，存在 X 的一个开子集 U，在该子集上 f 严格为正。若 $s\in H^0_{(2)}(X,L)$ 满足 $T_fs=0$，则

$$0=\langle T_fs,s\rangle=\int_X f(x)|s(x)|^2_{h_L}\mathrm{dV}(x), \tag{4.24}$$

因此 $s|_U=0$。由于 U 是开集，且 s 在 X上全纯，于是得到 $s=0$。引理得证。 □

固定 $f\in\mathcal{Q}(X,L;\ \mathbb{R}_{\geq0})$， $f\neq0$。若 $d<\infty$，则上述 T_f 实际上是向量空间 $H^0_{(2)}(X,L)$ 上的一个同构。现在我们着重讨论 $d=\infty$的情形。由于 T_f 是紧且单射的，因此它不可能是满射。因此，它不存在有界逆。此外，对于任意 $\lambda\in\mathbb{C},\lambda\neq0$，算子 $T_f-\lambda$ 是弗雷德霍姆算子，具有闭值域，且弗雷德霍姆指标为 0。

令 $D(T_f^{-1})=$值域$(T_f\colon\ H^0_{(2)}(X,L)\to H^0_{(2)}(X,L))\subset H^0_{(2)}(X,L)$，它是一个稠密子空间。 T_f 的逆算子定义为

$$T_f^{-1}:D(T_f^{-1})\subset H^0_{(2)}(X,L)\to H^0_{(2)}(X,L). \tag{4.25}$$

令 $\sigma(T_f)\subset\mathbb{R}_{\geq0}$ 表示 T_f的谱，它是一个由两部分组成的可数集：点谱 $\sigma_{\mathrm{p}}(T_f)\subset\mathbb{R}_{>0}$ （特征值）和剩余谱$\sigma_{\mathrm{res}}(T_f)=\{0\}$。在这种情况下， T_f 的点谱（总是具有有限重数）是一个严格正实数的递减序列，

$$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_m\geq\ldots\to0. \tag{4.26}$$

由于任何可分复希尔伯特空间都可以通过选取正交归一基与希尔伯特空间 $\ell^2(\mathbb{C})$ 等距同构，因此我们可以选取 $H^0_{(2)}(X,L)$ 关于 $\mathcal{L}^2$-度量的正交归一基 $\{S_j\}_{j=1}^{\infty}$，使得

$$T_f S_j = \lambda_j S_j. \tag{4.27}$$

若 $S \in H^0_{(2)}(X,L)$，则可唯一地写成

$$S = \sum_{j\geq 1} a_j S_j, \quad a_j \in \mathbb{C}. \tag{4.28}$$

于是 $(a_j)_j \in \ell^2(\mathbb{C})$，从而得到 $H^0_{(2)}(X,L)$ 与 $\ell^2(\mathbb{C})$ 之间的对应 .

由于 T_f 是单射且为 Hilbert-Schmidt 算子，根据命题4.2，$\|\cdot\|_f := \|T_f \cdot\|$ 在 $H^0_{(2)}(X,L)$ 上定义了一个厄米可测范数。我们将 $\mathcal{B}_f(X,L)$ 记为 $H^0_{(2)}(X,L)$ 关于 $\|\cdot\|_f$ 的完备化，并令

$$\ell^2_f(\mathbb{C}) = \Big\{(a_j \in \mathbb{C})_{j\geq 1} \ : \ \sum_{j\geq 1} \lambda_i^2 |a_j|^2 < \infty\Big\}. \tag{4.29}$$

显然，它是一个可分希尔伯特空间，利用与 (4.27) 中相同的基，可得

$$\mathcal{B}_f(X,L) \simeq \ell^2_f(\mathbb{C}). \tag{4.30}$$

命题4.10。设 $d=\infty$, $0 \neq f \in \mathcal{Q}(X,\ L;\ \mathbb{R}_{\geq 0})$。则算子 T_f 唯一地延拓为一个希尔伯特空间同构

$$\widehat{T}_f : \big(\mathcal{B}_f(X,L), \|\cdot\|_f\big) \to \big(H^0_{(2)}(X,L), \|\cdot\|_{\mathcal{L}^2(X,L)}\big). \tag{4.31}$$

给定 $0 \neq f \in \mathcal{Q}(X,L;\ \mathbb{R}_{\geq 0})$，若 $d<\infty$，则令

$$\big(\mathcal{B}_f(X,L), \|\cdot\|_f\big) = \big(H^0_{(2)}(X,L), \|\cdot\|_f\big), \quad \text{and} \quad \widehat{T}_f := T_f. \tag{4.32}$$

于是，我们统一两种情形 $d<\infty$ 和 $d=\infty$的记号。

定义4.11。用 $\mathcal{P}_f$ 表示在选择$\mathcal{B} = \mathcal{B}_f(X,L)$时定理 4.3 中的概率测度。令 $\mathbb{P}_f$ 为 $H^0_{(2)}(X,L)$ 上的高斯概率测度，它是 $\mathcal{P}_f$ 经由 (4.31) 中的同构推前得到的。这样，我们便将 $H^0_{(2)}(X,L)$ 中的截面随机化。

引理 *4.12*。假设 $d \geq 1$, $0 \neq f \in \mathcal{Q}(X,L;\ \mathbb{R}_{\geq 0})$。对于任意非零的 $S \in H^0_{(2)}(X,L)$，定义在 $(H^0_{(2)}(X,L)\ \mathbb{P}_f)$ 上的随机变量 $H^0_{(2)}(X,L) \ni s \mapsto \langle s, S\rangle_{\mathcal{L}^2(X,L)} \in \mathbb{C}$ 是一个方差为 $\|T_f S\|^2_{\mathcal{L}^2(X,L)}$ 的中心复高斯变量。

证明。注意到 $T_f S$ 在 $H^0_{(2)}(X,L)$ 中非零，线性形式

$$H^0_{(2)}(X,L) \ni s' \mapsto \langle s', T_f S\rangle_{\mathcal{L}^2(X,L)} \in \mathbb{C} \tag{4.33}$$

可延拓为 $(\mathcal{B}_f(X,L)\ \|\cdot\|_f)$ 上的有界线性形式，因此定义了 $\mathcal{B}_f(X,L)^*$ 中的一个元素，记为 Ψ_S。于是根据性质 (4.3)，随机变量 $\Psi_S(s')$（其中 s'服从分布 $\mathcal{P}_f$）是一个方差为$\|T_f S\|^2_{\mathcal{L}^2\ (X,\ L)}$ 的中心复高斯变量。

换句话说，根据构造，对于 $s' \in \mathcal{B}_f(X,L)$,

$$\Psi_S(s') = \langle \widehat{T}_f s', S\rangle_{\mathcal{L}^2(X,L)}. \tag{4.34}$$

因此，作为一个随机变量，它与 $\langle s,S\rangle_{\mathcal{L}^2\ (X,\ L)}$ 完全相同，其中 s 的分布为 $\mathbb{P}_f$。至此，证明完成。□

4.4. 随机 $\mathcal{L}^2$-全纯截面的零点：定理 1.4 的证明。我们假设 $d \geq 1$，并固定 $0 \neq f \in \mathcal{Q}(X, L; \mathbb{R}_{\geq 0})$。设算子 $T_f^2 := T_f \circ T_f$ 作用于 $H^0_{(2)}(X, L)$，它是一个正的、自伴的迹类算子。令 T_f^2 的施瓦茨核为 $T_f^2(x, y)$。

引理 4.13。 函数 $X \ni x \mapsto \log T_f^2(x, x)$ 在 X 上局部可积，因此，*(1, 1)*-流 $\partial\bar{\partial} \log T_f^2(x, x)$ 在 X 上有定义。

证明。令 $\{S_j\}_{j=1}^d$ 为 (4.27) 中给出的 $H^0_{(2)}(X, L)$ 的正交归一基。那么对于$x \in X$,

$$T_f^2(x, x) = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j^2 |S_j(x)|^2_{h_L}. \tag{4.35}$$

若 $d = \infty$，上述级数在 X 的任意紧子集上一致收敛。类似于引理 2.6 的证明，我们得到函数 $\log T_f^2(x, x)$ 是 X 上的拟拟次调和函数，因此局部可积。证明完毕。□

仿照 (1.7) 中定义的 Fubini-Study 流，我们定义

$$\gamma_f(L, h_L) = c_1(L, h^L) + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log T_f^2(x, x). \tag{4.36}$$

现在我们可以证明定理 1.4 关于上一小节构造的随机 $\mathcal{L}^2$-全纯截面的零点的结论。

定理 *1.4* 的证明。注意，$T_f^2(x, x)$ 恰好在 $\mathrm{Bl}(X, L)$ 上消失。令 $\{S_j\}_{j=1}^d$为 (4.27) 中给出的 $H^0_{(2)}(X, L)$ 的正交归一基。

由引理 4.12，复随机变量

$$\eta_j := \frac{1}{\lambda_j} \langle s, S_j \rangle_{\mathcal{L}^2(X,L)}, \ j = 1, 2, \ldots \tag{4.37}$$

构成一个标准中心复高斯变量的独立同分布序列。因此，我们得到，对于 $x \in X$,

$$s(x) = \sum_j \eta_j \lambda_j S_j(x). \tag{4.38}$$

然后，我们可以按照定理 1.1 的证明进行，将 $P(x, x)$ 替换为 (4.35) 中给出的 $T_f^2(x, x)$，从而得出 (1.20)。□

注 4.14。 在上述证明中，我们看到，具有概率分布 $(H^0_{(2)}(X, L)\ \mathbb{P}_f)$ 的随机 $\mathcal{L}^2$-全纯截面 s，等价于 (4.38) 中给出的构造，正如我们在引言部分所说明的（参见 (1.2)）。令 $S = \{S_j\}_{j=1}^d$ 表示 (4.27) 中给出的 $H^0_{(2)}(X, L)$ 的正交归一基，并令 ψ_η^S 为由 (2.8) 定义的高斯随机全纯截面，它可视为取值于 $\mathcal{B}_f(X, L)$ 的随机变量。于是，概率空间 $(H^0_{(2)}(X, L)\ \mathbb{P}_f)$ 恰好给出了随机截面 $\widehat{T}_f \psi_\eta^S$ 的概率分布。

注 4.15。 请注意，在上述构造中，我们考虑非负实函数 f，以保证 T_f 在 $H^0_{(2)}(X, L)$ 上的单射性。也可以考虑如下不同的设定，在这种设定下，我们不要求 T_f 的单射性。

取 f属于 $\mathcal{Q}(X, L; \mathbb{R})$，它在 X上的某些点可能为负。令

$$H^0_{(2)}(X, L, f) := (\ker T_f)^\perp = \overline{T_f H^0_{(2)}(X, L)} \subset H^0_{(2)}(X, L), \tag{4.39}$$

其中 $\overline{(\cdot)}$ 表示在 $H^0_{(2)}(X,L)$中的闭包。它是一个希尔伯特空间，而$H^0_{(2)}(X,L,f)$中的截面是由 f 检测到的 L 全纯 $\mathcal{L}^2$。注意，ker T_f 总是有限维的。我们考虑（自伴）希尔伯特 - 施密特算子

$$T_f^\sharp := T_f|_{H^0_{(2)}(X,L,f)} : H^0_{(2)}(X,L,f) \to H^0_{(2)}(X,L,f). \tag{4.40}$$

然后，我们可以按照第4.3小节中的方法，在 $\mathbb{P}_f^\sharp$ 上构造相应的高斯概率测度 $H^0_{(2)}(X,L,f)$。令 $s^\sharp$ 表示 $H^0_{(2)}(X,L,f)$ 中相应的随机截面，则

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}_f^\sharp}\left[[\mathrm{Div}(s^\sharp)]\right] = \gamma_f(L,h_L), \tag{4.41}$$

其中，$\gamma_f(L,h_L)$ 由公式 (4.36) 给出。

进一步地，由于 $\ker T_f$ 是有限维的，我们可以赋予它与 $\mathcal{L}^2$-度量相关的标准高斯概率测度 $\mathbb{P}_f^0$。取乘积概率空间

$$(H^0_{(2)}(X,L),\mathbb{P}_f) := (\ker T_f,\mathbb{P}_f^0)\oplus(H^0_{(2)}(X,L,f),\mathbb{P}_f^\sharp). \tag{4.42}$$

令 $m(f) := \dim \ker T_f$，并令 $\{S_j\}_{j=1}^{m(f)}$ 为 ker T_f 的正交归一基，则正交投影 $P_{\ker T_f}$ 的施瓦茨核为

$$P_{\ker T_f}(x,y) = \sum_{j=1}^{m(f)} S_j(x)\otimes(S_j(y))^*. \tag{4.43}$$

令 s 为 $H^0_{(2)}(X,L)$ 中按照 (4.42) 构造的概率分布 $\mathbb{P}_f$ 所对应的随机截面，则有

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}_f}[[\mathrm{Div}(s)]] = c_1(L,h^L) + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar\partial\log\left(T_f^2(x,x)+P_{\ker T_f}(x,x)\right). \tag{4.44}$$

注意，由于 f 在 X 上有界，因此我们总有

$$T_f^2(x,x) \le T_f^2(x,x)+P_{\ker T_f}(x,x) \le \max\{\|f\|_\infty^2,1\}P(x,x), \tag{4.45}$$

其中，$\|f\|_\infty$ 是 X上 f 的 $\mathcal{L}^\infty$范数。

我们将在第5.4小节中考察上述不同情形，以研究完备 K¨ahler 流形上预量子线丛的高次张量幂的随机零点。

5. 高次张量幂的随机 $\mathcal{L}^2$-全纯截面

作为第3节的类比，我们希望研究给定正线丛在 X上的高次张量幂的随机 $\mathcal{L}^2$-全纯截面的零点的渐近行为。我们对(X,Θ)和(L,h_L)作出与第3节开头（或第 1.2 小节）相同的假设，特别地，我们假设(1.9)成立。

为了以规范的方式构造L^p、 $p\in\mathbb{N}_{>0}$的随机 $\mathcal{L}^2$-全纯截面序列，我们使用与 X上的适当正函数 f 相关联的 Toeplitz算子 $\{T_{f,p}\}_{p\in\mathbb{N}_{>0}}$。这类算子$\{T_{f,p}\}_{p\in\mathbb{N}_{>0}}$ 在伯格曼-托普利茨量子化的背景下早已得到充分研究。

5.1. 托普利茨算子的渐近性。回顾一下， P_p 表示从 $\mathcal{L}^2(X,L^p)$到 $H^0_{(2)}(X,L^p)$的正交投影。对于 X 上的光滑有界函数 f 以及$p\in\mathbb{N}_{>0}$，我们定义

$$T_{f,p} = P_p f P_p. \tag{5.1}$$

这定义了一个作用于 $H^0_{(2)}(X,L^p)$ 的有界线性算子。

为了获得 $\{T_{f,p}\}$ 的施瓦茨核的渐近展开，我们需要对函数 f 或 X 和 L 的几何作进一步假设。我们主要关注以下两种情况。

(I) 我们对 (X,Θ) 和 (L,h_L) 保持与 (1.9) 中相同的假设。假设函数 f是 X 上的有界光滑函数，并且在 X的某个紧子集之外为常数。(II) 除了情形（I）中的假设外，我们还假设 (X,J,Θ) 和 (L,h_L) 具有有界几何（参见第 3.1 小节），并且取 f 为 X 上的有界光滑函数，其关于 ∇^{TX}和 g^{TX}的任意阶导数均有界。

显然，在这两种情形下，我们总可以取一个具有紧支撑的光滑函数 f 。

定理 5.1（参见 [MM1，第 7],[MM5], [F2，引理 3.11、3.14 和 4。6]）。假设 $\{T_{f,p}\}_{p\in\mathbb{N}}$ 在情形（*I*）或情形（*II*）中定义，则有以下结果：

- 对于紧子集 $K\subset X$，以及任意 $\epsilon>0$ 和任意 ℓ，$m\in\mathbb{N}$，存在$C_{\ell,\ m,\ \varepsilon}>0$，使得对于 $p\geq 1$，x，$x'\in X$，若 $d(x,\ x')>\varepsilon$，则有

$$|T_{f,p}(x,x')|_{\mathscr{C}^m(K\times K)}\leq C_{\ell,m,\epsilon}p^{-\ell}, \tag{5.2}$$

其中，$\mathscr{C}^m$-范数由 ∇^{TX} 诱导，且 h^L、g^{TX}。

- 当 $p\to\infty$ 时，我们有渐近展开，该展开在 X 的任意紧子集上一致，

$$T_{f,p}(x,x)=\sum_{\ell=0}^{\infty}b_{\ell,f}(x)p^{n-l}+\mathcal{O}(p^{-\infty}), \tag{5.3}$$

其中 $b_{\ell,\ f}\in\mathcal{C}^\infty(X,\ \mathbb{C})$，特别地，

$$b_{0,f}(x)=f(x),\ x\in X. \tag{5.4}$$

- $T_{f,\ p}$、$p\in\mathbb{N}$ 的算子范数满足

$$\lim_{p\to\infty}||T_{f,p}||=||f||_\infty. \tag{5.5}$$

- 若 g 在 X 上也是有界光滑函数，且与前面相同的情形，即 f（情形（*I*）或（*II*）），那么在任意给定的紧子集 $K\subset X$ 上，我们有一致展开

$$(T_{f,p}T_{g,p})(x,x)=p^nf(x)g(x)+\mathcal{O}(p^{n-1}), \tag{5.6}$$

若对两边关于 x 求任意给定阶数的导数，该展开仍然成立。

特别地，对于情形（*II*），我们可以将 (5.2) 进一步改进为关于$\sqrt{p}$的指数衰减，并且 (5.2)、(5.3) 和 (5.6) 在整个流形 X 上一致成立。

情形（I）的上述定理主要由 Ma 和 Marinescu 在 [MM1 第 7] 章中证明。对于情形（II），利用 [MM5], 中得到的伯格曼核的指数估计，可以通过对 [MM1 第 7] 章中的论证稍作变动来证明；这些证明由 Finski 在 [F2 第 3 节和第 4] 节中阐述。

下文中的结果主要将采用带有 $g=f$ 的展开式（5.6）。注意，对（X,Θ）和（L, h_L）施加进一步的几何条件后，我们可以得到（5.6）的一个改进版本。

记 Ric 为里奇曲率张量，并设 $\mathrm{Ric}_\Theta=:\mathrm{Ric}(J\cdot,\cdot)$。令 r^X 表示 (X,g^{TX}) 的标量曲率，并令 Δ 表示与 g^{TX} 相关、作用于函数上的（正）博赫纳拉普拉斯算子。我们将使用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示该内积的 $\mathbb{C}$-线性延拓

内积 $g^{\Lambda^\bullet T^*X}$。考虑联络 ∇^{T^*X}: $\mathscr{C}^\infty(X, T^*X\otimes\mathbb{C}) \to \mathscr{C}^\infty(X, T^*X\otimes T^*X\otimes\mathbb{C})$，令 $D^{0,1}$、$D^{1,0}$ 分别表示其 (1, 0) 和 (0, 1) 分量。

以下定理由 [MM4] 对配备预量子线丛的紧 K¨ahler 流形证明。Ma 和 Marinescu 在引言中指出，这些计算本质上是局部的，因此可推广到完备（非紧）K¨ahler 流形的情形。特别地，根据 [MM1 的第 7.4 节和第 7.5] 节（情形（I））, 以及 [MM5] [F2 的第 3 节和第 4] 节（情形（II））, 这些结果对我们的情形（I）和（II）均成立。

定理 *5.2.* 假设 (X, Θ) 是完备的 *K¨ahler* 流形，且 (L, h^L) 是 X 上的预量子线丛（即 $\Theta = c_1(L, h^L)$）。设 f, g 是有界光滑函数，它们在某个紧子集之外为常数（情形（*I*））；或者，若进一步假设 (X, Θ)、(L, h^L) 具有有界几何，则设 f, g 是 X 上的两个有界光滑函数，且它们任意阶的导数在 X 上也有界（情形（*II*））。那么，对于 $\ell \in \mathbb{N}$，存在 X 上一个记作 $\mathbf{b}_\ell(f, g)$ 的光滑函数，它是 f, g 的导数的多项式，系数仅依赖于 Θ 和 h^L，使得在任意紧子集 $K \subset X$ 上，我们有如下的一致展开 $(N \geq 0)$，

$$(T_{f,p}T_{g,p})(x,x) = \sum_{\ell=0}^{N} p^{n-\ell}\mathbf{b}_\ell(f,g)(x) + \mathcal{O}(p^{n-N-1}). \tag{5.7}$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_0(f,g) =& fg,\\
\mathbf{b}_1(f,g) =& \frac{\mathbf{r}^X}{8\pi}fg - \frac{1}{4\pi}\big((\Delta f)g + f(\Delta g)\big) + \frac{1}{2\pi}\langle\overline{\partial}f, \partial g\rangle,\\
\mathbf{b}_2(f,g) =& \frac{1}{32\pi^2}\Big(f(\Delta^2 g) + (\Delta^2 f)g - \mathbf{r}^X\big(f(\Delta g) + (\Delta f)g\big)\Big)\\
&- \frac{\sqrt{-1}}{8\pi^2}\langle \mathrm{Ric}_\Theta, f\partial\bar{\partial}g + g\partial\bar{\partial}f\rangle\\
&+ \frac{1}{8\pi^2}\Big\{\frac{1}{2}\Delta f\cdot\Delta g + \frac{\mathbf{r}^X}{2}\langle\overline{\partial}f, \partial g\rangle + \langle D^{0,1}\overline{\partial}f, D^{1,0}\partial g\rangle_{g^{T^*X\otimes T^*X}}\\
&- \langle\overline{\partial}\Delta f, \partial g\rangle - \langle\overline{\partial}f, \partial\Delta g\rangle\Big\}.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

5.2. **支集上的随机零点：定理1.6和1.7的证明**。固定一个 $p_0 \in \mathbb{N}_{>0}$，令

$$\mathcal{Q}_{\geq p_0}(X, L; \mathbb{R}_{\geq 0}) := \cap_{p\geq p_0}\mathcal{Q}(X, L^p; \mathbb{R}_{\geq 0}). \tag{5.9}$$

我们固定一个函数 f 如下：

假设 A：$f \in \mathcal{Q}_{\geq p_0}(X, L;\ \mathbb{R}_{\geq 0})$，它是非平凡的，并且还满足情形（I）或情形（II）中的条件。

注意到，这样的函数总是存在，例如，在 X 上具有紧支撑的非负光滑函数；而在 Bargmann-Fock 空间的情形下，我们可以取 f 为 $\mathbb{C}^n$上的非负 Schwartz函数。在本节余下部分，我们始终考虑整数 $p \geq p_0$。

按照定义4.11中的构造，令$\mathbb{P}_{f,\ p}$ 为$H^0_{(2)}(X, L^p)$上的相应概率测度。于是，我们将由概率分布（$H^0_{(2)}(X, L^p)\,\mathbb{P}_{f,\ p}$）给出的$H^0_{(2)}(X, L^p)$中的随机截面记为 $\mathsf{S}_{f,\ p}$。

由 (5.6)，在任意紧子集 $K \subset X$ 上，对于 $\ell \in \mathbb{N}$，下列恒等式关于 $x \in K$ 在 $\mathscr{C}^\ell$-范数下是一致成立的

$$T^2_{f,p}(x,x) = f^2(x)p^n + \mathcal{O}(p^{n-1}), \tag{5.10}$$

若处于情形（II），则该结论在整个流形 X 上一致成立。

设 U为 X的一个开子集，记 $\Omega_0^{(n-1,n-1)}(\overline{U})$ 为在 U中具有紧支撑的 $\overline{U}$上的光滑 $(n-1, n-1)$-形式。对于 X上的任意（1,1）流 α，记 $\alpha|_U$为其在 U 上的限制，它通过作用于 $\Omega_0^{(n-1,n-1)}(\overline{U})$ 中的截面来定义。

定理 5.3. 设 U 为 X 的一个开子集，且 $f>0$ 在 U上，则当 $p\to\infty$时，我们有 U 上流的弱收敛，

$$\frac{1}{p}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_{f,p}}[[\mathrm{Div}(\mathbf{S}_{f,p})]|_U]\to c_1(L,h_L)|_U. \tag{5.11}$$

证明. 由 (4.36)，可得

$$\gamma_f(L^p,h_p)=pc_1(L,h_L)+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log T^2_{f,p}(x,x). \tag{5.12}$$

注意，由我们关于 U上 f的假设，在 U的任意紧子集上，当 p充分大时，$\gamma_f(L^p,h_p)$ 是一个光滑形式。

再由定理 1.4，可得

$$\frac{1}{p}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_{f,p}}[[\mathrm{Div}(\mathbf{S}_{f,p})]|_U]=c_1(L,h_L)|_U+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi p}\partial\overline{\partial}\log T^2_{f,p}(x,x). \tag{5.13}$$

对于任意 $\varphi\in\Omega_0^{(n-1,n-1)}(\overline{U})$。令 $K=\mathrm{supp}\ \varphi$，它是 U的一个紧子集。令$m_K:=\max_{x\in K}f(x)$，$c_K:=\min_{x\in K}f(x)>0$，则当 $p, x\in K$充分大时，有

$$2m_Kp^n\geq T^2_{f,p}(x,x)\geq\frac{1}{2}c_Kp^n. \tag{5.14}$$

我们可以直接计算

$$\partial\overline{\partial}\log T^2_{f,p}(x,x)=\frac{1}{T^2_{f,p}(x,x)^2}\left(\partial\overline{\partial}T^2_{f,p}(x,x)-\partial T^2_{f,p}(x,x)\wedge\overline{\partial}T^2_{f,p}(x,x)\right). \tag{5.15}$$

于是，由一致展开 (5.10)，当 $p\to\infty$ 时，我们得到，

$$\left\langle\frac{\sqrt{-1}}{2\pi p}\partial\overline{\partial}\log T^2_{f,p}(x,x),\varphi\right\rangle\to 0. \tag{5.16}$$

于是，(5.11) 中的收敛性成立。

□

下面的推论显然成立。

推论 5.4。若 $f>0$ 在 X上，则当 $p\to\infty$ 时，我们有 X 上的流的弱收敛，

$$\frac{1}{p}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_{f,p}}[[\mathrm{Div}(\mathbf{S}_{f,p})]]\to c_1(L,h_L). \tag{5.17}$$

考虑乘积概率空间中的随机截面序列，

$$(\mathbf{S}_{f,p})_p\in\Pi_p\big(H^0_{(2)}(X,L^p),\mathbb{P}_{f,p}\big), \tag{5.18}$$

我们还具有如下依概率收敛结果。

定理 5.5。设 U 是 X 的一个开子集，且 $f>0$ 在 U上成立，则对任意 $\varphi\in\Omega_0^{(n-1,n-1)}(\overline{U})$，有

$$\mathbb{P}\left(\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\big\langle[\mathrm{Div}(\mathbf{S}_{f,p})],\varphi\big\rangle=\langle c_1(L,h_L),\varphi\rangle\right)=1. \tag{5.19}$$

证明。 固定一个非零的 $\varphi \in \Omega_0^{(n-1,n-1)}(\overline{U})$。注意，根据定理 5.3 的证明，我们有如下收敛

$$\lim_{p\to\infty}\left\langle \frac{1}{p}\gamma_f(L^p,h_p),\varphi\right\rangle = \langle c_1(L,h_L),\varphi\rangle. \tag{5.20}$$

定义随机变量

$$Y_{f,p} = \frac{1}{p}\Big\langle [\mathrm{Div}(\mathbf{S}_{f,p})] - \gamma_f(L^p,h_p),\varphi\Big\rangle, \tag{5.21}$$

要证明几乎必然有式（5.19）成立，只需证明

$$Y_{f,p}\to 0. \tag{5.22}$$

Note 若采用定理 1.4 的证明中的构造，我们可以写成

$$\mathbf{S}_{f,p} = \sum_{j=1}^{d_p}\eta_j^p\lambda_j^p S_j^p, \tag{5.23}$$

其中，$\{\eta_j^p\}_j$是一个独立同分布的标准复高斯随机变量序列，$\{\lambda_j^p\}_j$是$T_{f,p}$的点谱，$\{S_j^p\}_j$是 $H^0_{(2)}(X,L^p)$的正交归一基，由$T_{f,p}$的特征截面给出。

于是，如注 3.9 中所述，我们可以按照定理 3.6 的证明进行推导，从而得到

$$\mathbb{E}[|Y_{f,p}|^2] = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{p^2}\Big), \tag{5.24}$$

由此得到式（5.22），进而得到式（5.19）。 □

自然可以考察如何放宽定理 5.5 中的假设。对于如上所述的 f，考虑 U 为 supp f 的一个开子集。一般而言，f 可能在 U 的某些点处消失。一个自然而有趣的问题是：对 f 在 U 中的零点施加何种条件，才能使我们仍能获得如上所述的 U 上随机零点的等分布结果? 由于 f 非负，若 $f(x_0)=0$，则 f 在 x_0 处可能的最低消失阶为 2。下文将说明，若 f 只有消失阶为 2 且 Δf 不消失的零点，则上述结果仍然成立（在预量子设置下）。

为此，我们将运用定理 5.2 中的结果，因此需要作出以下假设；该假设强于**假设 A**。

假设 B：假设 (X,Θ) 是完备的 K¨ahler 流形，且 (L,h_L) 是 X 上的预量子线丛（即 $\Theta = c_1(L,h_L)$）。令 f 为一个有界光滑函数，其在某个紧子集之外为常数；或者，若进一步假设 (X,Θ) 和 (L,h_L) 具有有界几何，则令 f 为 X 上的有界光滑函数，并且其任意阶导数在 X 上也有界。

命题 5.6. 假设对于某个非平凡的 $f\in\mathcal{Q}_{\geq p_0}(X,L;\mathbb{R}_{\geq 0})$，**假设 B** 成立，并设 U 是 X. 的一个开子集。若 f 在 U 中仅以至多二阶消失，且 Δf 在 f的所有零点处均非零，那么对于 U 的任意紧子集 K，存在常数 $c_K>0$ 和 $p_K\geq p_0$，使得对于 $x\in K, p\geq p_K$，

$$T^2_{f,p}(x,x)\geq c_K p^{n-2}. \tag{5.25}$$

此外，对数 f^2在 U上局部可积，并且当 $p\to\infty$时，我们在 U上有流的弱收敛，

$$\partial\overline{\partial}\log T^2_{f,p}(x,x)\to\partial\overline{\partial}\log f^2. \tag{5.26}$$

在点 x 附近，其中 $f(x)>0$，式（5.26）在任意局部 $\mathscr{C}^\ell$-范数下均收敛。

证明。 在**假设 B**下，我们可以将定理 5.2 应用于 $T^2_{p,\ f}$。设 $x_0 \in U$ 是 f 的一个零点，根据我们对 f 的假设，有

$$-\Delta f(x_0) \neq 0. \tag{5.27}$$

取以x_0为中心的适当测地法坐标系（$Y = (y_j)_{j=1}^{2n} \in \mathbb{R}^{2n}$），我们可以将函数 f 在 x_0 附近展开为

$$f(Y) = \sum_j c_j(x_0) y_j^2 + \mathcal{O}(|Y|^3), \tag{5.28}$$

其中常数 $c_j(x_0) \geq 0$，因为 $f \geq 0$。于是

$$-\Delta f(x_0) = \sum_j c_j(x_0) > 0. \tag{5.29}$$

现在我们由（5.8）计算 x_0附近的项 $\mathbf{b}_\ell(f,f)$, $\ell = 1, 2$,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1(f,f) &= \frac{1}{8\pi}(\mathbf{r}^X f - 4\Delta f) f + \frac{1}{2\pi}|\partial f|^2, \\ \mathbf{b}_2(f,f) &= \frac{1}{4\pi^2}\Big(\sum_j c_j(x_0)\Big)^2 + \frac{1}{8\pi^2}|D^{0,1}\overline{\partial} f(x_0)|^2_{g^{T^*X}\otimes T^*X} + \mathcal{O}(|Y|). \end{aligned} \tag{5.30}$$

令

$$\mu(f, x_0) = \frac{1}{4\pi^2}\Big(\sum_j c_j(x_0)\Big)^2 + \frac{1}{8\pi^2}|D^{0,1}\overline{\partial} f(x_0)|^2_{g^{T^*X}\otimes T^*X} > 0, \tag{5.31}$$

我们可以选取 x_0 的一个足够小的开邻域 V_{x_0}，使得对于 $x \in V_{x_0}$,

$$\mathbf{r}^X_x f(x) - 4\Delta f(x) \geq 0, \quad \text{and} \quad \mathbf{b}_2(f,f)(x) \geq \frac{1}{2}\mu(f, x_0), \tag{5.32}$$

因此

$$\mathbf{b}_1(f,f)(x) \geq 0. \tag{5.33}$$

由于 $\mathbf{b}_0(f,f) = f^2$，因此由上述计算和 (5.14) 可得 (5.25)。

由 (5.28)，在 x_0 的一个充分小开邻域上，我们有

$$f(Y) \geq \frac{1}{2}\sum_j c_j(x_0) y_j^2. \tag{5.34}$$

显然，$\log f^2$ 在 x_0 附近可积。因此，流 $\partial\overline{\partial}\log f^2$ 在 U 上定义良好。在 f 不为零的点附近，由 (5.6) 和 (5.15) 可得 (5.26) 的强收敛。

现在我们关注满足 $f(x_0) = 0$ 的点 x_0。注意到

$$p^{-n}T^2_{f,p}(x,x) = f^2 + b_1(f,f)p^{-1} + b_2(f,f)p^{-2} + \mathcal{O}(p^{-3}). \tag{5.35}$$

由 (5.30)，我们可以取 x_0 的一个小开邻域 V'_{x_0}，使得对于 $x \in V'_{x_0}, p \gg 0$,

$$b_1(f,f)(x)p^{-1} + b_2(f,f)(x)p^{-2} + \mathcal{O}(p^{-3}) \geq 0, \quad \text{and} \quad f^2(x) \leq p^{-n}T^2_{f,p}(x,x) \leq 1. \tag{5.36}$$

那么在 V'_{x_0} 上，我们有

$$\big|\log(p^{-n}T^2_{f,p}(x,x))\big| \leq |\log f^2(x)|. \tag{5.37}$$

与此同时，当 $p \to \infty$ 时，函数逐点收敛，

$$\log(p^{-n}T^2_{f,p}(x,x)) \to \log f^2(x). \tag{5.38}$$

由于 $\log f^2$ 在 x_0附近可积，根据控制收敛定理，我们得到 (5.26) 中的（1,1）流在 V'_{x_0} 上的收敛，进而在 U上也收敛。证明至此完成。□

注 5.7. 在命题 5.6 的证明中，我们看到，若 f 在 $K \subset U$中至少有一个零点，则 (5.25) 中的幂 $(n-2)$ 无法改进；否则，按照 (5.14)，在 K 上可得 $T^2_{f,p}(x,x)$ 的一个下界。当 X 为紧时，这一观察表明，若 $f \geq 0$ 仅有二阶恰当零点，且至少有一个这样的零点，则 $T_{f,p}$的最低特征值应随着 p的增大而呈 $\mathcal{O}(\frac{1}{p})$ 的变化趋势。关于此类结果，参见 Deleporte 的论文 [Del1, Del2] 。特别地，当 X 为紧时，(5.25) 中的下界可由 [Del1]推出。

作为命题 5.6 的直接推论，我们得到：

定理 5.8. 假设 **假设 B** 对某个非平凡的 $f \in \mathcal{Q}_{\geq p_0}(X, L; \mathbb{R}_{\geq 0})$成立。设 U 为 $\operatorname{supp} f$ 的一个开子集，使得 f 在 U 中至多二阶消失，且在零点处 Δf 非零。则当 $p \to \infty$时，

- 我们有 U上 $(1,1)$-流的收敛

$$\frac{1}{p}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_{f,p}}[[\mathrm{Div}(\mathbf{S}_{f,p})]|_U] \to c_1(L, h_L)|_U. \tag{5.39}$$

- 对于任意 $\varphi \in \Omega_{(n-1,n-1)\ 0}(\overline{U})$，我们有

$$\mathbb{P}\left(\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\langle [\mathrm{Div}(\mathbf{S}_{f,p})], \varphi\rangle = \langle c_1(L, h_L), \varphi\rangle\right) = 1. \tag{5.40}$$

5.3. **消失阶为二的点附近随机零点的高阶涨落**。 在本小节中，我们始终假设 **假设 B** 成立，并研究 $\mathbf{S}_{f,p}$ 在一个消失阶为 2 的真正零点 f 附近、直至尺度 $\sim \frac{1}{\sqrt{p}}$（即所谓的普朗克尺度）上的随机零点。注意，在 [ALF], 中，对于一个紧 K¨ahler 流形 X，并在关于 f 的不同假设下，Ancona 和 Le Floch 观察并证明了如下现象：在 f 的零点附近，随机零点的涨落会稍大一些。我们将在本设定下观察到类似情形；为此，我们需要在以 x_0 为中心、其中 f 以二阶消失的复坐标系中细化 (5.30) 的计算。

假设 $f \geq 0$，且 x_0 是 f 的一个零点，其中 $\Delta f(x_0) < 0$。那么我们可以选取一个以 x_0 为中心的全纯坐标系，记为 $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$，使得

$$g_z^{TX} = g_{\mathrm{st}}^{\mathbb{C}^n} + \mathcal{O}(|z|^2), \tag{5.41}$$

其中 $g^{\mathbb{C}^n}{}_{\mathrm{st}}$ 表示 $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ 上的标准欧几里得度量。

注意，我们将 z 视为列向量，并用 $(\cdot)^T$ 表示矩阵的转置。在这个坐标系中，我们可以写成

$$f(z) = z^T A\bar{z} + z^T Bz + \bar{z}^T B\bar{z} + \mathcal{O}(|z|^3), \tag{5.42}$$

其中，矩阵 A 是厄米半正定矩阵， B 是对称复矩阵；它们由 f 在 x_0 处的海森矩阵唯一确定。令

$$\hat{f}_{x_0}(z) = z^T A\bar{z} + z^T Bz + \bar{z}^T \bar{B}\bar{z}. \tag{5.43}$$

由于 $f \geq 0$，那么对于任意满足 $\|z\| = 1$ 的 $z \in \mathbb{C}^n$，

$$z^T A\bar{z} \geq 2|\Re(z^T Bz)|, \tag{5.44}$$

其中， $\Re(\cdot)$ 表示实部。特别地， $f_{x_0}(z) \geq 0$。

利用这个复坐标系，我们计算得

$$\begin{aligned} \Delta f(z) &= -4\mathrm{Tr}[A] + \mathcal{O}(|z|), \\ |\partial f(z)|^2 &= 2|A\bar{z} + 2Bz|^2 + \mathcal{O}(|z|^3), \\ |D^{0,1}\overline{\partial} f(z)|^2_{g^{T^*X}\otimes T^*X} &= 16\mathrm{Tr}[B\bar{B}^T] + \mathcal{O}(|z|). \end{aligned} \tag{5.45}$$

注意， $\mu(f,x_0)$ 在 (5.31) 中定义，因此我们有

$$\mu(f,x_0)=\frac{1}{\pi^2}(\mathrm{Tr}[A])^2+\frac{2}{\pi^2}\mathrm{Tr}[B\bar{B}^T]>0. \tag{5.46}$$

于是，我们将 (5.30) 中的计算改写如下，

$$\begin{aligned}&\mathbf{b}_0(f,f)(z)=\hat{f}^2_{x_0}(z)+\mathcal{O}(|z|^5),\\&\mathbf{b}_1(f,f)(z)=\frac{2}{\pi}\mathrm{Tr}[A]\hat{f}_{x_0}(z)+\frac{1}{\pi}|A\bar{z}+2Bz|^2+\mathcal{O}(|z|^3),\\&\mathbf{b}_2(f,f)(z)=\mu(f,x_0)+\mathcal{O}(|z|).\end{aligned} \tag{5.47}$$

定义 5.9. 与 x_0 附近的 K¨ahler 形式 Θ 和 f 相关联，我们定义 $\mathbb{C}^n$ 上的一个（严格）正函数如下，

$$F_{f,x_0}(z)=\hat{f}^2_{x_0}(z)-\frac{1}{2\pi}(\Delta f)(x_0)\hat{f}_{x_0}(z)+\frac{1}{\pi}|A\bar{z}+2Bz|^2+\mu(f,x_0). \tag{5.48}$$

注意，此函数与以 x_0 为中心且满足 (5.41) 的全纯坐标系的选取无关。等价地，对于 $z\in\mathbb{C}^n\simeq(T_{x_0}X,J_{x_0})$，我们有，

$$F_{f,x_0}(z)=\lim_{p\to\infty}\left\{p^2\mathbf{b}_0(f,f)(z/\sqrt{p})+p\mathbf{b}_1(f,f)(z/\sqrt{p})+\mathbf{b}_2(f,f)(z/\sqrt{p})\right\}. \tag{5.49}$$

我们还定义了关于 $z\in\mathbb{C}^n$ 的如下正二次函数，

$$\widehat{\mathbf{b}}_1(z)=\lim_{p\to\infty}p\mathbf{b}_1(f,f)(z/\sqrt{p})=-\frac{1}{2\pi}(\Delta f)(x_0)\hat{f}_{x_0}(z)+\frac{1}{\pi}|A\bar{z}+2Bz|^2. \tag{5.50}$$

命题 5.10. 采用上述记号，令

$$\beta_{f,x_0}:=\partial\overline{\partial}\widehat{\mathbf{b}}_1=\partial\overline{\partial}F_{f,x_0}(0)\in\Lambda^{(1,1)}T^*_{x_0}X, \tag{5.51}$$

那么它是 $\mathbb{C}^n$ 上的一个正$(1,1)$-形式，更确切地说，

$$\beta_{f,x_0}=(dz)^T\wedge K_{f,x_0}d\bar{z}, \tag{5.52}$$

其中 $K_{f,\ x_0}$ 是由下式给出的半正定厄米矩阵

$$K_{f,x_0}=\frac{2}{\pi}\mathrm{Tr}[A]A+\frac{1}{\pi}(A^2+4B\bar{B}). \tag{5.53}$$

当 $p\to\infty$ 时，$(1,\ 1)$-形式在 x_0 处收敛，

$$\frac{1}{p}\partial\overline{\partial}\log T^2_{f,p}(x,x)|_{x=x_0}\to\frac{1}{\mu(f,x_0)}\beta_{f,x_0}=\partial\overline{\partial}\log F_{f,x_0}(0). \tag{5.54}$$

证明。 命题的第一部分可直接由公式 (5.48) 和 (5.50) 得出。现在我们证明 (5.54)。

在以 x_0 为中心的复坐标 z 中，对于 $|z|<1$，我们有

$$p^{-n}T^2_{f,p}(z,z)=p^{-2}F_{f,x_0}(\sqrt{p}z)+\mathcal{O}(p^{-3})+\mathcal{O}(|z|^5)+p^{-1}\mathcal{O}(|z|^3)+p^{-2}\mathcal{O}(|z|). \tag{5.55}$$

于是，作为 x_0 附近的光滑微分形式，我们有

(5.56)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\partial\overline{\partial}\log(p^{-n}T^2_{f,p}(z,z))\\&=\frac{\left(\partial\overline{\partial}F_{f,x_0}\right)(\sqrt{p}z)+\mathcal{O}(p^{-1})+p\mathcal{O}(|z|^3)+\mathcal{O}(|z|)}{F_{f,x_0}(\sqrt{p}z)+\mathcal{O}(p^{-1})+p^2\mathcal{O}(|z|^5)+p\mathcal{O}(|z|^3)+\mathcal{O}(|z|)}\\&\quad-\frac{\left(\partial F_{f,x_0}\wedge\overline{\partial}F_{f,x_0}\right)(\sqrt{p}z)+p^3\mathcal{O}(|z|^7)+p^2\mathcal{O}(|z|^5)+p\mathcal{O}(|z|^3)+\mathcal{O}(|z|)+\mathcal{O}(p^{-1})}{\left\{F_{f,x_0}(\sqrt{p}z)+\mathcal{O}(p^{-1})+p^2\mathcal{O}(|z|^5)+p\mathcal{O}(|z|^3)+\mathcal{O}(|z|)\right\}^2}.\end{aligned}$$

将 $z=0$ 代入 (5.56)，再取其在 $p\to\infty$时的极限，恰好得到 (5.54)。 □

定义 5.11。对于上述 f 的零点 x_0，当 $R>0$时，我们定义线性函数

$$\Phi^R_{f,x_0}:\Lambda^{(n-1,n-1)}_{x_0}T^*X\to\mathbb{C} \tag{5.57}$$

如下，对于 $\alpha\in\Lambda^{(n-1,n-1)}_{x_0}$，将其视为定义在 $\mathbb{C}^n\simeq(T_{x_0}X,J_{x_0})$ 上的常值 $(n-1,n-1)$-形式，则

$$\Phi^R_{f,x_0}(\alpha):=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{B^{\mathbb{C}^n}(0,R)}\partial\overline{\partial}\log F_{f,x_0}(z)\wedge\alpha. \tag{5.58}$$

注 5.12. 利用公式 (5.48)，可以更具体地计算量 $\Phi^R_{f,x_0}(\alpha)$，尤其是当 f 在 x_0 附近具有良好的形状时（例如，$B=0$）。我们将在例 5.13 中给出一个演示，不过我们预计一般情况下的计算会复杂得多，因此本文不再尝试进行这类计算。

E例 5.13. 现在假设 f 在 x_0 附近由 (5.42) 给出，其中 $B=0$ 和

$$A=\mathrm{Id}_n \tag{5.59}$$

Then

$$F_{f,x_0}(z)=|z|^4+\frac{(2n+1)}{\pi}|z|^2+\frac{n^2}{\pi^2}. \tag{5.60}$$

令 $\omega_0=\sqrt{-1}\sum_j dz_j\wedge d\bar{z}_j$。则有

(5.61)

$$\begin{aligned}&\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log F_{f,x_0}(z)\wedge\frac{\omega_0^{n-1}}{(n-1)!}\\&=\pi\Big[\frac{(2n-2)\pi^3|z|^6+(6n^2-n-2)\pi^2|z|^4+(6n^3+2n^2-3n-1)\pi|z|^2+2n^4+n^3}{\pi^4|z|^8+(4n+2)\pi^3|z|^6+(6n^2+4n+1)\pi^2|z|^4+(4n^3+2n^2)\pi|z|^2+n^4}\Big]\frac{\omega_0^n}{n!}.\end{aligned}$$

在 $n=1$ 的情形下，

$$\begin{aligned}&\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log F_{f,x_0}(z)\\&=\pi\Big[\frac{3\pi^2|z|^4+4\pi|z|^2+3}{\pi^4|z|^8+6\pi^3|z|^6+11\pi^2|z|^4+6\pi|z|^2+1}\Big]\omega_0.\end{aligned} \tag{5.62}$$

定理 5.14. 我们假设 **假设 B** 成立，且具有非平凡的 $f\in\mathcal{Q}_{\geq p_0}(X,L;\mathbb{R}_{\geq 0})$。设 x_0 是 f 的一个零点，满足 $\Delta f(x_0)<0$。那么，对于任意固定的 $R>0$、$\varphi\in\Omega_0^{(n-1,n-1)}(X)$，以及所有 $p\gg 0$，

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{B(x_0,R/\sqrt{p})}\partial\overline{\partial}\log(T^2_{f,p}(x,x))\wedge\varphi=p^{-n+1}\Phi^R_{f,x_0}\big(\varphi(x_0)\big)+\mathcal{O}(p^{-n+1/2}). \tag{5.63}$$

证明。注意，对于 $p\gg 0$，我们于是将其识别为

$$B(x_0,R/\sqrt{p})\simeq B^{\mathbb{C}^n}(0,R/\sqrt{p}). \tag{5.64}$$

那么，对于 $z\in B^{\mathbb{C}^n}(0,R/\sqrt{p})$，$l\in\mathbb{N}$，

$$p^l\mathcal{O}(|z|^{2l+1})=\mathcal{O}(p^{-1/2}). \tag{5.65}$$

还要注意，对于 $z\in B^{\mathbb{C}^n}(0,R)$，

$$\varphi(z/\sqrt{p})=\varphi(x_0)+\mathcal{O}(p^{-1/2}). \tag{5.66}$$

于是 (5.63) 由 (5.56) 得出。至此证明完成。 □

如第1.4小节所述，公式（5.63）给出了（1.26）中 p 的不同幂次，这表明我们的随机零点在 f 的零点或非零点附近具有不同的涨落。

5.4. **取负值实函数的情形**。 在本小节中，我们将继续讨论注 4.15，并研究由给定实函数 f 检测到的 $\mathcal{L}^2$- 全纯截面的随机零点的等分布；该实函数不一定是非负的。

现在我们考虑配备前量子全纯线丛 (L, h_L) 的完备 K¨ahler 流形 (X, Θ) 情形。回顾一下， $\mathcal{Q}(X, L^p; \mathbb{R})$ 是由 $\mathcal{Q}(X, L^p; \mathbb{C})$ 中的实值函数组成的子空间，并且

$$\mathcal{Q}_{\geq p_0}(X, L; \mathbb{R}) := \cap_{p \geq p_0} \mathcal{Q}(X, L^p; \mathbb{R}). \tag{5.67}$$

定义 5.15。 设 f 是 X 上的实光滑函数。对于 $x \in X$，如果以下情形之一成立，则称 f 在 x 处至二阶适当消失:

- $f(x) \neq 0$, or
- $f(x) = 0, df(x) \neq 0$, or
- $f(x) = 0, df(x) = 0, \Delta f(x) \neq 0$ with $f\Delta f \leq 0$ on an open neighborhood of x.

对于任意子集 $U \subset X$，如果 f 在 U 上的每一点都至二阶适当消失，则称其在 U 上至二阶适当消失。给定这样一个函数，我们还定义

$$\kappa(K) := \max_{x \in K} \mathrm{ord}_x(f) \in \{0, 1, 2\}. \tag{5.68}$$

下面的命题是命题 5.6 的推广。

命题 5.16。 假设 **假设 B** 成立，并具有非平凡的 $f \in \mathcal{Q}_{\geq p_0}(X, L; \mathbb{R})$。设 U 是 $\mathrm{supp}\, f$ 的开子集，使得 f 在 U 上至二阶适当消失。那么对于 U 的任意紧子集 K，存在常数 $c_K > 0$ 和 $p_K \geq p_0$，使得对于 $x \in K$、 $p \geq p_K$，

$$T^2_{f,p}(x, x) \geq c_K p^{n-\kappa(K)}. \tag{5.69}$$

此外，对数 f^2 在 U 上局部可积，并且当 $p \to \infty$ 时，我们在 U 上有流的弱收敛，

$$\partial\overline{\partial} \log T^2_{f,p}(x, x) \to \partial\overline{\partial} \log f^2. \tag{5.70}$$

在点 x 附近，其中 $f(x) \neq 0$，式 (5.70) 中的收敛在任意局部 $\mathscr{C}^l$-范数下都成立。

证明。 我们先证明 (5.69)。对于 $x_0 \in U$，如果 $f(x_0) \neq 0$，则 $f^2(x_0) > 0$，于是 (5.69) 在 x_0 附近成立。如果 $f(x_0) = 0$， $df(x_0) \neq 0$，那么在 x_0 的一个充分小的邻域内，存在一个常数 $c_{x_0} > 0$ 使得

$$\mathbf{b}_1(f, f) = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{r}^X f - 4\Delta f)f + \frac{1}{2\pi}|\partial f|^2 \geq c_{x_0}|df(x_0)|^2_{g^{T^*X}_{x_0}} > 0, \tag{5.71}$$

从而在 x_0 附近，

$$T^2_{f,p}(x, x) \geq \frac{1}{2} c_{x_0} p^{n-1}. \tag{5.72}$$

如果 $\mathrm{ord}_{x_0}(f) = 2$，我们可以调整命题 5.6 的证明。条件 $\Delta f(x_0)$ 非零且在 x_0 附近满足 $f\Delta f \leq 0$，意味着在 x_0 的一个小邻域内，

$$(\mathbf{r}^X f - 4\Delta f)f \geq 0, \ \mu(f, x_0) > 0. \tag{5.73}$$

那么，（5.69）在 x_0附近仍然成立。我们命题的第二部分也可由命题 5.6 证明中的类似论证得出。□

对于 $f \in \mathcal{Q}_{\geq p_0}(X, L; \mathbb{R})$，算子 $T_{f,p}$ 可能不是单射，因此在注 4.15 中，我们引入闭子空间 $H^0_{(2)}(X, L^p, f) = (\ker T_{f,p})^\perp$，它是 $H^0_{(2)}(X, L^p)$ 的闭子空间，并在其上定义高斯概率测度 $\mathbb{P}^\sharp_{f,p}$。考虑以下随机截面

$$\begin{aligned} &(\mathbf{S}^\sharp_{f,p})_{p \geq p_0} \in \Pi_{p \geq p_0}\big(H^0_{(2)}(X, L^p, f), \ \mathbb{P}^\sharp_{f,p}\big), \\ &(\mathbf{S}_{f,p})_{p \geq p_0} \in \Pi_{p \geq p_0}\big(H^0_{(2)}(X, L^p), \ \mathbb{P}^0_{f,p} \otimes \mathbb{P}^\sharp_{f,p}\big). \end{aligned} \tag{5.74}$$

由 (4.45) 和命题 (5.16)，可得

定理 5.17. 我们假设 **假设 B** 对于非平凡的 $f \in \mathcal{Q}_{\geq p_0}(X, L; \mathbb{R})$成立。设 U 是 $\operatorname{supp} f$ 的一个开子集，使得 f 在 U 上至多二阶适当地消失。那么当 $p \to \infty$ 时，

- 我们有 U 上 $(1,1)$-流的收敛

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\sharp_{f,p}}[[\mathrm{Div}(\mathbf{S}^\sharp_{f,p})]|_U] \to c_1(L,h_L)|_U \\ &\frac{1}{p}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_{f,p}}[[\mathrm{Div}(\mathbf{S}_{f,p})]|_U] \to c_1(L,h_L)|_U. \end{aligned} \tag{5.75}$$

- 对于任意 $\varphi \in \Omega_{(n-1,n-1)\ 0}(\overline{U})$，我们有

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\langle[\mathrm{Div}(\mathbf{S}^\sharp_{f,p})],\varphi\rangle = \langle c_1(L,h_L),\varphi\rangle\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\langle[\mathrm{Div}(\mathbf{S}_{f,p})],\varphi\rangle = \langle c_1(L,h_L),\varphi\rangle\right) = 1. \end{aligned} \tag{5.76}$$

注 5.18. 如果 X 是紧的，那么 $H^0_{(2)}(X, L^p) = H^0(X, L^p)$ $p \in \mathbb{N}$ 是有限维的，并且在上述定理中，我们可以令 f 为任意一个适当消失至二阶的实光滑函数。如果 $\kappa(X) \leq 1$，那么 (5.75) 中的第一个收敛已由 Ancona-Le Floch [ALF] 证明。如第5.3小节所述，他们还研究了 f 的一个一阶零点附近随机零点的涨落。由于计算是局部的，因此也适用于我们的非紧致情形。

参考文献

[ALF] M. Ancona和Y. Le Floch，Berezin-Toeplitz算子、Kodaira映射和随机截面，ArXiv.2206.15112。8，41，45[At] M. F. Atiyah，椭圆算子、离散群和冯·诺依曼代数，载于《分析与拓扑讨论会》，Ast´erisque，第32-33期（1976），30页。10，31[Ba1] T. Bayraktar，随机多项式零点线性统计量的渐近正态性，《美国数学会会刊》145（2017），2917–2929。26[BCM] T. Bayraktar、D. Coman和G. Marinescu，随机全纯截面零点的普适性结果，arXiv:1709.10346，2017。4，13[BCHM] T. Bayraktar、D. Coman、H. Herrmann和G. Marinescu，随机全纯截面零点综述，Dolomites Res. Notes Approx.，11（Norm Levenberg特刊）：1–19，2018。4[BL] T. Bloom和N. Levenberg，随机多项式与多重位势论极值函数，Potential Anal. 42（2015），311–334。4[BBL] E. Bogomolny、O. Bohigas和P. Leboeuf，量子混沌动力学与随机多项式，《统计物理杂志》85(5-6)，639–679，1996。3[BMS] M. Bordemann、E. Meinrenken和M. Schlichenmaier，K¨ahler流形上的Toeplitz量子化及其 $gl(N)$ $N \to \infty$ 极限，《数学物理通讯》165(2):281–296，1994。4[CM1] D. Coman和G. Marinescu，线丛上奇异度量的等分布结果，Ann. Sci.´Ec. Norm. Sup´er. (4) 48（2015），497–536。4，5[CM2] D. Coman和G. Marinescu，轨形线丛的Fubini-Study 流收敛性，Inter- nat. J. Math. 24（2013），1350051，27页。5[CMM] D. Coman、X. Ma和G. Marinescu，正规K¨ahler空间上线丛序列的等分布，Geom. Topol. 21（2017），第2期，923–962。4[CMN1] D. Coman、G. Marinescu和V.-A. Nguyˆen，大线丛上的H¨older奇异度量与等分布，Int. Math. Res. Notices 2016，第16期，5048–5075。4[CMN2] D. Coman、G. Marinescu和V.-A. Nguyˆen，伪有效线丛的逼近与等分布结果，J. Math. Pures Appl. (9) 115（2018），218–236。4[Del1] A. Deleporte，Toeplitz算子的低能谱：势阱情形，J. Spectr. Theory，9(1):79–125，2019。41

[Del2] A. Deleporte，具有微势阱的Toeplitz算子的低能谱，《数学物理通讯》378(3):1587–1647，2020。41[DMM] T.-C. Dinh、X. Ma和G. Marinescu，奇异厄米线丛全纯截面零点的等分布及收敛速度，《泛函分析杂志》271（2016），第11期，3082–3110。4[DMS] T.-C. Dinh、G. Marinescu和V. Schmidt，非紧情形下全纯截面零点的渐近分布，《统计物理杂志》148（2012），113–136。4，20[DS] T.-C. Dinh和N. Sibony，亚纯变换的值的分布及应用，《瑞士数学评论》81（2006），221–258。4[DLM] A. Drewitz、B. Liu和G. Marinescu，穿孔黎曼曲面上全纯截面零点的大偏差，arXiv:2109.09156 [math.CV], 已提交。4，6，7，13，20，23，24[EK1] A. Edelman和E. Kostlan，一个随机多项式有多少个零点是实的？《美国数学会通报》(N.S.)，32(1):1–37，1995。2，5，10[EK2] A. Edelman和E. Kostlan，勘误：一个随机多项式有多少个零点是实的，《美国数学会通报》(N.S.) 32（1995），第1期，1–*37]*，《美国数学会通报》(N.S.)，33(3):325，1996。2[F2] S. Finski，复嵌入、Toeplitz算子与最优全纯延拓的传递性，arXiv: 2201.04102。4，36，37[GR1] H. Grauert和R. Remmert，Stein 空间理论。由Alan Huck+255 leberry从德文翻译。1979年译本重印。数学经典丛书。施普林格出版社，柏林，2004。xxii页。15，16[Gr] L. Gross，抽象 Wiener 空间，载于Lucien M. Le Cam和Jerzy Neyman编，《第五届伯克利数学统计与概率研讨会论文集》（加利福尼亚州伯克利，1965/66），第II卷：概率论贡献，第1部分，第31–42页。加利福尼亚大学出版社，加利福尼亚州伯克利，1967。会议于1965年6月21日至7月18日及1965年12月27日至1966年1月7日在加利福尼亚大学统计实验室举行。3，7，29[HKZ] H. Hedenmalm、B. Korenblum、K. Zhu，伯格曼空间理论，数学研究生教材，第199卷。施普林格出版社，纽约，2000。x页。15[JP] M. Jarnicki和P. Pflug，复分析中的不变距离与度量，de Gruyter Exp. Math. 9，德格鲁伊特出版社，柏林，1993。15[HKPV] J. B. Hough、M. Krishnapur、Y. Peres和B. Vir´ag，高斯解析函数的零点与行列式点过程，大学讲座丛书第51卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2009。2[J] S. Janson，高斯希尔伯特空间，剑桥数学丛书第129卷。剑桥大学出版社，剑桥，1997。3[KZ] Z. Kabluchko和D. Zaporozhets，随机解析函数复零点的渐近分布，《概率年刊》42(4):1374–1395，2014。13[Kl] A. Klenke，概率论，施普林格出版社，伦敦，2014。12[K] H. H. Kuo，巴拿赫空间中的高斯测度，数学讲义，第463卷。施普林格出版社，柏林-纽约，1975。29[Ka] J.-P. Kahane，一些随机函数级数，剑桥高等数学研究第5卷。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，1985。2，10[LO1] J. E. Littlewood和A. C. Offord，随机整函数零点和a 值的分布。I，《伦敦数学会杂志》20:130–136，1945。2[LO2] J. E. Littlewood和A. C. Offord，随机整函数零点和a 值的分布。II，《数学年刊》(2)，49:885–952；勘误50，990–991（1949），1948。2[MM1] X. Ma和G. Marinescu，全纯 Morse 不等式与 Bergman 核，Progress in Math.，第 254 卷，Birkh¨auser，巴塞尔，2007，xiii，422页。4，6，10，14，18，19，24，36，37[MM2] X. Ma和G. Marinescu，辛流形上的Toeplitz算子，《几何分析杂志》18(2):565–611，2008。4[MM3] X. Ma和G. Marinescu，Berezin-Toeplitz量子化及其核展开，几何与量子化，125–166，Trav. Math.，19，Univ. Luxemb.，卢森堡，2011。4[MM4] X. Ma和G. Marinescu，K¨ahler流形上的Berezin-Toeplitz量子化，《纯粹与应用数学杂志》662:1–56，2012。4，37[MM5] X. Ma和G. Marinescu，Bergman核渐近展开的指数估计，《数学年刊》362（2015），第3-4期，1327–1347。4，18，31，36，37[NV] S. Nonnenmacher和A. Voros，相空间中的混沌特征函数，《统计物理杂志》92（1998），第3-4期，451–518。3[Of1] A. C. Offord，系数为独立随机变量的整函数的值分布，《伦敦数学会会刊》(3)，14a:199–238，1965。2

[Of2] A. C. Offord，系数为独立随机变量的幂级数的零点分布，Indian J. Math.，9:175–196，1967。2[Of3] A. C. Offord，系数为独立随机变量的整函数的函数值分布。II，Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.，118(3):527–542，1995。2[PZ] R. Paley 和 A. Zygmund，关于某些函数级数，（1）（2）（3）。Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society，26（1930），337-357；26（1930），458-474；28（1932），190-205。2[PWZ] R. Paley、N. Wiener 和 A. Zygmund，随机函数札记，Math. Z.，37(1):647–668，1933。2[Sh] S. Sheffield，面向数学家的高斯自由场，Probab. Theory Related Fields，139(3-4):521–541，2007。29[SZ1] B. Shiffman 和 S. Zelditch，正线丛上随机及量子混沌截面的零点分布，《数学物理通讯》200（1999），661–683。3，5[SZ3] B. Shiffman 和 S. Zelditch。复流形上随机零点的数目方差，II：光滑统计量，Pure Appl. Math. Q.，6(4，特刊：纪念 Joseph J. Kohn。第2部分):1145–1167，2010。26[SZZ] B. Shiffman、S. Zelditch 和 S. Zrebiec，复流形上随机零点的过度拥挤与空洞概率，Indiana Univ. Math. J. 57（2008），no. 5，1977–1997。4，6，7，20，23，24，25[S] M. Sodin，高斯解析函数的零点，Math. Res. Lett.，7(4):371–381，2000。2[ST1] M. Sodin 和 B. Tsirelson，随机复零点。I. 渐近正态性，Israel J. Math. 144:125–149，2004。2，26[ST2] M. Sodin 和 B. Tsirelson。随机复零点。III. 空洞概率衰减，Israel J. Math. 147:371–379，2005。2，7，28[ST3] M. Sodin 和 B. Tsirelson，随机复零点。II. 扰动晶格，Israel J. Math.，152:105–124，2006。2[T] G. Tian，关于代数流形上一组极化 K¨ahler 度量，J. Differential Geom. 32（1990），99–130。4[Va] S. R. S. Varadhan，概率论，Courant 数学讲义，第7卷，纽约大学，Courant 数学科学研究所，纽约；美国数学会，普罗维登斯，RI，2001，viii+167 页。12[W] A. Weil，引论 `a l’´etude des vari´et´es k¨ahl´eriennes，Actualit´es scientifiques et industrielles，第1267卷，Hermann，巴黎，1958。10，15[Ze1] S. Zelditch，Szeg¨o 核与Tian定理，Internat. Math. Res. Notices，（6）:317–331，1998。4[Ze2] S. Zelditch，从随机多项式到辛几何，载于第十三届国际数学物理大会（伦敦，2000），第367–376页。Int. Press，波士顿，MA，2001。4[Zr] S. Zrebiec。$\mathbb{C}^n$ 上平坦高斯随机全纯函数的零点及空洞概率，Michigan Math. J.，55(2):269–284，2007。2，7，28

科隆大学，数学与计算机科学系，韦耶塔尔街86-90号，50931 科隆，德 国电子邮箱地址：adrewitz@uni-koeln.de电子邮箱地址：bingxiao.liu@uni-koeln.de电子邮箱地址：gmarines@math.uni-koeln.de