arXiv:2302.08431v1 [math.GT] 16 Feb 2023

S^4 中简单曲面的三平面图 S^4

WOLFGANG ALLRED、MANUEL ARAG´ON、ZACK DOOLEY、ALEXANDER GOLDMAN、YUCONGLEI、ISAIAH MARTINEZ、NICHOLAS MEYER、DEVON PETERS、SCOTT WARRANDER、ANA WRIGHT 和 ALEXANDER ZUPAN

Abstract. Meier 和 Zupan 证明，可定向曲面 $\mathcal{K}$ 在 S^4 中存在交叉点数为零的三平面图，当且仅当 $\mathcal{K}$ 是平凡的，因此 $\mathcal{K}$的交叉数为零。我们确定了 S^4中不可定向平凡打结曲面的最小交叉数，并证明 $c(\mathcal{P}^{n,\,m}) = \max\{1, |n-m|\}$，其中 $\mathcal{P}^{n,\,m}$ 表示n 个法向欧拉数为 $+2$ 的平凡射影平面与 m 个法向欧拉数为 -2的平凡射影平面的连通和。此外，我们将 Yoshikawa 表中的打结曲面 ch 图转换为三平面图，求出表中每个曲面的最小桥数，并给出交叉数的上界。

1. Introduction

三平面图由 Meier 和 Zupan 在 [MZ17a] 中引入，是将三分解理论 [GK16] 应用于 S^4中打结曲面的一种推广。三平面图 D 是一个三元组（D_1、D_2、D_3），其中每个 D_i 都是一个平凡缠结的平面图，而 $D_i \cup \overline{D}_j$ 是一个平凡链环图。Meier 和 Zupan 证明，任意三平面图 D都可用于构造一个曲面 $\mathcal{K} \subset S^4$；反过来，每个曲面 $\mathcal{K} \subset S^4$ 也都可以用这种方式表示。

三平面图可以被视为将经典结理论中的思想迁移到四维空间的一种（众多）自然方式；例如，交叉数在这一背景下有一个自然的类比：定义三平面图的交叉数 $c(D)$ 为

$$c(D) = c(D_1) + c(D_2) + c(D_3),$$

然后定义 $\mathcal{K} \subset S^4$ 的交叉数 $c(\mathcal{K})$ 为

$$c(\mathcal{K}) = \min\{c(D) : D \text{ is a tri-plane diagram representing } \mathcal{K}\}.$$

[MZ17a] 的命题 4.4指出，对于可定向曲面 $\mathcal{K} \subset S^4$，$c(\mathcal{K}) = 0$ 当且仅当 $\mathcal{K}$ 是平凡的。本文确定了平凡不可定向曲面的交叉数。令 $\mathcal{P}^{\pm}$ 表示法向欧拉数为 $e(\mathcal{P}^{\pm}) = \pm 2$的平凡射影平面，并令 $\mathcal{P}^{n,\,m}$ 表示 n 个 $\mathcal{P}^{+}$ 与 m个 $\mathcal{P}^{-}$的连通和。我们证明

定理 1.1。对于任意平凡的不可定向曲面 $\mathcal{P}^{n,\,m}$，

$$c(\mathcal{P}^{n,m}) = \max\{1, |n-m|\}.$$

证明分为三个关键步骤：首先，我们证明若 $\mathcal{K} \subset S^4$ 是不可定向的，则$c(\mathcal{K}) > 0$。其次，我们证明对于任意曲面 $\mathcal{K} \subset S^4$，都有 $c(\mathcal{K}) \geq {}^{e}(\mathcal{K})\ {}_{2}$。最后，我们构造 ~~$\mathcal{P}^{n}$~~$,\ {}^{m}$ 的图，使其具有所声称的最小交叉数。综合这三个步骤即可得到主定理。

另一种用于表示打结曲面的图称为 ch 图。在 [Yos94], Yoshikawa 发布了一张 ch 图表，列出了四维空间中 23 个最简单的曲面，并按一种称为 ch-指标的复杂度度量进行整理。我们将 Yoshikawa 的每个图转换为一个

三平面图，并将结果记录在表 1 中。除了为表中曲面的交叉数找到上界外，我们还证明

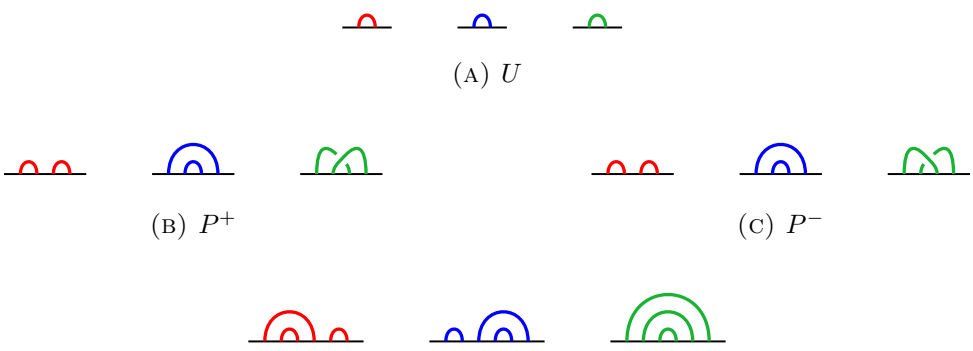
定理 1.2。表 1 所列的每个桥数都是最小的。

1.1. 论文结构。第2节介绍相关背景知识，我们将在第3节中用它来证明定理 1.1。第4节介绍一种将 ch 图转换为三平面图的方法；在第5节中，我们运用此方法为 Yoshikawa 表中的曲面生成图和数据，从而证明定理 1.2。最后，第6节列出一系列问题，以启发未来的研究。

1.2. 致谢。本项目主要于2021年夏季作为 Polymath Jr. 虚拟本科生研究体验的一部分完成，作者感谢 Polymath Jr. 的组织者提供开展这项研究的机会。此外，AZ 感谢 Jeffrey Meier 和 Maggie Miller 的精彩交流，并感谢马克斯·普朗克数学研究所（德国波恩）的热情接待；在本项目完成期间，他曾作为访问研究人员在该研究所工作。NM、AW 和 AZ 获得了美国国家科学基金会 DMS-2005518 项目资助。

2. Preliminaries

2.1. 三平面图。我们在光滑范畴中工作。 $\mathcal{K}$ 在 S^4 中的曲面是一个光滑嵌入的闭2维流形，可能不可定向，也可能不连通。如上所述，三平面图 D 是一个三元组（D_1、D_2、D_3），其中每个 D_i 都是平凡 b股缠结的图，即表示 b 条弧的图，其中每条弧相对于 D_i上的自然高度函数都只有一个极大点；并且对于 $i \neq j$，经典链环图 $D_i \cup \overline{D}_j$ 表示一个平凡链环。示例见图 1。



(A) U

(B) P^+

(C) P^-

(D) T

Figure 1. 最简单的平凡打结曲面的三平面图

每个三平面图都能以下述方式确定一个曲面 $\mathcal{K} \subset S^4$：从 S^4，$X_1 \cup X_2 \cup X_3$ 的标准三分解开始，其中每个 X_i 都是一个 4维球，而 $B_i = X_i \cap X_{i-1}$（指标按模 3 计算）是一个 3维球。将由 D_i 表示的缠结嵌入到 B_i 中。于是 $\partial X_i = B_i \cup \overline{B}_{i+1}$ 包含一个平凡链环 U_i，由图 $D_i \cup \overline{D}_{i+1}$ 表示；我们可以将圆盘 $\mathcal{D}_i$ 附加到 U_i 上，嵌入于 X_i 中。它们的并 $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3$ 就是嵌入在 S^4 中的一个曲面。此外，圆盘 $\mathcal{D}_i$ 是唯一的，因此这一过程确定了一个唯一的曲面，除同伦外，

参见 [MZ17a] 了解更多细节。令 c_i 为平凡链环 U_i 的分支数，我们有时将这种分解称为 $(b; c_1, c_2, c_3)$-桥三分解。

在 [MZ17a]，中，已证明每个曲面 $\mathcal{K} \subset S^4$ 都可以表示为一个三平面图，并且任意两个三平面图 D 和 D' 都可以通过有限序列的变换相互关联：

(1) 内部 Reidemeister 移动：在某个缠结图 D_i的内部进行的经典 Reidemeister 变换。

(2) 相互辫群换位：沿着全部三个缠结图 D_1、 D_2 和 D_3 的边界进行的辫群换位 σ_j 。

(3) 稳定化／去稳定化移动：增加或减少每个缠结图中股数的局部移动。

图 5 展示了一个例子，其中使用了若干次相互辫群换位和内部 Reidemeister 变换，将一个图转换为另一个图。按照惯例，我们将在三平面图下方用灰色表示相互辫群换位；未画出的股均假定承载恒等辫。

事实上，稳定化／去稳定化移动构成一个无限族，但就我们的目的而言，只需用到其中两个。这两个移动如图2和图3所示；当对缠结的任意排列执行这些移动，或将其关于竖直线反射时，它们同样有效（如图24所示的2-去稳定化中所发生的情况）。有兴趣的读者可参阅 [MZ17a] 以了解更多细节。

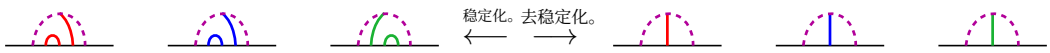


FIGURE 2. 1-稳定化和1-去稳定化操作。

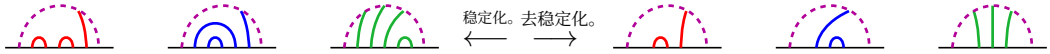


FIGURE 3. 2-稳定化与2-去稳定化运算。

我们也可以通过三平面图来定义曲面的连通和运算。首先，给定一个含有 b股的平凡缠结图 D_i 和一个含有 b'股的平凡缠结图D_i'，我们将 D_i 与 D_i'的边界连通和记作 $D_i \natural D_i'$，并将其定义为把 D_i 最右侧的端点连接到D_i'最左侧的端点所构造的缠结图。利用标准的剪切粘贴论证，可以证明 $D_i \natural D_i'$ 是一个含有 $(b + b' - 1)$ 股的平凡缠结图。

现在，给定表示 $\mathcal{K} \in S^4$ 的三平面图 $D = (D_1, D_2, D_3)$ 和在 S^4中表示 $\mathcal{K}'$ 的三平面图 $D' = (D_1', D_2', D_3')$ ，将 D 与 D'的连通和记作 $D\#D'$，定义如下：

$$D\#D' = (D_1 \natural D_1', D_2 \natural D_2', D_3 \natural D_3').$$

那么， $D\#D'$ 是 S^4 中曲面 $\mathcal{K}\#\mathcal{K}'$ 的三平面图。我们注意到，与经典纽结的情形一样，连通和运算是交换的、结合的，并且不依赖于在 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{K}'$ 上选择进行该运算的点。图 5 的上方画框展示了图 $P^+\#P^-$ 的一个示例。

2.2. 通过三平面图表示不变量。我们可以通过几种不同的方式来衡量三平面图 D的复杂度。交叉数 $c(D)$ 是总和 $c(D_1) + c(D_2) +$

$c(D_3)$，而桥数 $b(D)$ 是每个缠结 D_i中的股数。为获得曲面不变量，我们对所有可能的图取最小值：

$$\begin{aligned} c(\mathcal{K}) &= \min\{c(D) : D \text{ is a tri-plane diagram representing } \mathcal{K}\}, \\ b(\mathcal{K}) &= \min\{b(D) : D \text{ is a tri-plane diagram representing } \mathcal{K}\}. \end{aligned}$$

还有其他类型的不变量更适合区分曲面，而且我们可以从单一图中计算这些不变量。例如，具有三平面图 D、且该图诱导出 $(b; c_1, c_2, c_3)$-桥三分解的曲面 $\mathcal{K}$ 的欧拉示性数为

$$\chi(\mathcal{K}) = c_1 + c_2 + c_3 - b,$$

如 [MZ17a] 所示。可定向性是另一种这样的不变量。三平面图 D 的定向，是为三条缠结的 $2b$ 个端点（称为桥点）各指定一个 $+$ 或 $-$，使得 D_1、D_2 和 D_3 的端点具有一致的标记，并且 D_i 中的每一条弧都连接一个 $+$ 和一个 $-$ 桥点。如果三平面图存在定向，则称其为可定向的。[MTZ20] 已证明，D 可定向，当且仅当曲面 $\mathcal{K}$ 可定向。

引理 2.1. 若 $c(\mathcal{K}) = 0$，则 $\mathcal{K}$ 可定向。

证明。设 D 是 $\mathcal{K}$的一个零交叉三平面图，桥点 x_1、.....、 x_{2b}按从左到右的顺序标记。对每个奇数 i，将 x_i 标记为 $+$；对偶数 i，将 x_i 标记为–。假设 D_j 中的一条弧 a 的两个端点都标记为 $+$，或者都标记为 $-$。那么 a 所围区域内包含奇数个桥点，这意味着必有另一条弧 a'（位于 D_j中）与 a相交，矛盾。因此 D，从而 $\mathcal{K}$是可定向的。□

对于我们将在此研究的另一个不变量，需要先给出一个定义：给定一个定向链环图 D，D 的绕数是 D中各交叉点的带符号计数，其正、负交叉点的标准约定见图4。现在，设 D 为一个三平面图。 D的法向欧拉数记为 $e(D)$，定义如下：

$$e(D) = w(D_1 \cup \overline{D}_2) + w(D_2 \cup \overline{D}_3) + w(D_3 \cup \overline{D}_1).$$

在 [JMMZ22], 中，作者证明，对于 $\mathcal{K}$的任意两个图 D 和 D'，有$e(D) = e(D')$，因此 $e(\mathcal{K}) = e(D)$是一个纽结曲面不变量；事实上，这一定义与法向欧拉数的经典定义一致（关于法向欧拉数的更多细节，见 [JMMZ22] ）。



(A) $+$ (B) $-$

FIGURE 4. 绕数的计算约定

请注意，对于结图 D，绕数 $w(D)$ 不受定向选择的影响。一般而言，对于链环图 D，绕数 $w(D)$ 会受到定向选择的影响，但只有在分支之间的链接数非零时才会如此。对于三平面图，$D_i \cup \overline{D_j}$ 是平凡链环图（两两之间的链接数均为零），因此计算 $w(D_i \cup \overline{D}_{i+1})$ 不受任何定向选择的影响。

交叉数与法向欧拉数之间可由下列不等式联系起来：

引理 2.2. 对于打结曲面 $\mathcal{K}$，有 $|e(\mathcal{K})| \leq 2c(\mathcal{K})$。

证明。设 $D = (D_1, D_2, D_3)$ 是 $\mathcal{K}$ 的一个三平面图，使得 $c(D) = c(\mathcal{K})$。此外，假设 D_i 有 n_i 个交叉点，从而 $c(D) = n_1 + n_2 + n_3$。令 Q_i 为 $D_i \cup \overline{D}_{i+1}$ 的交叉点集合。于是 $|Q_i| = n_i + n_{i+1}$；为 $D_i \cup \overline{D}_{i+1}$ 选取一个定向后，有 $w(D_i \cup \overline{D}_{i+1}) = \sum_{q \in Q_i} \mathrm{sign}(q)$。我们计算

$$\begin{aligned} |e(\mathcal{K})| = |e(D)| &= \left| \sum_{q \in Q_i} \mathrm{sign}(q) + \sum_{q \in Q_2} \mathrm{sign}(q) + \sum_{q \in Q_3} \mathrm{sign}(q) \right| \\ &\leq \sum_{q \in Q_1} |\mathrm{sign}(q)| + \sum_{q \in Q_2} |\mathrm{sign}(q)| + \sum_{q \in Q_3} |\mathrm{sign}(q)| \\ &= |Q_1| + |Q_2| + |Q_3| \\ &= 2c(D) \\ &= 2c(\mathcal{K}). \end{aligned}$$

□

我们还可以考察交叉数、桥数和法向欧拉数在连通和下的变化。根据构造，图 $D\#D'$ 满足

$c(D\#D') = c(D) + c(D')$ $b(D\#D') = b(D) + b(D') - 1$，且 $e(D\#D') = e(D) + e(D')$。由于对于任意图 D，只要 $\mathcal{K}$，就有 $e(\mathcal{K}) = e(D)$，因此可得

$$e(\mathcal{K}\#\mathcal{K}') = e(\mathcal{K}) + e(\mathcal{K}').$$

然而，这并不一定意味着交叉数或桥数也满足类似的等式；选取极小图 D 和 D' 可得不等式 $c(\mathcal{K}\#\mathcal{K}') \leq c(\mathcal{K}) + c(\mathcal{K}')$ 和 $b(\mathcal{K}\#\mathcal{K}') \leq b(\mathcal{K}) + b(\mathcal{K}') - 1$，但是（正如我们将在下文的注 3.3 中讨论的），在某些情况下，$\mathcal{K}\#\mathcal{K}'$ 还存在其他图，这些图并非由上述构造得到，却能使交叉数和桥数都更小；因此，这些不等式可能是严格的。

事实上，每个三平面图 D 都等价于一个三平面图 $D' = (D'_1, D'_2, D'_3)$，使得 D' 中的每个交叉都包含在一个单独的缠结中，例如 D'_3。我们称这样的图为集中型图。例如，图 1 中 $P^{\pm}$ 的图示都是集中图。

2.3. 平凡打结曲面。本文的大部分内容涉及 S^4 中的平凡打结曲面，我们在此给出定义。首先，考虑图 1 所示的三平面图 U、P^+、P^-和 T所定义的曲面 $\mathcal{U}$、$\mathcal{P}^+$、$\mathcal{P}^-$和 $\mathcal{T}$。我们称 $\mathcal{U}$为平凡二球面，称 $\mathcal{P}^{\pm}$ 为正/负向平凡射影平面，称 $\mathcal{T}$为平凡环面。

若 $\mathcal{K} \subset S^4$ 为 $\mathcal{K}$，则称曲面 $\mathcal{U}$是平凡的；若 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{T}^g$（g个 $\mathcal{T}$的连通和），或 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{P}^{n,\,m}$（n 个 $\mathcal{P}^+$ 与 m 个 $\mathcal{P}^-$ 的连通和），也称其为平凡的。该定义与经典的平凡性概念一致；关于平凡打结曲面的更多细节，见 [HK79] 及 [MTZ20]。曲面 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{T}^g$ 是可定向的，而 $\mathcal{P}^{n,\,m}$是不可定向的。此外，利用 $e(\mathcal{P}^{\pm}) = \pm 2$ 这一事实以及法向欧拉数在连通和下的变化公式，我们有

$$e(\mathcal{P}^{n,m}) = 2(n - m).$$

3. The crossing numbers of unknotted surfaces

如引言中所述，我们通过建立 $c(\mathcal{P}^{n,\,m})$ 的下界和上界来证明主定理。引理 2.1 和 2.2 给出了所需的下界。对于上界，我们证明了若干附加引理。

引理 3.1。对于每个 $n>0$，存在一个单交叉图 $P^{n,\,n}$ 对于 $\mathcal{P}^{n,\,n}$.

证明。首先，考虑图 $P^{+}\#P^{-}$。按照图 5 所示进行相互辫变换和内部 Reidemeister 移动后，我们得到单交叉图 $P^{1,\,1}$。现在，令$P^{n,n}$ 为图 6 底部所示的单交叉图。对 n 进行归纳，我们将证明$P^{n,n}$ 是曲面 $\mathcal{P}^{n,n}$的图。基例已经完成。假设根据归纳法， $P^{n-1,n-1}$ 是 $\mathcal{P}^{n-1,n-1}$的图。那么， $P^{n-1,n-1}\#P^{+}\#P^{-}$ 是 $\mathcal{P}^{n,n}$的图；按照图 6 顶部所示进行相互辫变换和内部 Reidemeister 移动，我们可以将 $P^{n-1,n-1}\#P^{+}\#P^{-}$ 转换为 $P^{n,n}$，从而完成证明。（事实上，我们注意到，在 $n=1$的情形下，图 5 中的图恰好就是图 6 中的图，其中 $P^{0,0}$ 这里是图 U。）□



(A) 图 $P^{+}\#P^{-}$



(B) 图 $P^{1,1}$

Figure 5. 从 $P^{+}\#P^{-}$得到 $P^{1,\,1}$

我们还需要另一族图。

引理3.2。对于每个 $n\geq 0$，存在一个单交叉图 $P^{n+1,\,n}$ 对于 $\mathcal{P}^{n+1,\,n}$。

证明。当 $n=0$ 时，我们令 $P^{1,\,0}=P^{+}$，它有一个交叉。现在，假设 $n>0$。根据引理 3.1，$P^{n,\,n}$ 是 $\mathcal{P}^{n,\,n}$的一个图，因此 $P^{n,\,n}\#P^{+}$ 是 $\mathcal{P}^{n+1,\,n}$的一个图。利用相互辫变换和内部 Reidemeister 移动，我们可以将 $P^{n,\,n}\#P^{+}$ 变为图 7 中所示的单交叉图 $P^{n+1,\,n}$ 。□

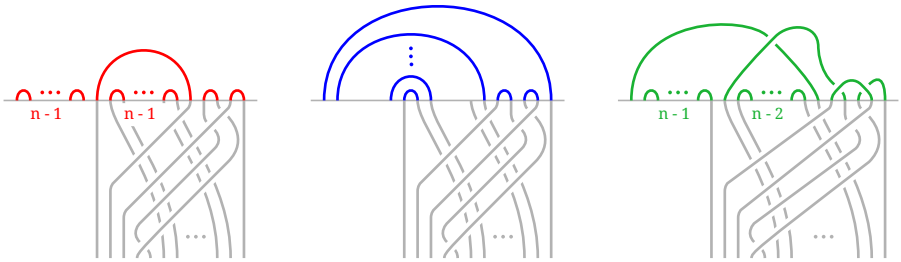
现在我们开始证明第一个主定理。

定理 1.1 的证明。考虑 $\mathcal{P}^{n,\,m}$，并注意到 $\mathcal{P}^{m,\,n}$ 是 $\mathcal{P}^{n,\,m}$的镜像，因此 $c(\mathcal{P}^{n,\,m})=c(\mathcal{P}^{m,\,n})$。因此，不失一般性，我们可以假设 $n\geq m$。由于 $\mathcal{P}^{n,\,m}$ 是不可定向的，引理 2.1 断言 $c(\mathcal{P}^{n,\,m})\geq 1$。此外，引理 2.2 推出

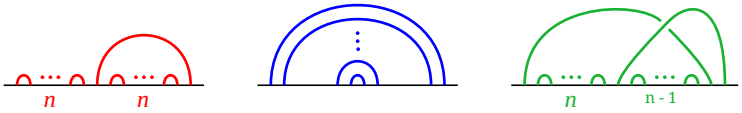
$$c(\mathcal{P}^{n,m})\geq \frac{1}{2}e(\mathcal{P}^{n,m})=|n-m|.$$

首先假设 $n=m$。根据引理 3.1， $c(\mathcal{P}^{n,\,n})$ 至多为一，因此

$$c(\mathcal{P}^{n,n})=1.$$

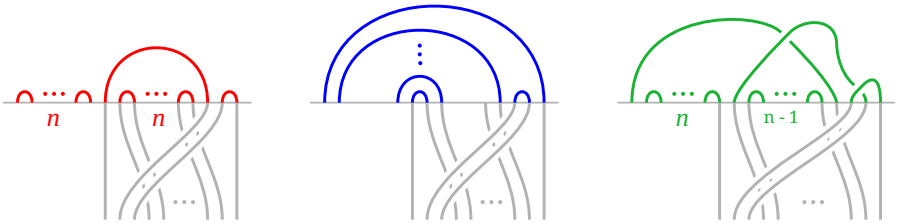


(A) 图示 $P^{n-1,\ n-1}\#P^+\#P^-$

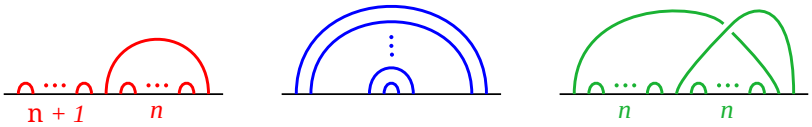


(B) 图示 $P^{n,n}$

FIGURE 6. 从 $P^{n,n}$ 获得 $P^{n-1,n-1}\#P^+\#P^-$



(A) 图示 $P^{n,n}\#P^+$



(B) 图示 $P^{n+1,n}$

FIGURE 7. 从 $P^{n,n}\#P^+$获得 $P^{n+1,n}$

另一方面，假设 $n > m$，并令 $j = n - m - 1$，使得 $j \geq 0$。那么我们可以将 $\mathcal{P}^{n,\ m}$ 表示为 $\mathcal{P}^{n+1,\ n}$ 与 j 个 $\mathcal{P}^+$ 的连通和；而 $\mathcal{P}^{n,\ m}$ 的图可由引理 3.2 中的单交叉图 $P^{n+1,\ n}$ 与 j 个图 P^+ 取连通和得到，该图总共有 $1 + j = n - m$ 个交叉点。因此，$c(\mathcal{P}^{n,\ m}) \leq n - m$。结合上面的不等式，我们得到

$$c(\mathcal{P}^{n,m}) = n - m.$$

在所有情况下，我们都可以得出所需的等式成立；也就是说，对于 n 和 m 的任意取值，我们都有

$$c(\mathcal{P}^{n,m}) = \max\{1, |n - m|\}.$$

□

注 3.3. 由主定理可知，例如，

$$c(\mathcal{P}^+\#\mathcal{P}^-) < c(\mathcal{P}^+) + c(\mathcal{P}^-),$$

因此，交叉数在连通和运算下并不具有可加性。更强的是，对于任意 n，都存在曲面 $\mathcal{K} = \mathcal{P}^{n,\,0}$ 和 $\mathcal{K}' = \mathcal{P}^{0,\,n}$，使得 $c(\mathcal{K}) = c(\mathcal{K}') = n$，但 $c(\mathcal{K}\#\mathcal{K}') = 1$。

转而考察桥数，Viro 给出了一个打结二球面的例子 $\mathcal{K}$，使得 $\mathcal{P}^+\#\mathcal{K} = \mathcal{P}^+$ [Vir73]。根据 [MZ17a] 和 [MZ17b],，我们有 $b(\mathcal{K}) \geq 4$，因此已知桥数在连通和下也不具有可加性。对于可定向曲面这一类曲面，目前尚无已知例子表明这两个不变量中的任一个会在此类运算下发生这样的退化，但寻找此类例子将是未来研究的一个有趣方向。

注 3.4。引理 3.1 和 3.2 的另一种证明利用了这样一个事实：$\mathcal{P}^+\#\mathcal{T} = \mathcal{P}^+\#\mathcal{P}^+\#\mathcal{P}^-$，因此对于 $n > 1$，我们有 $\mathcal{P}^{n,\,n} = \mathcal{T}^{n-1}\#\mathcal{P}^{1,\,1}$，并且 $\mathcal{P}^{n+1,\,n} = \mathcal{P}^+\#T^n$，相应的图都只有一个交叉。上述证明很有意思，因为它们给出了图示 $P^{n,\,n}$ 和 $P^{n+1,\,n}$，这些图可能与可分解为 T 个和项的图示不等价。事实上，Jeffrey Meier 通过考察其底层三次图 [Mei23], 证明图示 $P^+\#T$ 和 $P^+\#P^+\#P^-$ 对应于不等价的桥三分解。

4. Converting ch-diagrams to tri-plane diagrams

另一种用于编码 4-空间中打结曲面的工具是 ch 图，它最早出现在 Yoshikawa 的工作中 [Yos94]。经典结图是在平面上的一条浸入曲线，并在每个双重点标出交叉信息；而 ch 图则包含交叉点和标记顶点，如图 8 所示。标记顶点可以进行 $+$ 和 $-$ 两种消解，如图所示。



Figure 8. 一个标记顶点（中间）及其两种消解

标记图 M 是平面上一条或多条浸入曲线，其中每个双重点要么是交叉点，要么是标记顶点。因此，标记图有一种 $+$ 消解 M_+，即对所有标记顶点进行 $+$ 消解；还有另一种 $-$ 消解 M_-，即对所有标记顶点进行 $-$ 消解。注意，M_+ 和 M_- 都是经典链环图。最后，ch 图定义为满足以下条件的标记图：M 其每一种消解 $M_\pm$ 都是平凡链环的经典图，也就是说，所表示的链环与若干个平凡圈的不交并同痕。与三平面图的情形一样，4-空间中的每个曲面都有一个 ch 图，且任意两个 ch 图都可以通过有限次变换互相得到，这些变换称为 Yoshikawa 变换 [Yos94, Swe01, KK08]。图 10 展示了曲面 $\mathcal{P}^+$ 的一个 ch 图（在 Yoshikawa 表中记作 2_1^{-1}）。

要将 ch 图转换为三平面图，我们（隐式地）还会经过另一个密切相关的概念，称为带状无结图。MZ17a]中介绍了带状无结图；更多细节请参阅该论文。简言之，每个标记顶点都可以如图 9 所示转换为一条带，这一过程会将 ch 图 M 变为带状链环图 (M_-, v)，沿着带 v 对平凡链环 M_-进行解消，可得到平凡链环 M_+。

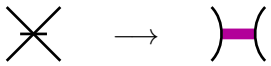


FIGURE 9. 将标记顶点变为带

如果存在一个定义在M 上的高度函数，使得 ch 图 M 中的所有极大值都高于所有极小值，标记顶点上的所有标记都包含在一个分隔极小值与极大值的（平面）正则层 P 中，并且包含极大值的弧可以通过同伦变形到 P，使其与标记顶点不相交，且该同伦的像是一组嵌入弧（没有交叉点，也没有闭分支），则称该 ch 图处于桥位。在这种情况下，相应的带状链环表示（M_-, v）具有带状桥分解，由 [MZ17a] 的引理3.2可得一个桥三分解。

处于桥位的 ch 图 M 可通过以下步骤得到一个三平面图：设 P' 是标记顶点正下方的一个正则层，它将 M 切成两个图 M' 和 M''，其中 M' 包含标记顶点。令 $D_1 = M'_-$、$D_2 = M'_+$ 和$D_3 = \overline{M''}$，由 [MZ17a] 可知， $D = (D_1, D_2, D_3)$ 是由 M 确定的打结曲面 $\mathcal{K}$ 的一个三平面图。图 10 展示了使用 Yoshikawa 的 ch 图 2_1^{-1} 对 $\mathcal{P}^+$ 执行这一过程的示例，其中还包括三平面变换，以说明转换后的图等价于标准图 P^+。



(A) 处于桥位的 ch 图



(B) 将 ch 图转换为三平面图的结果



(C) 通过辫和Reidemeister变换将图转换为 P^+

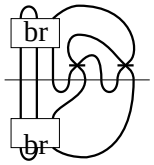
FIGURE 10. 将ch 图转换为三平面图

5. A LIBRARY OF TRI-PLANE DIAGRAMS

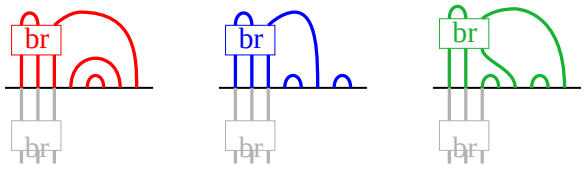
在本节中，我们执行上述过程，将Yoshikawa在 [Yos94] 中给出的23个ch 图转换为三平面图。对于其中一些图，我们进行三平面变换以减少交叉数。我们从Artin引入的一类打结二球面开始，这类曲面称为旋结 [Art25], ，因为其中两个曲面（Yoshikawa 表中的8_1 和 10_1 ）属于这一族。旋结的三平面图见于 [MZ17a], ，其中作者确定了最小桥数；不过，我们将在下文重现这一论证，以证明下一个引理。

引理5.1. 假设 $\mathcal{K}$ 是 K的旋转。那么 $b(\mathcal{K}) = 4$ ， 且 $c(\mathcal{K}) \leq 2c(K)$。

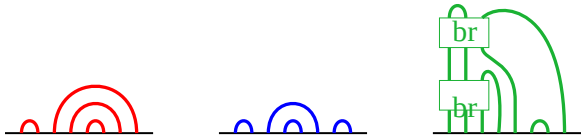
证明. 每个 2-桥结 K 都有一个最小交叉图，可通过对四股辫取平台闭包得到，并且最右侧的股不含交叉点。因此， $\mathcal{K}$ 有一个如图 11 所示的 ch 图。将这个 ch 图转换为三平面图，并进行辫变换和 Reidemeister 变换后，就得到图 11 底部的三平面图，其中有 $2c(K)$个交叉点。因此， $c(\mathcal{K}) \leq 2c(K)$。由于 $\mathcal{K}$不是平凡二球面，根据 [MZ17b], , 我们有 $b(\mathcal{K}) \geq 4$, 因此 $b(\mathcal{K}) = 4$。□



(A) ch 图，其中 br 表示一条辫（反射后的 br 表示该辫的镜像）



(B) 将 ch 图转换为三平面图的结果



(C) 通过辫变换和 Reidemeister 变换降低交叉数

FIGURE 11. 旋结 $\mathcal{K}$ 的一个三平面图

下表汇总了 Yoshikawa 表中每个打结曲面的数据，相关三平面图见所引用的图。虽然表中每个交叉数都只是一个上界，但定理 1.2 证明了每个桥数都是最小值。此外，曲面的类型指其作为二维流形的同胚类；我们分别用 $\mathbb{S}^2$、 $\mathbb{P}^2$ 和 $\mathbb{T}^2$ 表示二球面、射影平面和环面。

定理 1.2 的证明。通过分别考虑 $\mathcal{K}$ 各个分支的桥数，我们得到了大多数桥数的下界。例如，如果 $\mathcal{K}$ 的类型是 $\mathbb{S}^2 \sqcup \mathbb{T}^2$，我们知道单独的 $\mathbb{S}^2$ 分支的桥数至少为 1，而单独的 $\mathbb{T}^2$ 分支的桥数至少为 3，因此 $\mathcal{K}$ 的桥数至少为 4。类似地，每个 $\mathbb{P}^2$ 分支对总和贡献桥数 2，而每个 $\mathbb{P}^2\#\mathbb{P}^2$ 分支对总和贡献桥数 3。表中的每个曲面 $\mathcal{K}$ 都实现了其各个分支可能桥数极小值的总和，但曲面 $8_1, 9_1, 10_1, 10_2, 10_3$，和 10_1^1 除外。

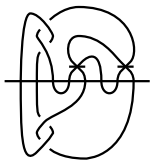
列表中的前五个曲面都是二球面 $\mathcal{K}$，且不是平凡二球面；由于 $b(\mathcal{K}) \geq 4$ 由 [MZ17b], , 我们有 $b(\mathcal{K}) = 4$ 。对于剩下的曲面 10_1^1, , 我们断言 $b(10_1^1) = 6$。在图 21 中，我们看到一个 6-桥三平面图

关于 10_1^1,，因此显然有 $b(10_1^1) \leq 6$。如果 10_1^1 具有某个 $(b; c_1, c_2, c_3)$-桥三分解，并且$b < 6$，那么利用 $0 = \chi(10_1^1) = c_1 + c_2 + c_3 - b$这一事实，我们得到至少有一个 c_i 等于一。根据 [JMMZ22], 中的定理 4.1，可知 $\pi_1(S^4 \setminus 10_1^1)$ 有一个仅含单个生成元的表示，因此它必定是一个循环群。另一方面， [Yos94], 中指出， $\pi_1(S^4 \setminus 10_1^1)$ 与三维空间中三叶结外部的基本群相同，即群 $\langle x, y \,|\, xyx = yxy \rangle$；该群既不是循环群，也不是阿贝尔群，从而产生矛盾。我们得出 $b(10_1^1) = 6$，证明完成。□

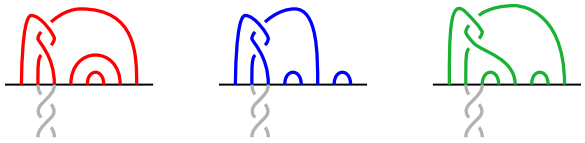
在下方的表 1 中，我们记录了每个曲面的名称（来自 [Yos94]）、描绘三平面图的图、拓扑类型、桥数、交叉数的上界以及欧拉数。我们注意到，对于表中所有具有多个分支的曲面，各个分支都是平凡的。$\mathbf{10}_{0,2}{}^{-2}$ 的交叉数条目标有一个 $*$，因为经实验，能使交叉数最小的图的桥数等于五，而不是该曲面的最小桥数四。此外，请回忆一下，当所有交叉点都包含在单个缠结中时，三平面图称为集中型。当使交叉数最小的图为集中型时，我们会在相应的交叉数旁标注 c。

TABLE 1. Yoshikawa 表的三平面数据

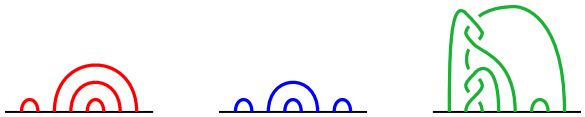
标签	图	Type	桥 #	交叉 # $\leq$	欧拉数 #
0_1	1	$\mathbb{S}^2$	1	0^c	0
2_1^1	1	$\mathbb{T}^2$	1	0^c	0
2_1^{-1}	1	$\mathbb{P}^2$	2	1^c	2
$6_1^{0,1}$	12	$\mathbb{S}^2 \sqcup \mathbb{T}^2$	4	4^c	0
$7_1^{0,-2}$	13	$\mathbb{S}^2 \sqcup (\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2)$	4	5^c	0
8_1	11	$\mathbb{S}^2$	4	6^c	0
$8_1^{1,1}$	14	$\mathbb{T}^2 \sqcup \mathbb{T}^2$	6	6	0
$8_1^{-1,-1}$	15	$\mathbb{P}^2 \sqcup \mathbb{P}^2$	4	8	0
9_1	16	$\mathbb{S}^2$	4	7^c	0
$9_1^{0,1}$	17	$\mathbb{S}^2 \sqcup \mathbb{T}^2$	4	8^c	0
$9_1^{1,-2}$	18	$\mathbb{T}^2 \sqcup (\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2)$	6	7	0
10_1	11	$\mathbb{S}^2$	4	8^c	0
10_2	19	$\mathbb{S}^2$	4	11	0
10_3	20	$\mathbb{S}^2$	4	11	0
10_1^1	21	$\mathbb{T}^2$	6	11	0
$10_1^{0,1}$	22	$\mathbb{S}^2 \sqcup \mathbb{T}^2$	4	8	0
$10_2^{0,1}$	23	$\mathbb{S}^2 \sqcup \mathbb{T}^2$	4	8^c	0
$10_1^{1,1}$	24	$\mathbb{T}^2 \sqcup \mathbb{T}^2$	6	6	0
$10_1^{0,0,1}$	25	$\mathbb{S}^2 \sqcup \mathbb{S}^2 \sqcup \mathbb{T}^2$	5	8	0
$10_1^{0,\ -2}$	26	$\mathbb{S}^2 \sqcup (\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2)$	4	8^c	0
$10_2^{0,\ -2}$	27	$\mathbb{S}^2 \sqcup (\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2)$	4	$8^{*,c}$	0
$10\bar{1}^{1,\ -1}$	28	$\mathbb{P}^2 \sqcup \mathbb{P}^2$	4	8^c	0
$10\bar{1}^{2,\ -2}$	29	$(\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2) \sqcup (\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2)$	6	8	0



(A) ch 图



(B) 将 ch 图转换为三平面图的结果



(C) 通过辫变换和 Reidemeister 变换降低交叉数

FIGURE 12. $6^{0,\ 11}$

6. QUESTIONS

根据注 3.3，存在这样的曲面：在连通和运算下，其交叉数和桥数都会退化；但我们不知道可定向曲面中有此类例子。

问题 6.1. 对于可定向曲面 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{K}'$，是否有

$$c(\mathcal{K}\#\mathcal{K}') = c(\mathcal{K}) + c(\mathcal{K}') \quad \textit{and} \quad b(\mathcal{K}\#\mathcal{K}') = b(\mathcal{K}) + b(\mathcal{K}') - 1?$$

对于经典纽结，桥数的类似等式已知为真 [Sch54, Sch03]，，而对于交叉数，一般而言其对应问题是一个众所周知的极其困难的开放问题。

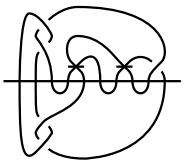
在表 1 中，我们观察到，对于大约一半的曲面 $\mathcal{K}$，我们仅通过集中图将交叉数降至极小值点。我们可以将 $\mathcal{K}$ 的集中交叉数定义为 $c^c(\mathcal{K})$，即集中图中的极小交叉数，这自然引出了下一个问题。

问题 6.2. 是否存在一个曲面 $\mathcal{K}$，使得 $c(\mathcal{K}) < c^c(\mathcal{K})$? 如果存在，可能的最大差值 $c^c(\mathcal{K}) - c(\mathcal{K})$ 是多少?

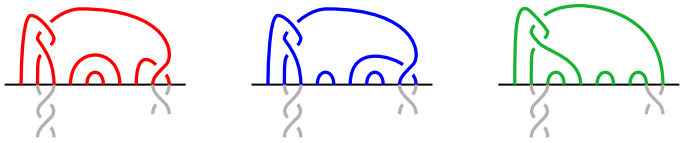
如上所述，曲面 $10_{0,1}^{\ -2}$ 提供了一个有趣的例子，因为它同时具有一个 8 交叉 5 桥图和一个 13 交叉 4 桥图；对于 $10_{0,1}^{\ -2}$ 的 4 桥图族，我们无法将交叉数降至 13 以下。

问题 6.3. 是否存在一个曲面 $\mathcal{K} \subset S^4$，使得 $b(\mathcal{K})$ 和 $c(\mathcal{K})$ 无法由单一图实现?

根据表 1 中的数据，交叉数似乎有桥数作为下界，然而对于平凡打结曲面，情况并非如此，因为 $b(\mathcal{P}^{n,\ m}) = n + m + 1$。



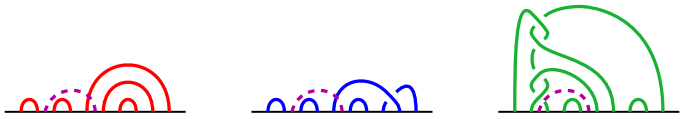
(A) ch 图



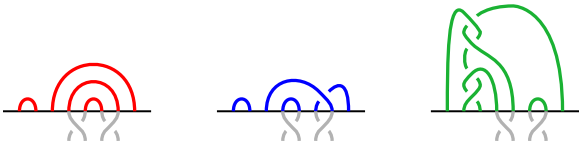
(B) 将 ch 图转换为三平面图的结果



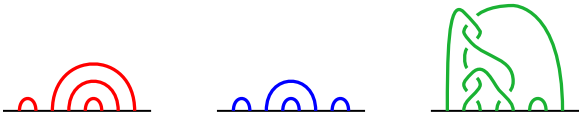
(C) 通过辫变换和 Reidemeister 变换降低交叉数



(D) 辫与 Reidemeister 变换建立了一种去稳定化



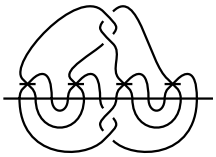
(E) 去稳定化的结果



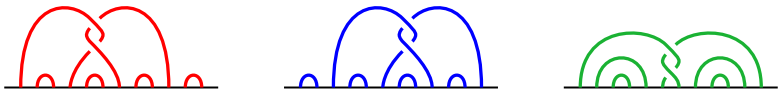
(F) 通过辫变换和 Reidemeister 变换使图集中后的结果

FIGURE 13. $7_1^{0,-2}$

问题 6.4。除了通过与非打结曲面取连通和得到的构造外，是否存在打结曲面 $\mathcal{K} \subset S^4$，使得 $b(\mathcal{K}) > c(\mathcal{K})$?

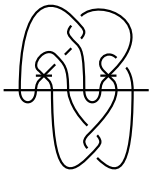


(A) ch 图



(B) 将 ch 图转换为三平面图的结果

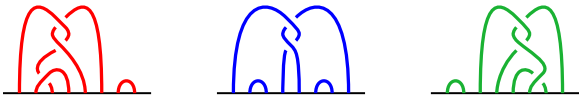
FIGURE 14. $8_1^{1\ 1}$



(A) ch 图



(B) 将 ch 图转换为三平面图的结果



(C) 通过辫和Reidemeister变换降低交叉数

FIGURE 15. $8_1^{-1,-1}$

最后，我们指出，表中的每个曲面 $\mathcal{K}$ 都满足 $e(\mathcal{K}) = 0$。将 $\mathcal{P}^{\pm}$ 与表中的任意一个 $\mathcal{K}$ 作连通和，即可得到一个满足 $e(\mathcal{P}^{\pm}\#\mathcal{K}) = \pm 2$ 以及 $c(P^{\pm}\#\mathcal{K}) \leq c(\mathcal{K}) + 1$ 的曲面。不过，对于不是连通和的曲面，以下问题仍然未知。

问题 6.5。曲面 $\mathcal{K}$ 的最小交叉数是多少，使得 $\mathcal{K} \neq \mathcal{K}'\#\mathcal{P}^{\pm}$对某个其他曲面 $\mathcal{K}'$ 成立，并且 $e(\mathcal{K}) \neq 0$?

REFERENCES

[Art25] Emil Artin, *Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen im R_4*, 汉堡大学数学研讨班论文集 4 (1925 1, 174 177 3069446), 第 – 期。MR GK David Gay 和 Robion Kirby, [16] *Trisecting 4-manifolds*, 《几何与拓扑》20 (2016), 第 6 期, 3097–3132。MR 3590351

[HK79] Fujitsugu Hosokawa 和 Akio Kawauchi, *Proposals for unknotted surfaces in four-spaces*, O saka 《数学杂志》16 (1979), 第 1 期, 233–248。MR 527028

[JMMZ22] Jason Joseph、Jeffrey Meier、Maggie Miller 和 Alexander Zupan, *Bridge trisections and clas sical knotted surface theory*, 《太平洋数学杂志》319 (2022), 第 2 期, 343–369。MR 4482720

[KK08] Cherry Kearton 和 Vitaliy Kurlin, *All 2-dimensional links in 4-space live inside a unive rsal 3-dimensional polyhedron*, 《代数几何与拓扑》8 (2008), 第 3 期, 1223–1247。MR 2443242

[Mei23] J. Meier, 个人通信, 2023年1月。

[MTZ20] Jeffrey Meier、Abigail Thompson 和 Alexander Zupan, *Cubic graphs induced by bridge trisec- tions*, arXiv 电子预印本（2020）, arXiv:2007.07280, 即将在《数学研究快报》发表。

[MZ17a] Jeffrey Meier 和 Alexander Zupan, *Bridge trisections of knotted surfaces in S^4*, 《美国数学会汇刊》A mer. 《美国数学会汇刊》369（2017）, 第10期, 7343–7386。MR 3683111

[MZ17b] , *Genus-two trisections are standard*, 《几何与拓扑》21（2017）, 第3期, 1583–1 630. MR 3650079

[Sch54] Horst Schubert, *Über eine numerische Knoteninvariante*, 《数学杂志》61（1954）, 245– 288. MR 72483

[Sch03] Jennifer Schultens, *Additivity of bridge numbers of knots*, 《剑桥哲学学会数学论文集》。 Soc. 135（2003）, 第3期, 539–544页。MR 2018265

[S我们01] Frank J. Swenton, *On a calculus for 2-knots and surfaces in 4-space*, 《J. 结理论 Rami》 fication 10（2001）, 第 8 期, 1133–1141。MR 1871221

[Vir73] O. Ja. Viro, *Local knotting of sub-manifolds*, 《数学文集》（新系列）90(132)（1973）, 173–183, 325. MR 0370606（51 #6833）

[Yos94] 吉川克之, *An enumeration of surfaces in four-space*, 大阪数学杂志 31（1994）, 第 3 期, 497–522. MR 1309400

University of Nebraska-Lincoln, Lincoln, NE 68588*Email address*: wallred2@huskers.unl.edu

Universidad de los Andes, Bogotá, Cundinamarca, Colombia *Email address*: m.aragon@uniandes.edu.coReed College, Portland, OR 97202*Email address*: dooleyz@reed.edu

Skidmore College, Saratoga Springs, NY 12866*Email address*: agoldma1@skidmore.eduUniversity of Michigan, Ann Arbor, MI 48109*Email address*: leiyc@umich.edu

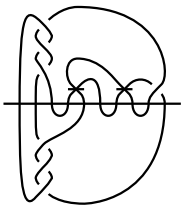
California State University, Fresno, Fresno, CA 93740 *Email address*: imartinez00@mail.fresnostate.edu

University of Nebraska-Lincoln, Lincoln, NE 68588 *Email address*: nicholas.meyer2@huskers.unl.edu*URL*: https://nickmeyer.me/Oakland University, Rochester, MI 48309*Email address*: devglemic@icloud.com

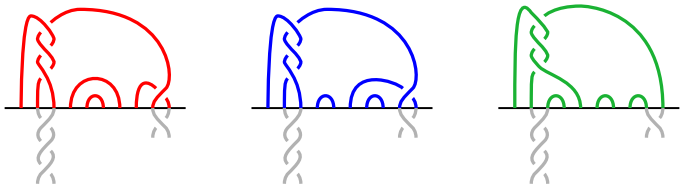
University of Edinburgh, Edinburgh EH8 Y9L, UK *Email address*: swarrand@ed.ac.uk*URL*: https://sites.google.com/view/scottwarrander/

University of Nebraska-Lincoln, Lincoln, NE 68588 *Email address*: awright@huskers.unl.edu*URL*: https://www.math.unl.edu/~awright14/

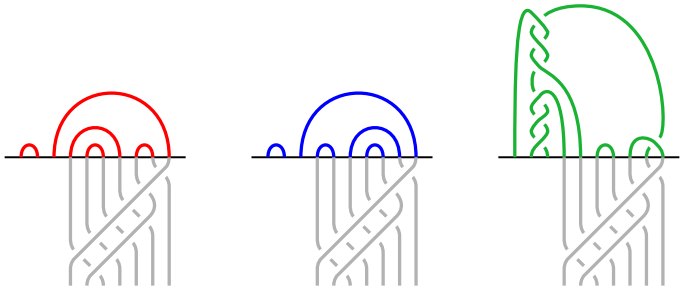
University of Nebraska-Lincoln, Lincoln, NE 68588 *Email address*: zupan@unl.edu*URL*: http://www.math.unl.edu/azupan2



(A) ch 图



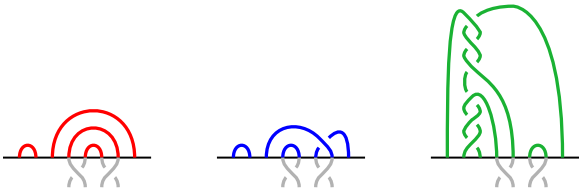
(B) 将 ch 图转换为三平面图的结果



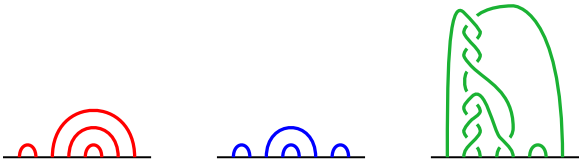
(C) 通过辫变换和 Reidemeister变换降低交叉数



(D) 辫和Reidemeister 变换构成去稳定化

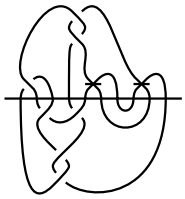


(E) 去稳定化的结果

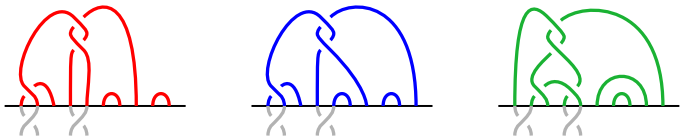


(F) 通过辫变换和 Reidemeister变换使图集中后的结果

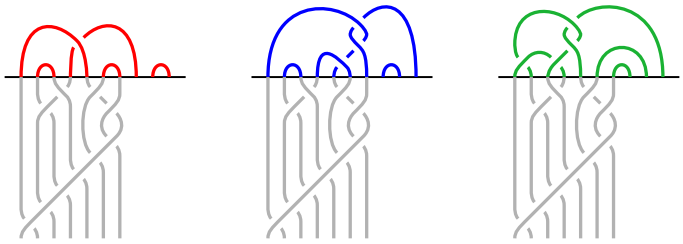
FIGURE 16. 9_1



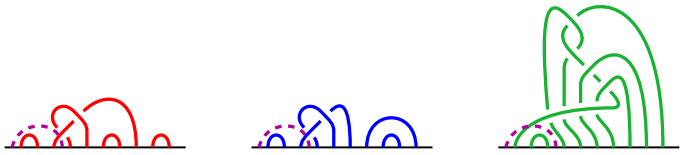
(A) ch 图



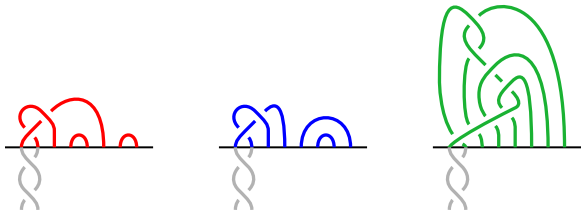
(B) 将ch 图转换为三平面图的结果



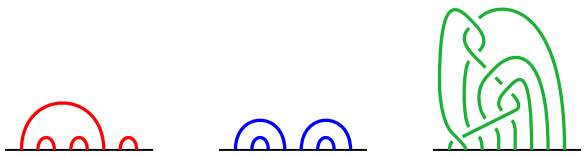
(C) 通过辫和 Reidemeister 变换降低交叉数



(D) 辫和Reidemeister 变换构成去稳定化

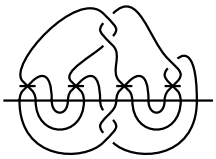


(E) 去稳定化的结果

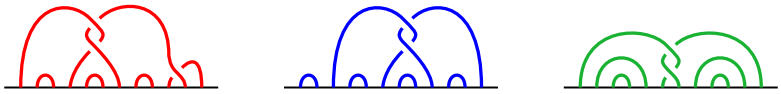


(F) 通过辫和 Reidemeister 变换使图集中

FIGURE 17. $9^{0,1\,1}$

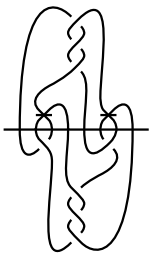


(A) ch 图

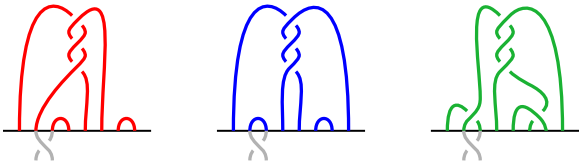


(B) 将 ch 图转换为三平面图的结果

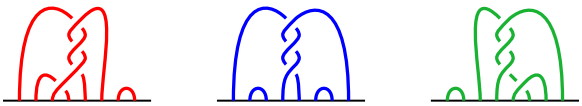
FIGURE 18. $9^{1\ -2}_{1}$



(A) ch 图

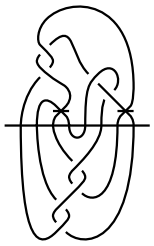


(B) 将ch 图转换为三平面图的结果



(C) 通过辫和 Reidemeister 变换降低交叉数

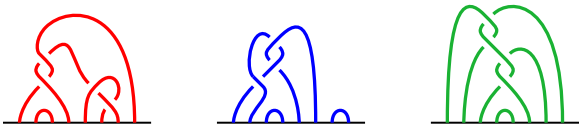
FIGURE 19. 10_2



(A) ch 图

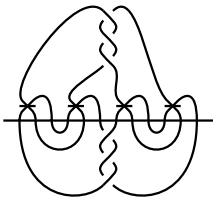


(B) 将 ch 图转换为三平面图的结果

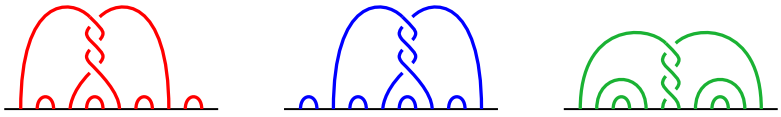


(C) 通过 Reidemeister 变换降低交叉数

FIGURE 20. 10_3

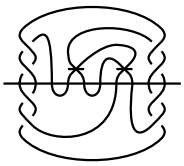


(A) ch 图

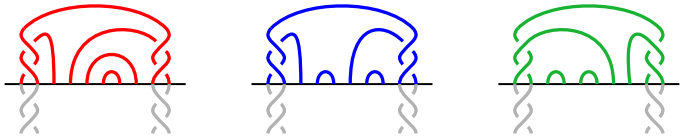


(B) 将 ch 图转换为三平面图的结果

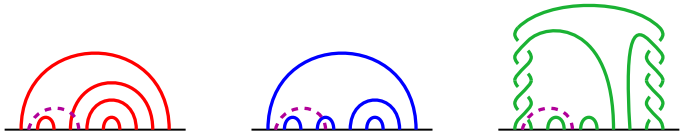
FIGURE 21. 10_1^1



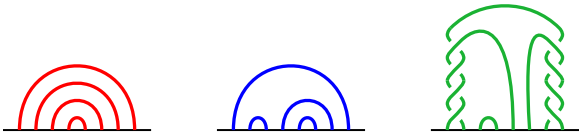
(A) ch 图



(B) 将 ch 图转换为三平面图的结果

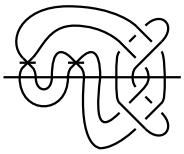


(C) 通过辫变换和 Reidemeister 变换降低交叉数

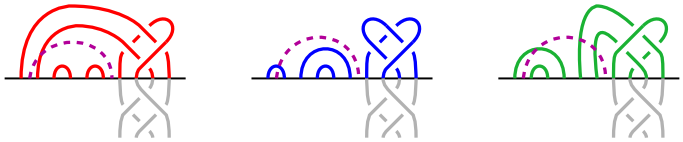


(D) 去稳定化的结果

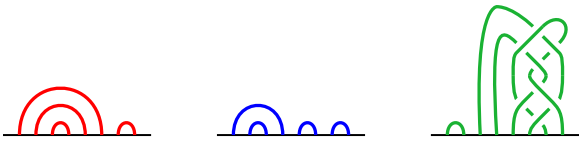
FIGURE 22. $10^{0,1\,1}$



(A) ch 图

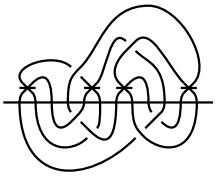


(B) 将 ch 图转换为三平面图的结果

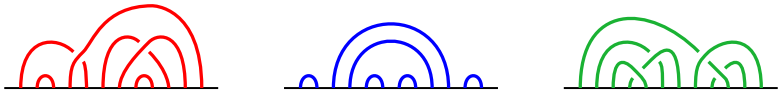


(C) 通过辫和 Reidemeister 变换实现去稳定化并降低交叉数

FIGURE 23. $10^{0\ 1}_{2}$

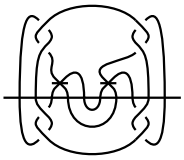


(A) ch 图

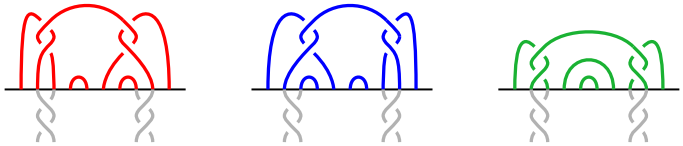


(B) 将 ch 图转换为三平面图的结果

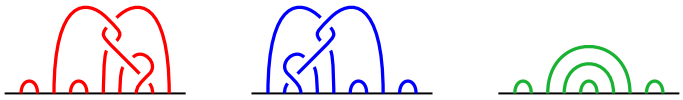
FIGURE 24. $10^{1,1\ 1}$



(A) ch 图

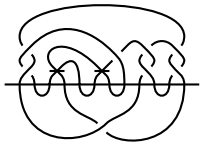


(B) 将 ch 图转换为三平面图的结果

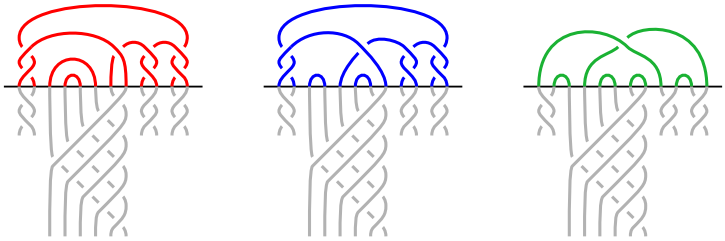


(C) 通过辫和 Reidemeister 变换降低交叉数

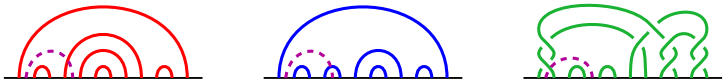
FIGURE 25. $10^{0,\ 01\,1,}$



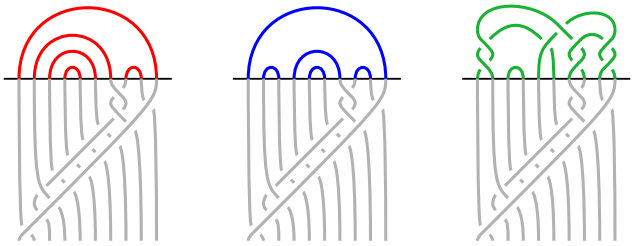
(A) ch 图



(B) 将 ch 图 转换为三平面图的结果



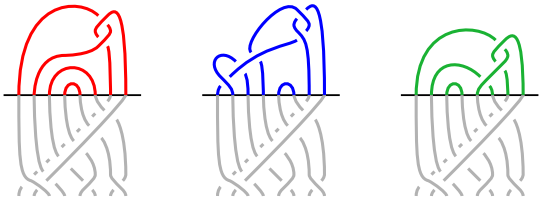
(C) 通过辫变换和 Reidemeister 变换降低交叉数



(D) 去稳定化的结果



(E) 辫与 Reidemeister 变换构成了另一种去稳定化

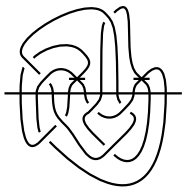


(F) 去稳定化的结果

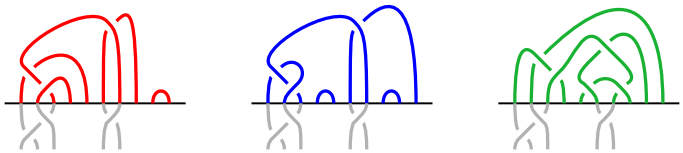


(G) 通过辫变换和 Reidemeister 变换降低交叉数后的结果

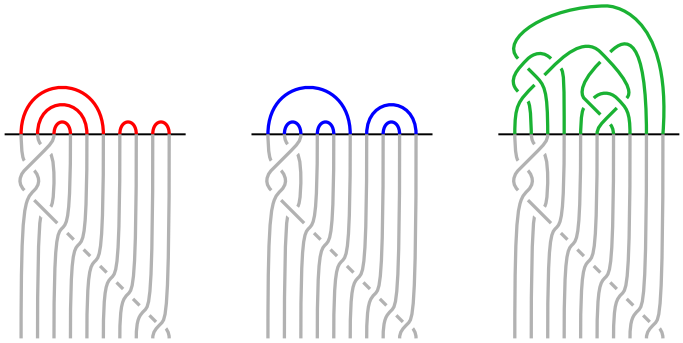
FIGURE 26. $10^{0,}{}_{1}{}^{-2}$



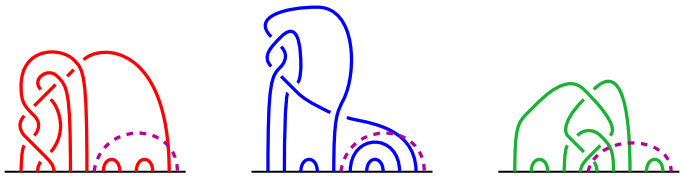
(A) ch 图



(B) 将 ch 图转换为三平面图的结果



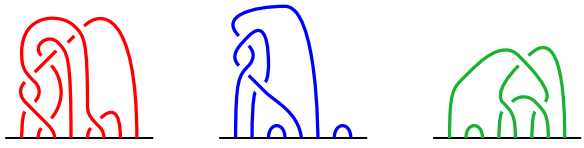
(C) 交叉数极小值点



(D) 辫和Reidemeister 变换构成去稳定化

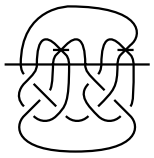


(E) 去稳定化结果

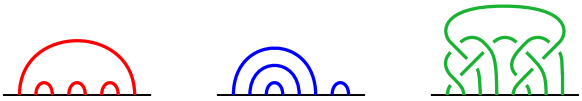


(F) 通过辫和 Reidemeister变换减少交叉数后的结果

FIGURE 27. $10^{0,}{}_{2}{}^{-2}$

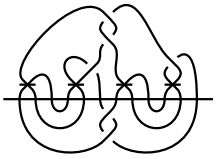


(A) ch 图

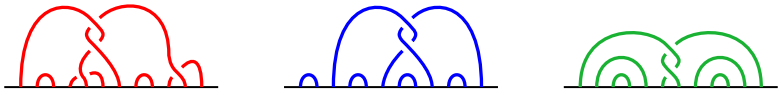


(B) 将ch 图转换为三平面图的结果

FIGURE 28. $10_1^{-1,-1}$



(A) ch 图



(B) 将 ch 图转换为三平面图的结果

FIGURE 29. $10^{-2,}{}_1{}^{-2}$