arXiv:2302.08440v1 [math.SP] 16 Feb 2023

遍历薛定谔算子连续谱的充分条件

摘要。我们研究一族一维离散薛定谔算子 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 的谱类型，其中每个 H_ω 的势由 $V_\omega(n) = f(T^n\omega)$ 给出，$n \in \mathbb{Z}$，T 是紧空间 Ω 上的遍历同胚，而 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 是连续函数。我们证明，如果对某个 $\alpha \in \Omega$，$\{T^n\alpha\}_{n\geq 0}$ 在 Ω 中稠密，那么一个典型算子 $H_\omega \in \{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 具有纯连续谱。我们还证明，只要 $\{\Omega, T\}$ 满足拓扑重复性质（*TRP*），也能得到上述结论；这一概念由 Boshernitzan 和 Damanik [3] 提出。本文所述定理弱化了相关研究中的假设，并使我们得以得出与那些作者相同的结论。我们还给出了 Gordon 引理的证明，这是本研究中使用的主要工具。

1. 引言

薛定谔算子是描述不存在相对论力时量子尺度下粒子保守系统动力学的哈密顿量。尽管其起源具有现象学性质，薛定谔算子理论已发展为数学的一个独立分支。其研究将微分方程、几何分析和测度论等领域的概念联系起来。本文研究离散一维薛定谔算子的谱类型。这个问题具有重要意义，因为它有明确的物理解释：在由薛定谔算子描述的系统中，束缚态与算子的点谱相关，而散射态则与连续谱相关。离散一维薛定谔算子定义如下：

$$\begin{aligned} H : \mathcal{D}(H) \subseteq \ell^2(\mathbb{Z}) &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \psi &\mapsto (\Delta_d + V)\psi \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 Δ_d 是离散拉普拉斯算子，V 是势函数（这些算子的形式化定义见第 2 节）。薛定谔算子的谱理论根据函数V的性质研究H 的谱。

给定一个动力系统 $\{\Omega, T\}$，对于每个 $\omega \in \Omega$，都可以定义一个势函数$V_\omega(n) = f(T^n\omega)$，其中 $f : \Omega \to \mathbb{R}$。这种方法将动力系统理论与薛定谔算子的谱理论联系起来。在此背景下，分析重点是研究算子族 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$的性质，其中每个 H_ω 定义如下：

$$\begin{aligned} H_\omega : \mathcal{D}(H_\omega) \subseteq \ell^2(\mathbb{Z}) &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \psi &\mapsto (\Delta_d + V_\omega)\psi. \end{aligned} \tag{1.2}$$

如果变换 $T : \Omega \to \Omega$ 是遍历的，那么 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 就是一族遍历薛定谔算子。该领域的核心问题包含两个目标：一方面，确定算子 H_ω （方程 1.2）的谱类型（点谱、绝对连续谱和奇异连续谱）及其谱的形状；另一方面，描述与 H_ω相关的物理系统的动力学。遍历薛定谔算子理论的一个特别受关注之处，是研究对一般

日期：2023年2月17日。

元素都成立的性质，其中元素属于 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$。从拓扑学视角来看，这意味着研究 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$的余子集中的元素所具有的性质；从测度论的角度来看，则是研究 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 的全测度子集中的元素所具有的性质。本文从拓扑学视角研究一般 $H_\omega \in \{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 的谱性质。

本文的主要背景是 Boshernitzan 和 Damanik [3]的研究。他们在系统 $\{\Omega, T\}$ 和 MRP（分别表示拓扑重复性质和度量重复性质）上引入了定义，并研究了其对 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$不存在点谱的影响，其中势 $V_\omega(n) = f(T^n\omega)$ 由紧空间 Ω 上的遍历同胚T 给出。另一项相关研究是 Avila 和 Damanik [1]的工作。这些作者借助调和分析和 Kotani理论的工具证明：对于 $T : \Omega \to \Omega$ 为非周期同胚的情形，$\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$不存在绝对连续谱是一个泛性质。

本文旨在确定一族遍历薛定谔算子 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 具有纯连续谱成为泛性质的充分条件。我们的策略是证明一个泛型算子 $H_\omega \in \{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 没有特征值（因此其点谱为空）。这一目标与 [3] 和 [1], 的目标类似，因为我们试图排除泛型薛定谔算子中某种谱类型的存在。我们的工作基于两个理论工具：

> *(i) Gordon* 引理：这是谱理论中的一条经典原理，它给出了薛定谔算子不存在点谱的条件。*(ii) TRP*：这一性质赋予系统 $\{\Omega, T\}$ 某种结构，使得利用 Gordon 引理可以证明，该族中的一般算子 H_ω 具有纯连续谱（见定义 2.13）。

我们的结果推广了 Boshernitzan 和 Damanik 的主要定理（[3], 第 650 页）。这两位作者证明，纯连续谱是 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 的一般性质，其论证基于两个假设：系统 $\{\Omega, T\}$ 是极小的，并且满足 TRP。我们从两个方面放宽了这一结果的假设：首先，我们只用一个假设就证明了上述结果，即对于某个元素 $\alpha \in \Omega$（具体而言，对于 $\alpha \in PRP(T)$），$\{T^n\alpha\}_{n\geq 0}$ 在 Ω 中稠密。见定义 *2.9*。随后，我们证明，TRP 是纯连续谱成为遍历薛定谔算子族 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 的一般性质的充分条件。以下给出本文的两个主要结果。

定理 A. 假设 $\alpha \in PRP(T)$ 且 $\{T^n\alpha\}_{n\geq 0}$ 在 Ω 中稠密。那么存在 $C(\Omega)$ 的一个余子集 $\mathcal{F}$，使得若 $f \in \mathcal{F}$，则存在 Ω_f 的一个余子集，它是 Ω 的子集，并具有如下性质：对于每个 $\omega \in \Omega_f$，$f(T^n\omega)$ 都是戈登势。

定理 B. 假设动力系统 $\{\Omega, T\}$ 满足 TRP。那么存在 $C(\Omega)$ 的一个余子集 $\mathcal{F}$，使得若 $f \in \mathcal{F}$，则存在 Ω_f 的一个余子集，它是 Ω 的子集，并具有如下性质：对于每个 $\omega \in \Omega_f$，$f(T^n\omega)$ 都是戈登势。

除引言外，本文还分为五节。第二节介绍本文所依据的主要定义。第三节陈述并证明 Gordon 引理。第四节和第五节分别证明定理 A 和定理 B。最后，第六节讨论一些应用。

2. 设置与主要结果

本节介绍离散薛定谔算子的形式化定义。我们还给出*TRP* 性质的定义，并讨论该性质对动力系统 $\{\Omega, T\}$结构的一些影响。

2.1. 薛定谔算子。 设 $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 为平方可积函数空间，其定义如下

$$\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n) = \{\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid \int_{\mathcal{D}(\Psi)} \|\Psi(q)\|^2 dq < \infty\}$$

其中内积定义为:

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \int_{\mathcal{D}} \overline{\Psi(q)}\Phi(q)dq.$$

$\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 的离散版本定义如下:

$$\ell^2(\mathbb{Z}^n) = \{\psi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C} \mid \sum_{n\in\mathbb{Z}^n} |\psi(n)|^2 < \infty\}$$

并赋予内积:

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\psi(n)}\varphi(n).$$

定义 2.1。 薛定谔算子定义为一个线性算子

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \mathcal{D}(\mathcal{H}) \subseteq \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n) &\to \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n) \\ \Psi &\mapsto (\Delta + V)\Psi \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中， Δ 是 $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n)$中的拉普拉斯算子，而$V$： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 势函数。类似地，离散薛定谔算子定义为:

$$\begin{aligned} H : \mathcal{D}(H) \subseteq \ell^2(\mathbb{Z}^n) &\to \ell^2(\mathbb{Z}^n) \\ \psi &\mapsto (\Delta_d + V)\psi \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中， Δ_d 是 $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$中的离散拉普拉斯算子，而V： $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ 势函数。

本文聚焦于一维情形，从而得到如下定义，其中将 $\Delta_d = \psi(n+1) + \psi(n-1)$视为 $\ell^2(\mathbb{Z})$中的离散拉普拉斯算子。

定义 2.2。 一维离散薛定谔算子:

$$\begin{aligned} H : \mathcal{D}(H) \subseteq \ell^2(\mathbb{Z}) &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \psi &\mapsto (\Delta_d + V)\psi \\ &= \psi(n+1) + \psi(n-1) + V(n)\psi(n) \end{aligned} \tag{2.3}$$

命题 2.3。 算子 H（公式 *2.3*）是自伴的。

证明。 令 $\psi(n)$和 $\varphi(n) \in \ell^2(\mathbb{Z})$。那么， 一方面:

$$\begin{aligned} \langle H\psi(n), \varphi(n)\rangle &= \langle (\Delta_d + V)\psi(n), \varphi(n)\rangle && \text{by definition of } H \\ &= \langle \Delta_d\psi(n), \varphi(n)\rangle + \langle V(n)\cdot\psi(n), \varphi(n)\rangle && \text{by definition of } \langle , \rangle \\ &= \langle \psi(n), \Delta_d\varphi(n)\rangle + \langle V(n)\cdot\psi(n), \varphi(n)\rangle && \text{as } \Delta_d \text{ is self-adjoint} \end{aligned} \tag{2.4}$$

另一方面，注意：

$$\begin{aligned}\langle V(n)\cdot\psi(n),\varphi(n)\rangle &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\overline{V(n)\psi(n)}\varphi(n) \quad \text{by definition of } \langle,\rangle\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\overline{\psi(n)V(n)}\varphi(n)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\overline{\psi(n)}V(n)\varphi(n) \quad \text{since } V(n)\in\mathbb{R}\\ &= \langle\psi(n),V(n)\cdot\varphi(n)\rangle \quad \text{by definition of } \langle,\rangle\end{aligned} \tag{2.5}$$

将 (2.5) 代入 (2.3)，得到：

$$\begin{aligned}\langle H\psi(n),\varphi(n)\rangle &= \langle\psi(n),\Delta_d\varphi(n)\rangle + \langle\psi(n),V(n)\varphi(n)\rangle\\ &= \langle\psi(n),(\Delta_d+V)\varphi(n) && \text{by definition of } \langle,\rangle\\ &= \langle\psi(n),H\varphi(n)\rangle && \text{for definition } H\end{aligned}$$

由此可得H 是自伴的。 □

由前一个命题可得以下推论。

推论 2.4. 设 $H = \Delta_d + V$ 是一维离散薛定谔算子。若 V 有界，则 H 是有界自伴算子。

2.2. **一维离散遍历薛定谔算子**。 设 $\{\Omega, T\}$ 是一个动力系统，并考虑$f\colon \Omega \to \mathbb{R}$。每个 $\omega\in\Omega$ 及其在T (即 集合 $\{T^n\omega\}_{n\in\mathbb{Z}}$) 下的轨道都会导出势函数的定义：

$$\begin{aligned}V_\omega : \mathbb{Z} &\to \mathbb{R}\\ n &\mapsto f(T^n\omega).\end{aligned} \tag{2.6}$$

因此，每个 $\omega\in\Omega$都对应于一个薛定谔算子

$$\begin{aligned}H_\omega : \mathcal{D}(H_\omega)\subseteq \ell^2(\mathbb{Z}) &\to \ell^2(\mathbb{Z})\\ \psi &\mapsto (\Delta_d + V_\omega)\psi.\end{aligned} \tag{2.7}$$

且 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 称为具有动力系统定义的势的薛定谔算子族。

我们用 $\mathcal{S}(\mathcal{H})$表示希尔伯特空间中的自伴算子空间，即：

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) = \{H : \mathcal{D}(H)\subseteq\mathcal{H}\to\mathcal{H} \mid H \text{ is self-adjoint}\}$$

下面的定义将遍历理论与薛定谔算子联系起来。

定义 2.5。 设 $(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ 为一个概率空间，并考虑：

$$\begin{aligned}A : \Omega &\to \mathcal{S}(\mathcal{H})\\ \omega &\mapsto H_\omega\end{aligned}$$

如果存在一族遍历变换$\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 作用于Ω，以及一族酉算子 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ en $\mathcal{H}$，使得：则算子 H_ω 是一个遍历算子。

$$H_{T_i(\omega)} = U_i^* H_\omega U_i$$

其中U_i^*是U_i的伴随算子。

引理 2.6。 设 $(\Omega,\ \mathcal{B},\ \mu)$ 为一个概率空间，$\{\Omega,\ T\}$ 为一个动力系统，其中 T 是一个μ–遍历变换，且 $f\colon\ \Omega\ \to\mathbb{R}$ 为给定函数。则，算子 H_ω （公式 *2.7*）是遍历的。

证明。 考虑变换：

$$A : \Omega \to \mathcal{S}(\mathcal{H})$$
$$\omega \mapsto H_\omega = \Delta_d + V_\omega$$

根据假设，T 是 μ–遍历的，因此 $\{T^t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ 是 Ω 上的一族遍历变换。要证明 H_ω 是遍历算子，需要找到一族酉算子$\{U_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$，使得：

$$H_{T^t(\omega)} = U_t^* H_\omega U_t \tag{2.8}$$

对于每个 $t \in \mathbb{Z}$，考虑作用在 $\ell^2(\mathbb{Z})$上的平移算子：

$$U_t : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$$
$$\psi(n) \mapsto \psi(n+t)$$

注意到算子U_t 是酉的：

$$\|U_t\| = \sup_{\psi\neq 0} \frac{\|U_t\psi(n)\|}{\|\psi(n)\|} = \sup_{\psi\neq 0} \frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\psi(n+t)|^2}{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\psi(n)|^2} = \sup_{\psi\neq 0} \frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\psi(n)|^2}{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\psi(n)|^2} = 1$$

因此，$\{U_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ 是作用在 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上的一族酉算子。此外，我们有：

$$U_t^* = U_{-t}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

令 $\psi(n) \in \ell^2(\mathbb{Z})$。则：

$$\begin{aligned} H_{T^t(\omega)}\psi(n) = (\Delta_d + V_{T^t\omega})\psi(n) &= \Delta_d\psi(n) + V_{T^t\omega}\psi(n) \\ &= \psi(n+1) + \psi(n-1) + f(T^n[T^t\omega])\psi(n) \\ &= \psi(n+1) + \psi(n-1) + f(T^{n+t}\omega)\psi(n) \end{aligned} \tag{2.9}$$

此外：

$$\begin{aligned} U_{-t}H_\omega U_t\psi(n) = U_{-t}H_\omega\psi(n+t) &= U_{-t}[(\Delta_d + V_\omega)\psi(n+t)] \\ &= U_{-t}[\Delta_d\psi(n+t) + V_\omega\psi(n+t)] \\ &= U_{-t}(\psi(n+t+1) + \psi(n+t-1) + f(T^{n+t}\omega)\psi(n+t)) \\ &= \psi(n+1) + \psi(n-1) + f(T^{n+t}\omega)\psi(n) \end{aligned} \tag{2.10}$$

由方程 (2.9) 和 (2.10) 可得：

$$H_{T^t(\omega)}\psi(n) = U_t^* H_\omega U_t\psi(n), \quad \forall\psi(n) \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

□

引理 2.6 使我们能够得出结论：H_ω（方程 2.7）是一个遍历算子。因此，若T 是 Ω 上的遍历同胚，则 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 是一个离散一维薛定谔遍历算子族。

2.3. **重复性质与动力系统** $\{\Omega, T\}$。

定义 2.7。 设 (Ω,d) 为一个紧致度量空间。序列 $\{\omega_n\}_{n\geq 0} \subseteq \Omega$ 满足重复性质 (RP)，若对所有 $\varepsilon > 0$ 和 $r \in \mathbb{Z}_+$，都存在 $q \in \mathbb{Z}_+$，使得$d(\omega_n, \omega_{n+q}) < \varepsilon$对所有 $n \in \{0, 1, ...rq\}$均成立。

图 2.3 展示了 $\varepsilon > 0$ 在参数 $r = 4$ 下的RP。

如果 Ω 是紧致的，则性质 RP 与 Ω 上定义的度量无关。下面的引理对此进行了说明。

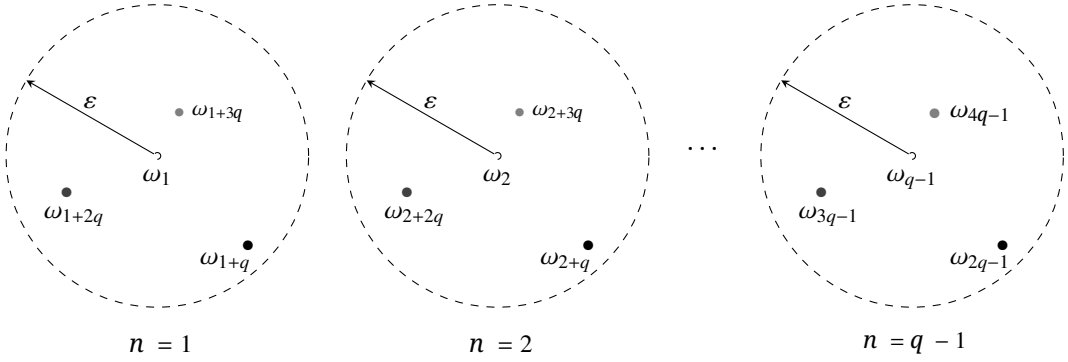


图2.1. 性质*RP*的示意图。

引理 2.8。 设 (Ω, d_1) 和 (Ω, d_2) 是紧致度量空间，并假设 $\{\omega_n\}_{n\geq 0}$ 在 (Ω, d_1) 上满足 RP。则 $\{\omega_n\}_{n\geq 0}$ 在 (Ω, d_2) 上满足 RP。

证明。 设 $\{\omega_n\}_{n\geq 0}$ 在 (Ω,d_1) 上满足PR。令 $\varepsilon = \frac{1}{k}$ 和 $r = k$，其中$k \in \mathbb{Z}_+$ 取自定义 2.7。考虑$B^{d_1}(\omega_i, \frac{1}{k})$，它是在空间 (Ω,d_1) 上以 ω_i 为中心、半径为 $\frac{1}{k}$ 的开球。注意:

$$\bigcup_{i=0}^{kq} B_{d_1}(\omega_i, \frac{1}{k}) \cup A$$

这是空间 (Ω,d_1) 上 Ω 的一个有限覆盖，其中A 是 (Ω, d_1) 上的一个开集，覆盖 $\Omega \setminus \{\omega_0, \ldots, \omega_{kq}\}$。同理:

$$\bigcup_{i=0}^{\bar{k}\bar{q}} B_{d_2}(\omega_i, \frac{1}{\bar{k}}) \cup B$$

这是空间 (Ω, d_2) 上 Ω 的一个有限覆盖，其中$B^{d_2}(\omega_i, \frac{1}{k})$ 是以 ω_i 为中心的开球，半径为 $\frac{1}{k}$，而B 是覆盖 $\Omega \setminus \{\omega_0, \ldots, w_{kq}\}$ 的开集，且该空间为 (Ω, d_2)。

给定$k \in \mathbb{Z}_+$，存在$k \in \mathbb{Z}_+$，使得 $\frac{1}{k} < \frac{1}{\bar{k}}$。由于$B^{d_1}$ 和B^{d_2} 分别是 (Ω, d_1) 和 (Ω, d_2) 上的开球，对于每个$x \in \Omega$，我们有$B^{d_1}(x, \frac{1}{k}) \subset B^{d_2}(x, \frac{1}{k})$，或者$B^{d_2}(x, \frac{1}{k}) \subset B^{d_1}(x, \frac{1}{\bar{k}})$。我们将分别考察这两种情形。

首先，假设$B^{d_1}(x, \frac{1}{k}) \subset B^{d_2}(x, \frac{1}{k})$，并考虑$x = \omega_n$，其中$n \in \{0, \ldots\ldots, kq\}$。根据假设，$\{\omega_n\}_{n\geq 0}$ 在 (Ω, d_1) 上满足RP，这意味着对于所有$n \in \{0, \ldots\ldots, kq\}$，都有 $\omega_{n+q} \in B^{d_1}(\omega_n, \frac{1}{k})$。因此:

$$\omega_{n+q} \in B_{d_1}(\omega_n, \frac{1}{k}) \subset B_{d_2}(\omega_n, \frac{1}{k}) \quad \Rightarrow \quad \omega_{n+q} \in B_{d_2}(\omega_n, \frac{1}{\bar{k}}), \quad \forall n \in \{0, \ldots, kq\},$$

取$q = \bar{q}$，我们得出 $\{\omega_n\}_{n\geq 0}$ 在 (Ω,d_2) 上满足RP。

现在我们假设 $B^{d_2}(x, \frac{1}{k}) \subset B^{d_1}(x, \frac{1}{k})$。这意味着，对于 $x = \omega_n$ 满足 $n \in \{0, \ldots\ldots, kq\}$ 的情形，若 $d_1(\omega_n, y) < \frac{1}{k}$，则 $d_2(\omega_n, y) < \frac{1}{k}$。根据假设，$\{\omega_n\}_{n\geq 0}$ 满足 RP，定义在 (Ω, d_1) 上，

因此，对于 $d_1(\omega_n, \omega_{n+q}) < {}^1k$，当 $n \in \{0, \ldots\ldots, kq\}$ 时成立。于是：

$$B_{d_2}(\omega_n, \frac{1}{k}) \subset B_{d_1}(\omega_n, \frac{1}{k}) \quad \Rightarrow \quad d_2(\omega_n, \omega_{n+q}) < d_1(\omega_n, \omega_{n+q}) < \frac{1}{k}$$
$$\Rightarrow \quad d_2(\omega_n, \omega_{n+q}) < \frac{1}{k}, \quad \forall n \in \{0, \ldots, kq\}$$

那么 $\{\omega_n\}_{n\geq 0}$ 在 (Ω, d_2) 上满足 RP。 □

现在我们定义集合 $PRP(T)$，它将性质RP 与动力系统联系起来。

定义 2.9. 设 $\{\Omega, T\}$ 是一个动力系统。$PRP(T)$ 定义为 Ω 中满足以下条件的点集：$\{T^n\omega\}_{n\geq 0}$ 满足 RP。

$$PRP(T) = \{\omega \in \Omega \mid \forall \varepsilon > 0, r \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists\, q \in \mathbb{Z}_+ : d(T^n\omega, T^{n+q}\omega) < \varepsilon, \text{to } 0 \leq n \leq rq\} \tag{2.11}$$

考虑 $\varepsilon(k) = {}^1k$，$k \in \mathbb{Z}_+$，集合 $PRP(T)$ 可表示为：

$$PRP(T) = \{\omega \in \Omega \mid \forall k \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists\, q \in \mathbb{Z}_+ : d(T^n\omega, T^{n+q^k}\omega) < \frac{1}{k}, \text{to } 0 \leq n \leq kq\} \tag{2.12}$$

引理 2.10. 设 $\omega \in PRP(T)$。给定 k 和 $r \in \mathbb{Z}_+$，令 q_k 满足 $d(T^n\omega, T^{n+q^k}\omega) < {}^1k$，其中 $0 \leq n \leq rq_k$。则：

$$\lim_{k\to\infty} q_k = \infty$$

证明。设 $\omega \in PRP(T)$。反证法，假设存在 $L \in \mathbb{Z}_+$，使得对所有正整数 k，都有 $q_k < L$。根据定义 2.9，存在 $K \in \mathbb{Z}_+$，使得对于$n \in \{0, \ldots, KL\}$，我们有

$$d(T^n\omega, T^{n+L}\omega) \geq \frac{1}{K},$$

否则，$q_K = L$，这不满足对每个$k \in \mathbb{Z}_+$都有$q_k < L$。另一方面，由于 $\{T^n\omega\}_{n\geq 0}$ 满足RP，因此对每个k，都存在$q_k \in \{0, 1, \ldots L-1\}$，使得$d(T^n\omega, T^{n+q^k}\omega) < {}^1k$，其中 $0 \leq n \leq kq_k$。

令 $\varepsilon_0 = \min_{q_k} d(T^n\omega, T^{n+q^k}\omega)$，并令 $m \in \mathbb{Z}_+$使得 $0 < {}^1m < \min\{{}^1K, \varepsilon_0\}$。因此，由于 $\omega \in PRP(T)$，对每个 $0 \leq n \leq mq_m$，必定存在一个 $q_m \in \mathbb{Z}$，使得$d(T^n\omega, T^{n+q^m}\omega) < {}^1m$。然而，由于 ${}^1m < \varepsilon_0$，因此 $q_m \notin \{0, 1, \ldots L-1\}$。由此可得 $q_m \geq L$，但这与对所有 k 都有 $q_k < L$ 矛盾。我们得出 $\lim_{k\to\infty} q_k = \infty$。 □

在接下来的两个命题中，我们研究集合 $PRP(T)$ 的一些性质。

引理 2.11. $PRP(T)$ 是 Ω 上的 G_δ 集（即 $PRP(T)$ 是开子集的可数交）。

证明。设k 和 q 为正整数，考虑：

$$A_k(q) = \left\{\omega \in \Omega \mid \max_{0\leq n\leq kq} d(T^n\omega, T^{n+q}\omega) < \frac{1}{k}\right\}$$

我们有，$A_k(q)$ 是 Ω 的一个开子集。事实上，给定函数 f:

$$f : \Omega \to \Omega \times \Omega$$
$$\omega \mapsto (T^n\omega, T^{n+q}\omega)$$

我们注意到 f 是连续的，因为根据假设，$T: \Omega \to \Omega$ 是一个同胚。此外，我们知道度量 $d: \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}^+$ 是一个连续函数，因此 $d \circ f: \Omega \to \mathbb{R}^+$ 是连续的，于是：

$$d \circ f(A_k(q)) = [0, \frac{1}{k})$$

其中 $[0, \frac{1}{k})$ 是 $\mathbb{R}^+$ 上的开集。由此可得，$A_k(q)$ 是 Ω 上的开集。

现在，我们将证明以下等式

$$\bigcap_{k\geq 1}\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{q\geq m} A_k(q) = PRP(T) \tag{2.13}$$

设 $\omega \in \bigcap_{k\geq 1}\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{q\geq m} A_k(q)$，则对于每个 k 和 m，在 $\mathbb{Z}$ 中都存在 q，使得 $d(T^n\omega, T^{n+q}\omega) < \frac{1}{k}$，对所有 $n \in \{0, \ldots, kq\}$ 均成立。根据定义 2.9，我们有 $\omega \in PRP(T)$，即

$$\bigcap_{k\geq 1}\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{q\geq m} A_k(q) \subseteq PRP(T)$$

类似地，若 $\omega \in PRP(T)$，则对于 $k \in \mathbb{Z}_+$，存在 q 使得 $d(T^n\omega, T^{n+q}\omega) < \frac{1}{k}$，从而对所有正整数 k 都有 $\omega \in A_k(q)$：

$$\omega \in \bigcap_{k\geq 1}\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{q\geq m} A_k(q)$$

因此，$PRP(T)$ 是开集的可数交，所以它是一个 G_δ 集。 □

引理 2.12. *$PRP(T)$ 是 $T-$不变的，即 $T(PRP(T)) \subseteq PRP(T)$。*

证明。给定 $\omega \in PRP(T)$，我们来证明 $T\omega \in PRP(T)$，即对所有 $k \in \mathbb{Z}_+$，存在 q 使得 $d(T^n(T\omega), T^{n+q}(T\omega)) < \frac{1}{k}$，对于 $0 \leq n \leq kq$。

若 $\omega \in PRP(T)$，则存在 $q \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $d(T^n\omega, T^{n+q}\omega) < \frac{1}{k+1}$，对于 $0 \leq n \leq (k+1)q$。这特别意味着对于 $0 \leq n \leq kq$：

$$d(T^{n+1}\omega, T^{n+1+q}\omega) < \frac{1}{k+1} \quad \Rightarrow \quad d(T^n(T\omega), T^{n+q}(T\omega)) < \frac{1}{k}$$

那么，$\{T^n(T\omega)\}_{n\geq 0}$ 满足 RP，所以 $T\omega \in PRP(T)$）。 □

因此，对于所有满足 $\omega \in PRP(T)$ 的情形，我们有 $\{T^n\omega\}_{n\geq 0} \subseteq PRP(T)$。

定义 2.13. (BD, [3] 第 *650* 页)。我们称动力系统 $\{\Omega, T\}$ 满足：

(i) 拓扑重复性质（TRP），若 $PRP(T)$ 在 Ω 中稠密。*(ii)* 度量重复性质（MRP），若 $\mu(PRP(T)) > 0$，其中 $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ 是一个测度空间。*(iii)* 全局重复（GRP），若 $PRP(T) = \Omega$。

作为本节的总结，在接下来的引理中，我们将分别证明，TRP 和 MRP 是充分条件，可确保集合 $PRP(T)$ 从拓扑和测度论视角来看，在 Ω 上是泛型的。

引理 2.14. *若 $\{\Omega, T\}$ 满足 TRP，则集合 $PRP(T)$ 在 Ω 中是剩余集。*

证明。根据引理 (2.11)，集合 $PRP(T)$ 是 G_δ。现在，利用假设 $PRP(T)$ 是稠密的，我们得出 $PRP(T)$ 是 G_δ 且稠密的，因此，根据定义，它是 Ω 上的一个剩余集。□

引理 2.15。 给定 $\alpha \in PRP(T)$，使得 $\{T^n\alpha\}_{n\geq 0}$ 在 Ω 中稠密。则：

(i) 系统 $\{\Omega, T\}$ 满足 *TRP*。*(ii)* 给定 $q \in \mathbb{Z}$，

集合 $\{T^{q+j}\alpha\}_{j\geq 0}$ 在 Ω 中稠密。

证明。

(i) 设 $\alpha \in PRP(T)$。由引理 2.12，$\{T^n\alpha\}_{n\geq 0} \subseteq PRP(T)$。因此，若 $\{T^n\alpha\}_{n\geq 0}$ 在 Ω 中稠密，则 *PRP(T)* 包含 Ω 的一个稠密子集，因而 *PRP(T)* 在 Ω 中稠密。

(ii) 设 $\omega \in \Omega$。定义集合：$A = \{\alpha, T\alpha, \ldots, T^{q-1}\alpha\}$。由于 A 是有限集，存在 $\delta_0 > 0$使得 $B^{\delta_0}(\omega)$，即以 ω 为中心、半径为 δ_0 的开球与 A不相交：

$$B_{\delta_0}(\omega) \cap A = \emptyset$$

由于根据假设，集合 $\{T^n\alpha\}_{n\geq 0}$ 在 Ω 中稠密，因此存在一个 $j \geq 0$，使得$T^j\alpha \in B^{\delta_0}(\omega)$，从而：

$$\{T^n\alpha\}_{n\geq 0} \cap B_{\delta_0}(\omega) \neq \emptyset$$

由于$B^{\delta_0}(\omega) \cap A = \emptyset$，且$T_j\ \alpha \in B^{\delta_0}(\omega)$，因此$j \geq q$。由此可得，$\{T_{q+j}\alpha\}_{n\geq 0}$在 Ω 中稠密。□

引理 2.16. 若 $\{\Omega, T\}$满足 *MRP*，且 T 关于μ–遍历，则$\mu(PRP(T)) = \mu(\Omega)$。

证明。 为简化计算，记$PRP(T) = A$。设系统 $\{\Omega, T\}$满足*MRP* 且 $\mu(A) > 0$。我们将证明 $\mu(A) = 1$。令

$$B = \bigcup_{n\geq 0} T^{-n}A$$

则$T^{-1}B = \bigcup_{n\geq 1} T^{-n}A$，因此$T^{-1}B \subseteq B$。这意味着 $\mu(B) = 0$或 $\mu(B) = 1$，因为T是 μ–遍历的。由于$A \subseteq B$且根据假设 $\mu(A) > 0$，因此 $\mu(B) > 0$，从而 $\mu(B) = 1$。此外，由于T 是不变的，$\mu(T^{-1}(B)) = 1$。注意：

$$1 = \mu(T^{-1}(B)) = \mu(A) + \mu(T^{-1}(B) \setminus A)$$

此外

$$1 = \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$$

于是我们有 $\mu(B \setminus A) = \mu(T^{-1}(B) \setminus A)$。

现在假设 $\mu(B \setminus A) > 0$。注意，$T^{-1}(B \setminus A) \subseteq B \setminus A$，事实上：

$$\begin{aligned} x \in T^{-1}(B \setminus A) \Rightarrow T(x) \in B \setminus A &\Rightarrow T(x) \in B \text{ and } T(x) \notin A \\ &\Rightarrow x \notin A && \text{lemma 2.12} \\ &\Rightarrow x \in B \setminus A && \text{because } T^{-1}B \subseteq B \end{aligned}$$

由T的遍历性可知，$\mu(B\setminus A) = 1$，因此 $\mu(A) = 0$，这与假设 $\mu(A) > 0$ 矛盾。因此 $\mu(B \setminus A) = 0$，从而得出 $\mu(A) = 1$，即$\mu(PRP(T)) = 1$。□

Boshernitzan 和 Damanik 证明，*MRP* 是从测度论视角来看，使连续谱成为遍历薛定谔算子族的泛性质的一个充分条件 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ （[3] 定理 *2*，第 650 页）。然而，这一结果超出了本文的范围。下一节我们将研究 Gordon 引理，这一结果将使我们能够证明，从拓扑学视角来看，连续谱是 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$的泛性质。

3. Gordon 引理

Gordon 引理是支撑定理**A** 和**B**的主要分析工具。本节我们给出 Gordon 势的定义，并研究薛定谔算子矩阵表示的一些性质。我们还将详细证明 Gordon 引理。

3.1. **戈登势**。

定义3.1. 有界函数$V:\ \mathbb{Z}\ \to\ \mathbb{R}$ 是一个戈登势，如果存在一个周期函数序列 $\{V_m\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$: $\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$，其中 $V_m(n)\ =V_m(n+T_m)$ 且 $T_m\ \to\ \infty$，满足以下两个条件:

(i) $\sup_{n,m}|V_m(n)|<\infty$.
(ii) $\sup_{|n|\le 2T_m}|V_m(n)-V(n)|\le Cm^{-T_m}$, for a $C>0$.

戈登势本质上是一个函数，对于 $|n|\ \le\ 2T_m$，它可以由一列周期函数近似。除了任意周期函数之外，戈登势的一个非平凡例子是$V(n)\ =\sin(an)\ +\sin(bn)$，其中$a$ 和b 满足$a\ b\notin\ \mathbb{Q}$。下面陈述的 Gordon 引理描述了 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 中离散薛定谔算子的谱类型:

$$H[\psi(n)]=\psi(n+1)+\psi(n-1)+V(n)\psi(n) \tag{3.1}$$

其势函数$V(n)$满足定义3.1。

定理3.2。（**戈登引理**）设 $V:\ \mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ 是戈登势。对于 $E\ \in\mathbb{C}$，若 ψ是以下方程的一个解:

$$\psi(n+1)+\psi(n-1)+V(n)\psi(n)=E\cdot\psi(n) \tag{3.2}$$

则:

$$\limsup_{|n|\to\infty}\frac{\psi(n+1)^2+\psi(n)^2}{\psi(1)^2+\psi(0)^2}\ge\frac{1}{4} \tag{3.3}$$

方程3.3意味着 $\lim_{|n|\to\infty}\psi(n)\ >0$。因此:

$$\|\psi(n)\|^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\psi(n)|^2=\infty \tag{3.4}$$

由方程3.4可知，$\psi(n)\ \notin\ \ell^2(\mathbb{Z})$，因此，$\ell^2(\mathbb{Z})$中的算子$H$（方程3.1）没有特征值（即其点谱为空）。下面的定理给出了戈登势的一个刻画，这将在后面对定理A和B的证明中发挥作用。

定理3.3。有界函数 $V:\ \mathbb{Z}\ \to\ \mathbb{R}$ 是戈登势，当且仅当存在一个序列 $\{q_m\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$，使得 $q_m\ \to\ \infty$，并且对于 $aC\ >0$ 和每个 $m\ \ge1$:

$$\max_{1\le n\le q_m}|V(n)-V(n+q_m)|\le Cm^{-q_m}\quad and\quad \max_{1\le n\le q_m}|V(n)-V(n-q_m)|\le Cm^{-q_m}$$

证明。“⇒”假设$V(n)$是戈登势。利用三角不等式以及V_m 是周期为T_m的周期函数这一事实:

$$\begin{aligned}\max_{1\le n\le T_m}|V(n)-V(n\pm T_m)|&=\max_{1\le n\le T_m}|V(n)-V_m(n)+V_m(n\pm T_m)-V(n\pm T_m)|\\&\le\sup_{1\le n\le T_m}|V_m(n\pm T_m)-V(n\pm T_m)|+\sup_{1\le n\le T_m}|V_m(n)-V(n)|\\&\le 2Cm^{-T_m}\end{aligned}$$

取$q_m=T_m$ 和 $\hat{}C\ =2C$，可得:

$$\max_{1\le n\le q_m}|V(n)-V(n\pm q_m)|\le\hat{C}m^{-qm}$$

其中 $\lim_{m\to\infty} q_m = \infty$。

"⇐" 假设存在 $C > 0$，使得 $\max_{1\le n\le q_m} |V(n) - V(n \pm q_m)| \le Cm^{-q_m}$，其中 $\{q_m\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ 是一个正整数序列，满足 $q_m \to \infty$。我们希望对每个 $m \in \mathbb{Z}$，构造一个周期函数 V_m：$\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$，其周期为 T_m，使得 $\sup_{n,m} |V_m(n)| < \infty$，且 $\sup_{|n|\le 2T_m} |V_m(n) - V(n)| \le Cm^{-T_m}$。

令 $m \in \mathbb{Z}$。根据假设，对于每个 $n \in \{1, \dots, q_m\}$，存在 $r_1(m)$ y $r_2(m)$，使得：

$$V(n - q_m) + r_1(m) = V(n), \qquad |r_1(m)| \le Cm^{-q_m} \quad \text{y}$$
$$V(n) + r_2(m) = V(n + q_m), \qquad |r_2(m)| \le Cm^{-q_m}$$

首先考虑函数 V_m：$\{1 - q_m, \dots, 2q_m\} \to \mathbb{R}$，其定义如下：

$$V_m(n) = \begin{cases} V(n) + r_1(m) & \text{if } 1 - q_m \le n \le 0 \\ V(n) & \text{if } 1 \le n \le q_m \\ V(n) - r_2(m) & \text{if } q_m + 1 \le n \le 2q_m \end{cases}$$

对于所有 $n \in \{1, \dots, q_m\}$，函数 V_m 是周期的：

$$\begin{aligned} V_m(n + q_m) &= V(n + q_m) - r_2(m) && \text{definition of } V_m(n), \text{ because } q_m + 1 \le n + q_m \le 2q_m \\ &= V(n) && \text{by hypothesis} \\ &= V_m(n) && \text{definition of } V_m(n) \end{aligned}$$

同理：

$$\begin{aligned} V_m(n - q_m) &= V(n - q_m) + r_1(m) && \text{definition of } V_m(n) \text{ because } 1 - q_m \le n - q_m \le 0 \\ &= V(n) && \text{by hypothesis} \\ &= V_m(n) && \text{definition of } V_m(n) \end{aligned}$$

因此V_m 是周期为q_m的周期函数。

通过对每个$j \in \mathbb{Z}$ 规定$V_m(j) = V_m(n)$，其中$n \in \{1, \dots q_m\}$ 且$j \equiv_{q_m} n$，将函数V_m 扩展到 $\mathbb{Z}$。由此可知V_m：$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 是周期为q_m的周期函数。

此外，由于函数V：$\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ 有界，存在K 使得对所有$n \in \mathbb{Z}$，$V(n) \le K$。令$r(m) = \max\{r_1(m), r_2(m)\}$，注意对所有$n$ 和$m \in \mathbb{Z}$：

$$|V_m(n)| \le |V(n)| + |r(m)| \le K + Cm^{-q_m} < \infty$$

于是 $\sup_{n,m} |V_m(n)| < \infty$。最后：

$$|V_m(n) - V(n)| \le |r(m)| \le Cm^{-q_m} \Rightarrow \sup_{|n|\le 2q_m} |V_m(n) - V(n)| \le Cm^{-q_m}$$

取$q_m = T_m$，可得函数序列 $\{V_m\}_{m\in\mathbb{Z}^+}$ 满足定义3.1，因此$V(n)$是戈登势。

□

3.2. 薛定谔算子的矩阵表示。 令 $V(n)$ 为一个戈登势，$\Psi(n)$ 为列向量 $(\psi(n), \psi(n+1))$，其中 $\psi(n)$ 是方程的一个解：

$$\psi(n + 1) + \psi(n - 1) + V(n)\psi(n) = E\psi(n) \tag{3.5}$$

这意味着 $E \in \mathbb{C}$ 是 H （方程 3.1）的一个特征值，且给定初始条件$\Psi(0)$。对于$n > 0$, 方程（3.5）可写成矩阵形式:

$$\Psi(n) = A(n)\cdots A(1)\Psi(0), \quad \text{where} \quad A(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & E - V(n) \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

类似地，令 $\Psi_m(n) = (\psi_m(n), \psi_m(n+1))$，并考虑方程:

$$\psi_m(n-1) + \psi_m(n+1) + V_m(n)\psi_m(n) = E\psi_m(n)$$

初始条件为 $\Psi_m(0) = \Psi(0)$。因此:

$$\Psi_m(n) = A_m(n)\cdots A_m(1)\Psi(0), \quad \text{where} \quad A_m(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & E - V_m(n) \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

在接下来的两个引理中，我们研究 $A_m(n)$ 和 $A(n)$ 的一些性质。

定理 3.4. 设 $A(n)$ 和 $A_m(n)$ 分别满足方程(3.6) 和 (3.7)。则:

$$\|A_m(n)\cdots A_m(1) - A(n)\cdots A(1)\| \le n \cdot [\sup_{m,j}\|A_m(j)\|]^{n-1} \cdot [\sup_{1\le j\le n}\|A_m(j) - A(j)\|]$$

证明. 矩阵 $A_m(n)\cdots A_m(1) - A(n)\cdots A(1)$ 可以写成伸缩和:

$$\begin{aligned}
&A_m(n)\cdots A_m(1) - A(n)\cdots A(1)\\
&= [A_m(n) - A(n)]\cdot[A_m(n-1)\cdots A_m(1)]\\
&+ [A(n)]\cdot[A_m(n-1) - A(n-1)]\cdot[A_m(n-2)\cdots A_m(1)] + \cdots\\
&+ [A(n)\cdots A(n-j+1)]\cdot[A_m(n-j) - A(n-j)]\cdot[A_m(n-j-1)\cdots A_m(1)] + \cdots\\
&+ [A(n)\cdots A(2)]\cdot[A_m(1) - A(1)]
\end{aligned} \tag{3.8}$$

由于 $\|AB\| \le \|A\|\cdot\|B\| = \|B\|\cdot\|A\|$, 方程 (3.8) 右侧每一项的范数都可以如下有界，对所有 $0 \le j \le n-1$ 均成立:

$$\begin{aligned}
&\|[A(n)\cdots A(n-j+1)]\cdot[A_m(n-j) - A(n-j)]\cdot[A_m(n-j-1)\cdots A_m(1)]\|\\
&\le \|[A(n)\cdots A(n-j+1)]\|\cdot\|[A_m(n-j) - A(n-j)\|\cdot\|[A_m(n-j-1)\cdots A_m(1)]\|\\
&= \|[A(n)\cdots A(n-j+1)]\|\cdot\|[A_m(n-j-1)\cdots A_m(1)]\|\|[A_m(n-j) - A(n-j)]\|\\
&\le [\sup_{m,j}\|A_m(j)\|]^{n-1}\cdot[\sup_{1\le j\le n}\|A_m(j) - A(j)\|]
\end{aligned} \tag{3.9}$$

在上述方程中:

$$\sup_{m,j}\|A_m(j)\| = \sup_{1\le j\le n}\{\|A_m(j)\|, \|A(j)\|\}$$

由方程 (3.8) 和 (3.9) 可得:

$$\|A_m(n)\cdots A_m(1) - A(n)\cdots A(1)\| \le n[\sup_{m,j}\|A_m(j)\|]^{n-1}[\sup_{1\le j\le n}\|A_m(j) - A(j)\|]$$

□

定理 3.5. 设 x 是一个向量，满足 $\|x\| = 1$，且 B 是一个可逆 2×2 矩阵。则:

$$\max_{a=\pm 1,\pm 2}\|B^a x\| \ge \frac{1}{2}$$

特别地，对于 $\Psi_m(n) = A_m(n)\cdots A_m(1)\Psi(0)$，我们有:

$$\max_{a=\pm 1,\pm 2}\|\Psi_m(aT_m)\| \ge \frac{1}{2}\|\Psi(0)\|$$

证明。 凯莱-哈密顿定理指出，若$q(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$ 是向量空间V 中一个n维线性变换T 的特征多项式，则$q(A) = 0$，其中A 是与算子T相关联的$n \times n$ 方阵（Axler, 2015，第 8.37 定理）。因此，若$a_1\lambda + a_0$ 是与矩阵$B_{2\times 2}$相关联的特征多项式$q(\lambda) = a_2\lambda^2 +$ ，则：

$$a_2 B^2 + a_1 B + a_0 = 0 \tag{3.10}$$

为证明定理 3.5，我们考虑三种情况。首先 $|a_2| = \max_{0\le i\le 2} |a_i|$。将方程 (3.10) 的右端乘以 $^{1}{}_{a_2} B^{-2} x$，并令 $c_1 = a_1 a_2$ y $c_0 = \overline{a_0 a_2}$，得到：

$$x + c_1 B^{-1} x + c_0 B^{-2} x = 0$$

其中 $|c_1|, |c_0| \le 1$。对上述表达式取范数：

$$\begin{aligned} \|x\| = \|c_1 B^{-1} x + c_0 B^{-2} x\| \quad &\Rightarrow \quad 1 \le |c_1| \cdot \|B^{-1} x\| + |c_0| \cdot \|B^{-2} x\| \\ &\Rightarrow \quad \max\{\|B^{-1} x\|, \|B^{-2} x\|\} \ge \frac{1}{2} \end{aligned}$$

第二种情况是 $|a_1| = \max_{0\le i\le 2} |a_i|$。将方程 (3.10) 乘以 $^{1}{}_{a_1} B^{-1} x$：

$$d_2 B x + x + d_0 B^{-1} x = 0$$

其中 $|d_2| = {}_{a_2\overline{a_1}} \le 1$ y $|d_0| = {}_{a_0\overline{a_1}} \le 1$。于是：

$$\begin{aligned} \|x\| = \|d_2 B x + d_0 B^{-1} x\| \quad &\Rightarrow \quad 1 \le |d_2| \cdot \|Bx\| + |d_0| \cdot \|B^{-1} x\| \\ &\Rightarrow \quad \max\{\|Bx\|, \|B^{-1} x\|\} \ge \frac{1}{2} \end{aligned}$$

第三种情况是 $|a_0| = \max_{0\le i\le 2} |a_i|$。采用与刚才类似的推理，现在将方程 (3.10) 乘以 $^{1}{}_{a_0} x$，即可断言：

$$\max\{\|B^2 x\|, \|Bx\|\} \ge \frac{1}{2}$$

由此可得，可逆矩阵B 满足不等式：

$$\max_{a=\pm 1,\pm 2} \|B^a x\| \ge \frac{1}{2} \tag{3.11}$$

令$B_m(n) = A_m(n) \cdots A_m(1) = \Pi_{j=1}^{n} A_m(j)$。

注意到$A_m(n) = A_m(n + T_m)$，因为$V_m(n) = V_m(n + T_m)$。于是：

$$\begin{aligned} B_m^a(T_m) = (\Pi_{j=1}^{T_m} A_m(j))^a &= \Pi_{j=1}^{T_m} A_m(j) \cdots \Pi_{j=1}^{T_m} A_m(j) \\ &= \Pi_{j=1}^{T_m} A_m(j) \cdot \Pi_{j=T_m+1}^{2T_m} A_m(j) \cdots \Pi_{j=(a-1)(T_m+1)}^{aT_m} A_m(j) \\ &= \Pi_{j=1}^{aT_m} A_m(j) \\ &= B_m(aT_m) \end{aligned}$$

在方程（3.11）中，将x 替换为 $^{\Psi(0)}{}_{\|\Psi(0)\|}$，并将$B$替换为$B_m(T_m)$：

$$\max_{a=\pm 1,\pm 2} \|B_m^a(T_m)\Psi(0)\| = \max_{a=\pm 1,\pm 2} \|B_m(aT_m)\Psi(0)\| \ge \frac{1}{2}\|\Psi(0)\|$$

□

3.3. **Gordon 引理的证明**。

证明。 本证明基于 Simon 的建议（[7]定理7.1，第476页）。一方面，注意到：

$$\begin{aligned}\|\Psi_m(n) - \Psi(n)\| &= \|[A_m(n)\cdots A_m(1) - A(n)\cdots A(1)]\cdot\Psi(0)\| \\ &\le \|(A_m(n)\cdots A_m(1) - A(n)\cdots A(1))\|\cdot\|\Psi(0)\| \\ &\le n\cdot[\sup_{m,j}\|A_m(j)\|]^{n-1}\cdot[\sup_{1\le j\le n}\|A_m(j) - A(j)\|]\cdot\|\Psi(0)\|\end{aligned} \tag{3.12}$$

其中，最后一个不等式由定理 3.4 得出。另一方面：

$$A_m(j) - A(j) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & V(n) - V_m(n)\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \|A_m(j) - A(j)\| \le |V(n) - V_m(n)|$$

根据假设，$V(n)$ 是戈登势。因此：

$$\sup_{|n|\le 2T_m}|V_m(n) - V(n)| \le Cm^{-T_m} \quad\Rightarrow\quad \lim_{m\to\infty}\sup_{|n|\le 2T_m}\|A_m(j) - A(j)\| = 0 \tag{3.13}$$

由方程 (3.12) 和 (3.13) 可得：

$$\sup_{|n|\le 2T_m}\|\Psi_m(n) - \Psi(n)\| \to 0, \quad \text{as } m\to\infty$$

那么特别地：

$$\max_{a=\pm1,\pm2}\|\Psi(aT_m) - \Psi_m(aT_m)\| \to 0, \quad \text{as } m\to\infty$$

由于 $\max_{a=\pm1,\ \pm2}\|\Psi_m(aT_m)\| \ge \frac{1}{2}\|\Psi(0)\|$ (定理 3.5)，由上式可得 ：

$$\max_{a=\pm1,\pm2}\|\Psi(aT_m)\| \ge \frac{1}{2}\|\Psi(0)\| \tag{3.14}$$

因此：

$$\begin{aligned}\limsup_{|n|\to\infty}\|\Psi(n)\| \ge \max_{a=\pm1,\pm2}\|\Psi(aT_m)\| \quad&\Rightarrow\quad \limsup_{|n|\to\infty}\|\Psi(n)\| \ge \frac{1}{2}\|\Psi(0)\| && \text{by equation (3.14)}\\ &\Rightarrow\quad \limsup_{|n|\to\infty}\frac{\|\Psi(n)\|^2}{\|\Psi(0)\|^2} \ge \frac{1}{4} && \text{since } \|\Psi(0)\| > 0\\ &\Rightarrow\quad \frac{\psi(n+1)^2 + \psi(n)^2}{\psi(1)^2 + \psi(0)^2} \ge \frac{1}{4} && \text{definition of } \|\Psi(n)\|\end{aligned}$$

因此：

$$\limsup_{|n|\to\infty}\frac{\psi(n+1)^2 + \psi(n)^2}{\psi(1)^2 + \psi(0)^2} \ge \frac{1}{4} \tag{3.15}$$

□

4. 定理A的证明

证明。 我们将证明，对于所有属于剩余集 $\mathcal{F}$ 的 $C(\Omega)$ 的 f，以及属于 Ω 的剩余集 Ω_f 中的 ω，$V(n) = f(T^n\omega)$ 都是戈登势。回顾一下，实函数 $V(n) = f(T^n\omega)$ 是戈登势，当且仅当存在一个正整数序列 $q_m \to \infty$ 以及一个 $C > 0$，使得（定理 3.3）：

$$\begin{aligned}&\max_{1\le n\le q_m}|f(T^n\omega) - f(T^{n+q_m}\omega)| \le Cm^{-q_m} \quad \text{and:}\\ &\max_{1\le n\le q_m}|f(T^n\omega) - f(T^{n-q_m}\omega)| \le Cm^{-q_m}\end{aligned} \tag{4.1}$$

证明分为三个步骤。首先，我们构造一个剩余集 $\mathcal{F} \subseteq C(\Omega)$。其次，对于每个$f \in \mathcal{F}$，我们构造一个剩余集 $\Omega_f \subset \Omega$。最后，我们证明，对于每个$f \in \mathcal{F}$以及 $\omega \in \Omega_f$，函数$f(T_n\ \omega)$ 满足方程 (4.1) 中的两个不等式，因此是一个戈登势。

(1) 构造一个剩余集 $\mathcal{F} \subseteq C(\Omega)$:
设 $\alpha \in PRP(T)$ 即 $\{T_j\ \alpha\}_{j\geq 0}$满足 RP，因此对每个 $k \in \mathbb{Z}_+$，都存在一个 q_k使得:

$$d(T^j\alpha, T^{j+q_k}\alpha) < \frac{1}{k}, \quad \text{for } 0 \leq j \leq 3q_k$$

其中 $\lim_{k\to\infty} q_k = \infty$ （引理 2.10）。

对每个 $k \in \mathbb{Z}_+$，令 $B_k = B_k(\alpha, r(k))$ 表示以 α 为中心、半径为 $r(k)$ 的开球。由于 T_j是 Ω 上的同胚，因此 $\{T^j(B_k)\}_{j=1}^{4q_k}$ 是 Ω 中的开集序列。我们将该序列中各元素的并表示为:

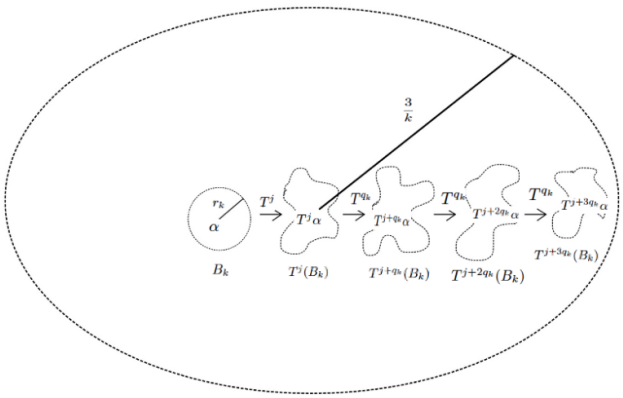
$$\bigcup_{j=1}^{q_k} T^j(B_k) \cup T^{q_k+j}(B_k) \cup T^{2q_k+j}(B_k) \cup T^{3q_k+j}(B_k) = \bigcup_{j=1}^{q_k}\bigcup_{l=0}^{3} T^{j+lq_k}(B_k)$$

以 α 为中心的开球 B_k 的半径 $r(k)$ 取值应足够小，以满足以下两个条件:

(a) $\overline{T^i(B_k)} \cap \overline{T_j(B_k)} = \emptyset, \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, 4q_k\}$ 对于 $i \neq j$。**(b)** 对于每个 $1 \leq j \leq q_k$，我们有 $\bigcup_{l=0}^{3} T_{j+lq^k}(B_k)$ 包含在半径为 $^4{}_k$的球内。

施加条件 **(a)** 是可行的，因为根据假设，T 是 Ω 中的同胚，并且我们还只考虑T的有限次迭代。关于条件 **(b)**，注意到由于 $\{T_j\ \alpha\}_{j\geq 0}$ 满足 RP，因此对于每个$k \in \mathbb{Z}$，我们有:

$$\left.\begin{aligned} d(T^j\alpha, T^{j+q_k}\alpha) &< \frac{1}{k} \\ d(T^{j+q_k}\alpha, T^{j+2q_k}\alpha) &< \frac{1}{k} \\ d(T^{j+2q_k}\alpha, T^{j+3q_k}\alpha) &< \frac{1}{k} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad d(T^j\alpha, T^{j+lq_k}\alpha) < \frac{3}{k} \quad \text{for } 0 \leq l \leq 3$$



F图 4.1. 条件 **(a)** 和**(b)**的示意图。

条件 **(a)** 和**(b)** 的作用在于，它们保证下面构造的集合 $\mathcal{F}$ 是$C(\Omega)$中的剩余集。首先，考虑集合：

$$C_k = \{g \in C(\Omega) \mid g \text{ is constant on } \bigcup_{l=0}^{3} T^{j+lq_k}(B_k) \text{ for each } j : 1 \le j \le q_k\}$$

我们将集合 $\mathcal{F}_k$ 定义为以k^{-q_k} 为半径、以$g \in C_k$为中心的开邻域：

$$\mathcal{F}_k = \{f \in C(\Omega) \mid |f - g| = \sup_{x\in\Omega} |f(x) - g(x)| < k^{-q_k}, \quad \text{para} \quad g \in C_k\} \tag{4.2}$$

对每个$m \in \mathbb{Z}_+$，考虑：

$$\hat{\mathcal{F}}_m = \bigcup_{k\ge m} \mathcal{F}_k$$

ˆ集合 $\mathcal{F}_m$ 是开集，因为它是 C(Ω) 中可数个开集的并。此外，ˆ ˆ$\mathcal{F}_m$ 在 C(Ω) 中稠密：取 h ∈ C(Ω)，我们将构造一个与 h 任意接近的 g ∈ $\mathcal{F}_m$。由于 Ω 是紧致的，因此 h 一致连续。令 x, y ∈ $\bigcup_{l=0}^{3}$ T j+lq^k(B$_k$)，根据条件 (b)：d(x, y) < 4/k。这意味着，由于 h 的一致连续性，当 k ∈ ℤ 任意大时，|h(x) − h(y)| → 0。对于给定的 ˆx ∈ $\bigcup_{l=0}^{3}$ T j+lq^k(B$_k$)，定义函数：

$$g(x) = \begin{cases} h(\hat{x}) & \text{if} \quad x \in \bigcup_{l=0}^{3} T^{j+lq_k}(B_k) \\ h(x) & \text{if} \quad x \notin \bigcup_{l=0}^{3} T^{j+lq_k}(B_k) \end{cases} \tag{4.3}$$

ˆ ˆ 因此，对于每个$m \ge 1$，$g \in C_k$ 和$h \in \mathcal{F}_m$，从而 $\mathcal{F}_m$ 在$C(\Omega)$中是稠密的。我们ˆ 得出，对于每个$m \in \mathbb{Z}_+$，集合 $\mathcal{F}_m$ 在$C(\Omega)$中是开稠密集。因此：

$$\mathcal{F} = \bigcap_{m\ge1} \hat{\mathcal{F}}_m = \bigcap_{m\ge1} \bigcup_{k\ge m} \mathcal{F}_k$$

这是$C(\Omega)$中的一个剩余集，因为它是$C(\Omega)$中开稠密集的可数交。

(2) 剩余集$\Omega_f \subseteq \Omega$的构造：
设$f \in \mathcal{F}$。根据证明前一步中集合 $\mathcal{F}$ 的定义，存在一个正整数序列k_l，满足 $\lim_{l\to\infty} k_l = \infty$，使得$f$ 属于每个 $\mathcal{F}_{k_l}$（公式 4.2）。此外，对于每个k_l，存在一个q^{k_l}，使得：

$$d(T^j\alpha, T^{j+q_{k_l}}\alpha) < \frac{1}{k_l}, \quad \text{para} \quad 1 \le j \le k_l \cdot q_{k_l}$$

其中 $\lim_{l\to\infty} q_{k_l} = \infty$，根据引理 2.10。根据引理 2.15，对于每个$q \in \mathbb{Z}$，集合 $\{T_{q+j}\alpha\}_{j\ge1}$在 Ω 中是稠密的，因此特别地，对于每个$q^{k_l}$，$\{T_{q\ ^{k_l}+j}\alpha\}_{j\ge1}$ 在 Ω 中是稠密的。后一序列中元素的并，对于每个$m \ge 1$，表示为：

$$\bigcup_{l\ge m} \bigcup_{j=1}^{q_{k_l}} T^{q_{k_l}+j}(\alpha), \quad \text{where:} \quad \bigcup_{l\ge m} \bigcup_{j=1}^{q_{k_l}} T^{q_{k_l}+j}(\alpha) \subseteq \bigcup_{l\ge m} \bigcup_{j=1}^{q_{k_l}} T^{q_{k_l}+j}(B_{k_l})$$

上述等式成立，这是因为 $\alpha \in B^{k_l}$，其中 B^{k_l} 是一个开球，这与本证明的第 *(1)*步一致。因此，该集合：

$$\Omega_{f,m} = \bigcup_{l\ge m} \bigcup_{j=1}^{q_{k_l}} T^{q_{k_l}+j}(B_{k_l})$$

在 Ω 中稠密，因为它包含 $\{T_q{}^{k_l+j}\alpha\}_{j\geq 1}$，而后者在 Ω 中稠密。我们得出：

$$\Omega_f = \bigcap_{m\geq 1} \Omega_{f,m} = \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{l\geq m} \bigcup_{j=1}^{q_{k_l}} T^{j+q_{k_l}}(B_{k_l})$$

是开稠密集的可数交，因此是 Ω 的余子集。

(3) 我们证明，对于每个 $f \in \mathcal{F}$ 以及每个 $\omega \in \Omega_f$，$f(T^n\omega)$ 都是戈登势：令 $f \in \mathcal{F}$ 和 $\omega \in \Omega_f$。由于 $\omega \in \Omega_f$，存在一个序列 $k_l \to \infty$ 使得：

$$\omega \in \bigcup_{j=1}^{q_{k_l}} T^{j+q_{k_l}}(B_{k_l})$$

ˆ 因此，对于每个 k_l，存在一个 ˆ$j (1 \leq$ ˆ$j \leq q_{k_l})$，使得 $\omega \in T_{j+q^{k_l}}(B_{k_l})$。这意味着，对于每个 j，当 $1 \leq j \leq q_{k_l}$ 时：

$$T^j\omega \in T^{\hat{j}+j+q_{k_l}}(B_{k_l}), \quad T^{j+q_{k_l}}\omega \in T^{\hat{j}+j+2q_{k_l}}(B_{k_l}) \quad \text{and} \quad T^{j-q_{k_l}}\omega \in T^{\hat{j}+j}(B_{k_l})$$

令 ¯j = ˆ$j + j$。因此：

$$T^j\omega, \quad T^{j+q_{k_l}}\omega \quad \text{and} \quad T^{j-q_{k_l}}\omega \quad \in \bigcup_{1\leq \bar{j}\leq q_{k_l}} \bigcup_{l=0}^{3} T^{\bar{j}+lq_{k_l}}(B_{k_l}), \quad \forall j: \quad 1 \leq j \leq q_{k_l}$$

考虑一个函数 $g \in C_{k_l}$。根据这份证明前一步中集合 C_{k_l} in the previous¯ 的定义，这意味着 g 在 $\bigcup_{1\leq \bar{}j\leq q_{k_l}} \bigcup_{l=0}^{3} T_{j+lq^{k_l}}(B^{k_l})$ 上为常数。特别地：

$$g(T^j\omega) = g(T^{j+q_{k_l}}\omega) \quad \text{and} \quad g(T^j\omega) = g(T^{j-q_{k_l}}\omega)$$

因此，若 $f \in \mathcal{F}$，则：

$$\begin{aligned}
|f(T^j\omega) - f(T^{j+q_{k_l}}\omega)| &= |f(T^j\omega) - g(T^j\omega) + g(T^{j+q_{k_l}}\omega) - f(T^{j+q_{k_l}}\omega)| && \text{as } g(T^j\omega) = g(T^{j+q_{k_l}}\omega) \\
&\leq |f(T^j\omega) - g(T^j\omega)| + |f(T^{j+q_{k_l}}\omega) - g(T^{j+q_{k_l}}\omega)| && \text{by triangular inequality} \\
&< k_l{}^{-q_{k_l}} + k_l{}^{-q_{k_l}} = 2k_l{}^{-q_{k_l}} && \text{as } f \in \mathcal{F}
\end{aligned}$$

同理：

$$\begin{aligned}
|f(T^j\omega) - f(T^{j-q_{k_l}}\omega)| &= |f(T^j\omega) - g(T^j\omega) + g(T^{j-q_{k_l}}\omega) - f(T^{j-q_{k_l}}\omega)| && \text{as } g(T^j\omega) = g(T^{j-q_{k_l}}\omega) \\
&\leq |f(T^j\omega) - g(T^j\omega)| + |f(T^{j-q_{k_l}}\omega) - g(T^{j-q_{k_l}}\omega)| && \text{by triangular inequality} \\
&< k_l{}^{-q_{k_l}} + k_l{}^{-q_{k_l}} = 2k_l{}^{-q_{k_l}} && \text{as } f \in \mathcal{F}
\end{aligned}$$

因此：

$$|f(T^j\omega) - f(T^{j+q_{k_l}}\omega)| < 2k_l{}^{-q_{k_l}} \quad \text{and} \quad |f(T^j\omega) - f(T^{j-q_{k_l}}\omega)| < 2k_l{}^{-q_{k_l}}$$

上述不等式对每个 $j \in \{1, ...q_{k_l}\}$ 都成立。这使我们得出结论：

$$\max_{1\leq j\leq q_{k_l}} |f(T^j\omega) - f(T^{j+q_{k_l}}\omega)| < 2k_l{}^{-q_{k_l}} \quad \text{and} \quad \max_{1\leq j\leq q_{k_l}} |f(T^j\omega) - f(T^{j-q_{k_l}}\omega)| < 2k_l{}^{-q_{k_l}}$$

将 $C = 2$ 代入方程 (4.1)，我们得出 $f(T^n\omega)$ 是一个戈登势。

□

5. 定理 B 的证明

证明。 我们着重构造 Ω 中的剩余集 Ω_f，因为证明的其余部分与**定理 A**的证明类似。设$f \in \mathcal{F}$。这意味着，对于正整数的一个子列$k_l \to \infty$，f 属于每个集合 $\mathcal{F}_{k_l}$（方程 4.2）。此外，由于根据假设，系统 $\{\Omega, T\}$ 满足TRP，Ω 可以覆盖如下：

$$\Omega \subseteq \bigcup_{\omega \in PRP(T)} B_{\varepsilon_\omega}\omega$$

其中 B_{ε_ω} 是以 $\omega \in PRP(T)$ 为中心、半径为 $\varepsilon_\omega > 0$ 的开球。对于每个 $m \in \mathbb{Z}_+$，我们定义集合：

$$\Omega_{f,m} = \bigcup_{\omega \in PRP(T)} \bigcup_{l \geq m} \bigcup_{j=1}^{q_{k_l}} T^{j+q_{k_l}}(B_{r(k_l)}(\omega))$$

对于每个 $m \in \mathbb{Z}_+$，集合 $\Omega_{f,m}$ 是开集，因为它是开集的并集。此外，$\Omega_{f,m}$ 在 Ω 中稠密，因为系统 $\{\Omega, T\}$ 满足 TRP，且 T 是同胚。因此：

$$\Omega_f = \bigcap_{m \geq 1} \Omega_{f,m} = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{\omega \in PRP(T)} \bigcup_{l \geq m} \bigcup_{j=1}^{q_{k_l}} T^{j+q_{k_l}}(B_{r(k_l)}(\omega))$$

这是 Ω 的余子集，因为它是稠密开集的交集。最后，对于每个$f \in \mathcal{F}$和 $\omega \in \Omega_{f,m}$，函数 $f(T^n\ \omega)$ 是一个戈登势。其论证与定理 A 证明（第 4 节）第三步中给出的论证相同。

□

6. 应用

作为定理 **A** 和**B**的应用，本节研究准周期薛定谔算子的谱，以及势函数由环面上的斜移决定的算子的谱。首先，下面的定理使我们能够确定更广泛的一类动力系统的谱类型。

定理 6.1。 设(Ω,d) 是一个紧致度量空间。假设 $T : \Omega \to \Omega$ 满足以下两个条件：

(i) T 是极小的：$\overline{\{T^n\omega\}}_{n\geq 0} = \Omega, \forall \omega \in \Omega$。 *(ii)* T 是等距变换：$d(\omega_1, \omega_2) = d(T\omega_1, T\ \omega_2), \forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega$。

那么系统 $\{\Omega, T\}$ 满足 TRP。因此，根据定理 ***B***，对于Ω 的某个余子集中的所有 ω 以及 $C(\Omega)$的某个余子集中的 f，算子：

$$\begin{aligned} H_\omega : \ell^2(\mathbb{Z}) &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \psi(n) &\mapsto \psi(n+1) + \psi(n-1) + f(T^n\omega)\psi(n) \end{aligned} \tag{6.1}$$

具有纯连续谱。

证明。考虑 $\omega \in \Omega$。我们的目标是证明 ω 属于 PRP(T)，即对于所有 $k \in \mathbb{Z}_+$，存在 $q_k \in \mathbb{Z}_+$，使得对于 $n \in \{0, \ldots, kq_k\}$，有 $d(T^n\ \omega, T^{n+q^k}\omega) < {}^1k$。根据假设，$\mathcal{T}$ 是极小的，因此对于 $k \in \mathbb{Z}_+$，存在 $\hat{}q_k \in \mathbb{Z}_+$，使得对于所有 $n \in \{0, \ldots, k\hat{}q_k\}$，有 $d(\omega, T\hat{}q^{\ k}\omega) < {}^1k$。由于 $\mathcal{T}$ 是等距变换：$d(\omega, T\ q^{\ k}\omega) = d(T^n\ \omega, T^{n+q^k}\omega)$。因此：

$$d(\omega, T^{\hat{q}_k}\omega) < \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \quad d(T^n\omega, T^{n+\hat{q}_k}\omega) = d(\omega, T^{\hat{q}_k}\omega) < \frac{1}{k}, \quad \forall n \in \{0, \ldots, k\hat{q}_k\}$$

取 $q_k = \hat{}q_k$，我们得出 $\omega \in PRP(T)$，因此 $\{\Omega, T\}$ 满足 TRP。 □

定理 6.2。 *(BD, [3]*定理 *3*，第 *651* 页*)*。 一般准周期薛定谔算子的谱类型。 考虑动力系统 $\{\mathbb{T}^d, T\}$，其中 T： $\mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ 是作用于 $\mathbb{T}^d$*:* $T\omega = \omega + \alpha$ 上的遍历平移，其中 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$ 且集合 $\{1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$ 在有理数域上线性无关。那么 $\{\mathbb{T}^d, T\}$ 满足 *TRP*，因此对于一般的 $\omega \in \mathbb{T}^d$ 和 $f \in C(\mathbb{T}^d)$，算子：

$$\begin{aligned} H_\omega : \ell^2(\mathbb{Z}) &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \psi(n) &\mapsto \psi(n+1) + \psi(n-1) + f(T^n\omega)\psi(n) \\ &= \psi(n+1) + \psi(n-1) + f(\omega + n\alpha)\psi(n) \end{aligned} \tag{6.2}$$

具有纯连续谱。

证明。 由于变换T： $\mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ 是遍历的，故T 在 $\mathbb{T}^d$上是极小的。此外，T 是一个等距变换，因为对于 $\mathbb{T}^d$中的 ω_1 和 ω_2：

$$d(T\omega_1, T\omega_2) = d(\omega_1 + \alpha, \omega_2 + \alpha) = |\omega_1 + \alpha - \omega_2 - \alpha| = |\omega_1 - \omega_2| = d(\omega_1, \omega_2)$$

由于T 在 $\mathbb{T}^d$上是极小的且为等距变换，根据定理 6.1，我们得出算子 (6.2) 的谱对于一般的 $\omega \in \mathbb{T}^d$而言是纯连续谱。□

现在我们研究系统 $\{\mathbb{T}^2, T\}$，其中T是斜移：$T(\omega_1, \omega_2) = (\omega_1 + 2\alpha, \omega_1 + \omega_2)$。为此，我们需要 $\mathbb{T}$的劣可逼近子集的定义。

定义 6.3。 设 $\alpha \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$。我们将常数$c(\alpha)$定义为：

$$c(\alpha) = \liminf_{q \to \infty} q\langle \alpha q \rangle \quad \text{where:} \quad \langle \alpha q \rangle = \text{dist}_{\mathbb{T}}(\alpha q, 0) = \min\{|\alpha q - p| : p \in \mathbb{Z}\}$$

若满足劣可逼近条件，则称 $\alpha \in \mathbb{T}$ 为劣可逼近数，当$c(\alpha) > 0$。因此，若存在一个子列 $\{q_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$，使得 $\lim_{q_k \to \infty} q_k\langle \alpha q_k \rangle = 0$，则 $\alpha \in \mathbb{T}$ 不是劣可逼近数。

注 6.4. 劣可逼近数集合在 $\mathbb{T}$ 中的勒贝格测度为零（Khinchin， *[6]* 定理 *29*，第 *60* 页）。因此，在 $\mathbb{T}$中，不是劣可逼近数的数集具有全测度。

定理 6.5. （*BD*， *[3]* 定理 *4*，第 *651* 页）。考虑动力系统 $\{\mathbb{T}^2, T\}$，其中 T： $\mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ 为斜移算子：$T(\omega_1, \omega_2) = (\omega_1 + 2\alpha, \omega_1 + \omega_2)$，其中 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$。以下陈述等价。

(i) α不是劣可逼近的。(ii) $\{\mathbb{T}^2, T\}$满足 *GRP*。(iii) $\{\mathbb{T}^2, T\}$满足 *MRP*。(iv) $\{\mathbb{T}^2, T\}$满足 *TRP*。

证明。
$(i) \Rightarrow (ii)$：假设 α不是劣可逼近的。我们来证明 $\{\mathbb{T}^2, T\}$满足 *GRP*，即 $\mathbb{T}^2 = PRP(T)$。由于 α 不是劣可逼近的，因此存在一个序列 $\{q_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$，满足 $\lim_{k \to \infty} q_k = \infty$，使得。

$$\lim_{k \to \infty} q_k\langle \alpha q_k \rangle = 0$$

令 $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{T}^2$，并考虑 $k \in \mathbb{Z}_+$。为了证明 $\omega \in PRP(T)$，我们将构造一个序列 $\hat{q}_k$，使得：

$$d(T^{n+\hat{q}_k}\omega, T^n\omega) < \frac{1}{k}, \quad \text{for all } n \text{ such that: } \quad 0 \le n \le \hat{q}_k \tag{6.3}$$

根据 $\mathbb{T}^2$ 中T 的定义：

$$T^{n+\hat{q}_k}\omega - T^n\omega = (2\hat{q}_k\alpha, 2\hat{q}_k\omega_1 + \hat{q}_k^2\alpha + 2n\hat{q}_k\alpha - \hat{q}_k\alpha) \tag{6.4}$$

我们要证明 $\langle 2\hat{}q_k\alpha\rangle \to 0$和 $\langle 2\hat{}q_k\omega_1 + \hat{}q_k^2\alpha + 2n\hat{}q_k\alpha - \hat{}q_k\alpha\rangle \to 0$。对于每个$k \in \mathbb{Z}_+$，令 $\hat{}q_k = m_kq_k$，其中$m_k \in \{1,。\ \ldots, k+1\}$。由此可得：

$$T^{n+\hat{q}_k}\omega - T^n\omega = (2m_kq_k\alpha, 2m_kq_k\omega_1 + (m_kq_k)^2\alpha + 2nm_kq_k\alpha - m_kq_k\alpha)$$

由于 α 不是劣可逼近的：$\langle 2\mathrm{m}_k\mathrm{q}_k\alpha\rangle \to 0$。同样：$\langle(\mathrm{m}_k\mathrm{q}_k)^2\alpha\rangle \to 0$，并且$\langle \mathrm{m}_k\mathrm{q}_k\alpha\rangle \to 0$以及 $\langle 2\mathrm{nm}_k\mathrm{q}_k\alpha\rangle \to 0$。还需证明 $2\mathrm{m}_k\mathrm{q}_k\omega_1 \to 0$。为此，我们从集合 $\{1,\cdots,\mathrm{k}+1\}$中选取 m_k，使得 $\langle \mathrm{m}_k(2\mathrm{q}_k\omega_1)\rangle < \varepsilon$。由此可得 $\mathrm{T}^{\mathrm{n}+\hat{}\mathrm{q}^k}\omega - \mathrm{T}^{\mathrm{n}}\ \omega \to 0$，因此对于所有满足$0 \le \mathrm{n} \le \hat{}\mathrm{q}_k$的 n，都有 $\mathrm{d}(\mathrm{T}^{\mathrm{n}+\hat{}\mathrm{q}^k}\omega, \mathrm{T}^{\mathrm{n}}\ \omega) \to 0$。由此得出 $\omega \in \mathrm{PRP}(\mathrm{T})$。由于 ω 的选取是任意的，因此得出 $\mathbb{T}^2 = \mathrm{PRP}(\mathrm{T})$。由此得出 $\mathbb{T}^2 = \mathrm{PRP}(\mathrm{T})$。

$(ii) \Rightarrow (iii)$：假设动力系统 $\{\mathbb{T}^2, T\}$满足 *GRP*，即 $PRP(T) = \mathbb{T}^2$。这意味着 $\mu(PRP(T)) = \mu(\mathbb{T}^2) = 1 > 0$，于是 $\{\mathbb{T}^2, T\}$满足 *MRP*。

$(iii) \Rightarrow (iv)$：假设 $\{\mathbb{T}^2, T\}$满足 *MRP*。由于 T在 $\mathbb{T}^2$ 中是 μ–遍历的，且勒贝格测度严格为正，因此系统 $\{\mathbb{T}^2, T\}$满足 *TRP*。

$(iv) \Rightarrow (i)$：假设 $\{\mathbb{T}^2, T\}$满足 *TRP*。那么集合 $PRP(T)$ 在 $\mathbb{T}^2$中稠密。特别地，存在 $\omega \in \mathbb{T}^2$，使得 $\{T^n\omega\}_{n\ge 0}$ 满足 *RP*。这意味着，对于所有 $\varepsilon > 0$，都存在一个 q_k，使得 $d(T_{n+q^k}\omega, T_n\ \omega) < \varepsilon$。根据方程（6.4）：

$$\langle 2q_k\omega_1 + q_k^2\alpha + 2nq_k\alpha - q_k\alpha\rangle < \varepsilon, \quad \text{for } n \text{ such that: } \ 0 \le n \le q_k \tag{6.5}$$

对于 n，$= 0$ 方程 (6.5) 蕴含 $\langle 2\mathrm{q}_k\omega_1 + \mathrm{q}_k^2\alpha - \mathrm{q}_k\alpha\rangle < \varepsilon$。也就是说，$2\mathrm{q}_k\omega_1 + \mathrm{q}_k^2\alpha - \mathrm{q}_k\alpha \in \mathbb{T}$与 0 的距离小于 ε。于是，对于任意小的 $\varepsilon > 0$：$\langle 2\mathrm{nq}_k\alpha\rangle = \mathrm{n}\langle 2\mathrm{q}_k\alpha\rangle$对所有 n：$0 \le \mathrm{n} \le \mathrm{q}_k$。令 $\mathrm{n} = \mathrm{q}_k$，我们得到 $\mathrm{q}_k\langle \mathrm{q}_k\alpha\rangle < \varepsilon$。因此，$\mathrm{q}_k\langle \alpha\mathrm{q}_k\rangle \to 0$，根据定义，这意味着 α不是劣可逼近的。□

推论 6.6。由斜移定义的势所对应的薛定谔算子的谱类型（定义于 $\mathbb{T}^2$）。令 T：$\mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ 为由 $T(\omega_1, \omega_2) = (\omega_1 + 2\alpha, \omega_1 + \omega_2)$定义的算子，其中$\alpha$ 不是劣可逼近的。于是，对于一般的 $\omega \in \mathbb{T}$ 和 f：$\mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$，算子：

$$\begin{aligned} H_\omega : \ell^2(\mathbb{Z}) &\to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \psi(n) &\mapsto \psi(n+1) + \psi(n-1) + f(T^n\omega)\psi(n) \\ &= \psi(n+1) + \psi(n-1) + f((\omega_1 + 2n\alpha, \omega_2 + 2n\omega_1 + n(n-1)\alpha))\psi(n) \end{aligned} \tag{6.6}$$

具有纯连续谱。

证明。假设 α 不是劣可逼近的。根据定理 6.5，系统 $\{\mathbb{T}^2, T\}$满足 *TRP*。由此，根据**定理 B**可知，纯连续谱是 $\{H_\omega\}_{\omega\in\mathbb{T}^2}$的一个典型性质。□

本文研究了哪些条件能够使我们得出结论：纯连续谱是遍历薛定谔算子的一种一般性质。正如 Boshernitzan 和 Damanik [3], 指出的那样，本文所研究的定理支持这样一种观点：薛定谔算子中的重复性质与点谱的缺失有关。本文探讨的主题可以从多个方向拓展，例如：

高维薛定谔算子。Fan 和 Han [4], 等作者研究了这一领域，他们探讨了可测势函数 f 在 $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ 中对应的薛定谔算子的连续谱： $\mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$。

重复性质与熵。一个值得研究的问题是，性质*TRP* 和*MRP* 对动力系统的熵有何影响。Huang 等人研究了这一问题 [5], ，并指出，动力系统$\{\Omega, T\}$具有正熵，意味着泛型薛定谔算子 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$存在点谱。最后，仍有一个问题：动力系统 $\{\Omega, T\}$需要满足哪些必要条件，才能保证薛定谔算子族 $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$具有泛型连续谱？这一课题属于谱理论中的逆问题范畴。

致谢

本文是第一作者在第二作者指导下于哥伦比亚国立大学完成的数学理学硕士论文《遍历薛定谔算子的谱分析》的成果。我们感谢 Serafín Bautista 教授的指导与建议，也感谢 Leonardo Rendón 教授对本文提出的建议。

参考文献

[1] Artur Avila 和 David Damanik。“遍历薛定谔算子的泛型奇异谱”。载于：《杜克数学杂志》130 (2005)，第 393–400 页。[2] Sheldon Axler。《线性代数应该这样学》。纽约：施普林格出版社，2015。[3] Michael Boshernitzan 和 David Damanik。“遍历薛定谔算子的泛型连续谱”。载于：《数学物理通讯》283 (2008)，第 647–662 页。[4] Yang Fan 和RuiHan。“粗糙势下多维拟周期薛定谔算子的泛型连续谱”。载于：《谱理论杂志》8 (2018)，第 1635–1645 页。[5] Wen Huang、Leiye Xu 和 Yingfei Yi。“具有重复性质的动力系统的熵”。载于：动力学与微分方程23 (2010)，第 683–693 页。[6] Aleksandr Yakovlevich Khinchin。《连分数》。芝加哥：芝加哥大学出版社，1964。[7] Barry Simon。《几乎周期薛定谔算子：综述》。载于：《应用数学进展》3 (1982)，第 463–490 页。

Pablo Blas Tupac Silva Barbosa，数学系′，哥伦比亚国立大学，哥伦比亚国立大学—波哥大校区′
电子邮箱：psilvab@unal.edu.co

Rafael Alvarez B.，数学与统计学院′，UPTC，北部中心校区，北部中央大道39-115号，邮编150003，通哈，博亚卡省′，哥伦比亚，网址：https://orcid.org/0000-0001-8223-9434电子邮箱：
rafael.alvarez@uptc.edu.co