arXiv:2302.08461v1 [math.GR] 16 Feb 2023

由一个元素弱生成的正则半群

´LUIS OLIVEIRA

Abstract. 本文研究由单个元素 x 弱生成的正则半群，也就是说，不存在包含 x 的真正则子半群。我们证明，存在一个由 x 弱生成的正则半群 F_1，使得所有其他由 x 弱生成的正则半群都是 F_1 的同态像。我们通过一个表示来定义 F_1，其中生成元集合和关系集合都是无限的。尽管如此，该表示的字问题仍然是可判定的。我们描述由此表示给出的同余类的典范形式，并说明如何求得这种形式。最后，我们研究 F_1 的结构。特别地，我们证明，“由两个幂等元弱生成的自由正则半群 FI_2 ”同构于由 $\{xx', x'x\}$ 弱生成的 F_1 的一个正则子半群。

1. Introduction

半群 S 的元素 s 称为正则的，如果对某个 $t \in S$，有 $sts = s$。注意，$s' = tst$ 是 s 的一个（冯·诺依曼）逆元，也就是说，$ss's = s$ 且 $s'ss' = s'$。我们用 $V(s)$ 表示 S 中 s 的所有逆元构成的集合。正则半群是所有元素均为正则元素的半群。按照惯例，我们用 $E(S)$ 表示 S 的幂等元集合。

正则半群 S 的一个子集未必生成一个正则子半群。因此，以下“弱生成”的概念似乎很自然：如果正则子半群 T 中不存在包含 X 的真正则子半群，则称 S 的正则子半群 T 由子集 X 弱生成。当然，这并不意味着 T 是由 X 有效生成的。由 X 生成的子半群往往是 T 的一个真非正则子半群。特别地，如果 S 中不存在包含 X 的真正则子半群，则称 S 由 X 弱生成。我们还应指出，同一个集合 X 可能弱生成 S 的多个不同正则子半群。

研究由集合 X 弱生成的正则半群的结构，最初源于正则半群 e-簇理论（关于 e-簇的定义，见 [2, 3] ）。e-簇 V 上双自由对象的存在，取决于 V 是否满足以下性质：对于

2020 *Mathematics Subject Classification.*（主要）20M17，（次要）20M05、20M10。*Key words and phrases.*正则半群，弱生成半群，字问题。

所有 $S \in \mathbf{V}$ 以及 S 的所有匹配子集 A，都存在唯一一个由 A 弱生成的正则子半群 S（见 [7]）。

在 [6] 中，我们研究了由幂等元弱生成的正则半群的结构。我们证明，存在一个由幂等元集合 X 弱生成的自由正则半群 $\mathbf{FI}(X)$；也就是说，$\mathbf{FI}(X)$ 由 X 弱生成，而所有其他由 X 弱生成的正则半群都是 $\mathbf{FI}(X)$ 的同态像。我们通过引入一个生成元集和关系集均为无限集的表示，得到了 $\mathbf{FI}(X)$。尽管如此，该表示的字问题仍是可判定的，因为我们描述了一种为每个同余类求得典范代表元的过程。

若 $\mathbf{FI}_k$ 表示 $|X| = k$时的 $\mathbf{FI}(X)$，我们证明了 $\mathbf{FI}_2$ 包含所有 $\mathbf{FI}_k$ 的副本作为子半群。因此，任何由有限个幂等元生成的正则半群都必须强整除 $\mathbf{FI}_2$, ，也就是说，它必须是 $\mathbf{FI}_2$ 的某个正则子半群的同态像。$\mathbf{FI}_1$ 的情形并无研究意义，因为任何由单个幂等元弱生成的正则半群都只是平凡半群。

现在我们打算考察一般的非幂等情形。换言之，我们计划研究是否存在一个由集合 X（不一定由幂等元组成）弱生成的正则半群 $F(X)$，使得所有其他由 X 弱生成的正则半群都是 $F(X)$的同态像。当 X 为单元素集合时，该情形便不同于幂等情形：存在由单个元素弱生成的非平凡正则半群。因此，在本文中，我们只关注 X 为单元素集合的情形，并证明 $F(X)$对于 $|X| = 1$存在。

本文将遵循 [6]的结构。事实上，我们将使用相同的术语，但这里的概念会更加复杂。例如，景观和山等术语将在此再次使用，但所指的是具有更复杂结构的字。我们将要介绍的结果也与 [6], 中的结果相似，其中一些证明甚至使用了相同的论证（或仅作了小幅调整），尽管它们所涉及的是更复杂的对象。为完整起见，我们决定在本文中再次收录这些证明。

我们将 $F(X)$ 记作 $\mathbf{F}_1$ for $|X| = 1$，并用 x 表示 X 的唯一元素。事实上，我们通常不会提及 X，而是提及其唯一元素 x。如上所述，本文的主要目标是证明 $\mathbf{F}_1$ 的存在性。我们首先通过类似于 [6] 的表示来介绍 $\mathbf{F}_1$。比较 $\mathbf{F}_1$ 的表示与 $\mathbf{FI}(X)$ 的表示是一项有趣的练习。我们将看到它们的相似之处，同时也会注意到 $\mathbf{F}_1$，中出现了一个新的“要素”，即共轭。随后，我们通过为每个同余类求得一个典范形式，证明这里介绍的表示具有可判定的字问题。为展现 $\mathbf{F}_1$，结构的丰富性，我们将证明 $\mathbf{F}_1$ 具有一个由幂等元 $\{xx', x'x\}$ 弱生成的、与 $\mathbf{FI}_2$，同构的正则子半群，其中 x' 是 x 在 $\mathbf{F}_1$ 中的唯一逆元。由于所有由有限集幂等元弱生成的正则半群

都强整除 FI_2, ，因此它们也强整除 F_1。

本文的组织如下。在下一节中，我们回顾本文所需的一些基本概念。我们还简要介绍 FI_2 的构造，因为稍后将用到它。我们还修改了 [6] 中使用的术语，以避免其与本文所用术语重叠。在第 3 节中，我们给出一个表示并定义 F_1。我们还为该表示的字问题给出一种解法。在第 4 节中，我们证明 F_1 是由 x弱生成的正则半群。为得到这一结果，我们首先需要刻画 F_1 上的格林关系。由于我们在本节中刻画了格林关系，因此还将通过描述幂等元、逆元和自然偏序来结束本节。然而，正如将会显而易见的那样，这一描述仅具有理论意义，对于实际应用并不十分有用。在第 5 节中，我们证明所有由 x 弱生成的正则半群都是 F_1的同态像。最后，在最后一节中，我们证明 F_1 具有一个由 $\{xx', x'x\}$ 弱生成的、与 FI_2同构的正则子半群；由此得出，所有由有限集幂等元生成的正则半群都强整除 F_1。

2. Preliminaries

给定一个半群 S， S^1 表示在必要时通过向 S 添加一个单位元而得到的幺半群。S上的拟序 $\leq_{\mathscr{L}}$、 $\leq_{\mathscr{R}}$ 和 $\leq_{\mathscr{J}}$ 定义如下：

$$s \leq_{\mathscr{L}} t \Leftrightarrow S^1 s \subseteq S^1 t, \quad s \leq_{\mathscr{R}} t \Leftrightarrow sS^1 \subseteq tS^1, \quad s \leq_{\mathscr{J}} t \Leftrightarrow S^1 sS^1 \subseteq S^1 tS^1.$$

因此，格林等价关系 $\mathscr{L}$、 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{J}$ 正是以下关系

$$\mathscr{L} = \leq_{\mathscr{L}} \cap \geq_{\mathscr{L}}, \quad \mathscr{R} = \leq_{\mathscr{R}} \cap \geq_{\mathscr{R}} \quad \text{and} \quad \mathscr{J} = \leq_{\mathscr{J}} \cap \geq_{\mathscr{J}},$$

其中， $\geq_{\mathscr{L}}$、 $\geq_{\mathscr{R}}$和 $\geq_{\mathscr{J}}$分别是 $\leq_{\mathscr{L}}$、 $\leq_{\mathscr{R}}$和$\leq_{\mathscr{J}}$的对偶关系。令 $\mathscr{H} = \mathscr{L} \cap \mathscr{R}$和 $\mathscr{D} = \mathscr{L} \vee \mathscr{R}$为另外两个格林关系。对于正则半群 S，在前面的定义中可以用 S 代替 S^1 。对于$\mathscr{K} \in \{\mathscr{H}, \mathscr{L}, \mathscr{R}, \mathscr{D}, \mathscr{J}\}$，我们用 $\mathrm{K}a$ 表示元素 $a \in S$的 $\mathscr{K}$-类。

本文的另一个重要概念是两个幂等元 e 和 f 在 S 上的夹心集 $S(e, f)$。这一概念有几种等价定义。下面列出其中一些：

$$\begin{aligned} S(e,f) &= V(ef) \cap E(fSe) = fV(ef)e \\ &= \{g \in E(S) \mid fg = g = ge \text{ and } egf = ef\}. \end{aligned}$$

夹心集 $S(e, f)$ 非空，当且仅当 ef 是 S 的正则元。因此，若 S 是正则的，则 $S(e, f)$ 总是非空。事实上，只要非空， $S(e, f)$ 总是一个矩形带，也是 S 的子半群。这些集合还有另一个有趣的性质：若 e、 e_1、 f、 $f_1 \in E(S)$ 满足 $e \mathscr{L} e_1$ 且 $f \mathscr{R} f_1$，则 $S(e, f) = S(e_1, f_1)$。因此，对于正则半群，可以将夹心集的定义扩展到所有元素，

S 如下：对于 a、$b \in S$，令 $S(a,b) = S(a'a, bb')$，其中 $a' \in V(a)$ 和 $b' \in V(b)$ 任取（或取任意一个）。

如果 S 是一个正则半群，那么在 S上还有另一种重要关系，即自然偏序 $\leq$:

$$s \leq t \quad \Leftrightarrow \quad s = et = tf \text{ for some } e, f \in E(S)\,.$$

关于自然偏序，一个有用的事实是，我们可以选择幂等元 e 和 f，使得 $e \mathscr{R}\, s \,\mathscr{L}\, f$。

设 X 是一个非空集合。与通常一样，我们用 X^+ 表示 X上的自由半群。在此语境中，X 的元素称为字母，而 X^+ 的元素称为字。字 u 的内容是 X 中出现在 u里的字母所组成的集合，而 u 的长度是出现在 u中的字母数（重复计算）。对于 $u \in X^+$，分别用 $\sigma(u)$和 $\tau(u)$表示 u的首字母和末字母。

接下来，我们回顾 [6] 中为任意集合 X引入的$\mathbf{FI}_2$ 的构造。如前所述，我们需要修改 [6] 中使用的记号和术语，以免与本文所用的记号和术语重叠。因此，h、H 和 ϱ 将分别替代 [6]中使用的符号 g、G 和 ρ。给定一个三元组$h = (a, b, c)$，我们分别用 h^r、h^c和 h^l表示 a、b和 c。

令 $X = \{e, f\}$ 为一个含两个元素的集合，并考虑

$$\mathrm{H}_0 = \{1\} \quad \text{and} \quad \mathrm{H}_1 = \{(1, e, 1),\ (1, f, 1)\},$$

其中 $\mathbf{1}$ 是一个不属于 X 的新符号。我们将每个 $x \in X$ 与三元组 $(\mathbf{1}, x, \mathbf{1}) \in \mathrm{H}_1$ 对应。因此 $x^r = x^l = 1$。递归地，对于 $i > 1$，假设 H_{i-1} 是一个三元组集合，并令 $\mathrm{H}_i = \mathrm{H}_{i-1} \times \mathrm{H}_{i-2} \times \mathrm{H}_{i-1}$ 和

$$\mathrm{H}_i = \left\{ h \in \overline{\mathrm{H}_i} \mid h^l \neq h^r,\ h^c \in \{(h^l)^l, (h^l)^r\} \cap \{(h^r)^l, (h^r)^r\} \right\}.$$

注意

$$\mathrm{H}_2 = \{h_{2,1},\ h_{2,2}\}$$

对于 $h_{2,\ 1} = (e, \mathbf{1}, f)$ 和 $h_{2,\ 2} = (f, \mathbf{1}, e)$，以及

$$\mathrm{H}_3 = \{h_{3,1},\ h_{3,2},\ h_{3,3},\ h_{3,4}\}$$

对于 $h_{3,1} = (h_2, \mathbf{1}, e, h_2, \mathbf{2})$、$h_{3,2} = (h_2, \mathbf{1}, f, h_2, \mathbf{2})$、$h_{3,3} = (h_2, \mathbf{2}, e, h_2, \mathbf{1})$ 和 $h_{3,4} = (h_2, \mathbf{2}, f, h_2, \mathbf{1})$。令 $\mathrm{H} = \cup_{i \in \mathbb{N}_0} \mathrm{H}_i$。

考虑自由半群 H^+ 上的以下两个关系：

$$\varrho_e = \{(1h, h), (h1, h), (h^2, h) \mid h \in \mathrm{H}\}$$

and

$$\varrho_s = \left\{ (h^c h^l h, h), (h h^r h^c, h), (h^r h^c h h^c h^l, h^r h^c h^l) \mid h \in \mathrm{H}_i \text{ with } i \geq 2 \right\}.$$

设 $\mathbf{FI}_2^1$ 为由表示 $\langle \mathrm{H} \ \ \varrho_e \cup \varrho_s \rangle$给出的半群，即 $\mathbf{FI}_2^1 = \mathrm{H}^+ / \varrho$，其中 ϱ 是在 H^+ 上包含 $\varrho_e \cup \varrho_s$的最小同余。注意，ϱ_e 仅说明 $\mathbf{FI}_2^1$ 是一个以 1ϱ为单位元的幂等元生成幺半群。利用 ϱ_e 和 ϱ_s，可以容易地证明 $(h^r h^c)\varrho$和 $(h^c h^l)\varrho$ 是 $\mathbf{FI}_2^1$的幂等元。于是，ϱ_s 恰好将 $h\varrho$ 变为一个元素

，属于夹心集 $S((h^r h^c)\varrho, (h^c h^l)\varrho)$。半群 FI_2 定义为 $\mathrm{FI}_2^1 \setminus \{1\varrho\}$ （$\{1\varrho\}$ 是 FI_2^1的单位群）。我们还可容易看出， 1ϱ由 H^+ 中所有内容为 $\{1\}$的字构成。

一个非平凡的 i-山（在 [6] 中称为山）是一个字 $h_0 h_1 \cdots h_{2n} \in \mathrm{H}^+$，其中 $n \geq 1$ 且对所有 $0 \leq i \leq 2n$都有 $h_i \in \mathrm{H}$，使得
(*i*) $h_0 = 1 = h_{2n}$；(*ii*) 对所有 $1 \leq i \leq n$ 都有 $h_{i-1} \in \{h_i^r, h_i^l\}$；并且 (*iii*) 对所有 $n < i \leq 2n$都有 $h_i \in \{h_{i-1}^r, h_{i-1}^l\}$。

在 [6] 中，我们证明了 $\mathrm{FI}(X)$ 的每个 ϱ-类都包含唯一的非平凡 i-山，并通过给出构造它的过程，解决了 $\mathrm{FI}(X)$ 的字问题。本文中，我们将用“山”一词指代更复杂的字。

令 i-M（在 [6] 中针对 $|X| = 2$ 记作 $\mathrm{M}(X)$）表示 H^+ 的所有非平凡 i-山组成的集合。在 [6] 中，我们定义了 i-M 上的一个运算 $\odot$，使 i-M 成为与 FI_2 同构的半群。i-河流的概念（在 [6] 中称为河流）以及 i-河流上移的过程（在[6]中称为河流提升）是核心内容。本文中我们将再次使用“河流”和“河流提升”这两个术语。其定义与 [6] 中引入的定义非常相似。二者的区别仅在于定义它们的“语境”不同。根据本文引入的河流和河流提升的概念，i-河流和 i-河流上移的含义将一目了然；不过，读者也可参阅[6] 了解更多细节。

半群 FI_2 是正则半群，并由两个幂等元 e 和 f 弱生成（将每个字母与相应的 ϱ-类对应起来）。它具有如下泛性质：所有由两个幂等元弱生成的正则半群，都是 FI_2 的同态像（在某个同态下， $e\varrho$ 和 $f\varrho$ 分别映到这两个幂等元）。在第 6 节中，我们将证明 FI_2 嵌入到半群 F_1 中；该半群将在下一节构造。

3. The presentation $\langle \mathrm{G}, \mathrm{R} \rangle$

本节将介绍 F_1 的构造。引入一些初始术语后，我们将把本节划分为若干小节，以便更好地组织内容。正如我们将看到的，F_1 的构造与 FI_2, 的构造相似；而且，定义并处理由 F_1 添加一个新单位元而得到的幺半群 F_1^1 会更为容易。与 FI_2 的情形不同，这里我们将使用五元组，因为需要在这些元组中包含更多信息。共轭也将发挥重要作用，另外两个分量将包含有关何时以及何处应用共轭的信息。

我们首先为 F_1^1定义一个表示 $\langle \mathrm{G}, \mathrm{R} \rangle$。从现在起，除非另有说明， X 将是 $\{x\}$单元素集合。令 A 为集合$\{1, x, x'\}$。我们通过规定 $(x')' = x$ 和 $1' = 1$，赋予 A 一个自然对合 $'$。我们将 A中的元素称为锚点。正如预期的那样， x'将在 F_1^1, 中表示 x 的逆元，而 1 将对应于其单位元

。因此，从现在起，对于任意 $a \in A$，我们将 a' 称为 a的逆元（锚点），这算是对术语的某种滥用。

生成元集 G 将包含集合 A。G 中的所有其他元素都是特殊的五元组。我们用 G^5 表示所有这些五元组构成的集合。因此 $G = A \cup \mathsf{G}^5$。集合 G^5 将递归定义为一系列集合 G_i 的并，其中 $i \geq 1$。事实上，每个 G_i 都是另外两个集合 $\mathsf{G}_{i,\ e}$ 和 $\mathsf{G}_{i,\ d}$ 的并。我们将在下文更详细地描述这些集合。

我们将使用以下记号

$$g = (g^l, g^{la}, g^c, g^{ra}, g^r)$$

来表示 G^5 中一个五元组 g 的各项。g^{la} 和 g^{ra} 始终是锚点。因此，它们分别称为 g 的左锚点和右锚点。g^l、g^c 和 g^r 称为 g 的左项、中项和右项。若对于 $i > 1$，$g \in \mathsf{G}_i$，则 g^l 和 g^r 是 G_{i-1} 中的五元组；若对于 $i > 2$，$g \in \mathsf{G}_i$，则 g^c 是 G_{i-2} 中的五元组。

正如我们所见，5元组 $g \in \mathsf{G}^5$ 的左项、中项和右项通常仍是5元组。如果我们需要指称 g^l 的某个项，例如，我们会用缩写 g^{ls} 来指称 g^l中对应于 $s \in \{l, la, c, ra, r\}$的项 $(g^l)^s$。不过，g^l 的某些项也可能仍是5元组。一般来说，我们约定

$$g^{s_1 \cdots s_n} = (((g^{s_1})^{s_2}) \cdots)^{s_n},$$

对于 s_1、$\cdots$、$s_{n-1} \in \{l, c, r\}$和 $s_n \in \{l, la, c, ra, r\}$，只要这个等式右边有意义，就有上述约定。我们还考虑 $g^1 = g$。

为便于理解本节余下内容，我们将其分为若干小节。在前两个小节中，我们分别定义集合 $\mathsf{G}_{i,e}$ 和 $\mathsf{G}_{i,d}$。读者应特别留意这些定义所涉及的细微之处，因为它们对于理解本文中给出的一些论证可能很重要。在接下来的小节中，我们引入关系集 R。这个集合将为 G^5的5元组提供一种解释。在第四小节中，我们描述一些特殊单词。最后，我们在第五小节中引入河流提升运算，并在最后一小节中用它给出该表示的字问题的解法。

3.1. 集合 $\mathsf{G}_{i,e}$。

我们先将 $g_{xx'}$ 设为 5元组

$$g_{xx'} = (1, 1, x, x', 1).$$

5元组 $g_{xx'}$ 将表示 F_1 中的元素 xx'。出于稍后将会明了的技术原因，考虑 5 元组 $g_{xx'}$ 比考虑 xx' 更方便。令集合 $\mathsf{G}_{1,e} = \{g_{xx'}\}$，并定义

$$\mathrm{G}_{i,e} = \left\{ \big(g, (g^{la})', g^l, (g^{ra})', g\big),\ \big(g, (g^{ra})', g^l, (g^{la})', g\big) \ :\ g \in \mathrm{G}_{i-1,e} \right\}$$

对 $i \geq 2$。为便于弄清哪些元组属于这些集合，请注意，$\mathsf{G}_{2,e}$ 有两个元素：

$$g_{2,e,1} = (g_{xx'}, 1, 1, x, g_{xx'}) \quad \text{and} \quad g_{2,e,2} = (g_{xx'}, x, 1, 1, g_{xx'})\,;$$

而 $\mathsf{G}_{3,e}$ 有四个元素：

$$(g_{2,e,1}, 1, g_{xx'}, x', g_{2,e,1})\,, \quad (g_{2,e,1}, x', g_{xx'}, 1, g_{2,e,1})\,,$$
$$(g_{2,e,2}, 1, g_{xx'}, x', g_{2,e,2}) \quad \text{and} \quad (g_{2,e,2}, x', g_{xx'}, 1, g_{2,e,2})\,.$$

更详细地分析 G 的 5元组$_{i,e}$ 对于 $i > 1$ 的结构，我们看到，当且仅当 $g \in \mathsf{G}_{i,e}$

(i) $g^l = g^r \in \mathrm{G}_{i-1,e}$,
(ii) $g^c = g^{l^2} = g^{lr}$, and
(iii) either $\{g^{la}, g^{ra}\} = \{1, x\}$ if i even or $\{g^{la}, g^{ra}\} = \{1, x'\}$ if i odd.

因此，集合 $\mathsf{G}_{i,e}$ 的元素数量是 $\mathsf{G}_{i-1,e}$的两倍，所以 $\mathsf{G}_{i,e}$有 2^{i-1} 个元素。此外，

$$\mathrm{G}_{i,e} \subseteq \mathrm{G}_{i-1,e} \times A \times \mathrm{G}_{i-2,e} \times A \times \mathrm{G}_{i-1,e}\,,$$

对于 $i > 1$，若考虑 $\mathsf{G}_{0,e} = \{1\}$。设 $\mathsf{G}_e = \cup_{i\in\mathbb{N}}\mathsf{G}_{i,e}$。$\mathsf{G}_e$ 的 5元组将与 G 中左右条目相同的 5元组相对应。

根据构造，对于每个满足 $i \geq$2 的 $g \in \mathsf{G}_{i,e}$，g^{l^2} 和 g^{lr} 都等于 g^c。当然，它们的含义不同：g^c 表示 g 的中间项，而 g^{l^2} 和 g^{lr} 分别表示 g^l 的左侧条目和右侧条目。在之后需要考虑的特殊单词中，G 的 5 元组必须彼此“锚定”。为此，我们需要为 g^l 中的 g^c 指定一侧，以便确定“相对于 g，g^l 中 g^c 的锚点”。请注意，g^{l^2a} 和 g^{lra} 中只有一个等于 $(g^{la})'$。对于每个 g，我们定义

$$l_a = \begin{cases} l^2 & \text{if } g^{l^2a} = (g^{la})' \\ lr & \text{if } g^{lra} = (g^{la})'\,. \end{cases}$$

因此，锚点 $g^{l_a a}$ 和 $(g^{la})'$ 相等。

我们再次强调，记号 l_a 的目的是指出哪个锚点g^{l^2a} 或 g^{lra} 等于 $(g^{la})'$，而 l_a 会随 g而变化。因此，只有在指代具有$i \geq$2的特定 5元组 $g \in\mathsf{G}_i$ 时，使用 l_a 才有意义。还请注意，g^{l_a} 和 g^c 具有相同的“值”。然而，当我们写作 g^{l_a}时，我们不仅想强调它的“值”，还想强调 5元组 g^l中的一个特定条目，即其左侧条目或右侧条目。

我们也会以类似的方式使用记号 r_a。对于每个具有 $i \geq 2$的 $g \in\mathsf{G}_{i,\ e}$

$$r_a = \begin{cases} r^2 & \text{if } g^{r^2a} = (g^{ra})' \\ rl & \text{if } g^{rla} = (g^{ra})'\,. \end{cases}$$

我们再次提醒，只有与特定的5元组 $g \in \mathsf{G}_{i,e}$（其中 $i \geq 2$）关联时，r_a 的使用才有意义。

3.2. 集合 $\mathrm{G}_{i,d}$。现在我们引入 G 中左右条目互不相同的5元组。它们将在集合 $\mathrm{G}_{i,d}$ （$i \geq 1$）中递归描述。与前一种情形不同，来自 $\mathrm{G}_{i,d}$ 的5元组 g 的左右条目不仅可能属于 $\mathrm{G}_{i-1,d}$，也可能属于 $\mathrm{G}_{i-1,e}$。因此，我们定义 $\mathrm{G}_i = \mathrm{G}_{i,e} \cup \mathrm{G}_{i,d}$。正如我们接下来将看到的，集合 $\mathrm{G}_{i,d}$ 的定义比集合 $\mathrm{G}_{i,e}$ 的定义更为复杂。

事实上，集合 $\mathrm{G}_{i,\ d}$ 的定义只有在 $i > 2$ 时才有意义，因为我们将 $\mathrm{G}_{1,\ d}$ 和 $\mathrm{G}_{2,\ d}$ 设为空集。基本上，这说明对于 $i = 1$ 和 $i = 2$，G 中不存在左右条目互不相同的 5 元组。现在，假设 $i > 2$，并且 $\mathrm{G}_{j,\ d}$ 是针对 $j < i$ 定义的。因此，集合 G_j 也有定义。令 $\mathrm{G}_{i,\ d}$ 为所有满足以下条件的 5 元组的集合

$$g \in \overline{\mathrm{G}}_i = \mathrm{G}_{i-1} \times A \times \mathrm{G}_{i-2} \times A \times \mathrm{G}_{i-1}$$

使得

(i) $g^l \neq g^r$;
(ii) $\left(g^c, g^{la}\right) = \left(g^{l^2}, (g^{l^2 a})'\right)$ or $\left(g^c, g^{la}\right) = \left(g^{lr}, (g^{lra})'\right)$;
(iii) $\left(g^c, g^{ra}\right) = \left(g^{rl}, (g^{rla})'\right)$ or $\left(g^c, g^{ra}\right) = \left(g^{r^2}, (g^{r^2 a})'\right)$.

由 (i) 可知，g 的左侧条目与其右侧条目不同。注意，(ii) 特别指出，g^c 是g^l的左侧条目或右侧条目。事实上，它还说明了更强的结论：要么 g^c 是 g^l 的左侧条目，且 g 的左锚点是 g^l的左锚点的逆元；要么 g^c 是 g^l 的右侧条目，且 g 的左锚点是 g^l的右锚点的逆元。条件 (iii) 是关于 g^r 而言的条件 (ii) 的对偶。

接下来，我们列出 $\mathrm{G}_{3,d}$ 的元素作为例子，以帮助理解这些集合。它已经有 8 个元素：

$$\begin{aligned}
g_{3,d,1} &= (g_{2,e,1}, 1, g_{xx'}, 1, g_{2,e,2}), & & (g_{2,e,1}, 1, g_{xx'}, x', g_{2,e,2}), \\
g_{3,d,2} &= (g_{2,e,1}, x', g_{xx'}, x', g_{2,e,2}), & & (g_{2,e,1}, x', g_{xx'}, 1, g_{2,e,2}), \\
g_{3,d,3} &= (g_{2,e,2}, 1, g_{xx'}, 1, g_{2,e,1}), & & (g_{2,e,2}, 1, g_{xx'}, x', g_{2,e,1}), \\
g_{3,d,4} &= (g_{2,e,2}, x', g_{xx'}, x', g_{2,e,1}), & & (g_{2,e,2}, x', g_{xx'}, 1, g_{2,e,1}).
\end{aligned}$$

正如读者可能已经注意到的，我们只为第一列中的元素赋予了“名称”。这是因为只有这些元素对第 6 节很重要。第二列中的元素在该节中不会用到。计算 $\mathrm{G}_{i,d}$ 和 G_i 的基数也是一道组合练习。由于本文不需要这些信息，我们把计算留给读者。我们只指出一个显而易见的事实：集合 $\mathrm{G}_{i,d}$、$\mathrm{G}_{i,e}$ 和 G_i 的大小随 i 呈指数增长。

与上一小节一样，对于每个 $g \in \mathrm{G}_{i,\ d}$，我们需要确定 g^c 在 g^l中的侧别。相应地，这里有两种不同的情况，取决于 $g^l \in \mathrm{G}_{i-1,\ e}$ 还是 $g^l \in \mathrm{G}_{i-1,\ d}$。如果 $g^l \in \mathrm{G}_{i-1,\ e}$，那么 g^{l^2} 和 g^{lr} 都等于 g^c。在这种情况下，由于上面的条件（ii），我们可以像上一小节那样定义 l_a。如果 $g^l \in \mathrm{G}_{i-1,\ d}$，那么 l_a 的定义更为自然，因为 g^l的左右条目中只有一个等于 $g \in$: 当 时令 $_i$，或者当 $_d$时令。现在以类似的方式引入记号 g^c（参见上一小节）。我们再次提醒，只有在指代特定的5元组 g^l时，这两种记号才有意义。

等于 g^c：若 $g^{l^2} = g^c$，则令 $l_a = l^2$；若 $g^{lr} = g^c$，则令 $l_a = lr$。现在以类似方式引入记号r_a（参见上一小节）。我们再次提醒，这两种记号只有在指代特定的 5元组 g 时才有意义。

根据 $\mathsf{G}_{i,d}$ 和 $\mathsf{G}_{i,e}$ 的定义，注意到

$$g^{l_a a} = (g^{la})' \quad \text{and} \quad g^{r_a a} = (g^{ra})'$$

在记号有意义的所有情形下均成立（即，除 $g = g_{xx'}$ 外）。本文将频繁使用这一观察，而不再另行说明。快速考察 g^{la} 和 g^{ra} 的定义，我们还可得出：若 $\upsilon(g)$ 为偶数，则 $g^{la}, g^{ra} \in \{1, x\}$；而若 $\upsilon(g)$ 为奇数，则 $g^{la}, g^{ra} \in \{1, x'\}$。事实上，若 $g \in \mathsf{G}_e$，我们还可以说得更多：若 $\upsilon(g)$ 为偶数，则 $\{g^{la}, g^{ra}\} = \{1, x\}$；而若 $\upsilon(g)$ 为奇数，则$\{g^{la}, g^{ra}\} = \{1, x'\}$。若 $g \in \mathsf{G}_{i,d}$，则可能有 $g^{la} = g^{ra}$，这可从 $\mathsf{G}_{3,d}$ 的某些元素中观察到。

注意，集合 $\mathsf{G}_{i,e}$ 也包含于 G_i；因而 $\mathsf{G}_i \overline{\subseteq} \mathsf{G}_i$。令 $\mathsf{G}_d = \overline{\cup_{i\in\mathbb{N}} \mathsf{G}_{i,d}}$，且 $\mathsf{G}^5 = \cup_{i\in\mathbb{N}} \mathsf{G}_i = \mathsf{G}_d \cup \mathsf{G}_e$。设 $\mathsf{G} = \mathsf{G}^5 \cup A$，并设 $\mathsf{G}' = \mathsf{G}^5 \cup \{1\}$。于是，$\mathsf{G}^5$ 是 G 的所有五元组构成的集合，并且它分为集合 G_e（其中包含左右条目相同的所有 G 的五元组）和集合 G_d（其中包含左右条目不同的所有 G 的五元组）。元素 $g \in \mathsf{G}'$ 的高度 $\upsilon(g)$ 定义如下：

$$\upsilon(1) = 0 \quad \text{and} \quad \upsilon(g) = i \text{ if } g \in \mathrm{G}_i \,.$$

3.3. 关系 R。现在来看关系 R。我们用 F_1^1 表示由表示 $\langle \mathsf{G}, \mathsf{R}\rangle$ 给出的半群，也就是 $\mathsf{F}_1^1 = \mathsf{G}^+/\rho$，其中 ρ 是包含 R 的最小同余。我们将用 $u \approx v$ 表示 G^+ 中的字 u 和 v 是 ρ-等价的。我们还将用记号 $[u]$ 表示 $u\rho$的 ρ-类。我们希望：

(*i*) $[x']$ 是 $[x]$ 的逆元，且满足 $[xx'] = [g_{xx'}]$; (*ii*) $[1]$ 是 F_1^1 的单位元；以及 (*iii*) 对所有 $g \in \mathsf{G}^5$，$[g]$ 都是幂等元。

因此，我们将关系

$$\rho_e = \{(xx'x, x), (x'xx', x'), (g_{xx'}, xx'), (1g, g), (g1, g), (g^2, g) : g \in \mathrm{G}'\}\,.$$

我们现在立即看到，本可以将 $g_{xx'}$ 从 G 中省略。然而，将其包含在内能让我们更好地理解 G^5 的构造：这个列表源自“幂等元” xx'，而不是源自 x 或 x'。此外，我们将看到，G^5 的 5元组的同余类构成了 F_1 的 $\mathscr{D}$-类的截面集。还应指出，在本文所发展的理论中，我们本可以用 $x'x$ 替换 xx'（我们只需针对 $x'x$ 情形调整 G^5 的定义即可）。但 R 的定义尚未完成。我们仍需加入将 g 与其各个条目联系起来的条件。为此，我们需要仔细说明一些将要使用的记号，以避免今后产生歧义。

给定三个字母 g_1、$g \in \mathsf{G}'$ 和 $a \in A$，三元组 $g_1 a g$ 是左锚定的，当且仅当

$$(g_1, a) = (g^l, g^{la}) \quad \text{or} \quad (g_1, a) = (g^r, g^{ra}) .$$

右锚定的概念并不完全是对偶概念：三元组 $g a g_1$ 是右锚定的，当且仅当

$$(g_1, a) = (g^l, (g^{la})') \quad \text{or} \quad (g_1, a) = (g^r, (g^{ra})') .$$

注意，在左锚定的定义中，锚点 a 是 g 的锚点之一；而在右锚定的定义中，锚点 a 是 g 的某个锚点的逆元。在这两种情况下，我们都说 g_1 锚定于 g。最后，若三元组 $g_1 a g_2$ 满足 $g_1, g_2 \in \mathsf{G}'$ 且 $a \in A$，则当且仅当 g_1 锚定于 g_2 或 g_2 锚定于 g_1 时，该三元组是锚定的。

对于 $s \in \{l, r\}$，我们可以分别用 $g^s \cdot g$ 和 $g \cdot g^s$ 表示锚定三元组 $g^s g^{sa} g$ 和 $g(g^{sa})' g^s$。请注意，如果不明确指出 s 的值，这种记法可能会产生歧义。例如，若 $g \in \mathsf{G}_e$ 且 $h = g^l$，则表达式 $h \cdot g$ 存在歧义。注意，h 也等于 g^r，因此 $h \cdot g$ 可能指 $g^l g^{la} g$ 或 $g^r g^{ra} g$，其中 $g^{la} \neq g^{ra}$。所以，使用这种“点”记法时必须谨慎。

还有一种情况是，这种“点”记法可能会有用，但如果不加以说明，也会产生歧义，即 $g^c \cdot g^s$ 和 $g^s \cdot g^c$（对于 $s \in \{l, r\}$）。注意，g^c 可能同时等于 g^{sl} 和 g^{sr}。我们定义

$$g^c \cdot g^s = g^c g^{s_a a} g^s = g^c (g^{sa})' g^s \quad \text{and} \quad g^s \cdot g^c = g^s (g^{s_a a})' g^c = g^s g^{sa} g^c .$$

显然，这些三元组由其定义方式锚定。

接下来，我们引入（非锚定的）三元组 g^L 和 g^R。令 $g^L = (g^{la})' g^l g^{la}$ 和 $g^R = (g^{ra})' g^r g^{ra}$。注意，

$$g^L \in \{1 g^l 1,\, x g^l x',\, x' g^l x\} .$$

事实上，我们还可以说，若 $\upsilon(g)$ 为偶数，则 $g^L \neq x g^l x'$；若 $\upsilon(g)$ 为奇数，则 $g^L \neq x' g^l x$。对于 g^R，也有类似的结论。现在注意，

$$g \cdot g^l \cdot g = g g^L g , \quad g^c \cdot g^l \cdot g = g^c g^L g , \quad g \cdot g^r \cdot g = g g^R g \quad \text{and} \quad g \cdot g^r \cdot g^c = g g^R g^c .$$

下一个观察结果也很有用。由于 $g^r \cdot g \cdot g^l = g^r g^{ra} g (g^{la})' g^l$ 和

$$g^r \cdot g^c \cdot g^l = g^r (g^{r_a a})' g^c g^{l_a a} g^l = g^r g^{ra} g^c (g^{la})' g^l ,$$

长度为 5 的字 $g^r \cdot g \cdot g^l$ 和 $g^r \cdot g^c \cdot g^l$ 仅在中间的字母上不同：在 $g^r \cdot g \cdot g^l$ 中有 g，而在 $g^r \cdot g^c \cdot g^l$ 中有 g^c。

在继续之前，这里正好可以稍作停顿，解释一下本文所发展的理论与 [6] 中所发展的理论之间的主要区别。这一解释也可能有助于熟悉 [6] 、正在阅读本文的读者。我们已经提到这两篇论文的结构十分相似。主要区别在于我们将哪些对象视为景观和山。在 [6], 中，它们是来自 H^+ 的字，其中任意两个相邻字母之间都有一种特殊联系（见第 2 节）。而在本文中，它们将是由 G' 和 A 中的字母交替组成的字，并且任何包含两个来自 G' 的字母和一个来自 A 的字母的三元子词都

是锚定的。上文引入的记号在某些情况下有助于让这些字的形式不那么繁复。

设 ρ_s 为 G^+ 上的如下关系：

$$\rho_s = \left\{ (g^c g^L g, g), (g g^R g^c, g), (g^r \cdot g \cdot g^l, g^r \cdot g^c \cdot g^l) \mid g \in \mathrm{G} \text{ with } v(g) \geq 2 \right\}.$$

我们令 $\mathrm{R} = \rho_e \cup \rho_s$。注意，$[1]$ 由 G^+ 中内容为 $\{1\}$ 的所有字组成。因此，$\mathrm{F}_1^1 \setminus \{[1]\}$ 是 F_1^1 的子半群。令 $\mathrm{F}_1 = \mathrm{F}_1^1 \setminus \{[1]\}$。

下面的结果列出了 F_1^1 中乘积的若干性质，并以对 ρ_s 的一种解释作结。根据 ρ_e 的定义，我们已知 $[g]$ 是 F_1^1 的一个幂等元。我们将证明 $[g^c g^R]$ 和 $[g^L g^c]$ 也是 F_1^1 的幂等元。于是，ρ_s 的定义只是为了确保 $[g] \in S([g^R g^c], [g^c g^L])$。

引理 3.1。设 $g \in \mathrm{G}$，且 $v(g) > 1$。则：

(*i*) $g \approx g^c g \approx g g^c \approx g g^L g \approx g g^R g$. (*ii*) $[g g^L]$, $[g g^R]$, $[g^L g]$, $[g^R g] \in E(\mathrm{F}_1^1)$. (*iii*) $[g^l \cdot g]$, $[g^L g]$, $[g^r \cdot g]$, $[g^R g] \in \mathrm{L}_{[g]}$ 和 $[g \cdot g^l]$, $[g g^L]$, $[g \cdot g^r]$, $[g g^R] \in \mathrm{R}_{[g]}$. (*iv*) $g^L g^c g^L \approx g^L$ 和 $g^R g^c g^R \approx g^R$. (*v*) $[g^c g^L]$, $[g^c g^R]$, $[g^L g^c]$, $[g^R g^c] \in E(\mathrm{F}_1^1)$. (*vi*) $[g] \in S([g^R g^c], [g^c g^L])$.

证明。注意，根据 ρ_e 和 ρ_s的定义，$g g^c \approx g g^R g^c g^c \approx g g^R g^c \approx g$ 和 $g g^L g \approx g g^c g^L g \approx g^2 \approx g$。现在由对偶性，(*i*)的证明完成。显然，(*ii*)由(*i*)推出。此外，$[g^L g]$ 和 $[g^R g]$ 也属于$\mathrm{L}_{[g]}$。于是，由于$(g^{l a})' g^l \cdot g = g^L g$ 和$(g^{r a})' g^r \cdot g = g^R g$，我们必须也有$[g^l \cdot g]$ 和 $[g^r \cdot g]$ 属于$\mathrm{L}_{[g]}$。因此，由对偶性，(*iii*)成立。

现在注意到

$$g^L g^c g^L = (g^{l a})' g^l g^{l a} g^c (g^{l a})' g^l g^{l a} = (g^{l a})' g^l (g^{l_a a})' g^c g^{l_a a} g^l g^{l a} =$$

$$= \begin{cases} (g^{l a})' g^l (g^l)^L g^l g^{l a} & \text{if } l_a = l^2 \\ (g^{l a})' g^l (g^l)^R g^l g^{l a} & \text{if } l_a = l r \end{cases}$$

将命题（i）应用于 g^l，得到 $g^L g^c g^L \approx (g^{l a})' g^l g^{l a} = g^L$。类似地，我们证明了 $g^R g^c g^R \approx g^R$，并证明了（iv）。然后，（v）显然是（iv）的推论。

最后，为了证明（vi），我们已经知道 $[g]$、$[g^R g^c]$ 和 $[g^c g^L]$ 是 F_1^1 的幂等元，且 $g^c g^L g \approx g$ 和 $g g^R g^c \approx g$。因此，我们只需证明 $g^R g^c g g^c g^L \approx g^R g^c g^L$。但是

$$g^R g^c g g^c g^L \approx g^R g g^L = (g^{r a})' g^r \cdot g \cdot g^l g^{l a} \approx (g^{r a})' g^r \cdot g^c \cdot g^l g^{l a} = g^R g^c g^L.$$

因此，我们证明了 $[g] \in S$（$[g^R g^c]$，$[g^c g^L]$）。 □

3.4. 特殊单词。为便于组织本文，除非另有说明，我们将用 g 和 h（可能带有下标）表示 G′中的元素，用 a 和 b（可能带有下标）表示锚点，并用 u 和

v（也可能带有下标）表示来自 G^+的字。接下来，我们列出本文中将使用的一些通用术语和记号。这些术语用于指称 G^+ 中的特殊单词及其对我们很重要的特征。我们采用与 [6] 相同的术语，相关概念也非常相似，读者可以自行验证。正如前面所提到的，主要区别在于我们现在所考虑的景观。

景观：由字母 $g_j \in \mathsf{G}'$ 和锚点 $a_j \in A$ 组成的交替词 $u = g_0 a_1 g_1 \cdots a_n g_n \in \mathsf{G}^+ (n \geq 0)$，其中所有三元子词$g_{i-1}a_i g_i$ 都是锚定的。我们用 L 表示 G^+的所有景观组成的集合。另请注意，单个字母 $g \in \mathsf{G}'$ 也是特殊的景观；因此 $\mathsf{G}' \subseteq \mathsf{L}$。我们注意到，下面有些术语指的是景观中字母 g_i 本身的性质（而非其锚点 a_i）。

山脊：景观 $u = g_0 a_1 g_1 \cdots a_n g_n$ 中的字母 g_i，使得 $\upsilon(g_{i-1}) = \upsilon(g_{i+1}) = \upsilon(g_i) - 1$。因此，山脊绝不会是景观中的第一个或最后一个字母。

峰：景观 u中最高的山脊。请注意，u 可以有多个峰值，但它们的高度都相同。如果 u 只有一个峰，我们用 $\kappa(u)$表示它。景观 u 的高度 $\upsilon(u)$ 是其峰值的高度、$\sigma(u)$的高度以及 $\tau(u)$的高度三者中的最大值。请注意，这一定义的高度与前文引入的 G 中元素的高度概念一致。

河流：景观中的字母 g_i，满足 $\upsilon(g_{i-1}) = \upsilon(g_{i+1}) = \upsilon(g_i) + 1$。与山脊一样，河流永远不是景观的端点。

山丘：具有 $n \geq 1$ 的景观 $u = g_0 a_1 g_1 \cdots a_n g_n$，满足以下条件之一：对于所有 $1 \leq i \leq n$，$g_{i-1} \in \{g_i^l, g_i^r\}$；或者对于所有 $1 \leq i \leq n$，$g_i \in \{g_{i-1}^l, g_{i-1}^r\}$。在前一种情况下，我们得到一个上坡，因为 $\upsilon(g_i) = \upsilon(g_{i-1}) + 1$；而在后一种情况下，我们得到一个下坡，因为 $\upsilon(g_i) = \upsilon(g_{i-1}) - 1$。我们用 L_1, 、L_1^+ 和 L_1^- 分别表示所有山丘、上坡和下坡的集合。此外，L_2^+ 表示所有由一个上坡接一个下坡组成的景观的集合。

山谷：由一段下坡和一段上坡组成的景观。因此，山谷在其较低高度的一侧始终有一条（且仅有一条）河流。我们用 L_2^- 表示 G^+ 的所有山谷组成的集合，用 L_2 表示集合 $\mathsf{L}_2^+ \cup \mathsf{L}_2^-$。

山脉：景观 u 由 $\sigma(u) = \tau(u) = 1$构成。因此，非平凡山脉的高度就是其峰值的高度。注意，所有山脉的长度都是 $4k+1$，其中 $k \in \mathbb{N}_0$为某个值，并且$u = 1$ 是长度为 1 的唯一山脉。若 $u \neq 1$，我们将$\lambda_l(u)$记作 u 中同时也是上坡的最长前缀，并将 $\lambda_r(u)$记作 u 中同时也是下坡的最长后缀。我们分别称 $\lambda_l(u)$ 和$\lambda_r(u)$为 u的左山丘和右山丘。对于技术上的

原因，我们还定义 $\lambda_l(1) = \lambda_r(1) = 1$。我们用 MR 表示 G^+中所有山脉构成的集合。

山：不含河流的山脉 u 。因此，它要么是平凡山脉 $u = 1$，要么由左山丘 $\lambda_l(u)$ 后接右山丘 $\lambda_r(u)$ 构成。非平凡山只有一条山脊。我们分别用 M^1 和 M 表示所有山和非平凡山的集合。因此 $M = MR \cap L_2^+$。

我们也将使用前述术语来指称给定字 $u \in G^+$ 的子词。例如， $u \in L$ 的一个山丘是 u 的一个子词，且本身也是一个山丘。若 $u \in L$ 的一个山丘未被 u 的另一个山丘真包含，则称其为极大的；若 u 的一个山谷未被 u 的另一个山谷真包含，则称其为极大的。因此，每个非平凡山脉都能唯一地分解为其左山丘，后接位于相邻山脊之间的可能为空的极大山谷序列，最后以其右山丘结束。然而，我们必须谨慎，因为如果 u_1 和 u_2 是两个景观，且 $g = \tau(u_1) = \sigma(u_2)$，那么 u_1u_2 就不是景观：在 u_1 与 u_2 的连接处会出现双重 gg 。因此，我们将用记号 $u_1 * u_2$ 表示由 u_1u_2 替换 gg 为 g 所得到的景观。注意， $u_1u_2 \approx u_1 * u_2$ ，因为 $[g]$ 是 F_1^1 的一个幂等元。

我们将把景观表示为线图，其中锚点标记边，其他字母标记顶点。我们将在这些线图中展示字母在 G' 中的高度信息，方法如下：绘制时，让所有由高度相同的字母标记的顶点位于同一条虚拟水平线上；位于更高虚拟水平线上的顶点，其标记字母的高度也更高。我们试着在图1中说明这一想法。例如，仔细观察该图，可以得出，对于某些 s、$t \in \{l, r\}$，有 $(g_1, a_2) = (g_2^s, g_2^{sa})$，且 $(a_7, g_7) = ((g_6^{ta})', g_6^t)$。借助这些线图，我们可以看到，上文引入的术语都有自然的解释。我们在图2中再次绘出图1的线图（省略了一些不必要的信息），以说明其中一些术语。

接下来，我们为 G 的每个元素关联一座山。首先注意到， $11g_{xx'}x1$、$1x'g_{xx'}11$ 和 $11g_{xx'}11$ 都是山。出现两个相同的 1（11）可能看起来有些奇怪。这是因为其中一个被视为来自 G' 的字母，另一个则是锚点。当然，既然我们知道 1 将表示 F_1^1，的单位元，本可以把这两个 1 合并成一个，甚至将它们省略。不过，这就意味着我们必须区别对待这个特殊字母和 G' 中的其他字母。出于技术上的原因，最好不要这样做，而是把 G' 中的字母 1 当作其他任何字母来处理。因此，在我们的景观中，会经常看到这两个相同的 1（甚至更长的 1 序列）。

我们定义 $\beta_1(x) = 11g_{xx'}x1$、 $\beta_1(x') = 1x'g_{xx'}11$和 $\beta_1(g_{xx'}) = 11g_{xx'}11$，因为 $x \approx 11g_{xx'}x1$、 $x' \approx 1x'g_{xx'}11$和 $g_{xx'} \approx 11g_{xx'}11$。我们还定义$\beta_1(1) = 1$，即平凡山。对于一个高度大于 1 的 5元组 g ， $\beta_1(g)$ 的定义

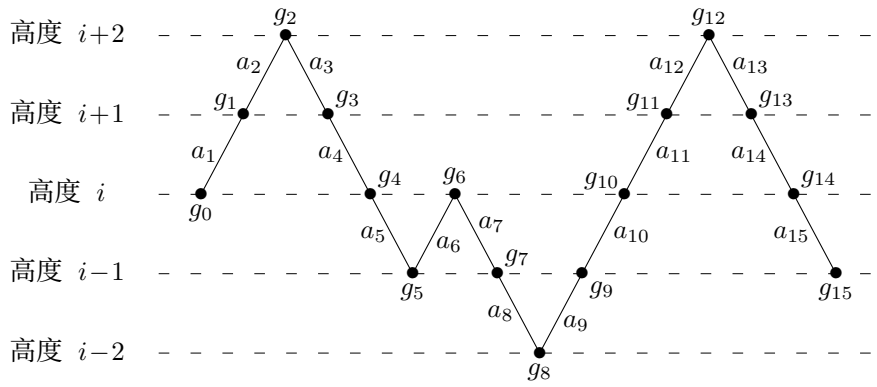


FIGURE 1. 线图中景观的示意图。

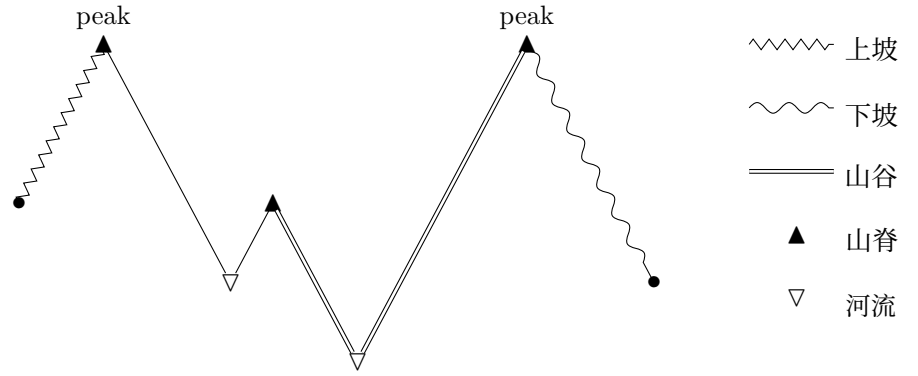


FIGURE 2. 一些术语的示例。

更为复杂。这些字很长，因此我们将先定义它们的左山丘和右山丘。

设 $g \in \mathsf{G}^5$，使得 $\upsilon(g) = 2n$ 或 $\upsilon(g) = 2n+1$，其中某个 $n \in \mathbb{N}$。令

$$\beta_{1,l}(g) = \underbrace{g^{c^n} g^{c^{n-1}l_a a} g^{c^{n-1}l} g^{c^{n-1}la}}\, g^{c^{n-1}} \cdots \underbrace{g^{c^2} g^{cl_a a} g^{cl} g^{cla}}\, \underbrace{g^{c} g^{l_a a} g^{l} g^{la}}\, g$$

and

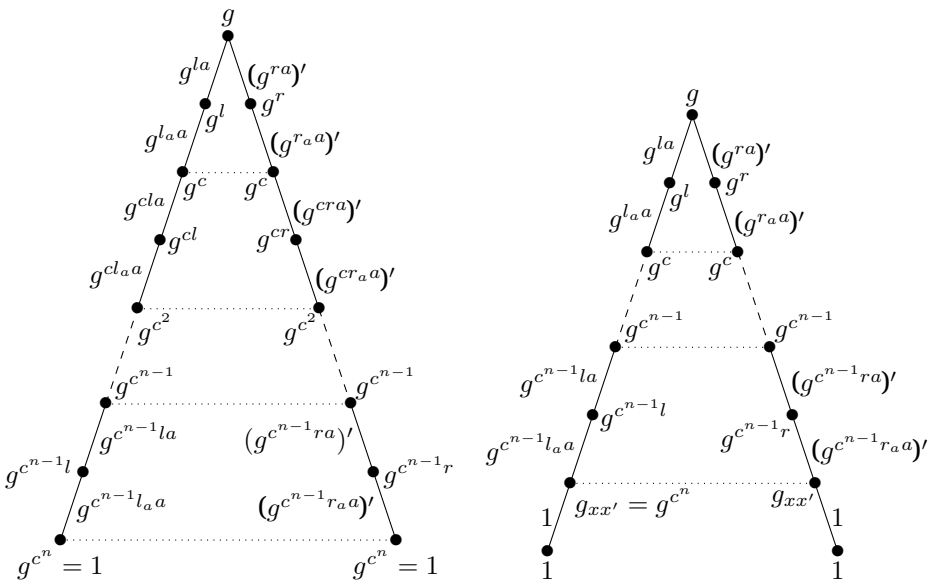
$$\beta_{1,r}(g) = g\, \underbrace{(g^{ra})' g^{r} (g^{r_a a})' g^{c} (g^{cra})'}\, g^{cr} \cdots g^{c^{n-1}}\, \underbrace{(g^{c^{n-1}ra})' g^{c^{n-1}r} (g^{c^{n-1}r_a a})' g^{c^n}}.$$

这些字下方的“括号”标出了构造它们时用作模式的四元素块。要构造$\beta_{1,\ l}(g)$，我们在每个g^{c^i} 的左侧添加块 $g^{c^{i+1}} g^{c^i l_a a} g^{c^i l} g^{c^i la}$；而要构造 $\beta_{1,\ r}(g)$，我们在每个 g^{c^i} 的右侧添加块 $(g^{c^i ra})' g^{c^i r} (g^{c^i r_a a})' g^{c^{i+1}}$。因此，$\beta_{1,\ l}(g)$是从 g^{c^n} 到 g的上坡，而$\beta_{1,\ r}(g)$是从 g 到 g^{c^n}的下坡。此外，$g^{c^n} = 1$ 若 $\upsilon(g) = 2n$，且 $g^{c^n} = g_{xx'}$ 若 $\upsilon(g) = 2n+1$。

现在我们定义

$$\beta_1(g)=\begin{cases}\beta_{1,l}(g)*\beta_{1,r}(g) & \text{if } \upsilon(g)=2n\\ 11\beta_{1,l}(g)*\beta_{1,r}(g)11 & \text{if } \upsilon(g)=2n+1\end{cases}$$

显然，$\beta_1(g)$ 是一座山，当且仅当 $\upsilon(g)=2n$。若 $\upsilon(g)=2n+1$，则 $\beta_1(g)$ 也是一座山，因为 $11g_{xx'}$ 和 $g_{xx'}11$ 都是山丘。我们在图3中描绘了山 $\beta_1(g)$，以便于观察。对于每个 $g\in \mathsf{G}^5$，分别用 $\lambda_l(g)$ 和 $\lambda_r(g)$ 表示 $\beta_1(g)$ 的左山丘和右山丘。因此，对所有 $g\in \mathsf{G}^5$，都有 $\beta_1(g)=\lambda_l(g)*\lambda_r(g)$。还需注意，若 $\upsilon(g)$ 为偶数，则 $\lambda_l(g)=\beta_{1,l}(g)$ 和 $\lambda_r(g)=\beta_{1,r}(g)$；而若 $\upsilon(g)$ 为奇数，则 $\lambda_l(g)=11\beta_{1,l}(g)$ 和 $\lambda_r(g)=\beta_{1,r}(g)11$。



(a) $\upsilon(g)=2n$。　　(b) $\upsilon(g)=2n+1$。

FIGURE 3. 山的插图 $\beta_1(g)$。

设 $u=h_0\cdots h_k$ 满足 $h_i\in \mathsf{G}$，其中 $0\le i\le k$。将 β_1 扩展为 u，定义为

$$\beta_1(u)=\beta_1(h_0)*\cdots*\beta_1(h_k)\,.$$

于是 $\beta_1(u)\in \mathsf{MR}$。在下面的结果中，我们证明对于所有字 $u\in \mathsf{G}^+$，$u\approx\beta_1(u)$。

引理 3.2. $\beta_1(u)\approx u$ 对所有 $u\in \mathsf{G}^+$均成立。

证明。注意，我们只需证明对所有 $h\in \mathsf{G}$，$\beta_1(h)\approx h$。事实上，若对所有 $h\in \mathsf{G}$，$\beta_1(h)\approx h$，则

$$\beta_1(u)\approx\beta_1(h_0)\beta_1(h_1)\cdots\beta_1(h_k)\approx h_0h_1\cdots h_k=u\,.$$

我们已经注意到，对所有 $a \in A$， $\beta_1(a) \approx a$。显然

$$g^{c^i}(g^{c^{i-1}})^{l_a a} g^{c^{i-1}l} g^{c^{i-1}la} g^{c^{i-1}} = (g^{c^{i-1}})^c (g^{c^{i-1}})^L g^{c^{i-1}} \approx g^{c^{i-1}}$$

根据 ρ_s 的定义。由于我们还有 $11 g_{xx'} \approx g_{xx'}$，因此可以得出，$\lambda_l(g) \approx \beta_{1,\, l}(g) \approx g$ 对所有 $g \in \mathsf{G}^5$ 都成立。对偶地，我们还可以得出，$\lambda_r(g) \approx \beta_{1,\, r}(g) \approx g$。因此

$$\beta_1(g) = \lambda_l(g) * \lambda_r(g) \approx \lambda_l(g)\lambda_r(g) \approx g^2 \approx g\,.$$

我们已证明，对所有 $h \in \mathsf{G}$， $\beta_1(h) \approx h$ 成立，正如所需。 □

3.5. 河流提升。设 $u = g_0 a_1 g_1 \cdots a_n g_n$ 是一个景观，并假设 g_i 是 u 的一条河流。那么， $g_{i-1}a_i g_i a_{i+1} g_{i+1}$ 是 u 的一个子词，使得 $g_{i-1}a_i g_i$ 是一个右锚定三元组，且 $g_i a_{i+1} g_{i+1}$ 是一个左锚定三元组。换言之，

$$(g_i, a_i) = \big(g_{i-1}^s, (g_{i-1}^{sa})'\big) \quad \text{and} \quad (g_i, a_{i+1}) = (g_{i+1}^t, g_{i+1}^{ta})\,,$$

对于某些 s、$t \in \{l, r\}$。

设 h_i 为5元组（g_{i+1}、a'_{i+1}、g_i、a_i、g_{i-1}）。若 $g_{i-1} \neq g_{i+1}$，则 $h_i \in \mathsf{G}_d$；若 $g_{i-1} = g_{i+1}$ 且 $a_i \neq a'_{i+1}$，则 $h_i \in \mathsf{G}_e$。然而，若$g_{i-1} = g_{i+1}$ 且 $a_i = a'_{i+1}$，则 $h_i \notin \mathsf{G}^5$。因此，设

$$v = \begin{cases} g_0 a_1 \cdots g_{i-1} a_{i+2} g_{i+2} \cdots g_n & \text{if } g_{i-1} = g_{i+1} \text{ and } a_i = a_{i+1}\,, \\ g_0 \cdots g_{i-1} a_i h_i a_{i+1} g_{i+1} \cdots g_n & \text{otherwise}\,. \end{cases}$$

若 $h_i \in \mathsf{G}^5$, ，则三元组 $g_{i-1}a_i h_i$ 是左锚定的，而三元组$h_i a_{i+1} g_{i+1}$ 是右锚定的；因此 v 也是景观。若 $h_i \notin \mathsf{G}^5$, ，则$g_{i-1}a_{i+2}g_{i+2} = g_{i+1}a_{i+2}g_{i+2}$ 是锚定三元组，且 v 同样是景观。我们已经证明， v 始终是景观。我们称 v 是通过抬升一条河流从 u 得到的，并记作 $u \to v$ （若需要指出被抬升的河流，则记作 $u \xrightarrow{g_i} v$ ）。因此， $\to$ 是定义在所有景观组成的集合 L 上的二元关系。图4展示了此运算的两种不同情形。

单词 v 的长度要么与 u 相同，要么减少 4 个单位。若$h_i \notin \mathsf{G}^5$, ，抬升 g_i 会消除河流 g_i，但若 g_{i-1} 和 g_{i+1} 都不是 u 的山脊，则可能产生一条新的河流 g_{i-1}。若 $h_i \in \mathsf{G}^5$, ，则抬升 g_i 会用山脊 h_i 替换河流 g_i。不过，除非 g_{i-1} 和 g_{i+1} 分别是 u 的山脊，否则它们会成为 v 的河流。

我们还来分析这一运算对景观 u 的“锚点子序列”的影响。继续使用上文的记号，若$h_i \in \mathsf{G}^5$, ，则该锚点子序列保持不变。然而，若$h_i \notin \mathsf{G}^5$, ，则只需从原子序列中删除一个形如 xx'、 $x'x$ 或 11 的子词，即可得到新的锚点子序列。

下一个结果表明，关系 $\to$ 包含于 ρ 中。

引理 3.3. 使用上文引入的记号， $u \approx v$。

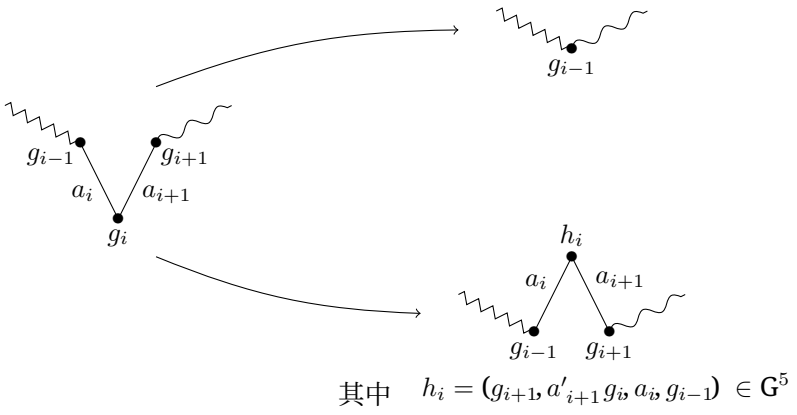


FIGURE 4. 河流提升示意图。

证明. 若 $h_i \notin \mathsf{G}^5$, , 则

$$g_{i-1}a_ig_ia_{i+1}g_{i+1} = \begin{cases} g_{i-1}g_{i-1}^L g_{i-1} & \text{if } (g_i, a_{i+1}) = (g_{i+1}^l, g_{i+1}^{la}), \\ g_{i-1}g_{i-1}^R g_{i-1} & \text{if } (g_i, a_{i+1}) = (g_{i+1}^r, g_{i+1}^{ra}); \end{cases}$$

由引理 3.1（i）可知, $g_{i-1}g_{i-1}^L g_{i-1} \approx g_{i-1}$ 且 $g_{i-1}g_{i-1}^R g_{i-1} \approx g_{i-1}$, 因此我们得出 $g_{i-1}a_ig_ia_{i+1}g_{i+1} \approx g_{i-1}$, 于是 $u \approx v$。如果 $h_i \in \mathsf{G}^5$, , 那么

$$g_{i-1}a_ih_ia_{i+1}g_{i+1} = h_i^r \cdot h_i \cdot h_i^l \quad \text{and} \quad g_{i-1}a_ig_ia_{i+1}g_{i+1} = h_i^r \cdot h_i^c \cdot h_i^l .$$

根据 ρ_s 的定义，我们得出 $g_{i-1}a_ih_ia_{i+1}g_{i+1} \approx g_{i-1}a_ig_ia_{i+1}g_{i+1}$; 由此，本例中也有 $u \approx v$ 。□

我们用 $\xrightarrow{*}$ 表示 $\to$ 的自反传递闭包。根据前面的结果，我们知道 $\xrightarrow{*}$ 包含于 ρ。因此，如果 u 是一幅景观，那么

$$U(u) = \{v \in \mathrm{G}^+ \mid u \xrightarrow{*} v\} \subseteq [u] .$$

假设 u 的长度为 $2n+1$ 、高度为 i，那么来自 U（u）的景观长度均不超过 $2n+1$, 高度均不超过 $j = \lfloor i + n/2 \rfloor$。它们的首字母和末字母都与 u 相同。考察河流的数量可知，每幅景观中的河流数至多为 $\lfloor n/2 \rfloor$ 。因此，对于每个 $v \in U$（u）, 我们将 v 中的河流数记录在一个 j 元组 r（v） = （r^1（v） $\cdots$， r^j（v）） 中，其中 r^k（v）表示高度为 $k-1$ 的 v 中的河流数。 r（v）所有分量之和就是 v 的河流数，因此至多为 $\lfloor n/2 \rfloor$。

令 $R(u) = \{r(v) \mid v \in U(u)\}$。集合 $R(u)$ 显然是有限的。我们使用字典序对 $R(u)$ 的元素进行排序。如果 $v \in U(u)$，并且 $v \to v_1$通过提升一条高度为 k 的河流，则 $v_1 \in U(u)$,

$$r^k(v_1) = r^k(v) - 1,\ r^{k+1}(v) \le r^{k+1}(v_1) \le r^{k+1}(v) + 2 \text{ and } r^{k_1}(v_1) = r^{k_1}(v)$$

对于所有其他的 k_1；因此 $r(v_1) < r(v)$。所以，我们不能无限期地对 u 应用河流提升操作。只有当我们得到一个没有河流的景观时，才必须停止，也就是说，得到一个来自 $\mathrm{L}_2^+ \cup \mathrm{L}_1 \cup \mathrm{G}'$ 的景观。注意，这些景观为我们提供了所有条目都等于 0 的 j-元组。因此，$R(u)$ 必须始终包含所有条目都等于 0 的 j-元组，而这个 j-元组显然是 $R(u)$ 的最小元素。

很容易看出，河流提升是一种交换运算。换句话说，如果 g_i 和 g_j 是 $u \in \mathrm{L}$ 中的两条河流，那么先提升 g_i再提升 g_j，所得景观与先提升 g_j 再提升 g_i所得的景观相同。因此，河流提升构成一个规则系统，通常称为诺特局部合流规则系统。这类系统的一个重要性质是，无论我们选择按什么顺序将规则应用于一个元素，经过有限步之后都必定停止，并得到相同的“约化”元素（见 [5]）。在这里讨论的情形中，这意味着无论我们选择按什么顺序对 $u \in \mathrm{L}$ 进行河流提升，最终都会得到 $U(u)$ 中相同的无河流景观。特别是，$U(u)$ 有唯一一个无河流景观。我们将其记作 $\beta_2(u)$。另请注意，如果 $u \in \mathrm{L}$ 且 $u \xrightarrow{*} v$，那么 $\beta_2(u) = \beta_2(v)$。

推论 3.4. 对所有 $u \in \mathrm{L}$，$\beta_2(u) \approx u$。

证明。该推论显然是引理 3.3 的直接推论。 □

注意，所有山脉的集合对于 $\xrightarrow{*}$ 是闭合的，即当 $u \in \mathrm{MR}$ 和 $u \xrightarrow{*} v$ 时，$v \in \mathrm{MR}$。因此，当 $u \in \mathrm{MR}$ 时，$U(u) \subseteq \mathrm{MR}$。由于没有河流的山脉只有山，所以当 u 是山脉时，景观 $\beta_2(u)$ 必定是一座山。因此，对于任意单词 $v \in \mathrm{G}^+$，若令 $\beta(v) = \beta_2(\beta_1(v))$，则 $\beta(v) \in \mathrm{M}^1$。前一个推论和引理 3.2 还使我们能够得出 $\beta(v) \approx v$。我们将在下一个推论中记录这一观察结果，以供日后参考。

推论 3.5. 对所有 $v \in \mathrm{G}^+$，$\beta(v) \approx v$。

让我们暂停一下，更仔细地考察山峰结构。首先，它们是长度为$4n + 1$（$n \in \mathbb{N}_0$）、$g_0 = g_{2n} = 1$且峰值为 g_n的字 $u = g_0 a_1 g_1 \cdots g_{2n-1} a_{2n} g_{2n}$。如果 $n \geq 1$，那么也有$g_1 = g_{2n-1} = g_{xx'} \in \mathrm{G}_e$。事实上，如果 g_i 是属于 G_e 的 $\lambda_l(u)$ 的最高字母，那么子序列 $g_0 g_1 \cdots g_i$ 完全由g_i 决定：$g_k = g_i^{l^{i-k}} = g_i^{r^{i-k}} \in \mathrm{G}_e$；因此 $g_0 g_1 \cdots g_i \in \mathrm{G}_e^+$。相比之下，子序列 $a_1 \cdots a_i$ 可能有所变化：如果 k 为偶数，a_k 可以是 $\{1, x\}$ 中的任意锚点；如果 k 为奇数，则可以是 $\{1, x'\}$ 中的任意锚点。

如果我们现在考察上坡 $\lambda_l(u)$ 的上部（ g_i以上），情况恰恰相反。每个 g_{k-1} 要么是 g_k 的左侧条目，要么是右侧条目，适用于$i < k \leq n$。不过，g_{k-1} 在 g_k 内的位置完全决定了 a_k：a_k 是与 g_{k-1} 的位置相对应的 g_k 的锚点。因此，虽然（可能为空的）子序列 $g_i \cdots g_n$ 可以变化（尽管峰 g_n

是固定的），子序列 $a_{i+1}\cdots a_n$ 完全由 $g_i\cdots g_n$ 决定。还要注意，如果 $g_{i+1}\cdots g_n \in \mathsf{G}_d^+$ 非空。

如我们所见，上坡 $\lambda_l(u)$分为两个性质截然不同的部分。对于下坡 $\lambda_r(u)$，也可以得出相同的结论。如果 g_j是 G_e 中 $\lambda_r(u)$ 的第一个字母，那么 $g_k = g_j^{l^{k-j}} = g_k^{r^{k-j}} \in \mathsf{G}_e$ 和 g_j 固定子序列 $g_j\cdots g_{2n} \in \mathsf{G}_e^+$。相反，对于每个 $k > j$，当k为偶数时为 $a_k \in \{1, x\}$，当 k为奇数时为 $a_k \in \{1, x'\}$；因此，子序列 $a_{j+1}\cdots a_{2n}$ 不依赖于 g_j。在 $\lambda_r(u)$ 的上部，每个 g_k 对于 $n < k \le j$ 都可以是 g_{k-1} 的左侧条目或右侧条目。然而，对于 $n < k \le j$， a_k 是由 g_{k-1}一侧确定的 g_k 的锚点的逆锚点。

根据上述结论，显然，在 1 与某个 $g \in \mathsf{G}_n$ 之间，上坡和下坡的数量在两种情况下都是 2^n。我们将这一结论记在下面的推论中，以供日后参考。

推论 3.6. 若 $g \in \mathsf{G}_n$，则从 1 到 g 有 2^n 个上坡，从 g 到 1 有 2^n个下坡。

3.6. $\langle \mathsf{G}, \mathsf{R}\rangle$的字问题。在接下来的一系列结果中，我们将证明 $\beta(u)$ 完全刻画了 $u \in \mathsf{G}^+$的 ρ-类。我们将证明，对于所有 $u, v \in \mathsf{G}^+$，当且仅当 $[u] = [v]$ 时， $\beta(u) = \beta(v)$。这一结果解决了 $\langle \mathsf{G}, \mathsf{R}\rangle$的字问题：我们只需计算 $\beta(u)$和$\beta(v)$，再检查是否得到相同的山丘，即可判断 $[u] = [v]$。因此，令

$$\rho_1 = \{(u, v) \in \mathrm{G}^+ \times \mathrm{G}^+ \mid \beta(u) = \beta(v)\}.$$

我们要证明 $\rho = \rho_1$，但根据推论 3.5，我们已经知道 $\rho_1 \subseteq \rho$。接下来的两个结果将说明 $\rho_e \subseteq \rho_1$。

引理 3.7. 设 $g \in \mathsf{G}'$。则：

(i) $\beta_1(xx') \xrightarrow{*} \beta_1(g_{xx'})$, $\beta_1(xx'x) \xrightarrow{*} \beta_1(x)$ *and* $\beta_1(x'xx') \xrightarrow{*} \beta_1(x')$.

(ii) $\lambda_r(g) * \lambda_l(g) \xrightarrow{*} g$ *and* $\beta_1(g^2) \xrightarrow{*} \beta_1(g)$.

证明. (i)。显然

$$\beta_1(xx') = \beta_1(x) * \beta_1(x') = 11g_{xx'}x1x'g_{xx'}11 \xrightarrow{1} 11g_{xx'}11 = \beta_1(g_{xx'}).$$

Now,

$$\beta_1(xx'x) \to \beta_1(g_{xx'}) * \beta_1(x) = 11g_{xx'}111g_{xx'}x1 \xrightarrow{1} 11g_{xx'}x1 = \beta_1(x).$$

类似地，我们证明 $\beta_1(x'xx') \xrightarrow{*} \beta_1(x')$。

(ii)。(ii) 的第一部分通过对 $v(g)$ 使用归纳法证明。显然， $\lambda_r(1) * \lambda_l(1) = 1$，且 $\lambda_r(g_{xx'}) * \lambda_l(g_{xx'}) = g_{xx'}111g_{xx'} \xrightarrow{1} g_{xx'}$。设 $g \in \mathsf{G}_i$，其中 $i \ge 2$，并假设对于所有满足 $j < i$ 的 $h \in \mathsf{G}_j$，都有 $\lambda_r(h) * \lambda_l(h) \xrightarrow{*} h$。由于

$$\lambda_r(g) * \lambda_l(g) = g(g^{ra})'g^r(g^{r_a a})'\big(\lambda_r(g^c) * \lambda_l(g^c)\big)g^{l_a a}g^l g^{la}g,$$

我们得出结论：

$$\lambda_r(g) * \lambda_l(g) \xrightarrow{*} g(g^{ra})'g^r(g^{r_a a})'g^c g^{l_a a}g^l g^{la}g$$

根据归纳假设。但是

$$g(g^{ra})'g^r(g^{r_a a})'g^c g^{l_a a}g^l g^{la}g \xrightarrow{g^c} g(g^{ra})'g^r g^{ra}g(g^{la})'g^l g^{la}g \xrightarrow{g^r,g^l} g\,.$$

我们已经证明了 $\lambda_r(g)*\lambda_l(g) \xrightarrow{*} g$，并证明了 (ii) 的第一部分。现在，

$$\beta_1(g^2)=\lambda_l(g)*\lambda_r(g)*\lambda_l(g)*\lambda_r(g) \xrightarrow{*} \lambda_l(g)*g*\lambda_r(g)=\beta_1(g)\,,$$

我们也证明了 (ii) 的第二部分。 □

推论 3.8. $\rho_e \subseteq \rho_1$。

证明。根据引理 3.7，对于 $g \in \mathsf{G}'$，有序对 $(xx'x,x)$、$(x'xx',x')$、$(xx',g_{xx'})$ 和 (g^2,g) 属于 ρ_1。于是 $\rho_e \subseteq \rho_1$，因为显然也有$\beta(g)=\beta(g1)=\beta(1g)$。□

下一个结果包含证明 $\rho_s \subseteq \rho_1$ 所需的技术细节。

引理 3.9. 设 $g \in \mathsf{G}'$ 且 $u=g_0a_1g_1\cdots a_ng_n \in \mathsf{L}$. 则：

(i) 若 $\upsilon(g) \geq 2$ 且 $s \in \{l,r\}$，则 $\lambda_r(g^s)*\beta_1(g^{sa})*\lambda_l(g) \xrightarrow{*} g^sg^{sa}g$且 $\lambda_r(g)*\beta_1((g^{sa})')*\lambda_l(g^s) \xrightarrow{*} g(g^{sa})'g^s$.$(ii)$ $\beta_1(u) \xrightarrow{*} \lambda_l(g_0)*u*\lambda_r(g_n)$。$(iii)$ 若 $\beta(u)=\beta_2(u)$，则 $u \in \mathsf{MR}$。(iv) $\beta(u)=u$ 当且仅当 $u \in \mathsf{M}^1$。

证明. (i)。我们再次对 $\upsilon(g)$ 使用归纳法来证明 (i)。事实上，我们需要通过对 $\upsilon(g)$ 进行归纳，同时证明 (i) 的两个陈述。对于$\upsilon(g)=2$，首先回顾 $\mathsf{G}_2=\mathsf{G}_{2,\,e}$ 在第 7 页描述的两个元素。然后 $g^s=g_{xx'}$, $\lambda_r(g^s)=g_{xx'}11$ 且

$$\lambda_l(g)=\begin{cases} 11g_{xx'}1g_{2,e,1} & \text{if } g=g_{2,e,1}\,,\\ 1x'g_{xx'}xg_{2,e,2} & \text{if } g=g_{2,e,2}\,.\end{cases}$$

首先考虑 $s=l$ 的情形。若 $g=g_{2,e,1}$，则 $\beta_1(g^{sa})=\beta_1(1)=1$ 并且

$$\lambda_r(g^s)*\beta_1(g^{sa})*\lambda_l(g) = g_{xx'}111g_{xx'}1g \xrightarrow{1} g_{xx'}1g = g^sg^{sa}g\,.$$

若 $g=g_{2,e,2}$，则 $\beta_1(g^{sa})=\beta_1(x)=11g_{xx'}x1$ 并且

$$\lambda_r(g^s)*\beta_1(g^{sa})*\lambda_l(g) = g_{xx'}111g_{xx'}x1x'g_{xx'}xg \xrightarrow{1,1} g_{xx'}xg = g^sg^{sa}g\,.$$

现在考虑 $s=r$ 的情形。若 $g=g_{2,e,1}$，则 $\beta_1(g^{sa})=\beta_1(x)=11g_{xx'}x1$并且

$$\begin{aligned}\lambda_r(g^s)*\beta_1(g^{sa})*\lambda_l(g) &= g_{xx'}111g_{xx'}x11g_{xx'}1g \xrightarrow{1} g_{xx'}x11g_{xx'}1g \xrightarrow{1}\\ &\xrightarrow{1} g_{xx'}xg1g_{xx'}1g \xrightarrow{g_{xx'}} g_{xx'}xg = g^sg^{sa}g\,.\end{aligned}$$

若 $g=g_{2,e,2}$，则 $\beta_1(g^{sa})=\beta_1(1)=1$ 且

$$\begin{aligned}\lambda_r(g^s)*\beta_1(g^{sa})*\lambda_l(g) &= g_{xx'}11x'g_{xx'}xg \xrightarrow{1}\\ &\xrightarrow{1} g_{xx'}1gx'g_{xx'}xg \xrightarrow{g_{xx'}} g_{xx'}1g = g^sg^{sa}g\,.\end{aligned}$$

我们已经证明了命题 $\lambda_r(g^s)*\beta_1(g^{sa})*\lambda_l(g) \xrightarrow{*} g^s g^{sa} g$ 对于 $\upsilon(g)=2$ 成立。类似地，我们证明命题 $\lambda_r(g)*\beta_1((g^{sa})')*\lambda_l(g^s) \xrightarrow{*} g(g^{sa})'g^s$ 对于 $\upsilon(g)=2$ 成立。

设 $g\in \mathsf{G}_i$ with $i>2$，并假设 $\lambda_r(h^t)*\beta_1(h^{ta})*\lambda_l(h) \xrightarrow{*} h^t h^{ta} h$ and $\lambda_r(h)*\beta_1((h^{ta})')*\lambda_l(h^t) \xrightarrow{*} h(h^{ta})'h^t$ 对所有满足 $2\le j<i$ and $t\in\{l,r\}$ 的 $h\in \mathsf{G}j$ 都成立。令 $s\in\{l,r\}$，并回忆 $g^{sa}=(g^{s_a a})'$ and $g^{s_a}=g^c$。那么

$$\begin{aligned}\lambda_r(g^s)*\beta_1(g^{sa})*\lambda_l(g) &= \lambda_r(g^s)*\beta_1(g^{sa})*\lambda_l(g^c)g^{l_a a}g^l g^{la}g\\ &= \lambda_r(g^s)*\beta_1((g^{s_a a})')*\lambda_l(g^c)g^{l_a a}g^l g^{la}g\\ &\xrightarrow{*} g^s(g^{s_a a})'g^c g^{l_a a}g^l g^{la}g\,,\end{aligned}$$

其中 $\xrightarrow{*}$ 可由归纳假设得到。现在注意，若 $s=l$，则

$$g^s(g^{s_a a})'g^c g^{l_a a}g^l g^{la}g = g^l(g^{l_a a})'g^c g^{l_a a}g^l g^{la}g \xrightarrow{g^c} g^l g^{la}g = g^s g^{sa}g\,;$$

若 $s=r$，则

$$\begin{aligned}g^s(g^{s_a a})'g^c g^{l_a a}g^l g^{la}g &= g^r(g^{r_a a})'g^c g^{l_a a}g^l g^{la}g\\ &\xrightarrow{g^c} g^r(g^{r_a a})'g g^{l_a a}g^l g^{la}g\\ &= g^r g^{ra}g(g^{la})'g^l g^{la}g\\ &\xrightarrow{g^l} g^r g^{ra}g = g^s g^{sa}g\,.\end{aligned}$$

我们已经证明了 $\lambda_r(g^s)*\beta_1(g^{sa})*\lambda_l(g) \xrightarrow{*} g^s g^{sa} g$。$\lambda_r(g)*\beta_1((g^{sa})')*\lambda_l(g^s) \xrightarrow{*} g(g^{sa})'g^s$ 的证明是类似的，因此 (i) 可通过数学归纳法得到证明。

(ii)。对于 $i\in\{0,\cdots,n\}$，令 $u_i=g_0a_1g_1\cdots a_ig_i$。因此，所有 u_i 都是 u 的前缀，并且 $u=u_n$。所以，只要我们通过对 i 进行归纳证明 $\beta_1(u_i)\xrightarrow{*}\lambda_l(g_0)*u_i*\lambda_r(g_i)$，就能证明 (ii)。显然

$$\beta_1(u_0)=\lambda_l(g_0)*u_0*\lambda_r(g_0)$$

因为 $u_0=g_0$。假设 $\beta_1(u_{i-1})\xrightarrow{*}\lambda_l(g_0)*u_{i-1}*\lambda_r(g_{i-1})$。根据景观和 (i) 的定义，我们还得到

$$\lambda_r(g_{i-1})*\beta_1(a_i)*\lambda_l(g_i)\xrightarrow{*} g_{i-1}a_ig_i\,.$$

现在，利用归纳假设，我们得到

$$\begin{aligned}\beta_1(u_i) &= \beta_1(u_{i-1})*\beta_1(a_i)*\beta_1(g_i)\\ &\xrightarrow{*} \lambda_l(g_0)*u_{i-1}*\lambda_r(g_{i-1})*\beta_1(a_i)*\lambda_l(g_i)*\lambda_r(g_i)\\ &\xrightarrow{*} \lambda_l(g_0)*u_{i-1}*(g_{i-1}a_ig_i)*\lambda_r(g_i)=\lambda_l(g_0)*u_i*\lambda_r(g_i)\,.\end{aligned}$$

我们已经完成了（ii）的证明。

由于 $g_0=1=g_n$ if $u\in \mathbf{MR}$，因此（iii）可由（ii）轻易得到：

$$\beta(u)=\beta_2(\beta_1(u))=\beta_2(\lambda_l(g_0)*u*\lambda_r(g_n))=\beta_2(u)\,;$$

且（iv）可由（iii）显然得到。 □

命题 3.10. 设 $g \in \mathsf{G}^5$，其中 $v(g) \geq 2$ 且 $u,\ v \in \mathsf{G}^+$。

(*i*) $\beta(g) = \beta(g^c g^L g) = \beta(gg^R g^c)$ 以及 $\beta(g^r \cdot g^c \cdot g^l) = \beta(g^r \cdot g \cdot g^l)$。

(*ii*) $\beta(u) = \beta(v)$ 当且仅当 $[u] = [v]$。

证明。(*i*)。由引理 3.9。(*ii*),

$$\beta_1(g^c g^L g) \xrightarrow{*} \lambda_l(g^c) * (g^c g^L g) * \lambda_r(g) = \lambda_l(g) * \lambda_r(g) = \beta_1(g)\,.$$

因此 $\beta(g^c g^L g) = \beta(g)$。由对偶性，我们还有 $\beta(gg^R g^c) = \beta(g)$。再次由引理 3.9。(*ii*)，可得 $\beta_1(g^r \cdot g \cdot g^l) \xrightarrow{*} \lambda_l(g^r) * (g^r \cdot g \cdot g^l) * \lambda_r(g^l)$，并且

$$\begin{aligned}
\beta_1(g^r \cdot g^c \cdot g^l) &\xrightarrow{*} \lambda_l(g^r) * (g^r (g^{r_a a})' g^c g^{l_a a} g^l) * \lambda_r(g^l) \\
&\xrightarrow{g^c} \lambda_l(g^r) * (g^r (g^{r_a a})' g g^{l_a a} g^l) * \lambda_r(g^l) \\
&= \lambda_l(g^r) * (g^r g^{ra} g (g^{la})' g^l) * \lambda_r(g^l) \\
&= \lambda_l(g^r) * (g^r \cdot g \cdot g^l) * \lambda_r(g^l)\,.
\end{aligned}$$

由此 $\beta(g^r \cdot g^c \cdot g^l) = \beta(g^r \cdot g \cdot g^l)$。

(*ii*)。根据推论 3.5，我们已知 $[u] = [v]$ 当 $\beta(u) = \beta(v)$。由推论 3.8，我们还有 $\rho_e \subseteq \rho_1$。现在，我们在 (*i*) 中证明了 $\rho_s \subseteq \rho_1$；因此 $R \subseteq \rho_1$。为完成 (*ii*) 的证明，我们只需得出结论：ρ_1是 G^+ 上的一个同余。但这显然成立，因为 $\beta(u_1 u_2) = \beta(\beta(u_1)u_2) = \beta(u_1\beta(u_2))$。□

虽然 G 和 $\rho_e \cup \rho_s$ 都是无限集，但如前所述，命题 3.10.(*ii*) 为 F_1^1 的字问题提供了一种解法：要判断 $u \approx v$，我们只需计算 $\beta(u)$ 和 $\beta(v)$，并检查是否得到相同的山。因此：

推论 3.11. F_1^1 的字问题是可判定的。

命题 3.10.(*ii*) 还告诉我们，每个 ρ-类 $[u]$ 都有唯一的山，即 $\beta(u)$。我们称 $\beta(u)$ 为 $u \in \mathsf{G}^+$ 的典范形式。我们在 M^1 和 M 上引入如下运算 $\odot$：

$$u_1 \odot u_2 = \beta(u_1 * u_2) = \beta_2(u_1 * u_2)\,,$$

对于任意 $u_1, u_2 \in \mathsf{M}^1$。

命题 3.12. $(\mathsf{M}^1, \odot)$ 和 $(\mathsf{M}\ \odot)$ 分别是 F_1^1 和 F_1, 的模型。此外，若 $u, v, w \in \mathsf{M}^1$ 满足 $w = u \odot v$，则

(*i*) $\lambda_l(u)$ 是 $\lambda_l(w)$ 的前缀，而 $\lambda_r(v)$ 是 $\lambda_r(w)$ 的后缀。(*ii*) $v(w) \geq \max\{v(u)\ v(v)\}$，并且 $v(w) = v(u)$ $[v(w) = v(v)]$ 当且仅当 $\kappa(w) = \kappa(u)$ $[\kappa(w) = \kappa(v)]$。

证明。第一部分直接由命题 3.10.(*ii*) 得出，而 (*ii*) 显然由 (*i*) 得出。因此，我们只需证明 (*i*)。但请注意，根据河流提升的定义，对于山脉 u_1，如果 $u_1 \to u_2$，那么 $\lambda_l(u_1)$ 是 $\lambda_l(u_2)$ 的前缀，且 $\lambda_r(u_1)$ 是 $\lambda_r(u_2)$ 的后缀。多次应用前面的观察，我们得出 $\lambda_l(u) = \lambda_l(u * v)$

是 $\lambda_l(\beta(u*v)) = \lambda_l(u\odot v)$ 的前缀，而 $\lambda_r(v) = \lambda_r(u*v)$ 是$\lambda_r(\beta(u*v)) = \lambda_r(u\odot v)$ 的后缀。□

4. The semigroup$\mathbf{F}_1$

在上一节中，我们构造了 $\mathbf{F}_1$。本节将证明，$\mathbf{F}_1$ 是由 $[x]$弱生成的正则半群。我们首先证明 $\mathbf{F}_1$ 是正则的。要证明 $\mathbf{F}_1$ 由 $[x]$弱生成，我们需要先描述 $\mathbf{F}_1$ 上的格林关系，然后证明 $[g]$ 是 $S([g^Rg^c],[g^cg^L])$中的唯一元素。后一个事实意味着，任何包含 $[x]$的 $\mathbf{F}_1$ 的正则子半群也包含 $\mathbf{G}^5$。利用这些信息，我们将得出结论：$\mathbf{F}_1$ 由 $[x]$弱生成。

设 $u = g_0a_1g_1\cdots g_{n-1}a_ng_n$是一个景观。注意，通常 $g_na_ng_{n-1}\cdots g_1a_1g_0$ 不是景观，但 $g_na'_ng_{n-1}\cdots g_1a'_1g_0$是。我们将 u 的反向定义为景观 $\overleftarrow{u} = g_na'_ng_{n-1}\cdots g_1a'_1g_0$。显然，$\overleftarrow{u}$的反向仍是 u。

引理 4.1. 若 $u = g_0a_1g_1\cdots a_ng_n \in \mathbf{L}_1^-$，则 $u\overleftarrow{u} \approx u*\overleftarrow{u} \approx g_0$。

证明。注意，$u*\overleftarrow{u}$ 是一个以 g_n 为河流的山谷，并且显然 $u\overleftarrow{u} \approx u*\overleftarrow{u}$，因为 $[g_n]$是 $\mathbf{F}_1^1$的一个幂等元。令 $i \in \{1,\cdots,n\}$。则由 $u \in \mathbf{L}_1^-$，可知$g_i = g_{i-1}^{s_i}$，其中$s_i \in \{l,r\}$。事实上，我们还知道 $a_i = (g_{i-1}^{s_ia})'$。因此

$$g_{i-1}a_ig_ia'_ig_{i-1} = g_{i-1}\cdot g_{i-1}^{s_i}\cdot g_{i-1} \approx g_{i-1}$$

由引理 3.1.(*i*)。现在，多次应用这一观察，我们得到

$$\begin{aligned} u\overleftarrow{u} \approx u*\overleftarrow{u} &= g_0a_1\cdots g_{n-2}a_{n-1}g_{n-1}a_ng_na'_ng_{n-1}a'_{n-1}g_{n-2}\cdots a'_1g_0\\ &\approx g_0a_1\cdots g_{n-2}a_{n-1}g_{n-1}a'_{n-1}g_{n-2}\cdots a'_1g_0\\ &\quad\vdots\\ &\approx g_0a_1g_1a'_1g_0 \approx g_0\,. \end{aligned}$$

我们已证明了所需的 $u\overleftarrow{u} \approx u*\overleftarrow{u} \approx g_0$。□

接下来，我们证明 $\mathbf{F}_1^1$ 是一个正则幺半群。

命题 4.2。幺半群 $\mathbf{F}_1^1$ 是正则的，并且对于所有 $u \in \mathbf{L}_2^+$，$[\overleftarrow{u}]$ 是 $[u]$ 的一个逆元。

证明。由推论 3.5，对于所有 $v \in \mathbf{G}^+$，$v \approx \beta(v)$。由于 $\beta(v) \in \mathbf{M}^1 \subseteq \mathbf{L}_2^+\cup\{1\}$，只需证明该命题的第二部分，即可同时得出第一部分。设 $u \in \mathbf{L}_2^+$，其峰为 $g \in \mathbf{G}^5$。那么，对于某个$u_1 \in \mathbf{L}_1^+$ 以及 $u_2 \in \mathbf{L}_1^-$，有 $u = u_1*u_2$，且满足 $\tau(u_1) = g = \sigma(u_2)$。由引理 4.1，$u_2\overleftarrow{u_2} \approx g \approx \overleftarrow{u_1}u_1$（注意，$\overleftarrow{u_1} \in \mathbf{L}_1^-$，其反向为 u_1）。因此

$$u\overleftarrow{u}u = u_1*u_2\,\overleftarrow{u_2}*\overleftarrow{u_1}\,u_1*u_2 \approx u_1*g*g*u_2 = u_1*u_2 = u\,.$$

类似地，我们证明 $\overleftarrow{u}u\overleftarrow{u} \approx \overleftarrow{u}$。因此，$[\overleftarrow{u}]$ 是 $[u]$的逆元。□

字母 $g \in \mathsf{G}'$ 的根 $\epsilon(g)$ 递归定义如下：

$$\epsilon(1) = \{1\} \quad \text{and} \quad \epsilon(g) = \epsilon(g^l) \cup \{g\} \cup \epsilon(g^r)$$

若 $\upsilon(g) \geq 1$。因此，对于任意 $g_1 \in \epsilon(g) \setminus \{g\}$，都有 $\upsilon(g_1) < \upsilon(g)$。我们通过规定：若 $h \in \epsilon(g)$，则 $h \preceq g$，来定义 G' 上的关系 $\preceq$。根据下述结果的断言（i），$\preceq$ 是 G' 上的偏序。我们将根的概念推广到任意景观：对于 $u = g_0 a_1 g_1 \cdots a_n g_n \in \mathsf{L}$，规定 $\epsilon(u) = \cup_{i=0}^{n} \epsilon(g_i)$。同样根据下述结果的断言（$i$），$\epsilon(u)$ 是其山脊的根的并集，而 $\epsilon(u)$ 的最高字母是 u 的峰值。特别地，若 u 是一座山，则 $\epsilon(u) = \epsilon(\kappa(u))$。

引理 4.3. 设 $g, h \in \mathsf{G}'$ 且 $u, v, w \in \mathsf{M}^1$，使得 $w = u \odot v$。则：

(i) $h \in \epsilon(g)$ 当且仅当 $\epsilon(h) \subseteq \epsilon(g)$。($ii$) 若 $h \in \epsilon(g) \setminus \{g\}$，则存在 $u = g_0 a_1 g_1 \cdots a_n g_n \in \mathsf{L}_1^+$，使得 $n = \upsilon(g) - \upsilon(h)$，对所有 $0 \leq i \leq n$、$g_0 = h$ 和 $g_n = g$ 均有 $g_i \in \epsilon(g)$。(iii) $\epsilon(u) \cup \epsilon(v) \subseteq \epsilon(w)$。

证明. (i)。显然，我们只需证明：若 $h \in \epsilon(g)$，则 $\epsilon(h) \subseteq \epsilon(g)$。对此命题关于 $\upsilon(g)$ 使用归纳法证明。显然，当 $\upsilon(g) = 0$ 时命题成立，也就是说，当 $g = 1$ 时成立。假设对于所有满足 $\upsilon(g_1) < \upsilon(g)$ 的 $g_1 \in \mathsf{G}'$，以及所有 $h_1 \in \epsilon(g_1)$，都有 $\epsilon(h_1) \subseteq \epsilon(g_1)$。若 $h \in \epsilon(g)$，则或者 $h = g$，或者 $h \in \epsilon(g^l)$，或者 $h \in \epsilon(g^r)$。在后两种情形下，根据归纳假设，我们分别有 $\epsilon(h) \subseteq \epsilon(g^l)$ 或 $\epsilon(h) \subseteq \epsilon(g^r)$。因此，

$$\epsilon(h) \subseteq \epsilon(g^r) \cup \{g\} \cup \epsilon(g^l) = \epsilon(g)$$

如所需。

(ii)。令 $h \in \epsilon(g) \setminus \{g\}$。我们对 $n = \upsilon(g) - \upsilon(h)$ 使用归纳法证明 (ii)。若 $n = 1$，则存在某个 $s \in \{l, r\}$ 使得 $h = g^s$。因此，$u = hg^{sa}g$ 是一条满足 (ii) 条件的上坡。现在假设 $n \geq 2$。那么，对于某个 $s \in \{l, r\}$，有 $h \in \epsilon(g^s)$。不失一般性，假设 $h \in \epsilon(g^l)$。由于 $\upsilon(g^l) - \upsilon(h) = n - 1$，由归纳假设，存在 $g_0 a_1 g_1 \cdots a_{n-1} g_{n-1} \in \mathsf{L}_1^+$，使得对于 $0 \leq i \leq n-1$、$g_0 = h$ 和 $g_{n-1} = g^l$，所有 $g_i \in \epsilon(g^l)$ 均成立。显然，$u = g_0 a_1 g_1 \cdots a_{n-1} g_{n-1} g^{la} g$ 现在是一条满足 (ii) 中所述条件的上坡。

(iii)。注意，由于 $\lambda_l(u)$ 是 $\lambda_l(w)$ 的前缀，且 $\lambda_r(v)$ 是 $\lambda_r(w)$ 的后缀，因此 $\kappa(u)$ $\kappa(v) \in \epsilon(w)$（命题 3.12.($i$)）。现在由（$i$）可得（$iii$）。□

接下来我们描述 $(M^1, \odot)$ 上的偏序 $\leq_{\mathscr{R}}$, $\leq_{\mathscr{L}}$ 和 $\leq_{\mathscr{J}}$。

命题 4.4。设 $u, v \in \mathsf{M}^1$。则：

（i）当且仅当 $\lambda_l(v)$ 是 $\lambda_l(u)$ 的前缀。（ii）当且仅当 $\lambda_r(v)$ 是 $\lambda_r(u)$ 的后缀。（iii）当且仅当 $\kappa(v) \preceq \kappa(u)$。

证明。我们只证明（i）和（iii），因为（ii）是（i）的对偶。

(i)。假设 $u \leq_{\mathscr{R}} v$。因此，对于某个 $w \in \mathsf{M}^1$，有 $u = v \odot w$。由命题 3.12.(i)，$\lambda_l(v)$ 是 $\lambda_l(u)$ 的前缀。现在假设 $\lambda_l(v)$ 是一个

前缀 $\lambda_l(u)$。那么，对于某个满足 $\tau(\lambda_l(v)) = \kappa(v) = \sigma(u_1)$ 的景观 u_1，有 $u = \lambda_l(v) * u_1$。令 $v_1 = \lambda_r(v)$，并考虑 $w = \overleftarrow{v_1} * u_1$。显然 $w \in \mathrm{M}^1$。此外，由引理 4.1，$v_1 * \overleftarrow{v_1} \xrightarrow{*} \kappa(v)$，因此

$$v * w = \lambda_l(v) * v_1 * \overleftarrow{v_1} * u_1 \xrightarrow{*} \lambda_l(v) * \kappa(v) * u_1 = \lambda_l(v) * u_1 = u\,,$$

也就是说，$u = v \odot w$ 和 $u \leq_{\mathscr{R}} v$。

(iii)。若 $u \leq_{\mathscr{J}} v$，则对于两座山 w_1 和 w_2，$u = w_1 \odot v \odot w_2$。根据引理 4.3。$(iii)$，$\epsilon(\kappa(v)) = \epsilon(v) \subseteq \epsilon(u) = \epsilon(\kappa(u))$，且 $\kappa(v) \preceq \kappa(u)$。反过来，若 $\kappa(v) \preceq \kappa(u)$，则取一个上坡 u_1，使得 $\sigma(u_1) = \kappa(v)$ 且 $\tau(u_1) = \kappa(u)$；根据引理 4.3。(ii)，这样的上坡存在。注意，$\leftarrow \qquad \leftarrow w_1 = \lambda_l(u) * \overleftarrow{u_1} * \lambda_l(v)$ 和 $w_2 = \lambda_r(v) * u_1 * \lambda_r(u)$ 是定义良好的山。此外，

$$\begin{aligned} w_1 * v * w_2 &= \lambda_l(u) * \overleftarrow{u_1} * (\overleftarrow{\lambda_l(v)} * \lambda_l(v)) * (\lambda_r(v) * \overleftarrow{\lambda_r(v)}) * u_1 * \lambda_r(u) \\ &\xrightarrow{*} \lambda_l(u) * \overleftarrow{u_1} * \kappa(v) * \kappa(v) * u_1 * \lambda_r(u) \\ &\xrightarrow{*} \lambda_l(u) * \kappa(u) * \lambda_r(u) = u\,, \end{aligned}$$

以及 $w_1 \odot v \odot w_2 = u$。因此 $u \leq_{\mathscr{J}} v$。 □

接下来的两个结果是前述命题的推论。第一个是显然的结论。对于第二个，我们需要进一步说明有关 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{D}$ 关系的内容。

推论 4.5。设 $u, v \in \mathrm{M}^1$。则：

(i) v 覆盖 u 当且仅当对于某个 $a \in A$，$\lambda_l(u) = \lambda_l(v)a\kappa(u)$。$(ii)$ v 覆盖 u 当且仅当对于某个 $a \in A$，$\lambda_r(u) = \kappa(u)a\lambda_r(v)$。$(iii)$ v 覆盖 u 当且仅当 $\kappa(v) \in \{(\kappa(u))^l, (\kappa(u))^r\}$。

推论 4.6。设 $u, v \in \mathrm{M}^1$。则：

(i) $u \mathscr{R} v$ 当且仅当 $\lambda_l(u) = \lambda_l(v)$。

(ii) $u \mathscr{L} v$ 当且仅当 $\lambda_r(u) = \lambda_r(v)$。(

$iii)$ $u \mathscr{J} v$ 当且仅当 $\kappa(u) = \kappa(v)$。(iv)

$u \mathscr{H} v$ 当且仅当 $u = v$。(v) $\mathscr{D} = \mathscr{J}$。

证明。前三个陈述由命题 4.4 中的相应陈述直接得到。于是，(iv) 是 (i) 和 (ii) 的推论。因此，我们只需证明 $\mathscr{J} \subseteq \mathscr{D}$。假设 $u \mathscr{J} v$。那么 $w = \lambda_l(u) * \lambda_r(v) \in \mathrm{M}^1$，因为根据 (iii)，$\kappa(u) = \kappa(v)$。现在，由 (i) 和 (ii)，我们得出 $u \mathscr{R} w \mathscr{L} v$，从而得到 $u \mathscr{D} v$。□

前一个推论的陈述 (iii) 和 (v) 告诉我们，F_1^1 的 $\mathscr{D} = \mathscr{J}$-类与 G' 的元素一一对应，并且集合 $\{[g] \mid g \in \mathrm{G}'\}$ 是 F_1^1 的 $\mathscr{D}$-类的一个横截集（或截面）。下面的结果给出了 F_1^1 的每个 $\mathscr{R}$、$\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{D}$-类的大小。

推论 4.7。如果对 $n \geq 1$ 有 $g \in \mathsf{G}_n$，则 $|\mathbb{R}_{[g]}| = 2^n = |\mathbb{L}_{[g]}|$，且 $|\mathbb{D}_{[g]}| = 2^{2n}$。此外，$\mathsf{D}_{[g]}$ 有 2^n $\mathscr{R}$-类和 2^n $\mathscr{L}$-类。

证明。我们只需证明 $|\mathbb{R}_{[g]}| = 2^n$，因为由对偶性可得 $|\mathbb{L}_{[g]}| = 2^n$，而关于 $\mathscr{D}$ 的陈述可由关于 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{L}$ 的陈述以及推论 4.6 得出。(iv)。但是，推论 4.6。(i) 告诉我们，$\mathsf{R}_{[g]}$ 的大小等于从 g 到 1 的下坡数量，而根据推论 3.6，这个数量是 2^n。因此，$|\mathbb{R}_{[g]}| = 2^n$。□

根据引理 3.1，已知 $[g] \in S([g^R g^c], [g^c g^L])$。$(vi)$。在下一个结果中，我们证明 $[g]$ 是 F_1^1 中 $S([g^R g^c], [g^c g^L])$ 的唯一元素。

引理 4.8。对于每个满足 $\upsilon(g) \geq 2$ 的 $g \in \mathsf{G}^5$，$S([g^R g^c], [g^c g^L]) = \{[g]\}$ 属于 F_1^1。

证明。设 $u \in \mathsf{M}^1$ 满足 $[u] \in S([g^R g^c], [g^c g^L])$。由推论 4.6，得 $\kappa(u) = g$，因为 $[u] \mathscr{D} [g]$。令 v 为山 $\lambda_l(g^c) g^{l_a a} \lambda_r(g^l)$。由引理 3.9.$(ii)$，$\beta_1(g^c g^{l_a a} g^l) \xrightarrow{*} v$，因此 $g^c g^{l_a a} g^l \approx v$。于是

$$u \approx g^c g^L u \approx v g^{la} u \approx v * \beta_1(g^{la}) * u \approx v \odot \beta_1(g^{la}) \odot u\,,$$

因此 $u = v \odot \beta_1(g^{la}) \odot u$。由命题 3.12.$(i)$，$\lambda_l(v) = \lambda_l(g^c) g^{l_a a} g^l$ 是 $\lambda_l(u)$ 的前缀。类似地，我们还可得出，$g^r (g^{r_a a})' \lambda_r(g^c)$ 是 $\lambda_r(u)$ 的后缀。

若 $g \in \mathsf{G}_d$，则 $g^l \neq g^r$。因此，在这种情况下，$\lambda_l(g)$ 是从 1 到 g 、以 $\lambda_l(g^c) g^{l_a a} g^l$ 为前缀的唯一上坡，而 $\lambda_r(g)$ 是从 g 到 1、以 $g^r (g^{r_a a})' \lambda_r(g^c)$ 为后缀的唯一下坡。我们已得出 $\lambda_l(g) = \lambda_l(u)$ 且 $\lambda_r(g) = \lambda_r(u)$，因为 $\kappa(u) = g$。因此，$u = \beta_1(g)$，且当 $g \in \mathsf{G}_d$ 时 $[u] = [g]$。

情形 $g \in \mathsf{G}_e$ 更为复杂，因为 $g^l = g^r$，因此从 1 到 g 有两条不同的上坡路径，即 $\lambda_l(g)$ 和 $\lambda_l(g^c) g^{l_a a} g^l g^{ra} g$。从 g 到 1 也有两条不同的下坡路径，即 $\lambda_r(g)$ 和 $g (g^{la})' g^r (g^{r_a a})' \lambda_r(g^c)$。我们得出结论：

$$u = \lambda_l(g^c) g^{l_a a} g^l a_1 g a_2' g^r (g^{r_a a})' \lambda_r(g^c)\,,$$

对于 a_1、$a_2 \in \{g^{ra}, g^{la}\}$。然而，$[u]$ 也是 F_1^1 的一个幂等元。因此，

$$\begin{aligned} u \approx u^2 &= \lambda_l(u) * \lambda_r(u) * \lambda_l(u) * \lambda_r(u) \\ &\xrightarrow{*} \lambda_l(u) * g a_2' g^r (g^{r_a a})' g^c g^{l_a a} g^l a_1 g * \lambda_r(u) \\ &\xrightarrow{g^c} \lambda_l(u) * g a_2' g^r g^{ra} g (g^{la})' g^l a_1 g * \lambda_r(u)\,. \end{aligned}$$

若 $a_2 = g^{la}$，则 $g_1 = (g, (g^{ra})', g^r, (g^{la})', g) \in \mathsf{G}_e$，并且

$$g a_2' g^r g^{ra} g \xrightarrow{g^r} g a_2' g_1 g^{ra} g\,.$$

因此，$g_1 \in \epsilon(\beta(u^2)) = \epsilon(u) = \epsilon(g)$，且 $\upsilon(g_1) = \upsilon(g) + 1$，这与假设矛盾。因此，$a_2$ 必定等于 g^{ra}。同理，我们也得出 $a_1 = g^{la}$。于是，$\lambda_l(u) = \lambda_l(g)$，且 $\lambda_r(u) = \lambda_r(g)$，也就是说，$u = \beta_1(g)$，并且当 $g \in \mathsf{G}_e$ 时，$[u] = [g]$ 也成立。我们已经证明了这个命题的陈述。□

现在，我们已经具备了证明 F_1 由 $[x]$弱生成所需的所有要素。

命题4.9。正则半群 F_1 由 $[x]$弱生成。

证明。设 S 是 F_1 的一个包含 $[x]$ 的正则子半群。根据推论 4.6,

$$\mathrm{D}_{[x]} = \{[x], [x'], [g_{xx'}], [x'x]\},$$

$[x']$ 是 $[x]$ 的唯一逆元。因此， S 包含 $\mathrm{D}_{[x]}$。如果 $g \in \mathrm{G}_2$, , 那么$g^c = 1$, 且 $[g]$ 是 $S([g^R g^c], [g^c g^L]) = S([g^R], [g^L])$ 中唯一的元素。注意， $[g^R]$ 和 $[g^L]$ 都属于 S , 因为 $g^r = g^l = g_{xx'}$。由于 S 是正则的，它也必须包含一个来自 $S([g^R], [g^L])$ 的元素，也就是说，它必须包含$[g]$。接下来，我们通过对$\upsilon(g)$ 使用归纳法，证明 S 包含集合 $\{[g] \mid g \in \mathrm{G}^5\}$ 。

令 $g \in \mathrm{G}_i$ 对于 $i \geq 3$, 并假设对于所有满足 $j < i$的 $h \in \mathrm{G}j$, $[h]$ 都属于 S 。根据归纳假设， $[g^l]$、 $[g^r]$ 和 $[g^c]$ 属于 S （注意，由于 $\upsilon(g) \geq 3$, 所以 $g^c \neq 1$ ）。由于 $[x]$ 和 $[x']$ 也属于 S，我们得出 $[g^R g^c] \in S$ 和 $[g^c g^L] \in S$。再次，我们知道

$$S([g^R g^c], [g^c g^L]) \cap S \neq \emptyset$$

因为 S 是正则的；因此根据引理 4.8，有 $[g] \in S$ 。我们已经证明， S 包含

$$\{[x], [x']\} \cup \{[g] \mid g \in \mathrm{G}^5\}.$$

由于后一个集合生成 F_1, , 我们必有 $S = \mathrm{F}_1$。因此， F_1 由 $[x]$弱生成。□

在本节中，我们已经描述了 F_1上的格林关系。最后，我们将描述 F_1上的幂等元、逆元和自然偏序。峡谷是一个山谷 w , 满足 $\sigma(w) = \tau(w)$; 峡谷若还满足 $w \xrightarrow{*} \sigma(w) = \tau(w)$, 则称为峡谷。因此，对于任意峡谷 w, 有 $\beta_2(w) = \sigma(w)$; 对于任意满足 $w \xrightarrow{*} w_1$的 $w_1 \in \mathrm{G}^+$, 有 $w_1 \xrightarrow{*} \sigma(w)$。不过请注意，$w_1$ 可能不是峡谷，因为我们无法保证 w_1 甚至是一个山谷。我们将利用峡谷来刻画幂等元、逆元和自然偏序，但这种刻画仅具有理论意义。在实际应用中，很难识别峡谷，因而也很难识别幂等元、逆元和自然偏序。

命题4.10。令 $u, v \in \mathrm{M}^1$。

(*i*) u 是幂等元，当且仅当峡谷 $\lambda_r(u) * \lambda_l(u)$ 是峡谷。(*ii*) v 是 u 的逆元，当且仅当 $\lambda_r(u) * \lambda_l(v)$ 和 $\lambda_r(v) * \lambda_l(u)$ 都是峡谷。(*iii*) $v < u$ 当且仅当对于某些 $u_1 \in \mathrm{L}_1^+ \cup \mathrm{G}^5$、 $u_2 \in \mathrm{L}_1^- \cup \mathrm{G}^5$ 和 a_1, $a_2 \in A$ 满足 $u_2\, a_2\, \kappa(u)\, a_1\, u_1$ 是峡谷时， $\lambda_l(v) = \lambda_l(u)\, a_1\, u_1$ 且 $\lambda_r(v) = u_2\, a_2\, \lambda_r(u)$。

证明。如果 $\lambda_r(u) * \lambda_l(u) \xrightarrow{*} \kappa(u)$，那么

$$u^2 \approx \lambda_l(u) * \lambda_r(u) * \lambda_l(u) * \lambda_r(u) \xrightarrow{*} \lambda_l(u) * \kappa(u) * \lambda_r(u) = u$$

且 u 是一个幂等元。反之，若 u 是一个幂等元，则 $u^2 \xrightarrow{*} u$。根据河流提升的定义，显然必有 $\lambda_r(u)*\lambda_l(u) \xrightarrow{*}\kappa(u)$。我们已证明了（$i$）。（$ii$）的证明与（$i$）的证明类似，且同样显然。现在证明（$iii$）。

首先假设 $v < u$。特别地，$v \leq_{\mathscr{R}} u$ 且 $v \leq_{\mathscr{L}} u$。由于 $u \neq v$，

$$\lambda_l(v) = \lambda_l(u)\, a_1\, u_1 \quad \text{and} \quad \lambda_r(v) = u_2\, a_2\, \lambda_r(u)\,,$$

对于某些 $u_1 \in \mathrm{L}_1^+ \cup \mathsf{G}^5$、$u_2 \in \mathrm{L}_1^- \cup \mathsf{G}^5$ 及 a_1、$a_2 \in A$，由命题 4.4 可知。但还存在另一座山 $w \in \mathrm{M}^1$，使得

$$w \in E(\mathrm{M}^1), \quad w \mathscr{L}\, v \quad \text{and} \quad v = u \odot w$$

因为 $v < u$。因此，根据（i），$\lambda_r(w) * \lambda_l(w)$是一个峡谷；根据推论 4.6.（$ii$），$\lambda_r(w) = \lambda_r(v)$；并且 $\lambda_r(u) * \lambda_l(w) \xrightarrow{*} \kappa(u)\, a_1\, u_1$。于是

$$\lambda_r(w) * \lambda_l(w) = \lambda_r(v) * \lambda_l(w) = u_2\, a_2\, \lambda_r(u) * \lambda_l(w) \xrightarrow{*} u_2\, a_2\, \kappa(u)\, a_1\, u_1\,.$$

因此我们现在可以断定，$u_2\, a_2\, \kappa(u)\, a_1\, u_1$ 是一个峡谷，因为 $\lambda_r(w) * \lambda_l(w)$也是一个峡谷（注意，$u_2\, a_2\, \kappa(u)\, a_1\, u_1$ 是一个峡谷）。

现在假设，对于某些$u_1 \in \mathrm{L}_1^+ \cup \mathsf{G}^5$、$u_2 \in \mathrm{L}_1^- \cup \mathsf{G}^5$和 a_1、$a_2 \in A$，有 $\lambda_l(v) = \lambda_l(u)\, a_1\, u_1$ 以及 $\lambda_r(v) = u_2\, a_2\, \lambda_r(u)$，且 $u_2\, a_2\, \kappa(u)\, a_1\, u_1$是一个峡谷。特别地，$u \neq v$。还要注意，

$$w_r = \overleftarrow{\lambda_r(u)}\, a_1\, u_1 * \lambda_r(v) \quad \text{and} \quad w_l = \lambda_l(v) * u_2\, a_2\, \overleftarrow{\lambda_l(u)}$$

它们都是定义良好的山。事实上，它们都是 M^1 的幂等元。例如，

$$\lambda_r(v) * \overleftarrow{\lambda_r(u)}\, a_1\, u_1 = u_2\, a_2\, \lambda_r(u) * \overleftarrow{\lambda_r(u)}\, a_1\, u_1 \xrightarrow{*} u_2\, a_2\, \kappa(u)\, a_1\, u_1\,;$$

$\leftarrow$因此，$\lambda_r(v) * \lambda_r(u)\, a_1\, u_1$是一个峡谷，所以 w_r是一个幂等元。最后，注意到 $u \odot w_r = v$和 $w_l \odot u = v$，由此可得 $v < u$。□

5. The universal property of F_1

本节证明，所有由x 弱生成的正则半群都是 F_1 在某个同态下的同态像，该同态将 $[x]$ 映射到x中。一个关键概念是骨架。对于正则半群 S，骨架映射是指满足以下条件的映射 $\phi : \mathsf{G} \to S^1$

(*i*) $x\phi \in S$, $x'\phi \in V(x\phi)$、$g_{xx'}\phi = (x\phi)(x'\phi)$ 和 $1\phi \in E(S^1)$；(*ii*) $(1\phi)(x\phi) = x\phi = (x\phi)(1\phi)$ 以及 $(1\phi)(x'\phi) = x'\phi = (x'\phi)(1\phi)$；(*iii*) $g\phi \in S\big(g^{\phi,\ r}, g^{\phi,\ l}\big)$ 对所有带有 $i \geq 2$ 的 $g \in \mathsf{G}_i$，其中

$$g^{\phi,l} = (g^c\phi)((g^{la})'\phi)(g^l\phi)(g^{la}\phi)$$

and

$$g^{\phi,r} = ((g^{ra})'\phi)(g^r\phi)(g^{ra}\phi)(g^c\phi)\,.$$

在此定义中，我们采用夹心集定义的非幂等元版本，因为目前无法保证 $g^{\phi,\,l}$ 和 $g^{\phi,\,r}$ 是 S 的幂等元。然而，在接下来的观察之后，我们将证明这些元素确实是 S 的幂等元。从那时起，我们在此也将对幂等元采用通常的夹心集定义。

容易看出，对于所有 $g \in \mathsf{G}$，利用关于 $\upsilon(g)$ 的归纳法可得 $(1\phi)(g\phi) = g\phi = (g\phi)(1\phi)$。事实上，根据 (iii)，对于所有满足 $i \geq 2$ 的 $g \in \mathsf{G}_i$，我们只需注意到

$$g\phi = g^{\phi,l}y(g\phi) = (g\phi)zg^{\phi,r}$$

对任意 $y \in V(g^{\phi,\,l})$ 和 $z \in V(g^{\phi,\,r})$，然后使用归纳假设。同样的观察还表明，由于 $g^c\phi$ 是 S 的一个幂等元，因此 $(g^c\phi)(g\phi) = (g\phi) = (g\phi)(g^c\phi)$。此外，$(i)$ 保证了 $(G \setminus \{1\})\phi \subseteq S$。本文中，$S$ 的骨架是 $\mathsf{G}\setminus\{1\}$ 在某个骨架映射下的像。因此，除了 $x\phi$ 和 $x'\phi$ 之外，它们是满足 $g_{xx'}\phi = (x\phi)(x'\phi)$ 的互逆元素，骨架的所有其他元素都是S的幂等元。

引理 5.1. 设 S 为正则半群，且 $\phi : \mathsf{G} \to S^1$ 为骨架映射。则对于所有满足 $i \geq 2$的 $g \in \mathsf{G}_i$，$g^{\phi,\,l}$ 和 $g^{\phi,\,r}$ 都是 S 的幂等元。

证明。我们需要通过对 i使用归纳法，同时证明 $g^{\phi,\,l}$ 和 $g^{\phi,\,r}$ 是 S 的幂等元。对于 $i = 2$，注意到 $g^l = g_{xx'} = g^r$ 和 $g^c = 1$。因此，我们可以轻易验证，$g^{\phi,\,l}$ 和 $g^{\phi,\,r}$ 属于集合 $\{aa', a'a\}$，其中$a = x\phi$ 和 $a' = x'\phi$；由此它们是幂等元。

现在假设 $i > 2$。根据骨架映射的定义，

$$g^l\phi \in S\big((g^l)^{\phi,r}, (g^l)^{\phi,l}\big)\,,$$

根据归纳假设，我们可以假设 $(g^l)^{\phi,\,l}$ 和 $(g^l)^{\phi,\,r}$ 是幂等元。因此 $(g^l)^{\phi,\,l}(g^l\phi) = g^l\phi$ 以及 $(g^l\phi)(g^l)^{\phi,\,r} = g^l\phi$。还要注意，$g^c = g^{l^2}$ 和 $g^{la} =(g^{l^2a})'$，或者 $g^c = g^{lr}$ 和 $g^{la} = (g^{lra})'$。如果 $g^c = g^{l^2}$ 和$g^{la} =(g^{l^2a})'$，那么

$$\begin{aligned}(g^l\phi)(g^{la}\phi)(g^c\phi)((g^{la})'\phi)(g^l\phi) &= (g^l\phi)(g^{lc}\phi)(g^{la}\phi)(g^c\phi)((g^{la})'\phi)(g^l\phi)\\ &= (g^l\phi)(g^{lc}\phi)((g^{l^2a})'\phi)(g^{l^2}\phi)(g^{l^2a}\phi)(g^l\phi)\\ &= (g^l\phi)((g^l)^{\phi,l})(g^l\phi) = g^l\phi\,.\end{aligned}$$

如果 $g^c = g^{lr}$ 和 $g^{la} = (g^{lra})'$，那么

$$\begin{aligned}(g^l\phi)(g^{la}\phi)(g^c\phi)((g^{la})'\phi)(g^l\phi) &= (g^l\phi)(g^{la}\phi)(g^c\phi)((g^{la})'\phi)(g^{lc}\phi)(g^l\phi)\\ &= (g^l\phi)((g^{lra})'\phi)(g^{lr}\phi)(g^{lra}\phi)(g^{lc}\phi)(g^l\phi)\\ &= (g^l\phi)((g^l)^{\phi,r})(g^l\phi) = g^l\phi\,.\end{aligned}$$

现在很容易看出，$g^{\phi,l} =(g^c\phi)((g^{la})'\phi)(g^l\phi)(g^{la}\phi)$ 是 S 的一个幂等元。证明 $g^{\phi,r}$ 也是 S 的一个幂等元的方法类似。□

若 a 是正则半群 S 的一个元素，我们可以递归地构造一个骨架映射，使得 $x\phi = a$。我们可以在 S 中选取 a 的一个逆元 a'，并定义 $x'\phi = a'$、$g_{xx'}\phi = aa'$ 和 $1\phi = 1 \in S^1$。然后，假设对于所有满足 $j < i$ 的 $h \in \mathsf{G}^j$，映射 $g \in \mathsf{G}_i$（其中 $i \geq 2$ 和 ϕ）均已定义，我们选取

$$y \in S\big(g^{\phi,r}, g^{\phi,l}\big),$$

并设 $g\phi = y$。注意，由于 S 是正则的，$S\big(g^{\phi,\ r}, g^{\phi,\ l}\big) \neq \emptyset$。然而，我们无法保证骨架映射 ϕ 是唯一的。用骨架的术语来说，每个元素 $a \in S$ 至少属于 S 的一个骨架，但它可能属于多个不同的骨架。

在下一个结果中，我们证明，正则半群 S 的每个骨架映射都可以唯一延拓为从 F_1^1 到 S^1 的同态。

命题 5.2。如果 $\phi : \mathsf{G} \to S^1$ 是一个骨架映射，那么存在唯一的（半群）同态 $\varphi\colon \mathrm{F}_1^1 \to S^1$ 延拓 ϕ（即对于所有 $g \in \mathsf{G}$，都有 $g\phi = [g]\varphi$）。此外，$\langle \mathsf{G}\phi \rangle = \mathrm{F}_1^1\varphi$ 是 S^1 的正则子半群，并且是一个以 1ϕ 为单位元的幺半群。

证明。由于 G^+ 由 G 自由生成，令 $\phi_1 : \mathsf{G}^+ \to S^1$ 为唯一延拓 ϕ的同态。根据骨架映射的定义，

$$\rho_e \cup \big\{(g^c g^L g, g), (g g^R g^c, g) \mid g \in \mathrm{G} \text{ with } \upsilon(g) \geq 2\big\}$$

包含在 ϕ_1的核中。要得出 ρ 包含在 ϕ_1的核中，现在只需证明，对于所有满足 $i \geq 2$的 $g \in \mathsf{G}_i$，$(g^r{\cdot}g{\cdot}g^l, g^r{\cdot}g^c{\cdot}g^l)$ 都属于该核。

由于篇幅限制，我们分别用 w 和 z 表示下列表达式

$$(g^l\phi)(g^{la}\phi)(g^c\phi)((g^{la})'\phi)(g^l\phi) \quad \text{and} \quad (g^r\phi)(g^{ra}\phi)(g^c\phi)((g^{ra})'\phi)(g^r\phi)\,,$$

在命题 5.1 的证明中，我们证明了 $g^l\phi = w$。类似的论证使我们能够得出 $g^r\phi = z$。我们还需要等式$g\phi = (g^c\phi)(g\phi)(g^c\phi)$，它是由引理 5.1 之前的一个观察得出的。因此，

$$\begin{aligned}
(g^r{\cdot}g{\cdot}g^l)\phi_1 &= (g^r\phi)(g^{ra}\phi)(g\phi)((g^{la})'\phi)(g^l\phi) \\
&= z\,(g^{ra}\phi)(g^c\phi)(g\phi)(g^c\phi)((g^{la})'\phi)\,w \\
&= (g^r\phi)(g^{ra}\phi)(g^c\phi)g^{\phi,r}(g\phi)g^{\phi,l}(g^c\phi)((g^{la})'\phi)(g^l\phi) \\
&= (g^r\phi)(g^{ra}\phi)(g^c\phi)g^{\phi,r}g^{\phi,l}(g^c\phi)((g^{la})'\phi)(g^l\phi) \\
&= z\,(g^{ra}\phi)(g^c\phi)((g^{la})'\phi)\,w \\
&= (g^r\phi)(g^{ra}\phi)(g^c\phi)((g^{la})'\phi)(g^l\phi) \;=\; (g^r{\cdot}g^c{\cdot}g^l)\phi_1\,,
\end{aligned}$$

其中第四个“=”符号是由于 $g\phi \in S\big(g^{\phi,\ r}, g^{\phi,\ l}\big)$。

因此，我们已经证明 ρ 包含在 ϕ_1的核中。于是，若$\varphi_1 : \mathsf{G}^+ \to \mathrm{F}_1^1$ 表示自然商同态，则存在一个同态 $\varphi : \mathrm{F}_1^1 \to S^1$，使得 $\phi_1 = \varphi_1\varphi$。因此，$\varphi$ 扩张了 ϕ。如果

$\varphi' : \mathrm{F}_1^1 \to S^1$ 是另一个扩张 ϕ的同态，那么 $\varphi_1\varphi' = \phi_1 = \varphi_1\varphi$。因此，由于 φ_1 是满射， $\varphi' = \varphi$ 。我们证明了存在唯一一个同态 $\varphi\colon \mathrm{F}_1^1 \to S^1$ 扩张 ϕ。

最后，这个结果的第二部分直接由以下事实得出：F_1^1 是一个正则幺半群，其单位元为 $[1]$ （这一性质在同态像下保持），且它由 $\{[g] \mid g \in \mathrm{G}\}$生成。□

请注意，在前述命题中，$\mathrm{F}_1^1\varphi$ 不一定是S^1 的子幺半群，因为 $[1]\varphi$ 可能不是 S^1的单位元。给定一个骨架映射 ϕ，我们只能保证 1ϕ 是子半群$\mathrm{F}_1^1\varphi$的单位元。此外，根据前述结果， S 的骨架总是生成 S的一个正则子半群。我们将这一结论记录在下面的推论中，以供日后参考。

推论 5.3. 若 A是 S的一个骨架，则 $\langle A\rangle$ 是 S的一个正则子半群。

设 T 是（不一定正则的）半群S的一个正则子半群。接下来，我们证明，若 T 由元素 a弱生成，则存在一个同态 $\varphi : \mathrm{F}_1 \to S$，使得 $[x]\varphi = a$ 且$\mathrm{F}_1\varphi = T$。

推论 5.4. 设 T 是半群 S的正则子半群。若 T 由 a弱生成，则 T 是 F_1 在某个同态$\varphi\colon \mathrm{F}_1 \to S$ 下的像，使得 $[x]\varphi = a$。

证明. 设 $\phi : \mathrm{G} \to T^1$ 是一个骨架映射，使得 $x\phi = a$。我们已经注意到，ϕ 存在。设 $\varphi : \mathrm{F}_1^1 \to T^1$ 是由命题 5.2 给出的、将 ϕ 延拓得到的唯一同态。注意，$\varphi_{|\mathrm{F}_1}$ 是从 F_1 到 T的同态。因此，$\mathrm{F}_1\varphi$ 是包含 a的 T的正则子半群。由于 T由 a弱生成，我们得出 $\mathrm{F}_1\varphi = T$。最后，注意我们可以将 φ 视为从 F_1 到 S的同态，而$[x]\varphi = a$ 正是所求。□

本文的主要结果现在显然是前一推论的直接结果。

定理 5.5. 所有由元素 a 弱生成的正则半群，都是 F_1 在某个将 $[x]$ 映入 a 的同态下的同态像。

不过，这个定理的反向结论并不成立，也就是说，存在 F_1 的同态像，它们并非由 $[x]$ 的像弱生成。接下来，我们给出这样一个例子。这个例子改编自 [6] 中使用的例子，该例子用于说明并非所有 FI_2 的同态像都能由两个幂等元弱生成。

例子 1：我们首先为半群S_1定义一个表示 $\langle X, R_1\rangle$ 。我们令 $X = \{x, x', g_1, g_2, h, 0\}$，并在 R_1 中加入与信息 $e0 = 0 = 0e$ 相对应的关系，对所有 $e \in X$, $x' \in V(x)$,

$g_1 \in S(x'x, xx')$，$g_2 \in S(xx', x'x)$ 和 $h \in S(xg_2x', xg_1x')$。因此，0 如预期般对应于 S_1 的零元。现在，也将以下数对加入 R_1：$(u, 0)$，其中

$$u \in \{g_ig_j,\ g_iag_j \mid \{i,j\} = \{1,2\} \text{ and } a \in \{x, x'\}\} \cup \{x^2, (x')^2\}.$$

半群 S_1 是由 F_1 得到的：除 $\mathrm{D}[x]$、$\mathrm{D}[g_{2,e,1}]$、$\mathrm{D}[g_{2,e,2}]$ 和 $\mathrm{D}[g_{3,d,2}]$外，将所有 $\mathscr{D}$-类合并为元素 0。事实上，第一组关系将 g_1、g_2 和 h 分别与元素 $g_{2,\ e,\ 1}$、$g_{2,\ e,\ 2}$以及 $g_{3,\ d,\ 2}$相等，而第二组关系则将所有其他$\mathscr{D}$-类合并为 0。

不过，我们感兴趣的半群是由表示 $\langle X, R\rangle$ 给出的半群 S，其中 $R = R_1 \cup \{(g_1, g_1x'hxg_1)、(g_2, g_2x'hxg_2)\}$。由于$R$ 包含 R_1，半群 S 也是F_1的一个同态像。事实上，半群 S 是由 S_1 得到的，方法是将 g_1和 g_2 的 $\mathscr{D}$-类合并为 h的 $\mathscr{D}$-类中彼此不同的“块”。图 5 展示了 S 的 $\mathscr{D}$-类的“蛋盒”图（注意，每个同余类都用其中一个元素表示；由于篇幅限制，我们也写作 $e = xx'$、$f = x'x$ 和$h_1 = x'hx$ ）。

x	$e*$
$f*$	x'

g_1e*	g_1x	g_1x'	g_1*	$g_1x'h*$	g_1h_1	$g_1h_1g_2$	$g_1h_1g_2x$
$x'g_1e$	$x'g_1x*$	$x'g_1x'$	$x'g_1$	$x'g_1x'h$	$x'g_1h_1*$	$x'g_1h_1g_2$	$x'g_1h_1g_2x$
x^2x'	x^2	$xg_1x'*$	xg_1	$h*$	hx	hxg_2	hxg_2x
fe	fx	fg_1x'	fg_1*	$x'h$	h_1*	h_1g_2*	h_1g_2x
xg_2fe	xg_2fx	xg_2fg_1x'	xg_2fg_1	$xg_2x'*$	g_2f	xg_2	xg_2x
g_2fe	g_2fx	g_2fg_1x'	g_2fg_1	g_2x'	g_2f*	g_2*	g_2x
efe	efx	$efxg_1x'$	efg_1	ex'	ef	eg_2*	eg_2x
$x'fe$	$x'fx$	$x'fg_1x'$	$x'fg_1$	$(x')^2$	$x'f$	$x'g_2$	$x'g_2x*$

$0*$

FIGURE 5. S （$*$ 幂等元）的“蛋盒”图。

半群 S 是 F_1 的同态像，但它不是由 x 弱生成的。由集合 $\{x, x', g_1x'hxg_2\}$ 生成的子半群 T 是 S 的真正则子半群。它是通过从 D_h 中删除第五行和第六行以及第三列和第四列而从 S 得到的。□

我们能够将 FI_2 的例子改编为 F_1 的例子，这一事实并不应令人感到意外。在下一节中，我们将展示如何以一种自然的方式将 FI_2 嵌入 F_1。但在此之前，让我们通过证明 F_1 在同构意义下是唯一的来结束本节。

命题5.6. 设 T 是由 x 弱生成的正则半群，并且所有其他由 x 弱生成的正则半群都是同态

像 T （在固定 x的同态下）。那么 T 与 F_1 同构。

证明。根据 T 和 F_1，的泛性质，存在满同态 $\varphi : \mathrm{F}_1 \to T$ 以及 $\psi : T \to \mathrm{F}_1$，使得 $([x])\varphi = x$ 和 $x\psi = [x]$。因此，$\varphi \circ \psi$ 是 F_1 的一个自同态，且 $([x])\varphi \circ \psi = [x]$。根据引理 4.8，$\varphi \circ \psi$ 在集合 $\{[g] \mid g \in \mathrm{G} \setminus \{1\}\}$ 上的限制必为恒等映射。因此，$\varphi \circ \psi$ 是 F_1 的恒等自同构，因为该半群由前述集合生成。我们已经证明，φ 和 ψ 互为逆同构，因此 T 和 F_1 同构。□

6. 将 EMBEDDINGFI_2 INTO 嵌入 F_1

本节证明，F_1 含有一个正则子半群 F_1°，该子半群由 $\{[xx'], [x'x]\}$ 弱生成，并且同构于 FI_2。第一步是构造 F_1°。随后，我们证明 F_1° 同构于 FI_2。此外，读者还应回顾第 3 节中所使用的记号：这些记号用于表示 $\mathrm{G}_{2,e}$ 中的元素（第 7 页），以及 $\mathrm{G}_{3,d}$ 中的某些元素（第 8 页）。

6.1. F_1° 的构造。我们先定义 $\mathrm{G}^\circ = \cup_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{G}_i^\circ$ 为 G^5 的一个子集。我们设

$$\mathrm{G}_1^\circ = \mathrm{G}_1 = \{g_{xx'}\} \quad \text{and} \quad \mathrm{G}_2^\circ = \mathrm{G}_2 = \mathrm{G}_{2,e} = \{g_{2,e,1}, g_{2,e,2}\}.$$

对于 $i > 2$，G_i° 始终是 G_i 的真子集，d：

$$\mathrm{G}_3^\circ = \{g_{3,d,1},\ g_{3,d,2},\ g_{3,d,3},\ g_{3,d,4}\} \subset \mathrm{G}_{3,d}$$

and

$$\mathrm{G}_{i+1}^\circ = \{g \in \mathrm{G}_{i+1,d} \mid g^l, g^r \in \mathrm{G}_i^\circ\}.$$

因此 $\mathrm{G}^\circ \subset \mathrm{G}_1 \cup \mathrm{G}_2 \cup \mathrm{G}_d$。下一个结果可由对指标 i应用归纳法显然得到。证明从略。

引理 6.1. 若 $g \in \mathrm{G}^\circ$，则 $\epsilon(g) \subseteq \mathrm{G}^\circ$。

令 MR° 为所有非平凡山脉的集合

$$u = g_0 a_1 g_1 \cdots g_{2n-1} a_{2n} g_{2n}$$

满足：

(*a*) $g_0 g_1 \cdots g_{2n} \in (\mathrm{G}^\circ \cup \{1\})^+$；并且

(*b*) 若 $v(g_i) = 1$，则 $a_{i+1} = (a_i)'$。

下一个结果表明，MR° 对于河流提升是封闭的。

引理 6.2. 设 $u = g_0 a_1 g_1 \cdots g_{2n-1} a_{2n} g_{2n} \in \mathrm{MR}^\circ$ 具有一条河流 g_i。若 v 满足 $u \xrightarrow{g_i} v$，则 $v \in \mathrm{MR}^\circ$。

证明。首先假设 $g_{i-1} = g_{i+1}$ and $a_i = a'_{i+1}$。那么

$$v = g_0 \cdots g_{i-1} a_{i+2} g_{i+2} \cdots g_{2n}.$$

显然，(a) 得到满足；如果 $\upsilon(g_{i-1}) \neq 1$，那么 (b) 也得到满足。如果$\upsilon(g_{i-1}) = 1$，那么 $\upsilon(g_{i+1}) = 1$；根据条件 (b)（应用于 u），我们知道 $a_{i-1} = a'_i$ and $a_{i+1} = a'_{i+2}$。因此 $a_{i-1} = a'_{i+2}$，因为 $a_i = a'_{i+1}$，而且即使在这种情况下，υ 仍满足 (b)。总之，如果$g_{i-1} = g_{i+1}$ and $a_i = a'_{i+1}$，那么 $\upsilon \in \mathsf{MR}^\circ$。

现在假设 $g_{i-1} \neq g_{i+1}$ 或 $a_i \neq a'_{i+1}$。那么

$$h_i = (g_{i+1}, a'_{i+1}, g_i, a_i, g_{i-1}) \in \mathrm{G}$$

and

$$\upsilon = g_0 \cdots g_{i-1} a_i h_i a_{i+1} g_{i+1} \cdots g_{2n}\,.$$

在这种情况下，υ 显然满足 (b)，因为锚点子序列没有变化，且 $\upsilon(h_i) \neq 1$。如果 $g_i = 1$，那么 $h_i \in \mathsf{G}_2 = \mathsf{G}_2^\circ$，并且 υ 也满足 (a)。如果 $g_i = g_{xx'}$，那么根据条件 (b)（应用于 u），$a_i = a'_{i+1}$，因此$g_{i-1} \neq g_{i+1}$。于是，$h_i \in \mathsf{G}_3^\circ$，且 υ 满足 (a)。最后，如果 $\upsilon(g_i) \geq 2$，那么 $g_{i-1}, g_{i+1} \in \mathsf{G}_d$。如果 $g_{i-1} = g_{i+1}$，那么 $a_i = a'_{i+1}$ 也成立，因为 $g^l_{i-1} \neq g^r_{i-1}$，这就产生了矛盾。因此，$g_{i-1} \neq g_{i+1}$，并且再一次，υ 满足 (a)，因为 $h_i \in \mathsf{G}^\circ$。注意，我们已经证明，如果 $g_{i-1} \neq g_{i+1}$ 或 $a_i \neq a'_{i+1}$，那么 $\upsilon \in \mathsf{MR}^\circ$。至此，我们完成了这一结果的证明。□

我们用 M° 表示 MR°中所有山的集合。若 $u \in \mathsf{M}^\circ$，则根据引理 6.1，(a) 等价于 $\kappa(u) = g_n \in \mathsf{G}^\circ$；而 (b) 等价于锚点子序列 $a_1 a_2 \cdots a_{2n-1} a_{2n}$ 具有一个前缀和一个后缀，且它们都属于集合 $\{11, x'x\}$。特别地，M° 中高度为 1 的山只有两座，即 $\beta_1(xx') = 11 g_{xx'} 11$ 和 $\beta_1(x'x) = 1x' g_{xx'} x1$。在下一个结果中，我们证明 M° 是 M 的一个正则子半群。

命题 6.3。M° 是 M 的一个正则子半群。

证明。设 $u, \upsilon \in \mathsf{M}^\circ$。根据引理 6.2，$u \odot \upsilon$ 是 MR° 中的一座山，而 M° 是 M 的一个子半群。现在，M° 是正则的，因为对于每个$u \in \mathsf{M}^\circ$，都有 $\tilde{u} \in \mathsf{M}^\circ$，且 $\tilde{u}$ 是 u 的一个逆元。□

我们将与 M° 对应的 F_1° 称为 F_1 的正则子半群。在下一小节中，我们将证明 F_1° 与 FI_2同构。

6.2. 从 FI_2 到 F_1° 的一个同构。本小节中，读者回忆第 2 节所述的 FI_2 的构造至关重要。此时，这里发展的理论与 [6] 中发展的理论之间的联系应该已经十分清楚。粗略地说，我们可以将 [6] 中发展的理论视为这里所发展的理论在三元组情形下的简化版本，其做法是“舍弃”锚点所提供的信息。因此，诸如 i-景观和 i-山脉（在 [6] 中称为景观和山脉）之类概念的含义，以及诸如提升 i-河流之类运算的含义，现在对读者而言应该已经清楚。否则，建议读者在继续阅读前先查阅 [6] 以获取更多信息，因为充分理解这些概念对后文至关重要。

我们首先递归地定义一个映射

$$\varphi : \mathrm{G}^{\circ} \setminus \{g_{xx'}\} \to \mathrm{H} \setminus \{1, e, f\}.$$

我们先设定

$$(g_{2,e,i})\varphi = h_{2,i} \quad \text{and} \quad (g_{3,d,j})\varphi = h_{3,j},$$

对于 $i \in \{1,2\}$ 和 $j \in \{1,2,3,4\}$。注意，如果 $g_{3,\ d,\ j} = (g, a, g_{xx'}, a, g_1)$，对于 $\mathrm{G}_2^{\circ} = \{g, g_1\}$ 和 $a \in \{1, x'\}$，那么

$$(g_{3,d,i})\varphi = (g\varphi, e_1, g_1\varphi),$$

其中，如果 $a = 1$，或如果 $a = x'$。通过设定，将 φ 扩展到所有满足 $i > 3$的 G_i° $g \in$

$$g\varphi = (g^l\varphi, g^c\varphi, g^r\varphi).$$

根据递归定义，若 $g^{ls} = g^c = g^{rt}$对某些 $s,t \in \{l,r\}$成立，则 $(g^l\varphi)^s = g^c\varphi = (g^r\varphi)^t$; 因此 $g\varphi \in \mathrm{H}$，且 φ 定义良好。接下来，我们将通过定义其逆映射，得出 φ 是一个双射。

现在考虑递归得到的映射 ψ: $\mathrm{H} \setminus \{1, e, f\} \to \mathrm{G}^{\circ} \setminus \{g_{xx'}\}$，定义如下。令

$$(h_{2,i})\psi = g_{2,e,i} \quad \text{and} \quad (h_{3,j})\psi = g_{3,d,j}$$

对 $i \in \{1,2\}$ 和 $j \in \{1,2,3,4\}$。注意，若 $h_{3,\ j} = (h, e_1, h_1)$，其中 $\mathrm{H}_2 = \{h, h_1\}$ 且 $e_1 \in \mathrm{H}_1 = \{e, f\}$，则

$$(h_{3,j})\psi = (h\psi, a, g_{xx'}, a, h_1\psi),$$

其中，若 $e_1 = e$，则 $a = 1$；若 $e_1 = f$，则 $a = x'$。现在令 $h \in \mathrm{H}_i$，满足 $i > 3$，并递归定义

$$h\psi = (h^l\psi, a, h^c\psi, b, h^r\psi),$$

其中 $a' = (h^l\psi)^{sa}$ 适用于 $h^{ls} = h^c$，而 $b' = (h^r\psi)^{ta}$ 适用于 $h^{rt} = h^c$。根据递归定义以及对 a 和 b的选择，5元组 $h\psi$ 属于 G°，并且 ψ 定义良好。

显然，$\varphi_{|\,\mathrm{G}_k^{\circ}}$和 $\psi_{|\,\mathrm{H}_k}$是 G_k°与 H_k之间的互为逆元的双射，适用于 $k \in \{2,3\}$。现在，若假设$\varphi_{|\,\mathrm{G}_j^{\circ}}$和 $\psi_{|\,\mathrm{H}_j}$是 G_j°与 $\mathrm{H}j$ 之间的互为逆元的双射，对所有 $j < i$均成立，那么我们可以立即得出，$\varphi_{|\,\mathrm{G}_i^{\circ}}$和$\psi_{|\,\mathrm{H}_i}$也是 G_i°与 H_i之间的互为逆元的双射。我们只需注意到，g 的元素 g^l、g^c 和 g^r 完全决定了其余元素 g^{la} 和 g^{ra}，对所有 $g \in \mathrm{G}_i^{\circ}$均成立。因此，根据归纳法可得，$\varphi_{|\,\mathrm{G}_i^{\circ}}$和 $\psi_{|\,\mathrm{H}_i}$是 G_i°与 H_i 之间的互为逆元的双射，对所有 $i \geq 2$均成立。于是，φ 和 ψ 也是 $\mathrm{G}^{\circ} \setminus \{g_{xx'}\}$与 $\mathrm{H} \setminus \{1, e, f\}$之间的互为逆元的双射。进一步注意到，$\varphi$和 ψ具有以下性质:

$$(g^s)\varphi = (g\varphi)^s \quad \text{and} \quad (h^t)\psi = (h\psi)^t$$

对于任意的 s、$t \in \{l, c, r\}$。

用 i-山脉区间 和 i-M 分别表示 H^+ 中所有非平凡 i-山脉和 i-山的集合。接下来，我们定义两个互逆的

双射 $\overline{\varphi}$ 和 $\overline{\psi}$，它们通过将映射 φ 和 ψ 自然地作用于每个字母，将 MR$^\circ$ 与 i-山脉区间对应起来。然而，这种方法存在一个问题：对于高度小于 2 的字母，φ 和 ψ 尚未定义；而对于高度为 1 的字母，其定义也不那么显而易见，因为 G_1° 只有一个字母，即 $g_{xx'}$，而 H_1° 有两个字母，即 e 和 f。

令 $\mathsf{G}^{\circ\prime} = (\mathsf{G}^\circ \setminus \{g_{xx'}\}) \cup \{1, 1g_{xx'}1, x'g_{xx'}x\}$，并通过如下设置将 φ 扩展为从 $\mathsf{G}^{\circ\prime}$ 到 H 的一个双射

$$1\varphi = 1, \quad (1g_{xx'}1)\varphi = e, \quad (x'g_{xx'}x)\varphi = f\,.$$

若 $u = g_0a_1g_1\cdots g_{2n-1}a_{2n}g_{2n} \in \mathsf{MR}^\circ$，定义

$$u\overline{\varphi} = h_0h_1\cdots h_{2n-1}h_{2n}\,,$$

其中 $h_i = (a_ig_{xx'}a_{i+1})\varphi$ 对于 $g_i = g_{xx'}$ 成立，而对于其他情况则有 $h_i = g_i\varphi$。映射 $\overline{\varphi}$ 定义良好，因为根据 MR$^\circ$ 的定义条件 (b)，若 $g_i = g_{xx'}$，则 $a_ia_{i+1} \in \{11, x'x\}$。此外，根据 φ 的定义，词 $u\overline{\varphi}$ 显然是一个非平凡的 i-景观；因此 $\overline{\varphi}$ 是从 MR$^\circ$ 到 i-山脉区间的映射。

现在将 ψ 扩展为 $\varphi : \mathsf{G}^{\circ\prime} \to \mathsf{H}$ 的逆映射，并令 $v = h_0h_1\cdots h_{2n-1}h_{2n}$ 为一个非平凡的 i-山脉。若 $h_i \in \{e, f\}$，则令 $g_i = g_{xx'}$；否则令 $g_i = h_i\psi$。若 $h_i = e$ $[h_i = f]$，还令 $a_i = 1 = a_{i+1}[a_i = x'$ 和 $a_{i+1} = x]$；因此，当 $h_i \in \{e, f\}$ 时，$h_i\psi = a_ig_ia_{i+1}$。若 $\upsilon(h_{i-1}) \geq 2$ 且 $\upsilon(h_i) \geq 2$，则字母 g_{i-1} 和 g_i 中只有一个是另一个的左侧条目或右侧条目（而不会同时是两侧条目）。因此，只有一个锚点 a_i 能使三元组 $g_{i-1}a_ig_i$ 锚定。现在定义

$$v\overline{\psi} = g_0a_1g_1\cdots g_{2n-1}a_{2n}g_{2n}\,.$$

根据前面的观察和 ψ 的定义，$v\overline{\psi}$ 是来自 MR$^\circ$ 的山脉。仔细检查后还可以得出，$\overline{\varphi}$ 和 $\overline{\psi}$ 是互逆映射，因为 φ 和 ψ 也是互逆双射。

请注意，$u \in \mathsf{MR}^\circ$ 和 $u\varphi$ 具有相同的线图结构：它们的区别仅在于标签。特别地，$\overline{\varphi}_{|\,\mathsf{M}^\circ}$ 和 $\overline{\psi}_{|\,\text{i-M}}$ 是集合 M$^\circ$ 与 i-M 之间的互逆双射。我们将这些观察记录在以下引理中，以供日后参考。

引理 6.4. 映射 $\overline{\varphi}$: MR$^\circ \to$ i-MR 和 $\overline{\psi}$: i-MR $\to$ MR$^\circ$ 互为逆映射。此外，它们分别在 MR$^\circ$ 中的（非平凡）山和（非平凡）i-山集合上的限制 $\overline{\varphi}_{|\,\mathsf{M}^\circ}$ 和 $\overline{\psi}_{|\,\text{i-M}}$，给出了这两个集合之间的互逆双射。

现在不难证明 $\overline{\varphi}_{|\,\mathsf{M}^\circ}$ 是一个同构。事实上，如果我们仔细看引理 6.2 的证明，就会发现，如果

$$u = g_0a_1g_1\cdots g_{2n-1}a_{2n}g_{2n} \in \mathrm{MR}^\circ\,, \quad u\overline{\varphi} = h_0h_1\cdots h_{2n-1}h_{2n}\,,$$

并且对于某条河流 g_i，有 $u\overline{\varphi} \xrightarrow{h_i} v\overline{\varphi}$。因此

$$(u_1 \odot u_2)\overline{\varphi}_{|\,\mathrm{M}^\circ} = (u_1\overline{\varphi}_{|\,\mathrm{M}^\circ}) \odot (u_2\overline{\varphi}_{|\,\mathrm{M}^\circ})$$

通过递归。我们已经证明了以下结果：

命题 6.5. $\overline{\varphi}_{|\mathrm{M}^\circ} : \mathrm{M}^\circ \to$ i-M 是一个同构，其逆同构为 $\overline{\psi}_{|\text{i-M}^\circ}$。

推论 6.6. F_1° 是 F_1 的正则子半群，由幂等元集合 $\{[xx'], [x'x]\}$ 弱生成，且与 FI_2同构。

证明。由于 F_1° 与 M° 同构，且 FI_2 与 i-M 同构，因此根据前述命题，F_1°与 FI_2 同构。事实上，同构$\overline{\psi}_{|\text{i-M}}$ 诱导出一个同构 $\phi : \mathrm{FI}_2 \to \mathrm{F}_1^\circ$，使得 $(e\varrho)\phi = [xx']$ 且 $(f\varrho)\phi = [x'x]$。由于 FI_2由集合 $\{e\varrho, f\varrho\}$弱生成，因此 F_1°由 $\{[xx'], [x'x]\}$弱生成。□

由于 ϕ 是同构，我们从 [6]知道 F_1° 由集合 $((\mathrm{H}\setminus\{1\})\varrho)\phi$生成。乍看之下，人们可能会认为 $((\mathrm{H}\setminus\{1\})\varrho)\phi = \{[g] \mid g \in \mathrm{G}^\circ\} \cup \{[x'x]\}$，因为 $\mathrm{H}\psi = (\mathrm{G}^\circ \setminus \{g_{xx'}\}) \cup \{1, 1g_{xx'}1, x'g_{xx'}x\}$；因此也可能会认为 F_1° 由集合 $\{[g] \mid g \in \mathrm{G}^\circ\} \cup \{[x'x]\}$生成。然而，事实远非如此。事实上，我们甚至无法保证对于 $g \in \mathrm{G}^\circ$，所有 $[g]$ 都属于 F_1°。例如，若我们取

$$g_{3,d,2} = (g_{2,e,1}, x', g_{xx'}, x, g_{2,e,2}) \in \mathrm{G}_3^\circ ,$$

于是 $\beta(g_{3,\ d,\ 2}) = \beta_1(g_{3,\ d,\ 2})$ 是山

$$11g_{xx'}xg_{2,e,1}x'g_{3,d,2}xg_{2,e,2}x'g_{xx'}11 ,$$

它不属于 M°，因为不满足条件（b）。因此$[g_{3,d,2}] \notin \mathrm{F}_1^\circ$。注意，在这种情况下，$[x'g_{3,d,2}x] \in \mathrm{F}_1^\circ$ 为

$$\beta(x'g_{3,d,2}x) = 1x'g_{xx'}xg_{2,e,1}x'g_{3,d,2}xg_{2,e,2}x'g_{xx'}x1 \in \mathrm{M}^\circ .$$

上一段中的例子在某种程度上说明了一般情况下会发生什么。进一步分析哪些 $[g]$ 属于 F_1°，对于满足$\upsilon(g) \geq 2$的 $g \in \mathrm{G}^\circ$，会引出三种不同的情形。在其中两种情形中，我们得出结论：$[g]$属于 F_1°；但在第三种情形中，属于 F_1° 的是 ρ 同余类 $[x'gx]$（而不是 $[g]$）。这三种不同的情形如下：

（i）如果 $\upsilon(g)$ 为偶数，则 $\beta_1(g) \in \mathrm{M}^\circ$，且 $[g] \in \mathrm{F}_1^\circ$。（$ii$）如果 $\upsilon(g) = 2n+1$，则 $g^{c^{n-1}} \in \mathrm{G}_3^\circ$。如果$g^{c^{n-1}} = g_{3、d、i}$ 对于 i 为奇数，则 $11g_{xx'}1$是 $\beta_1(g)$ 的前缀，而 $1g_{xx'}11$是 $\beta_1(g)$ 的后缀。现在可以看出，$\beta_1(g)$ 也属于 M°，因此 $[g] \in \mathrm{F}_1^\circ$。（$iii$）如果 $\upsilon(g) = 2n+1$，其中 $g^{c^{n-1}} = g_{3、d、i}$ 对于 i 为偶数，则 $11g_{xx'}x$是 $\beta_1(g)$ 的前缀，而 $x'g_{xx'}11$ 是 $\beta_1(g)$ 的后缀。因此，$\beta_1(g) \notin \mathrm{M}^\circ$，因为它不满足条件（$b$）；由此 $[g] \notin \mathrm{F}_1^\circ$。然而，$\beta(x'gx)$ 与 $\beta(g)$ 相同，只是第一个锚点变为 x'，最后一个锚点变为 x。所以 $\beta(x'gx) \in \mathrm{M}^\circ$，且 $[x'gx] \in \mathrm{F}_1^\circ$。

令 $\overline{g} = g$ 表示前两种情形，$\overline{g} = x'gx$ 表示最后一种情形。仔细 1 分析 ϕ 的定义后，我们可以得出结论：

$$((\mathrm{H}\setminus\{1\})\varrho)\phi = \{[xx'], [x'x]\} \cup \{[\overline{g}] \mid g \in \mathrm{G}^\circ \text{ with } \upsilon(g) \geq 2\} .$$

因此，F_1° 由前述集合生成。

在 [6, 推论 6.10] 中，我们证明了每个由有限个幂等元弱生成的正则半群都强整除 FI_2, ，也就是说，它是 FI_2的某个正则子半群的同态像。利用推论 6.6，我们现在得到以下结果：

推论 6.7。所有由有限个幂等元弱生成的正则半群都强整除 F_1。

注意，前一个推论尤其适用于所有由有限个幂等元生成的正则半群，以及所有有限幂等元生成半群。在推论 6.11] 中，我们得出结论：所有有限半群都整除 FI_2, ，也就是说，它们是 FI_2 的（不一定正则的）子半群的同态像。现在我们还得出：

推论 6.8。所有有限半群都整除 F_1。

致谢：本研究部分得到波尔图大学数学物理中心（CMUP）的资助。该中心是 LASI 的成员，其经费来自葡萄牙国家基金，由科学与技术基金会（FCT）通过项目 UIDB/00144/2020 提供。作者还要感谢 GAP 软件及其半群软件包对本文研究的重要作用：在 GAP 中进行的多次模拟促成了用于构造集合 G 的模式的出现。

References

[1] GAP 团队，GAP - 群、算法与编程，4 0 版，2018年，10. . http://www.gap-system.org.
[2] T. Hall，正则半群存在簇的恒等式，

Bull. Aus- ( ), – 。

tral. Math. Soc. **40** 1989 59 77
[3] J. Kaˇdourek 和 M. B. Szendrei，正统半群理论的一种新方法， *Semigroup Forum* **40** (1990年)，257–296。[4] J. Mitchell，半群 - GAP 程序包，3.0.20 版，2018年，
http://www.gap-system.org。[5] M. H. A. Newman，论具有等价关系组合定义的理论，

Ann. of ( ) ( ), –

Math. 2 **43** 1942 223 243
。[6] L. Oliveira，由幂等元弱生成的正则半群，预印本。[7] Y. T. Yeh，正则半群 e- 簇中 e- 自由对象的存在性，

J. Al- ( ), – 。

gebra **164** 1992 471 484

CMUP, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, rua do Campo Alegre s/n, 4169-007 Porto, Portugal*Email address*: loliveir@fc.up.pt