arXiv:2302.08475v1 [quant-ph] 16 Feb 2023

倾斜 CHSH 博弈：一种算子代数分类

Alexander Frei 和 Azin Shahiri

2023年2月17日

摘要

我们提出了一种通用的系统化方法，利用底层群表示论的算子代数技术，求解任意二元输入—二元输出博弈；随后，我们将该方法应用于一类重要的倾斜 CHSH 博弈：

我们对这些情形中展现出某种量子优势的区域进行了全面刻画，并特别推导出对可观测量所需反对易程度的极大简化描述（这是若干相关论文中的一个关键要素）。

我们进一步对使上述量子值达到最大值的唯一算子代数态，给出了不依赖表示的抽象代数分类。特别是，由此得到的算子代数态意味着对应的关联是唯一的，包括所有高阶矩与混合矩。

最后，本文的主要目的是为所需的反对易程度提供上述简化描述，并为其对应的唯一最优态给出抽象代数刻画；这两者都是作者后续工作中的关键要素。

引言

我们的研究动机源于近期在 [CS20] 中获得的重要结果：量子空间关联与有限维关联之间存在分离

$$p(-|-) \in C_{qs}(A,B|X,Y) \quad \text{whereas} \quad p(-|-) \notin C_{q}(A,B|X,Y)$$

其建立在倾斜 CHSH 博弈中的以下基本现象之上：首先，已知倾斜 CHSH 博弈至少允许一种唯一的

最优策略，其形式至多经过局部膨胀

$$\begin{pmatrix} u'(x) & \\ & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\varphi'\rangle \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} v(y) & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\varphi'\rangle \\ 0 \end{pmatrix}$$

采用矩阵记法，如 [Fre22 第 1] 节及辅助环境

$$\Big(u(x) \otimes 1\Big) |\varphi\rangle \otimes |\text{aux}\rangle \quad \text{and} \quad \Big(1 \otimes v(y)\Big) |\varphi\rangle \otimes |\text{aux}\rangle \,.$$

然而，这一已知自检结果的一个缺点是，上述表示选择上的任一自由度都会破坏高阶矩下最优态的唯一性，因为以下蕴含关系通常并不成立

$$u(x) |\varphi\rangle = u'(x) |\varphi'\rangle \quad \not\Longrightarrow \quad u(x_1) \cdots u(x_n) |\varphi\rangle = u'(x_1) \cdots u'(x_n) |\varphi'\rangle$$

不过，某些情况下也有部分结果成立，如 [PSZZ23]所示。其次，理想策略还由某个部分纠缠态产生

$$|\varphi\rangle = \cos(\varphi) |0\rangle \otimes |0\rangle + \sin(\varphi) |1\rangle \otimes |1\rangle : \qquad \sin(2\varphi) = \sqrt{\frac{1 - \alpha^2 \beta^2}{1 + \beta^2}}$$

为方便起见，对第二个参数进行额外缩放，如（1）所示。因此，相应的可观测量通常表述为一种特定表示，其形式为

$$\begin{aligned} u \otimes 1 &= Z \otimes 1, \qquad & 1 \otimes u &= 1 \otimes \Big(\cos(\mu) Z + \sin(\mu) X\Big) \\ v \otimes 1 &= X \otimes 1, \qquad & 1 \otimes v &= 1 \otimes \Big(\cos(\mu) Z - \sin(\mu) X\Big) \end{aligned}$$

对于某个角度，其表述为（针对 $\alpha = 0$ 的情况）

$$\tan(\mu) = \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}} \quad \Longrightarrow \quad \Big(\cos(\mu) = ? \;\Big|\; \sin(\mu) = ? \Big)$$

可见于原始文章 [AMP12]，以及后续的 [BP15]
这意味着还需要额外付出努力来解析给定的公式。
作者利用这两种现象构造出了不允许任何有限维表示的量子空间相关性。

尽管与[CS20] 的分离解决了一个长期悬而未决的问题，但本文作者认为，这种分离体现了更广泛、更一般的算子代数现象。为了解决这一问题，作者因此将首要任务定为深入、全面地理解

从算子代数的角度看倾斜 CHSH 博弈的最优态，这也构成了本研究的主要动机。

为此，作者采用了一种新颖且更系统的非局域游戏研究方法，该方法由第一作者在导论文章中开创 [Fre22]：更具体地说，关键在于将算子代数上的量子态作典范分解，先表示该算子代数，再取该表示上的某个向量态

$$C^*(\text{two player}) \xrightarrow{\text{repr}} Q \subseteq B(H) \xrightarrow{\langle\varphi|-|\varphi\rangle} \mathbb{C}$$

沿用[Fre22第 2]节中关于双玩家代数的记号。
这个典范分解是唯一确定的（并且源自其最小 Stinespring 扩张），可以类比态射分解：先取满态射，再取单态射（更多详情参见 [Fre22第 1]节）。

因此，刻画最优态的问题可分为两个任务：首先，找出一个共同的最小商，以容纳给定非局域游戏的整个最优态空间

$$C^*(\text{two player}) \longrightarrow \ldots \longrightarrow Q(\text{game}) : \qquad S(\text{game}) \subseteq SQ(\text{game})$$

其次，将其最优态刻画为一个子空间。由此可得出关于最优表示（由最小商给出）的一般性障碍，其形式为多项式关系，例如

$$\pi : C^*(\text{two player}) \longrightarrow Q(\text{game}) \longrightarrow B(H) :$$

$$\implies \quad \pi\Big(\sqrt{2}E(2|1)E(0|3) - 5E(1|1)\Big) = 0$$

并对包含所有矩的最优态进行刻画

$$\varphi(1\otimes 1) = 1, \quad \varphi\Big(E(a|x)\otimes 1\Big), \quad \varphi\Big(1\otimes E(b|y)\Big), \quad \varphi\Big(E(a|x)\otimes E(b|y)\Big)$$

$$\varphi\Big(E(a|x)E(a'|x')\otimes 1\Big), \quad \varphi\Big(E(a|x)E(a'|x')\otimes E(b|y)\Big), \quad \ldots$$

这种新颖的方法已在多种示例中得到阐释，见 [Fre22]。本文将这一通用方法完整地应用于倾斜 CHSH 博弈，从头到尾将其作为一个详尽的示例。

为此，我们重新审视算子代数中的一项经典结果，该结果涉及由一对投影生成的泛代数。将这一结果改用

生成酉元（对应底层群）的语言，并结合对平凡表示的归纳（它基本上是一般 Fell 丛的典范表示），便可得到一个出人意料的描述：该代数由处于各种反对易程度的酉元生成：

定理 A. 由一对二阶酉元生成的泛代数，可代数地描述为一个函数代数，其定义域涵盖生成元之间不同程度的反对易

$$C^*\Big(\ u^2=1=v^2\ \Big)=C^*\Big(\ u^2=1=v^2\ \Big|\ \{u,v\}=2\mathrm{id}\ \Big)\subseteq C\Big([-1,1]\to M_2\Big)$$

适用于任意选择的连续生成元 u、$v\in C\Big([-1,1]$、$M_2\Big)$。

我们的研究进一步揭示，这种关系是大多数相关论文中策略的基础，例如[PV 10] 关于著名的 I3322 不等式的研究，见 [Fro81] 作者将在后续工作中对此作进一步阐述。

因此，计算二元输入二元输出博弈的量子值，可归结为矩阵代数中的某个优化问题

$$\mathrm{game}(s,t)\in M_2\otimes M_2:\qquad \|\mathrm{game}\|=\sup_{-1\le s,t\le 1}\|\mathrm{game}(s,t)\|$$

取决于生成元之间的反对易程度

$$M_2\otimes M_2=C^*\Big(\{u,v\}=2s(\mathrm{Alice})\Big)\otimes C^*\Big(\{u,v\}=2s(\mathrm{Bob})\Big).$$

对于所需的倾斜 CHSH 博弈，我们随后运用此方法推导出熟知的量子值，同时还揭示了生成元之间所需的精确反对易程度：

定理 B. 倾斜 CHSH 博弈仅在某个精确定义的范围内具有最大量子值，详见定理 *4.1)*

$$\|\mathrm{CHSH}(\alpha,\beta)\|^2=4(1+\alpha^2)(1+\beta^2)$$

仅当生成元之间的反对易程度达到以下数值时

$$\left(\ s(\mathrm{Alice})=0\ \middle|\ s(\mathrm{Bob})=\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}(\beta^2+1)+\beta^2\ \right).$$

因此，这就完全刻画了表示上的障碍（见上文）。

具体而言，这揭示了其生成元的一个简化公式：更确切地说，我们注意到，在上述通常的表示中所具有的自由度

（或者从更具物理意义的角度说，是参考系的选择）

$$1 \otimes u = 1 \otimes \Big(\cos(\alpha) Z + \sin(\alpha) X \Big) \quad \text{and} \quad 1 \otimes v = 1 \otimes \Big(\cos(\beta) Z + \sin(\beta) X \Big)$$

归根结底，它们仅由各自的相对角度唯一刻画

$$\{1 \otimes u, 1 \otimes v\} = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos|\alpha - \beta| = 2s(\text{Bob})$$

因此，我们借助上述结果为其给出了一个便捷的表述。这包括开头所概述的通常表示。由此，这解决了第一个任务，即通过将算子代数态典范分解为表示和向量态来完成该任务。

为了对其最优态进行分类，我们进一步给出以下结果（类似形式的结果无疑散见于文献之中）：

命题。对于任意元素（视为偏置多项式），并且其算子范数（视为其最大偏差，或者更确切地说是极值偏差）

$$\text{bias} \in C_0(X, A): \qquad \|\text{bias}\| = \sup \|\text{bias}(X)\|$$

考虑相应的短正合列

$$0 \longrightarrow C_0(\text{rest}, A) \longrightarrow C_0(X, A) \longrightarrow C_0(\text{best}, A) \longrightarrow 0$$

该短正合列由定义子空间（及其补空间）给出

$$\text{best} := \Big\{ \ \|\text{bias}(x)\| = \|\text{bias}\| \ \Big\} \subseteq X.$$

那么，任何在上述偏置意义下使偏置最大化的算子代数态 $\varphi: C_0(X, A) \to \mathbb{C}$（即 $|\varphi(\text{偏置})| = \|\text{偏置}\|$ ）必然经由该商分解

$$\varphi : C_0(X, A) \longrightarrow C_0(\text{best}, A) \longrightarrow \mathbb{C}$$

因此，最优态空间是该商的一个子空间。

根据定理，原则上，我们因此可以求解每一个二元输入二元输出博弈。特别是对于上述商代数由单个参数对给出的博弈，例如

$$\text{best} = \left(\ s(\text{Alice}) = 0 \ \middle| \ s(\text{Bob}) = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1}(\beta^2 + 1) + \beta^2 \ \right):$$

$$C^*\Big(\{u, v\} = 2s(\text{Alice})\Big) \otimes C^*\Big(\{u, v\} = 2s(\text{Bob})\Big) = M_2 \otimes M_2$$

解空间由特征子空间问题的凸闭包得出

$$\text{bias} \in M_2 \otimes M_2 : \qquad \text{bias}\,|\varphi\rangle = \|\text{bias}\| \cdot |\varphi\rangle \ ?$$

更一般地，解空间由其连续截面构成。通过这些约化，我们最终将倾斜 CHSH 博弈的整个解空间（包括所有高阶矩）分类如下：

定理 C. 倾斜 CHSH 博弈存在唯一最优态，该态由关联表唯一确定（利用生成元上的反对易关系，还可进一步确定所有高阶矩）：

φ (...)	$- \otimes 1$	$- \otimes 2u$	$- \otimes 2v$	$- \otimes 4uv$
$1 \otimes -$	$1 = a^2 + d^2$	$(a^2 - d^2)\ \|w_+\|$	$(a^2 - d^2)\ \|w_+\|$	$(a^2 + d^2)\quad (\|w_+\|^2 - \|w_-\|^2)$
$u \otimes -$	$a^2 - d^2$	$(a^2 + d^2)\|w_+\|$	$(a^2 + d^2)\|w_+\|$	$(a^2 - d^2)(\|w_+\|^2 - \|w_-\|^2)$
$v \otimes -$	0	$2ad\|w_-\|$	$-2ad\|w_-\|$	0
$uv \otimes -$	0	0	0	$4ad\|w_+\| \cdot \|w_-\|$

因此，这些值由熟知的变换给出

$$w_\pm = u \pm v : \qquad |w_+| = 2\alpha\sqrt{\frac{1+\beta^2}{1+\alpha^2}} \quad and \quad |w_-| = 2\sqrt{\frac{1-\alpha^2\beta^2}{1+\alpha^2}}$$

以及由下式给出的施密特系数

$$a = \sqrt{\frac{\sqrt{1+\beta^2} + \beta\sqrt{1+\alpha^2}}{2\sqrt{1+\beta^2}}} \quad and \quad d = \sqrt{\frac{\sqrt{1+\beta^2} - \beta\sqrt{1+\alpha^2}}{2\sqrt{1+\beta^2}}}$$

由此便不再有任何歧义。
关于上述最优态的更多详情，请参阅定理 5.2。

我们注意到，这种刻画比以往任何自测试结果都强得多，因为它意味着对于包括所有高阶矩与混合矩的态具有唯一性（见本引言开头的论证）。此外，通常的形式（如开头所示）

$$|\varphi\rangle = \cos(\varphi)\,|0\rangle \otimes |0\rangle + \sin(\varphi)\,|1\rangle \otimes |1\rangle$$

只需如上直接读出施密特系数

$$\left(\cos(\varphi) = \sqrt{\frac{\sqrt{1+\beta^2}+\beta\sqrt{1+\alpha^2}}{2\sqrt{1+\beta^2}}} \;\middle|\; \sin(\varphi) = \sqrt{\frac{\sqrt{1+\beta^2}-\beta\sqrt{1+\alpha^2}}{2\sqrt{1+\beta^2}}} \right).$$

这与通常使用.....的表述完全一致

$$\sin(2\varphi)^2 = 4\sin^2(\varphi)\cos^2(\varphi) = \left(\sqrt{\frac{1-\alpha^2\beta^2}{1+\beta^2}}\right)^2$$

然而，这种表述只是隐式定义（见开头）。因此，我们进一步推导出了施密特系数的明确具体表述，无需采用任何三角函数形式。

作为引言的总结，我们目前的工作提供了一套系统的方法，用于求解任意二元输入二元输出博弈；具体而言，我们将这一方法完整应用于倾斜 CHSH 博弈，给出如下完整解：
这包括对量子优势的整个区域进行精确刻画（并揭示了此前未被注意到的额外相位分离），以及将其所需的反对易性刻画为表示上的一种障碍。另一方面，这也完整分类了最优态：它们是唯一确定的算子代数态（包括所有高阶矩）。因此，倾斜 CHSH 博弈的传统自检结果中遗留的所有歧义都得以消除。

1 表示论：一种代数描述

我们的研究始于算子代数中的一个经典结果，并从略有不同的视角加以考察（这一视角与量子信息理论的考量惊人地吻合）。更确切地说，该经典结果给出了由一对投影生成的泛算子代数的具体描述，将其表示为某种矩阵值函数代数

$$C^*\Big(p^2 = p = p^*, q^2 = q = q^*\Big) \subseteq C\Big(\text{some space}, M_2\Big).$$

虽然这些描述通常涉及一些相当具体的解释，例如旋转（例如 [RS89，注释 14] 中所述）

$$p = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \quad \text{and} \quad q = \begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos & \sin\end{pmatrix}$$

但它们通常缺少基于抽象代数关系的描述。我们将改用生成酉元的视角，给出可能的反对易范围

$$\{u, v\} = uv + vu = 2s, \quad \text{for} \quad -1 \leq s \leq 1.$$

然而，对于相应的投影，将这种反对易关系展开后，会得到如下毫无意义的关系

$$\{2p-1, 2q-1\} = 4(pq+qp) - 4(p+q) + 2 = 2s$$

这或许就是上述代数描述一直被忽略的原因。此外，先前将上述对象识别为矩阵值函数的方法，通常涉及对底层群（作为半直积）的不可约表示进行计数。

$$\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2 = \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2.$$

然而，由于底层群是一个可解半直积，表示诱导便成为可行的技术，并由此给出一种典范构造（事实上，这是 Fell 丛上最典范的构造）：

命题 1.1. 由取逆给出的半直积

$$\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2 = \left\langle w, s \;\middle|\; sws = w^{-1} \text{ and } s^2 = 1 \right\rangle$$

定义了典范嵌入 $C^*\left(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\right) \hookrightarrow C^*(\mathbb{Z}) \otimes M(2)$

$$w \rtimes 1 = \begin{pmatrix} w & \\ & w^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad 1 \rtimes s = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

与正则表示相似（只差某种基变换）。

证明。我们先在算子代数上群作用的交叉积这一更一般的背景下进行讨论：对此请注意，表示诱导会将系数代数变为对角算子（同时保持群以双边移位的方式作用）

$$A \rtimes G \to B\left(\ell^2 G \otimes A\right): \quad 1 \rtimes g \mapsto 1 \otimes g \quad \text{and} \quad a \rtimes 1 \mapsto \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & g^* a g & \\ & & \ddots \end{pmatrix}.$$

这里的张量积更准确地说是一个希尔伯特右模，其形式基本上类似于正则表示的一种倾斜表述。

此外，它还配备了一个满足以下条件的条件期望

$$\langle e|-|e\rangle : A \rtimes G \to A : \qquad \langle e|-\rtimes e\,|e\rangle = \mathrm{id}_A(-) \quad \text{and} \quad \langle e|-\rtimes (G\setminus e)\,|e\rangle = 0$$

这正是定义正则表示的关系： $E\colon A \rtimes G \to A$。因此，我们所得到的不过是一个中间商

$$A \rtimes G \longrightarrow \mathrm{im}(A \rtimes G) \longrightarrow A \rtimes G \Big/ \Big(E : A \rtimes G \to A\Big)$$

我们参考了 [Kwa17，第 2 节。1]以及 [KM21，第 3 节。1]并结合 [Fre22，第 1] 节，以及进一步参考 [Exe17，第 17]节。事实上，上述表示类似于最右端的正则商。不过，对于可 amenable 群（例如我们这里的群），这些商都相同

$$A \rtimes G \longrightarrow \mathrm{im}(A \rtimes G) \longrightarrow A \rtimes G \Big/ \Big(E : A \rtimes G \to A\Big)$$

因此，每个表示都定义了普适表示的一个忠实表示。对于有限群，上述表示现在可以直接取为

$$A \rtimes \Big(F = \text{finite}\Big) \hookrightarrow B\Big(\ell^2 F\Big) \otimes A \hookrightarrow B\Big(\ell^2 F \otimes A\Big)$$

它基本上定义了给定系数代数上的一个矩阵代数。另一方面，对于半直积，它们的群代数和交叉积定义的是同一个范畴对象，因此总的来说

$$C^*(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2) \longrightarrow C^*(\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/2 \hookrightarrow M(2) \otimes C^*(\mathbb{Z})$$

其生成元写出来是

$$w \rtimes 1 = \begin{pmatrix} ewe & \\ & sws \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & \\ & w^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad 1 \rtimes s = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}.$$

由此得出所需结论。 □

现在我们可以将前面的结果应用于上述表示。更确切地说，我们回顾如下众所周知的同构（例如可表示为.....；具体选择将在下面的最终结果中消失）

$$\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2 = \Big\langle u^2 = 1 = v^2 \Big\rangle = \Big\langle sws = w^{-1}, s^2 = 1 \Big\rangle = \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2 :$$

$$\text{e.g.} \quad (\ u = ws,\ v = s\ ) \iff (\ w = uv,\ s = v\ ).$$

事实上，这个同构定义了一种特定实例，它更一般地属于自由

生成子群的形式（如 I3322 不等式中已经出现的形式）

$$\Big(\mathbb{Z} * \ldots * \mathbb{Z}\Big) = \Big\langle\ w_1 = u_1 v,\ \ldots\ ,\ w_n = u_n v\ \Big\rangle$$
$$\subseteq \Big\langle\ u_1^2, \ldots, u_n^2 = 1,\ v^2 = 1\ \Big\rangle = \Big(\mathbb{Z}/2 * \ldots * \mathbb{Z}/2\Big) * \mathbb{Z}/2.$$

另一方面，我们回顾作为圆代数的基本同一化

$$C^*(\mathbb{Z}) = C^*(w^* w = 1 = w w^*) = C(\mathbb{T}): \quad w(z) = z$$

以及熟悉的同一化（定义了一个同构）

$$C(\mathbb{T}) \otimes A = C\Big(\mathbb{T} \to A\Big): \quad (f \otimes a)(z) = f(z) \otimes a.$$

将二者配对后，我们由此得到该同一化（目前采用上述选择）

$$C^*(\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2) = C^*(\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/2 \subseteq C(\mathbb{T}, M_2):$$
$$u(z) = \begin{pmatrix} z & \\ & z^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad v(z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}.$$

尽管这为作为函数代数的同一化定义了某个同构（在其自同构群意义下），但这一描述绝不构成一种内在的代数刻画。我们现在的目标是通过识别其定义性的代数关系来弥补这一缺失。为此，我们现在可以计算它们的反对易关系（例如使用上文暂定的选择）

$$\Big\{u(z), v(z)\Big\} = \begin{pmatrix} z & \\ & z^* \end{pmatrix} \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & \\ & z^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} z & \\ & z^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z^* & \\ & z \end{pmatrix} = 2\,\mathrm{Re}(z) \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

考虑到这些初步想法，我们所需的刻画如下：

定理 1.2（抽象刻画）。上述同一化可以完全刻画为一个由该代数关系给出的抽象代数（对于函数代数中连续生成元的任意选择）

$$C^*\Big(\ u^2 = 1 = v^2\ \Big) = C^*\Big(\ u, v\ \Big|\ \{u, v\} = 2\mathrm{id}\ \Big) \subseteq C\Big(\ \mathrm{Re}(\mathbb{T}) = [-1, 1] \to M_2\ \Big).$$

特别是，其不可约表示可以用上述可能的反对易取值范围（遍历 $-1 \leq s \leq 1$）来参数化

$$M(2) = C^*\Big(\ u, v\ \Big|\ \{u(s), v(s)\} = 2s\ \Big)$$

与 *[Fre22*附录 A 中类似的抽象矩阵代数*]*。

证明。我们希望验证以下内容：对于任意一组满足上述关系的连续生成元，由此得到的表示都定义了一个等距嵌入；等价地说，它是一个嵌入到

$$C^*\Big(\, u^2 = 1 = v^2 \,\Big) \hookrightarrow \prod_{-1\le s\le 1} C^*\Big(\, u, v \;\Big|\; \{u,v\} = 2s \,\Big) \quad ?$$

不过，我们已经通过上述特定选择找到了这样一个表示，因此每一个这样的表示也都如我们所愿地定义了一个等距嵌入。 □

在结束本节之前，我们来说明如何得到通常的泡利矩阵：例如，给定一对如下形式的

$$u = \cos(\varphi)Z + \sin(\varphi)X, \qquad v = \cos(\psi)Z + \sin(\psi)X$$

那么，它们的反对易关系可直接看出为

$$\{u,v\} = 2\cos(\varphi)\cos(\psi) + 2\sin(\varphi)\sin(\psi) = 2\cos(\varphi - \psi)$$

因此，重要的只有它们的相对角度。另一方面，给定一对具有某种反对易关系的对象，我们可以将它们的重叠部分分离为

$$\{u,v\} = 2\cos(\delta) \quad \Longrightarrow \quad \Big\{u, v - \cos(\delta)u\Big\} = \{u,v\} - \cos(\delta)\{u,u\} = 0$$

并进一步选择一个基来对角化其中一个生成元，例如

$$u = \cos(0)Z + \sin(0)X = Z \quad \Longrightarrow \quad v = \cos(\delta)Z + \sin(\delta)X.$$

不过，我们并不需要上述任何泡利矩阵。真正重要的是生成元之间的反对易程度。说到这里，我们现在转向非局域博弈。

2 二元输入二元输出博弈：一般求解流程

有了我们此前对表示论的刻画，原则上现在我们可以求解任意二元输入二元输出博弈：更准确地说，任意二元输入二元输出博弈都以如下双玩家代数为基础（参见

[Fre22，第 2]节）

$$C^*(\text{two player}) = C^*\left(u^2 = 1 = v^2\right) \otimes C^*\left(u^2 = 1 = v^2\right)$$

并且可以刻画为如下多项式

$$\text{game} = 2\,u \otimes 1 - 1 \otimes v + \sqrt{3}\,uvu \otimes v + 5\,v \otimes uvuv.$$

一般而言，对非局域博弈的研究可分为以下两项任务（每项都涉及各自特殊的技术）：(1) 计算给定多项式的算子范数（假定该多项式具有正谱或对称谱）

$$\Big(\text{game} \geq 0 : \quad \|\text{game}\| = ?\Big) \quad \text{or} \quad \Big(\sigma(\text{bias}) = -\sigma(\text{bias}) : \quad \|\text{bias}\| = ?\Big)$$

以及 (2) 刻画使上述数值达到最大值的状态空间

$$\varphi : C^*(\text{two player}) \to \mathbb{C} : \qquad \varphi(\text{game}) = \|\text{game}\| \ ?$$

尽管从算法上推导其中任一项或两项通常都很困难（从复杂性角度来看），而且它们在某种意义上并不相互独立，但在实践中，对于给定的特定多项式，仍可能解出其中任一项或两项。

现在，为了解决第一项任务，通常需要对底层算子代数的表示论有深入了解。例如，若能很好地掌握其不可约表示空间，便可将给定多项式的算子范数推导为一个优化问题

$$C^*(\text{two player}) \subseteq \prod_{\pi=\text{irrep}} B(H_\pi) : \qquad \|\text{game}\| = \sup_{\pi=\text{irrep}} \|\pi(\text{game})\|.$$

我们前一节恰好以如下形式提供了这类结果（见定理 1.2）

$$\begin{aligned} C^*(\text{two player}) &= C^*\left(u^2 = 1 = v^2\right) \otimes C^*\left(u^2 = 1 = v^2\right) \\ &\subseteq C^*\left(\, u, v \;\middle|\; \{u, v\} = 2\text{id} \,\right) \otimes C^*\left(\, u, v \;\middle|\; \{u, v\} = 2\text{id} \,\right) \\ &\subseteq C\Big([-1, 1] \times [-1, 1], M_2 \otimes M_2\Big) \end{aligned}$$

（注意，空间张量积与最大张量积相同，因为它们都定义可 amenable 群。）因此，原则上我们可以沿着

如下意义上的任一玩家生成元之间的反对易关系

$$\|\text{game}\| = \sup_{-1\leq s,t\leq 1}\Big\{\ \Big\|\text{game}(s,t)\Big\|\ :\ \{u\otimes 1, v\otimes 1\} = 2s, \{u\otimes 1, v\otimes 1\} = 2t\ \Big\}.$$

此外，由于它们的生成元两两反对易（相差一个标量常数），每个单项式都可化简为阶数至多为二的词，例如

$$\{u,v\} = 2s \quad \Longrightarrow \quad vu = -uv + 2s, \qquad uvu = -v + 2su, \quad \dots$$

因此，每个多项式（位于相应的矩阵代数中）都可化简为如下形式的线性表达式

$$\text{game}(s,t) \in \text{span}\Big\{1,u,v,uv\Big\}\otimes\Big\{1,u,v,uv\Big\}:$$

$$\text{game}(s,t) = \lambda(1,1)1\otimes 1 + \lambda(1,u)1\otimes u + \ldots + \lambda(uv,uv)\otimes uv.$$

如有需要（若这样更容易理解），还可以按照上一节所述，将每个抽象生成元替换为泡利矩阵。因此，第一个任务（针对每一对反对易关系）可表述为在以下空间中的特征值问题

$$C^*\Big(\ u,v\ \Big|\ \{u,v\} = 2s\ \Big)\otimes C^*\Big(\ u,v\ \Big|\ \{u,v\} = 2t\ \Big) = M_2\otimes M_2:$$

$$\Big\|\text{game}(s,t)\Big\| = \Big\|\sigma\Big(\text{game}(s,t)\Big)\Big\| = r\Big(\text{game}(s,t)\Big) = ?$$

原则上，可以手动求解该问题，并据此原则上可像上文那样，沿着它们的反对易关系求解优化问题。

为了完成任务（2），刻画最优态的空间，现在可以运用先前关于优化问题的知识：更确切地说，考虑将任意量子态通过哈恩–巴拿赫定理扩展到环境函数代数

$$\begin{array}{ccc} C\Big([-1,1]\times[-1,1]\to M_2\otimes M_2\Big) & \dashrightarrow & \\ \uparrow & & \\ C^*\Big(u^2=1=v^2\Big)\otimes C^*\Big(u^2=1=v^2\Big) & \longrightarrow & \mathbb{C}. \end{array}$$

另一方面，在沿着反对易关系进行优化时，我们还推断出了使算子范数达到最大值的那些配对

$$\text{best} := \Big\{\ (s,t)\ :\ \|\text{game}(s,t)\| = \|\text{game}\|\ \Big\} \subseteq [-1,1]\times[-1,1].$$

因此，只有那些落在这个极大化子空间上的量子态才可能使算子范数达到最大值。

可能使算子范数达到最大值

$$C\Big([-1,1]\times[-1,1]\to M_2\otimes M_2\Big)\longrightarrow C\Big(\text{best}\to M_2\otimes M_2\Big)\dashrightarrow\mathbb{C}$$

其中这些还需要进一步由最大特征空间形成某种混合。以上介绍了求解二元输入二元输出博弈的过程。

3 实多项式：二元博弈

继续之前，我们先介绍一种简化的表示法，用于将二元博弈与含有可能为负的实系数的二阶多项式联系起来：

$$\text{bias}\in\sum\mathbb{R}\cdot\{1,u_1,\ldots,u_n\}\otimes\{1,u_1,\ldots,u_n\}:$$

$$\text{bias}=\lambda(1,1)1\otimes 1+\lambda(1,u_1)1\otimes u_1+\ldots+\lambda(u_n,u_n)u_n\otimes u_n.$$

例如，接下来介绍的倾斜 CHSH 博弈可表示为一个实多项式

$$\text{CHSH}(\alpha,\beta)=\alpha u\otimes(u+v)+v\otimes(u-v)+2\beta u\otimes 1$$

我们基本上将其视为一个偏置多项式，更准确地说如下：为此，我们首先注意到，任何 XOR 博弈都可以等价地用其偏置多项式来描述（例如参见 [CHTW04，第 5 节。3]）

$$\text{game}=\frac{1}{|X\times Y|}\sum E(\text{winning})\quad\Longrightarrow\quad\text{bias}=\sum(-1)^{V(x,y)}u(x)\otimes u(y)$$

这里我们使用了与 [Fre22附录 B] 中相同的简写记法。
虽然这定义了一套相当标准的流程，但我们现在将介绍一种简化流程，以某种程度上规范的方式，将任意系数为实数（且可能为负）的偏置多项式与非局域游戏关联起来：
为此，我们首先注意到，二阶幺正算子的张量积仍然是二阶幺正算子，其诱导的谱分解为

$$\Big(\,u=p-q\,\Big)\otimes 1\quad\text{and}\quad 1\otimes\Big(\,u'=p'-q'\,\Big):$$

$$\Longrightarrow\ u\otimes u'=\Big(\,p\otimes p'+q\otimes q'\,\Big)-\Big(\,p\otimes q'+q\otimes p'\,\Big).$$

因此，其用于恢复谱投影的关系式为

$$\Big(1 \otimes 1 + u \otimes u' \Big) = 2 \Big(p \otimes p' + q \otimes q' \Big),$$
$$\Big(1 \otimes 1 - u \otimes u' \Big) = 2 \Big(p \otimes q' + q \otimes p' \Big).$$

此外，对于退化情形，可以将其与

$$\Big(1 \otimes 1 + u \otimes 1 \Big) = 2p \otimes \Big(p' + q' \Big) \quad \text{and} \quad \Big(1 \otimes 1 - u \otimes 1 \Big) = 2q \otimes \Big(p' + q' \Big)$$

第二张量因子也类似。
另一方面，谱满足显然的关系

$$\sigma(a+1) = \sigma(a) + 1 \quad \text{and} \quad \sigma(\lambda a) = \lambda(a).$$

因此，我们可以结合这两个观察，通过以下步骤将二元博弈与任意阶的实系数二变量多项式相关联：

命题 3.1（实多项式：二元游戏）：
给定一个系数可能混合的多项式

$$\text{bias} \in \sum \mathbb{R} \cdot \{1, u_1, \ldots, u_n\} \otimes \{u_0 = 1, u_1, \ldots, u_n\} :$$

$$\text{bias} = \lambda(1,1)1 \otimes 1 + \lambda(u_0, u_1)1 \otimes u_1 + \ldots + \lambda(u_n, u_n)u_n \otimes u_n$$

可以将其与一个非局域游戏相关联（在进行归一化后）

$$\text{game} \sim \text{bias} + \sum \Big| \lambda\Big(\{1, u_1, \ldots, u_n\} \times \{u_0 = 1, u_1, \ldots, u_n\} \Big) \Big|$$

不过，其问题分布通常并不均匀。
此外，上述常数项通常可以忽略。

为便于说明，我们考虑以下多项式

$$\text{bias} = \frac{1}{2}\, u(x=1) \otimes u(y=2) - \sqrt{2}\, u(x=3) \otimes 1.$$

应用上述步骤，我们得到以下二元游戏（对问题分布进行一些

归一化）

$$u(\ldots) = E(+1|\ldots) - E(-1|\ldots): \qquad \text{game} \sim \text{bias} + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(E(+1|x=1) \otimes E(+1|y=2) + E(-1|x=1) \otimes E(-1|y=2)\Big)$$
$$+\sqrt{2}\Big(E(+1|x=1) + E(-1|x=1)\Big) \otimes \Big(E(+1|\text{any}) + E(-1|\text{any})\Big)$$

其中，后一个表达式可以取为某个问题对，对于该问题对，给定答案对的有效性与第二位玩家无关。
另一个例子是任意符号游戏，例如那些展现出量子值与量子对易值之间分离的游戏，见[DPP19]。因此，任何实偏置多项式都可视为一个二元游戏。

4 倾斜 CHSH 博弈：量子值

现在我们以倾斜 CHSH 博弈为例说明我们的求解过程：首先，我们利用上一节介绍的方法计算量子值：为此，我们回顾[AMP12]中倾斜 CHSH 博弈的偏置多项式：

$$\text{CHSH}\Big(\alpha, \beta \in \mathbb{R}\Big) = \alpha u \otimes (u+v) + v \otimes (u-v) + 2\beta u \otimes 1. \tag{1}$$

为简化接下来的公式，我们采用了一个经缩放的参数（注意最终表达式中按因子二进行的缩放）。此外，我们通常省略对给定固定参数对 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 的依赖。

首先，我们希望验证给定多项式具有对称谱，以便应用我们之前的方法：为此，我们注意到存在许多能够得到负多项式的自同构，例如将 Alice 的生成元映为其相反数

$$\Phi(\text{CHSH}) = \alpha(-u) \otimes (u+v) + (-v) \otimes (u-v) + 2\beta(-u) \otimes 1 = -\text{CHSH}$$

因此，其谱必然呈对称分布，如下所示

$$\sigma(\text{CHSH}) = \sigma\Big(\Phi(\text{CHSH})\Big) = -\sigma(\text{CHSH}).$$

特别地，我们可以将其算子范数作为最大偏差提取出来

$$\|\mathrm{CHSH}\| = \|\sigma(\mathrm{CHSH})\| = \max \sigma(\mathrm{CHSH})$$

因此，我们可以根据需要应用之前的工具。
同时，我们注意到，在最近的一次讨论中，作者们针对 I3322 不等式中的不对称性，提出了如下论证：

$$\sigma(\mathrm{I3322}) \neq -\sigma(\mathrm{I3322}) : \qquad |\min \sigma(\mathrm{I3322})| \neq |\max \sigma(\mathrm{I3322})|$$

因此，使用上述考虑时仍需谨慎。进一步的类似变换揭示了如下对称性

$$\|\mathrm{CHSH}(-\alpha, \beta)\| = \|\mathrm{CHSH}(\alpha, \beta)\| = \|\mathrm{CHSH}(\alpha, -\beta)\|$$

因此，我们可以将注意力限制在 $\alpha, \beta \geq 0$ 上。
话虽如此，现在我们可以计算其算子范数：

定理 4.1。倾斜 CHSH 博弈的最大值为 $(\alpha, \beta \geq 0)$

$$\left\| \mathrm{CHSH}\Big(\; s(\mathrm{Alice}) = 0 \;\Big|\; s(\mathrm{Bob}) = (*) \; \Big) \right\|^2 = 4(1+\alpha^2)(1+\beta^2) \qquad \text{(Q)}$$

$$\left\| \mathrm{CHSH}\Big(\; s(\mathrm{Alice}) = \pm 1 \;\Big|\; s(\mathrm{Bob}) = -1 \; \Big) \right\|^2 = 4(1+\beta)^2 \qquad \text{(L1)}$$

$$\left\| \mathrm{CHSH}\Big(\; s(\mathrm{Alice}) = \mathrm{any} \;\Big|\; s(\mathrm{Bob}) = 1 \; \Big) \right\|^2 = 4(\alpha+\beta)^2 \qquad \text{(La)}$$

以反对易程度作为优化参数

$$\{u \otimes 1, v \otimes 1\} = 2s(\mathrm{Alice}) \quad \textit{and} \quad \{1 \otimes u, 1 \otimes v\} = 2s(\mathrm{Bob})$$

且第一个值仅在范围 $|\alpha\beta| \leq 1$ 内有效：

$$(\mathrm{Q}) : \quad -1 \leq \left(s(\mathrm{Bob}) = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1}(\beta^2 + 1) + \beta^2 \right) \leq 1 \qquad (*)$$

此外，上述值在以下区域内达到最大值

$$(\mathrm{L1}) \leq (\mathrm{Q}) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^2 \geq \frac{2\beta}{1+\beta^2}$$

$$(\mathrm{La}) = (\mathrm{Q}) \quad \Longleftrightarrow \quad |\alpha\beta| = 1$$

后者的局域值始终低于量子值，而两者相等的情况恰好对应于 $(*)$ 的有效范围。

在开始证明之前，我们先作几点观察：首先，表现出量子优势的区域，一方面受限于 (∗) 中给出的反对易量有效范围

$$\left(s(\text{Bob}) = \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}(\beta^2+1)+\beta^2\right) \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^2\beta^2 \leq 1$$

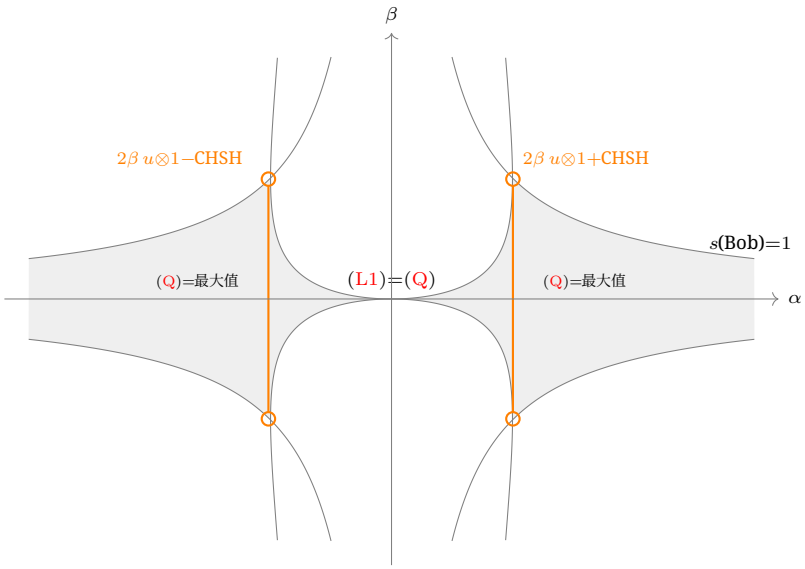
下界始终成立，极端情况由.....给出

$$-1 = \left(s(\text{Bob}) = \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}(\beta^2+1)+\beta^2\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = 0$$

而另一方面，则由量子值达到最大时的定义域给出

$$(\text{L1}) \leq (\text{Q}) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^2 \geq \frac{2\beta}{1+\beta^2}$$

同时注意到，另一个经典值始终低于此值。
示意图中，包围区域如下所示：



因此，橙色直线描绘了 [BP15] 和 [CS20]中出现的版本。在 [AMP12] 中还进一步指出，可以在偏置多项式的参数范围之间转换

$$(\alpha \leq 1) \quad \leftrightsquigarrow \quad (\alpha \geq 1)$$

像本节开头那样对生成元进行某种变换。不过，这无法通过上述某种变换轻易实现。

事实上，我们的刻画揭示了，例如，

$$\|\mathrm{CHSH}(\alpha,-)\| \neq \|\mathrm{CHSH}(1/\alpha,-)\|$$

或者，对参数进行任何其他此类变换时也类似。相反，我们发现了更复杂的相位分离

$$\begin{aligned} s(\mathrm{Bob}) \leq 1 \quad &\iff \quad |\alpha\beta| \leq 1 \\ (\mathrm{Q}) \geq (\mathrm{L1}) \quad &\iff \quad \alpha^2 \geq \frac{2\beta}{1+\beta^2} \end{aligned}$$

此前这两者都未曾被注意到。
介绍完这些观察后，我们现在可以开始证明：

证明。我们先对第一张量因子进行如下简化：

$$u \otimes 1 \cdot \mathrm{CHSH} = \alpha \otimes (u+v) + (uv) \otimes (u-v) + 2\beta \otimes 1$$

因此，我们可以按照第一节中的方式替换 $w = uv = z \in \mathbb{T}$：

$$\ldots = \alpha(u+v) + z(u-v) + 2\beta$$

对于第二张量因子，我们作出一个熟知的观察

$$(u \pm v)^2 = u^2 \pm \{u,v\} + v^2 = 2(1 \pm s)$$

因此，这两个表达式都定义了酉生成元 :
更准确地说，缩放满足以下约束

$$0 \leq 2(1 \pm s) \leq 4 : \quad 2(1+s) + 2(1-s) = 4$$

因此，对于某种欧几里得优化，我们的酉生成元可写为：

$$\begin{aligned} 0 \leq x, y \leq 1 \quad \text{with} \quad x^2 + y^2 = 1 : \\ 2xu' = (u+v) \quad \text{and} \quad 2yv' = (u-v). \end{aligned}$$

（替换关系可由 $2(1+s) = 4x^2$ 和 $2(1-s) = 4y^2$ 直接读出。）也可以用更熟悉的形式来表示上述生成元：

$$2\cos(\varphi)u' = (u+v) \quad \text{and} \quad 2\sin(\varphi)v' = (u-v)$$

不过，我们不采用这种做法，而是直接进行优化。

我们还注意到，上述生成元彼此反对易，因为

$$\{u', v'\} \sim \{u+v, u-v\} = \{u,u\} + \{u,v\} - \{v,u\} - \{v,v\} = 0.$$

因此，上文的偏置多项式用这些生成元表示为

$$\ldots = 2\Big((\alpha x)u' + (yz)v' + \beta\Big)$$

为简便起见，从现在起我们令 $u = u'$ 和 $v = v'$。
这个算子不是正规算子（基本上是因为我们最初的因式分解），因此我们调用 C^*-恒等式，以便运用谱理论；在此类研究中，这应该始终是第一步。因此，我们考虑偏差平方，并利用上面的表达式得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\Big(\mathrm{CHSH}\Big)^2 = \frac{1}{4}\Big(\mathrm{CHSH}\cdot u\otimes 1\Big)\Big(u\otimes 1\cdot \mathrm{CHSH}\Big) = \\
&= (\alpha x)^2 + y^2|z|^2 + \beta^2 + \Big(2(\alpha\beta x)u + (\beta y)(z+z^*)v + (\alpha xy)(z-z^*)uv\Big) \\
&= (\alpha x)^2 + y^2 + \beta^2 + 2\Big((\alpha\beta x)u + (\beta y)\cos(\omega)v + (\alpha xy)\sin(\omega)(w := iuv)\Big).
\end{aligned}$$

这个三元组定义了彼此反对易的生成元（它们基本上定义了一个抽象的泡利矩阵三元组），这一点很容易看出

$$\{u,v\} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Big\{\, u \;\Big|\; w = iuv \,\Big\} = 0 = \Big\{\, v \;\Big|\; w = iuv \,\Big\}$$

从而定义了自伴酉算子（与我们上面的计算类似）

$$\Big(au + bv + cw\Big)^2 = a^2u^2 + \ldots + \cancel{2ab\{u,v\}} + \ldots = a^2 + b^2 + c^2$$

因此，上面的表达式的谱为

$$\sigma\Big(au + bv + cw\Big) = \Big\{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}\Big\} = \mathbb{R} \cap \Big\|\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\Big\|\mathbb{T}.$$

因此，与某个常数项相加后，我们得到如下算子范数：

$$\Big\|au + bv + cw + d\Big\| = \Big\|\sigma(au + bv + cw) + d\Big\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} + |d|$$

这定义了随机游走行为的一个特定实例！关于这类及类似类型中更有趣的现象，请参阅 [Leh97]。

因此，在我们的情况下（沿着我们的优化过程），我们得到

$$\frac{1}{4}\Big\|\mathrm{CHSH}\Big(x^2+y^2=1, z=\cos(\omega)+i\sin(\omega)\in\mathbb{T}\Big)\Big\|^2 =$$
$$= (\alpha x)^2 + y^2 + \beta^2 + 2\sqrt{(\alpha\beta x)^2 + (\beta y)^2\cos^2(\omega) + (\alpha x y)^2\sin^2(\omega)}$$

现在可以对其进行优化（其计算留待附录中进行）。所得数值和最优参数在该定理中给出。 □

5 倾斜 CHSH 博弈：最优态

现在我们可以根据上一节中求得的最优值对最优态进行分类。为处理这一任务，我们首先需要对一般的态空间作出更具体的描述。为此，我们先回顾嵌入到环境函数代数中的具体方式（见第 1 节）

$$C^*\Big(\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2\Big) = C^*\Big(\ u^2=1=v^2 \ \Big|\ \{u,v\}=2\mathrm{id}\ \Big) \subseteq C\Big(\ [-1,1]\to M_2\ \Big)$$

由此，对于二元输入二元输出博弈所对应的双玩家代数，我们得到（参见 [Fre22，第 2] 节）

$$C^*\Big(\text{two player}\Big) \subseteq C\Big(\ [-1,1]\times[-1,1]\to M_2\otimes M_2\ \Big).$$

因此，我们可以自由地将双玩家代数上的任何态延拓为也作用于环境函数代数上的态（利用哈恩–巴拿赫定理）。

$$C^*\Big(\text{two player}\Big) \subseteq C\Big(\ [-1,1]\times[-1,1]\to M_2\otimes M_2\ \Big) \longrightarrow \mathbb{C}$$

因此，一般二元输入二元输出博弈的态空间可由环境函数代数的态空间经限制而得到：

$$SC^*\Big(\text{two player}\Big) = SC\Big([-1,1]\times[-1,1], M_2\otimes M_2\Big)\Big|_{C^*(\text{two player})}$$

然而，后者的态空间要容易处理得多：例如，态空间可以用非交换博雷尔概率测度的积分来作出某种熟悉的描述

$$\varphi : C\Big([-1,1]\times[-1,1], M_2\otimes M_2\Big)\to\mathbb{C}: \quad \varphi(f) = \int_{[-1,1]\times[-1,1]} f\, d\mu$$

这一描述可利用额外的嵌入 $C(X, A) \subseteq \ell^\infty(X, A)$ 推导得出。尽管这定义了一种合理的策略，我们通常更倾向于采用初等的算子代数方法，从而使测度论方法成为一种人为产物。在此之前，我们先回顾一下，我们将（按照惯例）把在无穷远处趋于零的连续函数代数记作

$$C_0(X, A) = C_0(X) \otimes A$$

对于某个局部紧豪斯多夫空间 X 和任意算子代数 A，并回顾交换张量因子定义了一个核算子代数。基于此，我们现在希望证明以下命题：

命题 5.1（最优态：最大化商）。对于任意元素（视为偏置多项式），以及算子范数（视为其最大偏置，或更确切地说是极值偏差）

$$\text{bias} \in C_0(X, A): \qquad \|\text{bias}\| = \sup \|\text{bias}(X)\|$$

考虑相应的短正合列

$$0 \longrightarrow C_0(\text{rest}, A) \longrightarrow C_0(X, A) \longrightarrow C(\text{best}, A) \longrightarrow 0$$

该短正合列由定义子空间（及其补空间）给出

$$\text{best} := \Big\{ \ \|\text{bias}(x)\| = \|\text{bias}\| \ \Big\} \subseteq X.$$

那么，任何算子代数态 $\varphi: \ C_0(X, A) \to \mathbb{C}$ 在上述偏置意义下最大化 $|\varphi(\text{偏置})| = \|\text{偏置}\|$ 的态，必然通过该商因子化

$$\varphi : C_0(X, A) \longrightarrow C_0(\text{best}, A) \longrightarrow \mathbb{C}$$

因此，最优态空间作为该商的一个子空间出现。

证明。整个证明的关键在于将连续子代数嵌入更大的直积中，同时自由地将任意量子态延拓，使其也作用于该直积（使用哈恩–巴拿赫定理）

$$C_0\Big(X \to A\Big) \hookrightarrow \prod_X A \dashrightarrow \mathbb{C}$$

这样做的好处是可以使用示性函数。
特别是，这使得我们能够将态描述为对非交换测度的积分。不过，我们将改为提供一种完全自足的

算子代数方法（特别是，作者们都认为代数论证优于测度论论证）。为此，我们可以先将任意元素替换为其平方形式

$$\text{bias} \quad \rightsquigarrow \quad \text{bias}' = \text{bias}^*\text{bias} \geq 0.$$

事实上，根据 [Cho74]中的柯西–施瓦茨不等式的算子代数版本

$$|\varphi(\text{bias})|^2 = \varphi(\text{bias})^*\varphi(\text{bias}) \leq \varphi(\text{bias}^*\text{bias}) \leq \|\text{bias}^*\text{bias}\| = \|\text{bias}\|^2$$

因此，任何最优态也必然会使上面的偏差平方最大化。由此，从现在起我们可以假设给定元素为正。这样，接下来我们得到逐点谱半径作为连续函数的

$$\|\text{bias}(-)\| \in C_0(X): \qquad 0 \leq \text{bias}(-) \leq \|\text{bias}(-)\| \leq \|\text{bias}\|.$$

这个界是算子代数的，因为有如下熟知的关系

$$a, b \in \prod\nolimits_X A: \qquad a \leq b \quad \iff \quad a(x) \leq b(x)$$

这很容易根据它们的谱的代数定义推出。
因此，对于某个给定的最优态，我们得到不等式

$$\|\text{bias}\| = \varphi\Big(\text{bias}(-)\Big) \leq \varphi\Big(\|\text{bias}(-)\|\Big) \leq \|\text{bias}\|$$

因此，任何最优态也必然会使上面的逐点谱半径作为标量值函数最大化 ||偏差(–)|| ∈ C(K):

$$\varphi\Big(\text{bias}(-)\Big) = \|\text{bias}\| \quad \implies \quad \varphi\Big(\|\text{bias}(-)\|\Big) = \|\text{bias}\|.$$

这意味着，上述矩阵问题推导出一个对应的标量问题，作为最优态的障碍。有鉴于此，我们现在旨在验证（我们原始问题的）标量对应问题

$$\varphi\Big(\|\text{bias}(-)\|\Big) = \|\text{bias}\| \quad \implies \quad \varphi\Big(C_0(\text{rest})\Big) = 0 \quad ?$$

我们通过一个涉及遗传子代数的论证来解决这个问题。为简化记号，
我们引入它们的差

$$\varphi\Big(\ a(-) := \|\text{bias}\| - \|\text{bias}(-)\| \geq 0\ \Big) = 0.$$

回顾算子代数界（可见于任何入门教材）：

$$a^*\Big(x^*x \le \|x^*x\|\Big)a \quad \Longrightarrow \quad \varphi\Big(a^*x^*xa\Big) \le \|x^*x\|\varphi(a^*a)$$

然而，任何算子代数都由其正元素线性张成，因此任何最优态在遗传子代数上也取值为零

$$A = \operatorname{pos}(A) - \operatorname{pos}(A) + i\operatorname{pos}(A) - i\operatorname{pos}(A):$$

$$\varphi\Big(a = \sqrt{a}\sqrt{a}\Big) = 0 \implies \varphi\Big(\sqrt{a}A\sqrt{a}\Big) = 0.$$

与此同时，我们注意到，遗传子代数可以通过相应的近似单位来刻画，因此对于任意正幂，遗传子代数都相同（这是算子代数中的一个著名结果）：

$$\overline{aAa} = \Big\{\, b \;\Big|\; a^{1/n}ba^{1/n} \to b \,\Big\}: \qquad \overline{aAa} = \overline{a^rAa^r} \quad (r > 0).$$

到目前为止，我们已经发现，任何最优态在遗传子代数上都取值为零。现在，交换算子代数中的任何遗传子代数都与其生成的理想一致，因此我们只需确定所期望的理想：为此，我们注意到它们显然有如下包含关系

$$aC_0(X)a \subseteq \Big\{\, b(\text{best}) = 0 \,\Big\} \subseteq C_0(\text{rest}).$$

由斯通-魏尔施特拉斯定理可轻易得出它们相等：为此我们注意到，遗传子代数处处非零，因为对于

$$x \in \text{rest} = \Big\{\, a(x) > 0 \,\Big\}: \qquad a(x)C_0(x)a(x) \neq 0$$

并且它并非处处为常数，因为仅对于 $x, y \in$ rest 就已如此

$$C_0(X)x \equiv C_0(X)y \quad \Longrightarrow \; x = y$$

因此，遗传子代数线性张成了所期望的理想，正如所需。注意，核中的任何子代数都属于该算子代数态的乘法域，原因显而易见

$$C_0(\text{rest}) \subseteq \ker(\varphi) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(ab) = 0 = \varphi(a)\varphi(b) \quad \Big(a, b \in C_0(\text{rest})\Big)$$

因此，这也可以推广到上述张量积（参见 [Cho74] 或 [Pau03]）

$$\varphi\Big(C_0(X) \otimes A\Big) = \varphi\Big(C_0(X) \otimes 1\Big)\varphi\Big(1 \otimes A\Big) = 0.$$

由此得出，任何最优态都按所需方式经由该商分解。 □

现在，我们可以将前一个结果应用于倾斜 CHSH 博弈：为此，考虑其极大化子空间，如前一个命题所述

$$\text{best} := \Big\{ \Big\| \text{CHSH}\big(s(\text{Alice}), s(\text{Bob}) \big) \Big\| = \|\text{CHSH}\| \Big\} \subseteq [-1,1] \times [-1,1].$$

由于任何极大化态必然存在于其对应的商上，因此我们可以将最优态问题归约到该商上：

$$\varphi\Big(\text{CHSH}(\alpha,\beta)\Big) = \|\text{CHSH}(\alpha,\beta)\| \quad \Longrightarrow$$

$$C\Big([-1,1]\times[-1,1] \;\Big|\; M_2 \otimes M_2 \Big) \longrightarrow C\Big(\text{best} \;\Big|\; M_2 \otimes M_2 \Big) \longrightarrow \mathbb{C}$$

具体而言，我们已经找到了各区域对应的最优商：

$\alpha,\beta \in \mathbb{R}$	(Q) = max	(L1) = max	(La) = max
best	$\{0\} \times (*)$	$(-1 \cup 1) \times \{-1\}$	$[-1,1] \times \{1\}$

而重叠边界情形则构成退化情形。
现在，我们将注意力限制在由（Q）给出的完全非交换区域：利用上述最优商，我们可以刻画该区域的最优态。下面给出本节的第二个主要结果：

定理 5.2。 考虑量子区域（如定理 *4.1*）

$$(\text{Q}) > (\text{L1}), (\text{La}): \qquad \frac{2\beta}{1+\beta^2} < \alpha^2 < \frac{1}{\beta^2}$$

并将其视为最优商（同时回顾定理 *1.2*）

$$M(2) \otimes M(2) = \frac{C^*(u^2 = 1 = v^2)}{\{u,v\} = 2s(\text{Alice})} \otimes \frac{C^*(u^2 = 1 = v^2)}{\{u,v\} = 2s(\text{Bob})}$$

由最优反交换关系给出

$$\Big\| \text{CHSH}\big(s(\text{Alice}) = 0, s(\text{Bob}) = (*) \big) \Big\| = \|\text{CHSH}\|.$$

注意，由于每个反对易关系 $\{u,v\} = 2s$，每个因子都由有限个群生成元构成的词线性张成。

$$\text{words}(u,v) = \{1, u, v, uv = -vu + 2s, \ldots\} = \{1, u, v, uv\}$$

此外，在特殊退化情形 $v=\pm u$ 只要 $s=\pm 1$。根据这一观察，任何使量子值最大化的量子态 (Q)

$$\varphi : M(2)\otimes M(2)\to\mathbb{C}: \quad \varphi\Big(\mathrm{CHSH}\Big)=2\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1+\beta^2}=\Big\|\mathrm{CHSH}\Big\|$$

由矩表唯一且完全确定（根据上述观察，这也包含所有高阶矩与混合矩）

φ (.....)	$-\otimes 1$	$-\otimes 2u$	$-\otimes 2v$	$-\otimes 4uv$
$1\otimes -$	$1=a^2+d^2$	$(a^2-d^2)\ \ \lvert w_+\rvert$	$(a^2-d^2)\ \ \lvert w_+\rvert$	$(a^2+d^2)\quad (\lvert w_+\rvert^2-\lvert w_-\rvert^2)$
$u\otimes -$	a^2-d^2	$(a^2+d^2)\ \ \lvert w_+\rvert$	$(a^2+d^2)\lvert w_+\rvert$	$(a^2-d^2)(\lvert w_+\rvert^2-\lvert w_-\rvert^2)$
$v\otimes -$	0	$2ad\lvert w_-\rvert$	$-2ad\lvert w_-\rvert$	0
$uv\otimes -$	0	0	0	$4ad\lvert w_+\rvert\cdot\lvert w_-\rvert$

其中变换满足

$$\Big|w_+ := u+v\Big| = 2\alpha\sqrt{\frac{1+\beta^2}{1+\alpha^2}} \quad and \quad \Big|w_- := u-v\Big| = 2\sqrt{\frac{1-\alpha^2\beta^2}{1+\alpha^2}}$$

且向量态由其施密特分解给出

$$|\varphi\rangle = a\Big|u\varphi_1=\varphi_1\Big\rangle\otimes\Big|\tfrac{w_+}{|w_+|}\psi_1=\psi_1\Big\rangle + d\Big|u\varphi_2=-\varphi_2\Big\rangle\otimes\Big|\tfrac{w_+}{|w_+|}\psi_2=-\psi_2\Big\rangle$$

其施密特系数为

$$a=\sqrt{\frac{\sqrt{1+\beta^2}+\beta\sqrt{1+\alpha^2}}{2\sqrt{1+\beta^2}}} \quad and \quad d=\sqrt{\frac{\sqrt{1+\beta^2}-\beta\sqrt{1+\alpha^2}}{2\sqrt{1+\beta^2}}}$$

由此不再存在任何歧义。
量子态仅沿水平轴最大纠缠

$$|\varphi\rangle=|\max\rangle: \qquad \Big(\ a=\tfrac{1}{\sqrt{2}}=d\ \Big) \quad\Longleftrightarrow\quad \Big(\ \alpha\neq 0\ \Big|\ \beta=0\ \Big)$$

同时始终处于部分纠缠状态（由施密特秩给出）

$$\mathrm{rk}\,|\varphi\rangle=2: \qquad \Big(\ a\neq 0\ \Big|\ d\neq 0\ \Big) \quad\Longleftrightarrow\quad |\alpha\beta|<1 \quad \checkmark$$

因此定义了所需的非局域量子关联。
请注意，整个结果都采用无表示的抽象代数形式。至此，关于倾斜 CHSH 博弈的唯一最优态的内容就是这些。

在开始证明本身之前，我们还要指出以下几点：正如介绍性文章中所述 [Fre 22], 这涵盖了所有量子可交换相关性，因为这些相关性表现为限制在二阶矩上的量子态

$$\begin{array}{cccc} \varphi(u\otimes 1), & \varphi(v\otimes 1), & \varphi(1\otimes u), & \varphi(1\otimes v) \\ \varphi(u\otimes u), & \varphi(v\otimes u), & \varphi(v\otimes u), & \varphi(1\otimes v) \end{array}$$

由此可以还原出由相应投影值测度给出的传统关联表。特别是，传统意义上对关联的唯一性要求（例如通过自检给出的要求）会从上述定理给出的关联表中排除最后一行和最后一列。

话虽如此，我们开始证明：

证明。首先将倾斜 CHSH 博弈中的表达式合并如下：

$$\mathrm{CHSH}(\alpha,\beta) = \alpha u\otimes(u+v) + v\otimes(u-v) + 2\beta u\otimes 1$$

这会强制生成元完全反对易，对 Alice 而言，

$$\{u\otimes 1, v\otimes 1\} = 0 = 2s(\mathrm{Alice})$$

第二位玩家也满足熟知的变换，

$$\{u+v, u-v\} = \{u,u\} - \{u,v\} + \{v,u\} - \{v,v\} = 0$$

我们此前在定理 4.1 的证明中也已用到这一点。因此，我们为每个因子得到一对抽象的泡利矩阵

$$u\otimes 1 = Z\otimes 1 \quad \text{and} \quad v\otimes 1 = X\otimes 1$$

$$1\otimes w_+ = |w_+|1\otimes Z \quad \text{and} \quad 1\otimes w_- = |w_-|1\otimes X$$

其归一化形式为（如定理证明中所示 4.1）

$$|w_\pm|^2 = (u\pm v)^2 = u^2 \pm 2s(\mathrm{Bob})\{u,v\} + v^2 = 2\Big(1\pm s(\mathrm{Bob})\Big).$$

计算这些归一化项后，我们得到（使用上述一对泡利矩阵）

$$\mathrm{CHSH}(\alpha,\beta) = 2\alpha^2\sqrt{\frac{1+\beta^2}{1+\alpha^2}}Z\otimes Z + 2\sqrt{\frac{1-\alpha^2\beta^2}{1+\alpha^2}}X\otimes X + 2\beta Z\otimes 1$$

及其对应的最大偏差（根据定理 4.1）

$$(\mathrm{Q}) \qquad \|\mathrm{CHSH}(\alpha,\beta)\| = 2\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1+\beta^2}.$$

因此，我们旨在求解以下特征向量问题：

$$\left(\alpha^2\sqrt{1+\beta^2}Z\otimes Z+\sqrt{1-\alpha^2\beta^2}X\otimes X+\beta\sqrt{1+\alpha^2}Z\otimes 1\right)|\varphi\rangle$$
$$=\left(\lambda:=(1+\alpha^2)\sqrt{1+\beta^2}\right)|\varphi\rangle$$

注意，任何形如（如上所示）的算子

$$T=aZ\otimes Z+bX\otimes X+cZ\otimes 1$$

都会将给定的希尔伯特空间分解为不变子空间

$$\mathbb{C}\tbinom{1}{0}\otimes\tbinom{1}{0}+\mathbb{C}\tbinom{0}{1}\otimes\tbinom{0}{1}\quad\text{and}\quad\mathbb{C}\tbinom{1}{0}\otimes\tbinom{0}{1}+\mathbb{C}\tbinom{0}{1}\otimes\tbinom{1}{0}$$

因此，可以分别针对每个不变子空间求解特征向量问题。在第一个不变子空间上，该算子的作用为

$$\tbinom{x}{y}:=x\tbinom{1}{0}\otimes\tbinom{1}{0}+y\tbinom{0}{1}\otimes\tbinom{0}{1}:$$
$$T\tbinom{x}{y}=\left(a1+bX+cZ\right)\tbinom{x}{y}$$

而在第二个不变子空间上则为

$$\tbinom{x}{y}:=x\tbinom{1}{0}\otimes\tbinom{0}{1}+y\tbinom{0}{1}\otimes\tbinom{1}{0}:$$
$$T\tbinom{x}{y}=\left(-a1+bX+cZ\right)\tbinom{x}{y}.$$

因此，上述特征子空间问题在相应子空间上表示为：

$$\left(bX+cZ\right)\tbinom{x}{y}=(\lambda\mp a)\tbinom{x}{y}\quad ?$$

注意（此前也曾多次出现过类似情况），两种情形中的左侧分别定义了一个自伴酉算子（除归一化因子外），因此，存在非平凡解的必要条件分别变为

$$(bX+cZ)^2=b^2+c^2=(\lambda\mp a)^2\quad ?$$

第一个子空间满足这一必要条件

$$b^2+c^2=(1-\alpha^2\beta^2)+\beta^2(1+\alpha^2)=(1+\beta^2)=(\lambda-a)^2\quad\checkmark$$

而第二子空间则不满足这一条件（除非 $\alpha = 0$）

$$b^2 + c^2 = (1+\beta^2) \neq (1+2\alpha^2)^2(1+\beta^2) = (\lambda + a)^2 \quad \times$$

注意到例外情形位于目标区域之外（L1），（La）$<$（Q）。因此，特征子空间是一维的，唯一最优态由第一不变子空间对应方程的解给出。

现在我们可以求解由 $bX\binom{x}{y} = \Big((\lambda - a)1 + cZ\Big)\binom{x}{y}$ 给出的有效第一不变子空间的特征向量问题，将其展开写为

$$\begin{pmatrix} \sqrt{1-\alpha^2\beta^2}\; y \\ \sqrt{1-\alpha^2\beta^2}\; x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\sqrt{1+\beta^2} - \beta\sqrt{1+\alpha^2}\right) x \\ \left(\sqrt{1+\beta^2} + \beta\sqrt{1+\alpha^2}\right) y \end{pmatrix}$$

同时进一步注意到以下有用的恒等式（乍看之下并不明显）

$$\left(1-\alpha^2\beta^2\right) = \left(\sqrt{1+\beta^2} + \beta\sqrt{1+\alpha^2}\right)\left(\sqrt{1+\beta^2} - \beta\sqrt{1+\alpha^2}\right).$$

因此，上述方程可化简为以下更加对称的关系：

$$\sqrt{\sqrt{1+\beta^2} - \beta\sqrt{1+\alpha^2}}\; x = \sqrt{\sqrt{1+\beta^2} + \beta\sqrt{1+\alpha^2}}\; y$$

注意，这些给出了最终的施密特系数：

$$|\varphi\rangle = \binom{x}{y} = x\binom{1}{0} \otimes \binom{1}{0} + +y\binom{0}{1} \otimes \binom{0}{1}$$
$$= x\Big|u\varphi_1 = \varphi_1\Big\rangle \otimes \Big|\tfrac{w_+}{|w_+|}\psi_1 = \psi_1\Big\rangle + +y\Big|u\varphi_2 = -\varphi_2\Big\rangle \otimes \Big|\tfrac{w_+}{|w_+|}\psi_2 = -\psi_2\Big\rangle$$

因此，上述方程揭示了施密特系数之比：
而它们的归一化则由归一化得出

$$x^2 + y^2 = \left(\sqrt{1+\beta^2} + \beta\sqrt{1+\alpha^2}\right) + \left(\sqrt{1+\beta^2} - \beta\sqrt{1+\alpha^2}\right) = 2\sqrt{1+\beta^2}.$$

由此，我们最终可以推导出每一个矩，例如

$$\langle\varphi|\, 1 \otimes 2u\, |\varphi\rangle = \langle\varphi|\, 1 \otimes (w_+ + w_-)\, |\varphi\rangle =$$
$$= \langle\varphi| \left(|w_+|1 \otimes Z + |w_-|1 \otimes X\right) |\varphi\rangle = (a^2 - d^2)|w_+|$$

这可以很容易地从……中读出

$$\Big(a(1\,0)\otimes(1\,0)+d(0\,1)\otimes(0\,1)\Big)1\otimes Z\Big(a\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\otimes\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)+d\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\otimes\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\Big)=(a^2-d^2)$$
$$\Big(a(1\,0)\otimes(1\,0)+d(0\,1)\otimes(0\,1)\Big)1\otimes X\Big(a\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\otimes\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)+d\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\otimes\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\Big)=0$$

而对于高阶矩，例如，我们得到

$$\langle\varphi|\,v\otimes uvu\,|\varphi\rangle=-\langle\varphi|\,v\otimes v\,|\varphi\rangle+2s(\mathrm{Bob})\,\langle\varphi|\,v\otimes u\,|\varphi\rangle=2ad|w_+|\Big(1+2s(\mathrm{Bob})\Big).$$

由此，我们已经获得了关于唯一最优态的全部信息。本节第二个主要结果的证明至此结束。 □

致谢

第一位署名作者感谢 Remigiusz Augusiak 指出了部分纠缠对关联而言极具价值的视角。第二位署名作者还要感谢巴特洪内夫量子计算暑期学校带来的宝贵见解。此外，作者们感谢 Moritz Weber 在萨尔布吕肯量子信息专题学期期间给予的热情款待。最后，第一位署名作者感谢玛丽·居里博士奖学金第801199号提供的支持。

一个优化问题

现在我们求解定理证明中的优化问题 4.1：为此，回顾一下优化参数（以生成酉元表示）

$$\begin{aligned}&\text{Alice}: && w=uv\otimes 1=\cos(\omega)+i\sin(\omega)\in\mathbb{T}\\&\text{Bob}: && 4(x^2+y^2)=1\otimes|u+v|^2+1\otimes|u-v|^2=4\end{aligned}$$

由此可得优化问题：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\Big\|\mathrm{CHSH}\Big(w=\cos(\omega)+i\sin(\omega)\Big|x^2+y^2=1\Big)\Big\|^2=\\&=(\alpha x)^2+y^2+\beta^2+2\sqrt{(\alpha\beta x)^2+(\beta y)^2\cos^2(\omega)+(\alpha xy)^2\sin^2(\omega)}\end{aligned}$$

我们可以方便地利用 $\left(A=\alpha^2x^2\middle|B=y^2\right)$ 将上述表达式合并：

$$= A + B + \beta^2 + 2\sqrt{\beta^2(A+B)\cos^2(\omega) + A(B+\beta^2)\sin^2(\omega)}$$

我们注意到，根号外的表达式与第一位玩家 Alice 的优化参数无关。因此，只需考虑该优化参数的边界情形：

$$\begin{aligned}
\cos^2(\omega)=1: \qquad &= (A+B) + \beta^2 + 2\beta\sqrt{(A+B)} = \left(\sqrt{A+B}+\beta^2\right)^2 \\
\sin^2(\omega)=1: \qquad &= A + (B+\beta^2) + 2\sqrt{A(B+\beta^2)} = \left(\sqrt{A}+\sqrt{B+\beta^2}\right)^2
\end{aligned}$$

第一种情形很容易求解，可得以下取值：L1和La：

$$\max\left(\sqrt{A+B}+\beta\right)^2 = \left(\sqrt{\max(A+B)}+\beta\right)^2 = \left(\max(\alpha,1)+\beta\right)^2.$$

第二种情形给出了有趣的量子值。为此，我们根据导数寻找局部极大值；在本例中，导数为

$$d\left(\sqrt{A}+\sqrt{B+\beta^2}\right) = \frac{dA}{2\sqrt{A}} + \frac{dB}{2\sqrt{B+\beta^2}} = 0 \quad ?$$

特别地，我们得到一个必要的平方关系：

$$dA\sqrt{B+\beta^2} = -dB\sqrt{A} \quad \Longrightarrow \quad (dA)^2(B+\beta^2) = (dB)^2A$$

在本例中，利用 $x^2+y^2=1$ 可得这些导数：

$$\frac{dA}{d(r=x^2)} = \alpha^2 \quad \text{and} \quad \frac{dB}{d(r=x^2)} = -1.$$

因此，平方关系的解也具有正确的符号。将这些解代入上面的平方关系，可得最优关系

$$\left(\frac{dA}{dr}\right)^2(B+\beta^2) = \left(\frac{dB}{dr}\right)^2 A \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \alpha^2\frac{1+\beta^2}{1+\alpha^2}$$

并且确实可以验证，这满足上述未平方的方程。代入求得的关系后，我们得到最大量子值

$$= \left(\sqrt{A}+\sqrt{B+\beta^2}\right)^2 = (1+\alpha^2)(1+\beta^2) = \frac{1}{4}(\mathrm{Q}) \qquad \checkmark$$

这如期得到了熟悉的量子值。最后我们指出，上述关系与生成元之间的反对易程度相符

$$4x^2 = 1 \otimes |u+v|^2 = 2\Big(1 + \{1 \otimes u, 1 \otimes v\}\Big) = 2\Big(1 + s(\mathrm{Bob})\Big) :$$

$$2\Big(s(\mathrm{Bob}) + 1\Big) = 2\left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1}(\beta^2 + 1) + (\beta^2 + 1)\right) = 4\alpha^2 \frac{1 + \beta^2}{1 + \alpha^2} = 4x^2 \quad \checkmark$$

因此，我们也恢复了所述数量的反对易（$*$）。至此，我们完成了定理4.1中的优化问题。

参考文献

[AMP12] Antonio Ac´ın、Serge Massar 和 Stefano Pironio。随机性与非定域性及纠缠。《物理评论快报》，108:100402，2012。[BP15] C´edric Bamps 和 Stefano Pironio。一族类克劳泽-霍恩-希莫尼-霍尔特不等式的平方和分解及其在自检中的应用。Phys Rev A，91:052111，2015。[Cho74] Man-Duen Choi。正线性映射在C^*-代数上的施瓦茨不等式。《伊利诺伊数学杂志》，18(4):565–574，1974。[CHTW04] Richard Cleve、Peter Høyer、Ben Toner 和 John Watrous。非定域策略的推论与局限。载于第19届IEEE计算复杂性年度会议，页码236–249，2004。[CS20] Andrea Coladangelo 和 Jalex Stark。一种本质上无限维的量子关联。Nat Commun，11:3335，2020。[DPP19] Ken Dykema、Vern Paulsen 和 Jitendra Prakash。通过图证明量子关联集合非闭。《数学物理通讯》，365(3):1125–1142，2019。[Exe17] Ruy Exel。《部分动力系统、Fell 丛及其应用》，数学调查与专著第224卷。美国数学学会，2017。[Fre22] Alexander Frei。量子对易模型（Ia）：最优态的唯一性。2022。[Fro81] Marcel Froissart。贝尔不等式的构造性推广。《新物理学杂志B辑》，64(2):241–251，1981。

[KM21] Bartosz Kosma Kwasniewski 和 Ralf Meyer。逆半群作用的本质交叉积：简单性与纯无限性。Documenta Mathematica，26:271–335，2021。[Kwa17] Bartosz Kosma Kwasniewski。Exel 的交叉积与完全正映射的交叉积。Houston Journal of Mathematics，43(2):509–567，2017。[Leh97] Franz Lehner。Leinert 性质的刻画。《美国数学会会刊》，125(11):3423–3431，1997。[Pau03] Vern Paulsen。《完全有界映射与算子代数》，剑桥高等数学研究丛书第78卷。剑桥大学出版社，2003。[PSZZ23] Connor Paddock、William Slofstra、Yuming Zhao 和 Yangchen Zhou。自检的算子代数表述。2023。[PV10] K´aroly P´al 和 Tam´as V´ertesi。利用无限维量子系统最大程度违反一种双边三设置、双结果贝尔不等式。《物理评论A》，82(2):022116，2010。[RS89] Iain Raeburn 和 Allan Sinclair。由两个投影生成的 C^*-代数。Mathematica Scandinavica，65(2):278–290，1989。[YN13] Tzyh Haur Yang 和 Miguel Navascu´és。将未知量子系统稳健地自检为任意纠缠双量子比特态。《物理评论A》，87:050102，2013。