arXiv:2302.08542v1 [math.LO] 16 Feb 2023

# 扎里斯基结构正则覆盖的特化理论

U ̆GUR EFEM[1] AND BORIS ZILBER[2]

Abstract. 在代数几何中，特化和赋值发挥着重要作用。本文开始研究扎里斯基结构的类似结构。具体而言，我们探讨从一个基底扎里斯基结构到其正则覆盖的泛特化扩张的存在性和唯一性。在这一过程中，我们开始揭示扎里斯基结构正则覆盖的一些结构性质，并进一步探究扎里斯基结构要拥有“良好”的特化理论所必需的拓扑性质类型。我们识别出一类具有“良好”特化理论的扎里斯基结构。

## 1. 引言 Introduction

模型论中的覆盖概念源于对全范畴和不可数范畴结构的研究 [1, 2, 17]。第二作者提出的阶梯定理展示了如何通过构造一系列覆盖，从强极小结构构造出不可数范畴结构。该定理引入了一种从较简单结构构造新结构的技术。不出所料，一些新的非经典扎里斯基结构实例正是借助阶梯定理和覆盖的思想构造出来的 [13, 18, 19]。然而，扎里斯基结构的覆盖尚未得到系统研究。第一作者在其博士论文 [4], 中开展了初步研究，其中考察了某一类覆盖。该处引入的覆盖类型涵盖了我们所知的所有非经典扎里斯基结构实例。

另一方面，扎里斯基结构中的特化是对 A. Weil 意义下的特化以及赋值域理论中的赋值的直接推广。它们由 [8] 引入，并在同一篇论文中用于证明分类定理。Onshuus 与第二作者 [12], 开启了对扎里斯基结构特化理论的研究；受他们工作的启发，第一作者在第二作者指导下，于其博士论文 [4] 中继续了这项研究。本文的研究成果主要来自该论文的最后一章。

尽管特化与赋值理论在代数几何中已十分成熟，但对于扎里斯基结构而言，这一理论总体上远未完备。特别地，假设某个扎里斯基结构

2010 *Mathematics Subject Classification.*主要分类：03C07、03C10、03C35、03C50、03C52；次要分类：14A99、18F15、55R65、57R22。*Key words and phrases.* 模型论、扎里斯基结构、扎里斯基几何、特化、代数几何、覆盖。[1]通讯作者。戴森工程与技术学院，ugur.efem@dyson.com。[2] 牛津大学数学研究所。

$\mathcal{C}$具有覆盖 $\mathcal{C} = (C, M, \mathrm{pr})$ 的形式，其中 $\mathrm{pr}: C \twoheadrightarrow M$，并且在 $M$ 上的扎里斯基结构 M 上给定一个特化 $\pi : \mathrm{M}^* \to \mathrm{M}, \mathrm{M}^* \succ \mathrm{M}$,

能否将 $\pi$ 提升为 $\mathcal{C}$上的特化?

当 M 只是代数闭域 F 上代数簇的扎里斯基结构时，特化 $\pi$ 由 F 上的一个赋值给出（更多详情见 [3]）。在这种情况下，结构 $(\mathrm{M}^*, \mathrm{M}, \pi)$ 的理论，即 M 上的特化理论，与代数闭赋值域的一个研究充分的理论 ACVF 双可解释，见 [6]。请注意，这个由 A.Robinson 提出的理论能够消去量词。

但即使在这种情况下，对上述问题的一般答案仍是否定的。本文提出了一个自然条件，即“连续联络”假设 (CC)；当 $\mathrm{pr}: C \twoheadrightarrow M$ 是代数几何意义下的纤维化时，该条件成立。我们证明这一条件足以使问题得到肯定回答。

我们的主要结果是定理 5.3：假设基类型的特化理论 $\mathrm{Th}(M^*, M, \pi_M)$ 消去量词。那么，满足 (CC) 的覆盖结构的特化理论 $\mathrm{Th}(\mathcal{C})^\pi$ 可以消去量词，且是完备的。

这是对上述 Robinson 定理的推广。

现在谈谈假设 (CC)。不难验证，见 [8],第 10 节中引入的非经典扎里斯基结构示例，它满足这一假设。

作为覆盖结构构造的非经典扎里斯基结构 [13, 18, 19]是非交换几何的研究对象。与（交换）代数几何不同，非交换几何中的赋值理论远非显而易见。我们希望本文能为发展这一理论作出贡献。沿着这一方向，一项紧迫的任务是证明所有这些结构都满足“连续连接”假设；为此，需要进行足够有效的可定义性分析。

在第 2 节中，我们介绍一些预备概念，并提供关于 Zariski 结构、其初等扩张、Zariski 结构中的商对象、Zariski 群以及特化的必要技术背景。这里的大部分内容早已为人所知，在模型论文献中也很容易找到（ [4, 8, 9, 10, 20] 仅举几例）。不过，第 2.4 小节除了介绍特化方面的已知结果外，还包含一些新的技术结果，并为某一类与本文所研究的正则覆盖相容的结构，给出了 $\aleph_0$-泛特化的一种新刻画。

第 3 节介绍扎里斯基结构的正则覆盖这一概念，并讨论其结构。我们讨论只有一个可定义几乎单纯的结构群作用于各纤维的情形。在附加但自然的假设下，我们得以刻画覆盖的纤维之间的闭关系。这引出了“连续连接”假设；对于下一节讨论的正则覆盖特化结果而言，这一假设至关重要。

第4节探讨扎里斯基结构的正则覆盖的特化。我们证明，满足

上一节所设假设的某类正则覆盖具有“良好”的特化理论。特别地，我们证明，基底扎里斯基结构到覆盖的泛特化的任何极大扩张也是通用的。

第4节的讨论促使我们在第5节提出一个一阶理论，用于描述给定的正则覆盖及其特化。可以看出，该理论是 [3] 中所提出的带有特化的代数闭域理论的推广。我们证明，该理论具有量词消去性质，且是完备的。

如前所述，最后我们将讨论非经典扎里斯基结构第一个例子中的“连续连接”假设。

## 2. 预备知识

我们首先介绍有关 Zariski 结构、其初等扩张、Zariski 结构中的商对象（包括 Zariski 群）以及特化的必要背景知识。本节的大部分内容都是标准内容，已有文献可供参考；不过，关于拓扑类型和 Zariski 群的内容包含一些适度的推广，并采用了略有不同的视角；事实上，关于特化的讨论确实包含一些新的技术结果。

### 2.1. 扎里斯基结构与初等扩张。

定义 2.1. 诺特扎里斯基结构是一个元组 $(M, \{\tau_n : n \in \mathbb{N}\}, \dim)$，其中 $\tau_n$ 是 $M^n$ 上的诺特拓扑（对每个 $n$而言），且 dim 是一个函数，它为 $M^n$ 的每个可构造子集赋予一个自然数，并且还满足以下公理:

拓扑:

(1) 等式关系的图是闭集。(2) $M^n$ 中的任意单元素组都是闭集。(3) 闭集的笛卡尔积是闭集。(4) 闭集在坐标置换下的像是闭集。(5) 对于 $a \in M^k$和一个闭集 $S \subseteq M^k + l$，集合 $S(a, M^l) : \{m \in M^l : (a, m) \in S\}$ 是闭集。(SP) 半适当性：对于一个闭不可约 $S \subseteq M^n$ 和一个投影 pr : $M^n \to M^m$，存在一个真闭子集 $F \subset \text{pr}(S)$，使得 $\text{pr}(S) \setminus F \subseteq \text{pr}(S)$。

维数:

(DP) 点的维数：对于所有 $a \in M$，$\dim(a) = 0$。(DU) 并集的维数：对于闭集 $S_1$，$\dim(S_1 \cup S_2) = \max(\dim(S_1)。\dim(S_2))$，且 $S_2$。(SI) 强不可约性：对于任意 $S \subseteq_{cl} U \subseteq_{op} M^n$ 和任意闭集 $S_1 \subsetneq S,$，$\dim(S_1) < \dim(S)$。(AF) 加法公式：对于任意不可约闭集 $S \subseteq_{cl} U \subseteq_{op} M^n$ 和一个投影 pr : $M^n \to M^m$,

$$\dim(S) = \dim(\text{pr}(S)) + \min_{a \in \text{pr}(S)} (\text{pr}^{-1}(a) \cap S).$$

**(FC)** 纤维条件：给定 $S \subseteq_{cl} U \subseteq_{op} M^n$ 和一个投影 $\mathrm{pr}: M^n \to M^m$，存在一个相对开集 $V \subseteq_{op} \mathrm{pr}(S)$，使得对于任意 $v \in V$

$$\min_{a \in \mathrm{pr}(S)} (\dim(\mathrm{pr}^{-1}(a) \cap S)) = \dim(\mathrm{pr}^{-1}(v) \cap S).$$

若二元组 $(M, \{\tau_n : n \in \mathbb{N}\})$（不含维数 dim）中 $\{\tau_n : n \in \mathbb{N}\}$ 满足上述所有拓扑公理，则称其为诺特拓扑结构。

注 2.2。虽然存在解析扎里斯基结构的概念 [20,第 6], 章，其中不要求诺特性，但本文完全处于诺特扎里斯基结构的语境中。因此，由于不会产生歧义，我们通常省略“诺特”一词，只称扎里斯基结构（偶尔也称拓扑结构）。

我们可以将任意扎里斯基结构 $(M, \{\tau_n : n \in \mathbb{N}\}, \dim)$ 视为一阶结构：为拓扑$\tau_n$中的每个闭子集引入一个谓词，对所有 $n$ 均如此。现在，令 $\mathcal{L}$ 为由我们引入的谓词组成的一阶语言。此外，我们假设 $\mathcal{L}$ 对 $M$ 中的每个元素都包含一个常元符号。于是 $(M, \{\tau_n : n \in \mathbb{N}\})$ 就成为一个 $\mathcal{L}$结构。因此，对所有 $n \in \mathbb{N}$， $M^n$ 的闭子集都由正量词自由$\mathcal{L}$公式给出。略微滥用术语，我们将集合 $\cup\{\tau_n : n \in \mathbb{N}\}$ 中的任意元素称为（ $M$ 的）闭集。

我们还可以立即看出，可构造集是 $\mathcal{L}$-可定义的。事实上，反过来也是成立的。可定义集都是可构造集。用模型论术语来说，这意味着 $(M, \{\tau_n : n \in \mathbb{N}\}, \dim)$ 具有量词消去性质（参见 $[20,$ 定理 3.2.1$]$）。

在本文其余部分，为避免歧义，我们将写作 $M$是一个扎里斯基结构，而不写完整的元组 $(M, \{\tau_n : n \in \mathbb{N}\}, \dim)$。我们始终将扎里斯基结构 $M$ 视为上述某种适当语言的一阶结构。此外，对于 $M^n$ 的任意闭子集$S \in \tau_n$，我们将 $S$ 与定义它的正量词自由 $\mathcal{L}$-公式等同起来，并且也用 $S$表示该公式。按照这一约定， $M \models S(\overline{a})$ 表示 $a \in S \subseteq M^n$。

注 2.3. 若子集 $S \subseteq M^n$ 不能写成两个真（相对）闭子集的并，则称其为不可约。

根据诺特性，任意闭集 $S$ 都可以唯一地（除排列顺序外）写成有限个互不相同的相对闭不可约子集的并。这些子集称为 $S$ 的不可约分支。

注 2.4. 根据定义，很容易看出，可构造集 $Q$ 可以写成

$$Q = \bigcup_{i \leq k} S_i \setminus P_i$$

对于某个 $k \in \mathbb{N}$，以及闭集 $S_i$、 $P_i$，使得 $P_i \subset S_i$ 和 $S_i$ 不可约。因此显然，

$$\overline{Q} = \bigcup_{i \leq k} S_i.$$

根据量词消去和注 2.4，我们可以将维数推广到可定义集，如下所示：

$$\dim(Q) = \dim(\overline{Q}) = \max_{i \leq k} \dim(S_i)$$

定义 2.5. 若扎里斯基结构 $M$ 满足

(1) 对任意闭集 $S \subseteq M^n$以及任意投影 $\mathrm{pr}_{i_1,\ldots,i_m} : M^n \to M^m$，集合 $\mathrm{pr}_{i_1,\ldots,i_m}(S) \subseteq M^m$是闭集，则称其为完备。(2) 对任意闭不可约 $S_1$，若任意不可约分支 $S$ of $S_1 \cap S_2$ 满足，则称其为预光滑

$$\dim(S) \geq \dim(S_1) + \dim(S_2) - n$$

我们将研究扎里斯基结构的初等扩张。关于初等扩张的情况简述如下，更详细的说明见 [20, 第 3.5 小节。3]。

设 $M_0$ 是定义在适当语言 $\mathcal{L}$中的扎里斯基结构。设 $M \succeq M_0$是一个初等扩张。我们将在每个 $M^n$ 上按如下方式定义拓扑：对于任意闭集 $S \subseteq M_0^{l+n}$，对任意 $l \in \mathbb{N}$，将形如$S(\overline{a}, M^n)$ 的 $M^n$ 子集声明为闭集，其中 $\overline{a} \in M^l$。容易验证，这些子集构成 $M^n$上的一个拓扑，我们将其记为 $\rho_n$。

定义 2.6. 设 $S \subseteq M_0^{l+n}$ 是一个闭子集，且 $M \succeq M_0$。$M^n$ 的形如 $S(\overline{a}, M^n)$ 的闭子集，其中参数 $\overline{a}$ 属于子集 $A \subseteq M^l$，称为 $A$-闭子集。

我们还在 $M$ 的可构造集上定义一个维数函数。设 $S \subseteq M_0^{l+n}$ 为一个 $M_0$-闭集。定义

$$\mathcal{P}(S, k) := \{\overline{a} \in \mathrm{pr}(S) : \dim(S(\overline{a}, M_0^n)) > k\}$$

对于投影 $\mathrm{pr}: M_0^{l+n} \to M_0^l$，其中 $\mathcal{P}(S, k)$ 定义中的 dim 是结构 $M_0$ 的维数函数。根据 (AF)，$S$ 的纤维的维数有界。因此，对于每个 $\overline{a} \in \mathrm{pr}(S)$，存在一个极大 $k$，使得 $a \in \mathcal{P}(S, k)$。我们将结构 $M$ 的维数函数定义为

$$\dim(S(\overline{a}, M^n)) := \max\{k \in \mathbb{N} : \mathcal{P}(S, k)\} + 1$$

由构造可立即得出，$(M, \{\rho_n\}, \dim)$ 满足拓扑公理。然而，要确保拓扑 $\rho_n$ 一般具有诺特性，还需要额外的技术性假设，即要求 $M_0$ 满足以下公理：

(EU) 本质不可数性：设 $S \subseteq M_0^n$ 是一个闭集。如果 $S$ 可以表示为 $M_0^n$ 的可数多个闭子集的并，那么它也可以表示为其中有限多个子集的并。

那么，假设满足 (EU)，拓扑 $\rho_n$ 的诺特性可由引理 3.5.24] 得出 [20, 。

维数公理 (DP)、(FC)、(DU)、(SI) 和 (FC) 由 $(M, \{\rho_n\}, \dim)$ 满足。此外，如果 $M_0$ 是预光滑的，那么初等扩张 $M$ 也预光滑。证明详见 [20, 第 3.5 小节3]。

2.2. 拓扑类型与多排序扎里斯基结构。一般而言，扎里斯基结构不具有虚元消去性质（例如见 [11,第 112] 页， [11, 第 6] 节给出了更复杂的例子）。不过，幸运的是，我们经常会考虑某些重要的类型，它们很容易描述，并且具有扎里斯基结构的许多重要性质。

设 $D \subseteq M^n$ 为一个可定义子集， $E \subseteq D \times D$ 为 $D$上的一个闭等价关系。则 $T := D/E$ 是 $M$的一个虚类。令 $\mathrm{p} : D \to D/E$表示典范商映射。当同时处理多个类型时，我们将添加下标，并将该映射写作 $\mathrm{p}_T$。

通过规定当且仅当对于所有 $i$都有 $a_i E b_i$时，$(a_1, \ldots, a_m)E^m(b_1, \ldots, b_m)$，可将笛卡尔幂 $T^m = (D/E)^m$ 与 $D^m/E^m$ 等同起来。将映射 $\mathrm{p} : D \to D/E$ 逐坐标地作用于 $D^m$ ，诱导出一个商映射$D^m \to D^m/E^m$。我们仍将该映射记为 $\mathrm{p}$。我们通过来自 $D$ 和 $D^m$的典范商映射，为 $T$ 及其所有笛卡尔幂 $T^m$ 赋予相应的商拓扑。

定义 2.7. 设 $T := D/E$ 是一个虚类，其中 $D \subseteq M^n$ 是可定义的，且 $E \subseteq D \times D$ 是一个闭等价关系。那么， $T$ 连同其笛卡尔幂的闭子集族，称为一个拓扑类型。

注 2.8. 最初，在 [20]，中，拓扑类型是针对 $M^n$ 的一个不可约可定义子集来定义的。因此它们是不可约的。这里我们将这一概念扩展为允许可约拓扑类型，不过本文将考虑的可约拓扑类型只有有限的那些。

设 $T = D_1/E_1$ 和 $T_2 = D/E_2$ 是扎里斯基结构 $M$ 中的两个拓扑类型。那么 $(D_1 \times D_2)/E_1 \times E_2$ 也是一个拓扑类型，并且它与 $T_1 \times T_2$ 等同。

命题 2.9. 拓扑类型 $T$ 满足所有拓扑公理（见定义 2.1）。也就是说， $T$ 是带有诱导商拓扑的拓扑结构。

命题 2.10。设 $T = D/E$ 是一个拓扑排序。设 $E'$ 是 $T$ 上的一个闭等价关系。那么 $T/E'$ 是一个拓扑排序，并且它可以表示为 $D/E''$ ，其中 $E'' \subseteq D^2$ 是某个闭等价关系。

证明。设 $T = D/E$ 是一个拓扑排序，且 $E' \subseteq T^2 = D/E \times D/E$ 是一个闭等价关系。定义 $E''$ 为 $\mathrm{p}^{-1}(E')$。显然， $E'' \subseteq D \times D$ 是闭集。容易看出， $E''$ 是一个等价关系。令 $d \in D$，并用 $[d]$ 表示 $d$ 的 $E$-等价类。由于 $E'$ 是 $T$ 上的一个等价关系，我们看到 $[d]E'[d]$。因此 $(d, d) \in \mathrm{p}_T^{-1}(d) \times \mathrm{p}_T^{-1}(d) \subseteq E''$。通过类似的论证可知， $E''$ 是对称且传递的。□

定义 2.11. 设 $T = D/E$ 为一种拓扑排序， $F \subseteq T^n$ 为一个闭不可约子集，且 $\mathrm{p}^{-1}(F) = S$。则我们定义 $F$ 的维数为

$$\dim(T) := \dim(S) - \min\{\dim(\mathrm{p}^{-1}(f)) : f \in F\}$$

对于任意闭子集，我们将其维数定义为其不可约分支维数的最大值。

引理 2.12. 设 $T$ 是一个拓扑排序，其维数 dim 如上所定义。那么 ($T$, dim) 满足维数公理 (DP)、(DU) 和 (SI)。

证明。由定义立即可得。 □

定义 2.13。设 $M$ 是一个扎里斯基结构，$T_1$、$T_2$ 是 $M$ 的两个拓扑类型。若对所有 $n$，$f \times \mathrm{id} : T_1 \times M^n \to T_2 \times M^n$ 都是连续的，则称函数 $f\colon T_1 \to T_2$ 为态射。

引理 2.14。(i) 态射的图是闭集。

(ii) 对于一个拓扑类型 $T = D/E$，商映射 $\mathrm{p}_T\colon D \to T$ 是一个态射。

(iii) 若 $f\colon T_1 \to T_2$、$g : T_2 \to T_3$ 和 $h : T_3 \to T_4$ 是态射，则 $g \circ f\colon T_1 \to T_2$ 和 $f \times h\colon T_1 \times T_3 \to T_2 \times T_2$ 是态射。

证明。由定义立即可得。 □

引理 2.15. 设 $f\colon T_1 \to T_2$ 是一个态射。

(i) 设 $E_f$ 是由 $=$ 在 $f$ 下的原像给出的等价关系。那么 $f$ 可分解为

$$T_1 \xrightarrow{p} T_1/E_f \xrightarrow{\tilde{f}} Im(f) \xhookrightarrow{i} T_2$$

~，其中 $f$ 是一个双射态射，$i$ 是包含映射。

(ii) 如果 f $V \subseteq T_1$ 可定义且不可约，则 $f_{|V}\colon V \to T_2$ 是一个态射。

(iii) 如果 $E$ 是 $T_1$ 上的闭等价关系，且 $f$ 在其等价类上为常值，那么 $f$ 诱导一个态射 $f/E\colon T_1/E \to T_2$。

证明。由定义立即可得。 □

推论 2.16. 设 $T_1$ 和 $T_2$ 是拓扑类型，且 $f\colon T_1 \to T_2$ 是一个满射态射。设 $E(x_1, x_2)$ 是 $T_1$ 上的等价关系 $f(x_1) = f(x_2)$。那么 $T_1/E$ 是一个拓扑类型，且 $f$ 在 $T_1/E$ 与 $T_2$ 之间诱导一个同胚。

引理 2.17. 设 $T_1$ 和 $T_2$ 是拓扑类型，那么 $f\colon T_1 \to T_2$ 是一个态射，当且仅当对于任意 $n$ 以及任意定义 $T_1 \times M^n$中一个闭子集的正量词自由公式 $\psi(x, \overline{z})$，公式 $\exists y\ f(x) = y \wedge \psi(y, \overline{z})$ 等价于一个正量词自由公式。我们将此公式记为 $\psi(f(x)\ \overline{z})$。

证明. 假设 $f$是一个态射。公式 $\exists y\ f(x) = y \wedge \psi(y, \overline{z})$ 定义了映射 $f \times id\colon T_1 \times M^n \to T_2 \times M^n$下某个闭集的原像。由于 $f$ 是一个态射，此映射连续。因此，原像是闭集。这意味着 $\exists y\ f(x) = y \wedge \psi(y, \overline{z})$ 等价于一个正量词自由公式。反过来，该假设立即推出，对所有 $n$，$f \times \mathrm{id} : T_1 \times M^n \to T_2 \times M^n$ 连续。因此 $f$是一个态射。□

定义 2.18. 设 $H$ 是一个扎里斯基结构。具有主排序 $H$ 的多分类扎里斯基结构 $M$ 是多排序语言 $\mathcal{L}$ 中的一个多排序结构，其类型为 $(M_i)_{i \in I}$，满足：

(i) 每个 $M_i$ 都是 $H$ 中的一个拓扑排序；并且存在一个 $i$ ，使得 $M_i = H$。(ii) 每个 $M_i$ 都是一个 $\mathcal{L}_i$-扎里斯基结构，其中 $\mathcal{L}_i$ 是类型 $M_i$ 的自然语言，并且 $\mathcal{L}_i \subset \mathcal{L}$。(iii) 如果 $M_i$ 和 $M_j$ 是 $M$ 中的类型，那么它们的乘积 $M_i \times M_j$ 也是 $M$ 中的一个类型。

如果所有类型 $M_i$ of $M$ 都是预光滑的，那么 $M$ 称为多排序 Zariski 几何

需要特别指出的是，多分类扎里斯基结构 $M$ 不一定是具有给定语言 $\mathcal{L}$ 的扎里斯基结构。拥有主排序 $H$ 很重要，因为所有其他类型在 $H$中都是拓扑类型，并且每个类型上的维数 $M_i$ 都如前所述由 $H$ 的维数诱导。结构 $M$ 在“排序的乘积下封闭”的意义上是封闭的：如果 $M_i$ 和 $M_j$ 是 $M$中的类型，那么 $M_i \times M_j$也同样是类型。

命题 2.19。设 $M$ 是一个具有主排序 $H$的多分类扎里斯基结构。那么， $M$ 的任意类型 $M_i$ 都是稳定嵌入的。

证明。由于 $H$ 是稳定的， $H^{eq}$ 也稳定。因此，在 $H$ 中可解释的任意类型都是稳定嵌入的。□

2.3. Zariski 群。

定义 2.20. 设 $C$ 是一个扎里斯基结构，且 $G$ 是 $C$ 中的一个拓扑类型群，使得乘法 $m\colon G \times G \to G$ 和求逆 $^{-1}\colon G \to G$ 都是态射。这样的群 $G$ 将被称为（ $C$ 中的）Zariski 群。

注释 2.21. 由于我们允许在构造可定义集时使用可约可定义集，拓扑类型一般不一定是不可约的。对于 Zariski 群而言，这尤其使我们能够将非连通的（稳定）群视为 Zariski 群。不过，在本文中，我们要考虑的唯一非连通 Zariski 群是有限群。这里我们只介绍本文所需的 Zariski 群的一些基本性质。关于这些群的更详细研究，请参阅 [9, 10]。

定义 2.22. 设 $C$ 是一个扎里斯基结构，且 $G$ 是 $C$ 中的 Zariski 拓扑群。设 $A \subseteq C$ 是一个可构造集。

(i) 若作用是一个态射，则称 $G$ 在 $A$ 上态射地作用（或称 $G$ 的作用是态射）

$$\begin{array}{rcl} \Theta : G \times A & \to & A \\ (g, a) & \mapsto & g \cdot a \end{array}$$

。我们通常用 $\cdot$表示该作用，并写作 $g \cdot a$。

(ii) 若该作用是

$$E_G(x, y) \text{ defined by } \exists g \in G\,(y = g \cdot x)$$

是 $C \times C$ 中的闭等价关系。

(iii) 如果 $G$ 的作用是真且作用 $G \times A \to A$ 可逆，即存在一个态射，我们就称该作用是自由的

$$\begin{aligned} E_G &\to G \\ (a, g \cdot a) &\mapsto g \end{aligned}$$

本文中，每当我们讨论扎里斯基群的作用时，总是假设该作用是态射的。

命题2.23（ [10]中的命题5.6）。设 $G$ 是一个扎里斯基群，$H < G$ 是一个子群（不一定可定义！）。那么闭包 $\overline{H}$也是一个子群。如果 $H$ 是正规子群，那么$\overline{H}$也如此。此外， $G$的可定义子幺半群是一个闭子群。

证明。设 $H < G$ 是一个子群。那么 $H \times H \subseteq m^{-1}(\overline{H})$，其中 $m$ : $G \times G \to G$ 是群运算。由于 $m$ 是连续的， $m^{-1}(\overline{H})$是闭集。由此可得

$$\overline{H} \times \overline{H} = \overline{H \times H} \subseteq m^{-1}(\overline{H})$$

因此

$$m(\overline{H} \times \overline{H}) = \overline{H} \cdot \overline{H} \subseteq \overline{H}$$

用求逆代替乘法进行类似论证，可得$\overline{H}$ 是一个子群。

设 $g \in N_G(H)$。与 $g$ 共轭是一个同胚，因此 $\overline{H}^g = \overline{H^g} =\overline{H}$。于是 $N_G(H)$ $\subseteq N_G(\overline{H})$。

根据稳定性，任何可定义子幺半群都是子群。在 $\overline{H}$中，子群 $H$ 的所有陪集都与 $H$ 同胚。因此它们在 $\overline{H}$中都稠密。但两个不相交的可构造集不可能在它们的并集中都稠密。因此 $H = \overline{H}$。□

引理2.24. 设 $G$ 是一个扎里斯基群，在 $D$ 上的作用是自由的，且 $H \triangleleft G$是一个可定义正规子群。那么 $G/H$ 是一个扎里斯基群， $D/H$ 是一个拓扑排序，并且 $G/H$ 在 $D/H$上的作用是自由的。

证明. 我们可以假设 $H$ 是闭集（见事实2.23）。首先证明商 $D/H$ 是一个拓扑排序。由于该作用是自由的，存在一个态射 $E_G \to G$，由 $(a, g \cdot a)$ $\mapsto g$定义。令 $E_H$为 $H$在此映射下的原像。显然， $E_H$ 是 $D$ 上的一个可定义等价关系，由下式给出

$$xE_Hy :\Leftrightarrow \exists h \in H\,(h \cdot x = y)$$

由于 $H$ 是闭集，它在该态射下的原像 $E_H$ 在$E_G$中是闭集。因此， $E_H$ 是 $D$上的闭等价关系。因此， $D/H$ 是一个拓扑排序。

接下来，我们将说明 $G/H$ 是一个拓扑群。闭正规子群 $H$ 定义了等价关系

$$a \sim b :\Leftrightarrow ab^{-1} \in H$$

对所有 $a$、$b \in G$均成立。注意， $\sim$ 是 $H$ 在该态射下的原像

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (a, b) &\mapsto ab^{-1} \end{aligned}$$

由于 $H$ 是闭集， $\sim$ 是闭集。因此， $G/\sim = G/H$ 是 $G$ 中的一个拓扑排序。为证明 $G/H$ 上的乘法是一个态射，注意到 $\mathrm{p}_H \circ m$ :

$G\times G\to G\to G/H$ 是一个态射。此外， $H\times H$ 是 $G\times G$ 上的一个闭等价关系，并且态射 $\mathrm{p}_H\circ m$ 在其等价类上为常值。根据引理 2.15，乘法是一个态射。类似的论证也可以证明求逆是一个态射。

根据命题 2.10， $G/H$ 也是 $C$中的拓扑排序，且群运算仍然是态射。

接下来，考虑 $G/H$ 在 $D/H$上的作用。作用 $\Theta$： $G\times D\to D$ 和商映射 $\mathrm{p}_H$： $D\to D/H$ 都是态射。因此，它们的复合

$$\mathrm{p}_H\circ\Theta : G\times D\to D\to D/H$$

是一个态射。此外， $\mathrm{p}_H\circ\Theta$ 在由 $H\times H$ 在 $G\times D$上定义的闭等价关系的等价类上为常值。因此

$$\mathrm{p}_H\circ\Theta/H\times H : G\times D/(H\times H)\to D/H$$

是一个态射。由于 $G\times D/(H\times H)\simeq G/H\times D/H$， $G/H$在 $D/H$ 上的作用是一个态射。□

引理 2.25. 设 $H$ 是一个有限扎里斯基群，在 $D$ 上自由作用，且 $T=D/H$ 是一个拓扑排序；设 $\mathrm{p}_T : D\to T$ 是典范商映射。设 $Q\subseteq D$ 是一个闭子集。那么 $\mathrm{p}_T(Q)\subseteq T$ 也是闭集。

证明。注意到

$$\mathrm{p}_T^{-1}(\mathrm{p}_T(Q))=H\cdot Q=\bigcup_{h\in H}h\cdot Q$$

由于子集 $h\cdot Q$ 是闭集，结论得证。 □

2.4. 特殊化。特殊化是本文研究的主要对象。在这里，我们将描述特殊化，简要说明研究特殊化的重要性，并概述一些重要性质；稍后我们将详细研究正则覆盖上的特殊化。

定义 2.26。设 $M_0$ 是一个扎里斯基结构，且 $M\succeq M_0$。部分函数 $\pi$： $M\to M_0$ 满足

(i) 对所有 $m\in M_0$， $\pi(m)=m$； (ii) 对于每个定义在 $\emptyset$ 上、定义一个 $M_0$-闭集的公式 $S(\overline{x})$，以及每个 $\overline{a}\in M^n\cap(\text{定义域}(\pi))^n$

$$M\models S(\overline{a})\text{ implies }M_0\models S(\pi\overline{a})$$

称为特化。

注记 2.27。虽然我们为 Zariski 结构定义了特化，但该定义只涉及拓扑结构 $\{\tau_n : n\in\mathbb{N}\}$（注意，上述定义不涉及维数函数 dim）。因此，特化也可以为拓扑结构 $(M_0,\{\tau_n : n\in\mathbb{N}\})$ 定义（注意，初等扩张 $M\succeq M_0$ 仍将是拓扑结构）。

在本文余下部分的不同地方，我们将考虑拓扑类型上的特化。虽然拓扑类型不一定是扎里斯基结构，但它们是拓扑结构。正如本文所述，考虑特化只需拓扑结构。因此，这样做是稳妥的。

定义 2.28. 若给定任意$M' \succeq M \succeq M_0$、任意满足 $|A| < \kappa$的 $A \subseteq M'$ 以及一个扩张 $\pi$的特化 $\pi_A$:$M \cup A \to M_0$ ，存在一个在 $M \cap A$ 上方的初等嵌入 $\sigma$： $A \to M$，使得 $\pi_A|A = \pi \circ \sigma$，则称一个特化为 $\kappa$-通用。

定义 2.29. 设 $\pi$： $M \to M_0$ 是一个特化。若不存在非平凡地延拓 $\pi$ 的特化 $\pi'$： $M \to M_0$ ，则称定义域 Dom($\pi$) 是极大的。

命题 2.30. 一个 $\aleph_0$-泛特化是极大的。

证明。设 $M_0 \preceq M$ 是一对 Zariski 结构，且 $\pi$： $M \to M_0$ 是一个 $\aleph_0$-泛特化。假设 $\pi$ 不是极大的。那么存在一个 $m \in M \setminus$Dom($\pi$)，使得存在一个特化 $\pi_{\{m\}}$: $\{m\} \cup$Dom($\pi$) $\to M_0$ 延拓 $\pi$。由于 $\pi$ 是通用的，存在一个在 $\{m\} \cap M$ 上的嵌入 $\sigma$： $\{m\} \to M$，满足 $\pi_{\{m\}}|_{\{m\}} = \pi \circ \sigma$。由于 $m \in M$，我们有 $\sigma(m) = m$。这意味着 $\pi(m) = \pi_{\{m\}}(m)$。特别地，这意味着 $\pi$ 已经定义在 $m$ 上。□

接下来我们描述特化与扎里斯基结构上的拓扑之间的关系。最重要的是，扎里斯基结构的所有拓扑数据都可以从该结构的 $\aleph_0$-泛特化中恢复。

定义 2.31。设 $\pi$： $M \to M_0$ 是一个特化。可定义关系 $S \subseteq M_0^n$ 称为 $\pi$-闭的，当且仅当 $\pi(^*S) \subseteq S$ ，其中 $^*S$ 是 $S$ 在 $M$ 中的解释。

$\pi$-闭集族满足拓扑公理（见 [20] 中的习题 2.2.9）。此外，我们可以用 $\pi$-闭关系来刻画扎里斯基结构的闭集。对于扎里斯基结构 $\mathcal{C}_0$，如果可定义关系$T$ 对 $\mathcal{C}_0$ 的每个特化 $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ 都是 $\pi$-闭的，那么 $T$ 就是正量词自由的。事实上，这是 van den Dries [14] 的一个更一般结果的实例。

泛特化为刻画正量词自由公式提供了一个更强的结果：如果 $\pi$ : $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ 是一个 $\aleph_0$-泛特化，那么任意可定义关系 $S \subset M_0^n$ 是闭集，当且仅当它是 $\pi$-闭集（见 [20] 中的命题 2.2.24）。

命题 2.32。设 $\mathcal{C}_0 \preceq \mathcal{C}$ 是一个扎里斯基结构及其扩张。设 $\pi$： $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ 是一个特化。设 $R$ 是一个 $\emptyset$-可定义集。定义 $\pi_{|R}$： $R(\mathcal{C}) \to R(\mathcal{C}_0)$：当 $\pi(r) \in R(\mathcal{C})$ 时，令其等于 $\pi_{|R}(r) = \pi(r)$。则 $\pi_{|R}$ :$R(\mathcal{C}) \to R(\mathcal{C}_0)$ 是一个特化。

证明。根据构造，$\pi_{|R}$ 仅在 $R(\mathcal{C})$ 中那些经 $\pi$ 映射后落在 $R(\mathcal{C}_0)$ 中的点上有定义。设 $S$ 是 $R(\mathcal{C})^n$ 中的一个闭子集，并且$\overline{a} \in$ Dom($\pi_{|R}$)，其中 $R(\mathcal{C}) \models S(\overline{a})$。令 $\overline{S}$ 表示 $S$ 在 $\mathcal{C}^n$ 中的闭包。由于$\pi$ 是一个特化， $\mathcal{C}_0 \models S(\pi(\overline{a}))$。由于 $\overline{a} \in R(\mathcal{C})^n$，我们有 $\pi(\overline{a}) = \pi_{|R}(\overline{a})$。因此， $R(\mathcal{C}_0) \models S(\pi_{|R}(\overline{a}))$，如所需。□

对于命题 2.32 中的特化 $\pi$： $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ 和可定义集 $R$ ，我们将特化 $\pi_{|R}$ 称为 $\pi$ 到 $R$ 的限制。对于

简便起见，我们将省略下标，在提及该限制时写作 $\pi: R(\mathcal{C}) \to R(\mathcal{C}_0)$。

在本节余下部分，我们将讨论研究正则覆盖上的特化时经常用到的工具。

引理 2.33. 设 $D$ 和 $R$ 是扎里斯基结构$\mathcal{C}$中的拓扑类型。设 $f: D \to R$ 是一个态射，并设 $\pi_D: D(\mathcal{C}') \to D(\mathcal{C})$ 是一个特化，且 $\mathrm{Dom}(\pi_D) \subseteq D(\mathcal{C}')$。那么 $\pi_D$ 可唯一地诱导出一个扩张 $\pi_R: R(\mathcal{C}') \to R(\mathcal{C})$，其 $\mathrm{Dom}(\pi_R) = f(\mathrm{Dom}(\pi_D))$，定义为 $\pi_R(f(x)) := f(\pi_D(x))$。此外，$\pi_R \times \pi_D: R(\mathcal{C}') \times D(\mathcal{C}') \to R(\mathcal{C}) \times D(\mathcal{C})$ 也是一个特化。

证明。设 $\psi(y)$ 在 $R(\mathcal{C}')$ 中（在 $\emptyset$ 上）定义了一个闭子集。我们需要证明，对于任意 $x_0 \subset \mathrm{Dom}(\pi_D)$ 和 $y_0 = f(x_0)$，

$$\vDash \psi(y_0) \Rightarrow \vDash \psi(y_0^{\pi_R})$$

其中 $y_0^{\pi_R} = f(x_0^{\pi_D})$。等价地，

$$\vDash \psi(f(x_0)) \Rightarrow \vDash \psi(f(x_0^{\pi_D}))$$

这由以下事实得出：$\psi(f(x)) \equiv \exists y\, f(x) = y \wedge \psi(y)$ 是 $\psi(y)$ 在 $f$ 下的原像，因此在 $D(\mathcal{C}')$ 中是闭集。

至于此外的部分，注意到 $f \times \mathrm{id}: D \times D \to R \times D$ 是一个态射。然后，可以用类似的论证，以 $f \times \mathrm{id}$ 替代 $f$。□

推论 2.34. 设 $\pi: M \to M_0$ 是一个特化。设 $T$ 是 $M_0$ 中的一个拓扑排序。那么存在唯一的特化 $\pi_T: T(M) \to T(M_0)$，使其与 $\mathrm{p_T}$. 交换

证明. 在引理 2.33 中，取拓扑排序 $D$ 为 $M$，于是 $D$ 在 $M_0$ 中的实现将是 $M_0$。取 $R = T$，并令映射 $f$ 为典范商映射 $\mathrm{p_T}$。□

推论 2.34 是引理 2.33 的一个重要实例，它允许我们将特化扩展到拓扑类型。每当给定一个特化 $\pi: \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ 和一个拓扑类型 $T$ 时，我们都假定 $\pi$通过典范商映射扩展为 $\pi_T: T(\mathcal{C}) \to T(\mathcal{C}_0)$。我们通常省略下标，写作 $\pi: T(\mathcal{C}) \to T(\mathcal{C}_0)$。当我们考虑特化扩展到某些拓扑类型时，也将写作

$$\pi: \mathcal{C} \cup T_1(\mathcal{C}) \ldots \cup T_n(\mathcal{C}) \to \mathcal{C} \cup T_1(\mathcal{C}) \ldots \cup T_n(\mathcal{C})$$

其中 $T_i$ 是拓扑类型。

注 2.35。引理 2.33 的另一个有用实例是 $R$ 和 $D$ 是 $\mathcal{C}$ 中的可定义集时。

当然，同一个拓扑类型可以通过不同的可定义集和不同的商映射来解释。在下一个命题中，我们将证明，若通过两个不同的态射将一个特化扩张到同一个拓扑类型，则这些扩张是相容的。考虑一个扎里斯基结构及其扩张 $\mathcal{C}_0 \prec \mathcal{C}$，以及一个特化 $\pi: \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$。设 $T$ 为一个拓扑类型，$f: A \to T$ 和 $g: B \to T$ 为两个态射，其中 $A$ 和 $B$ 是 $\mathcal{C}$ 中的可定义集。再考虑限制 $\pi:$

$A(\mathcal{C}) \to A(\mathcal{C}_0)$ 和 $\pi\colon B(\mathcal{C}) \to B(\mathcal{C}_0)$，它们将 $\pi$ 限制到 $A$ 和 $B$。设 $\pi_f\colon \mathcal{C} \cup T(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}_0 \cup T(\mathcal{C}_0)$ 和 $\pi_g\colon \mathcal{C} \cup T(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}_0 \cup T(\mathcal{C}_0)$ 为特化，它们分别通过 $f$ 和 $g$ 将 $\pi$ 扩张到 $T$。

命题 2.36。在其定义域 $\pi_f = \pi_g$ 的交集 $\mathrm{Dom}(\pi_f) \cap \mathrm{Dom}(\pi_g)$ 上。此外，$\pi_f \cup \pi_g$ 是同时延拓二者的特化。

证明。令 $t \in \mathrm{Dom}(\pi_f) \cap \mathrm{Dom}(\pi_g)$。根据构造（见引理 2.33），存在 $d \in f^{-1}(t) \cap \mathrm{Dom}(\pi)$ 以及 $e \in g^{-1}(t) \cap \mathrm{Dom}(\pi)$。注意，$f(x) = g(y)$ 定义了 $A \times B$ 的一个闭子集。因此，由于 $f(e) = g(d)$，且由于 $\pi$ 是一个特化，$f(\pi(e)) = g(\pi(d))$。也就是说，$\pi_f(t) = \pi_g(t)$。

接下来，我们将证明 $\pi^0 := \pi_f \cup \pi_g$ 是一个共同扩张的特化。令 $S$ 为 $\mathcal{C}^n \times T^k \times T^l$ 的一个闭子集，并令 $\overline{z} \subset \mathrm{Dom}(\pi^0)$ 满足 $\models S(\overline{z})$。不妨设 $\overline{z} = z_1 z_2 z_3$ 被划分为，使得 $z_1 \in \mathcal{C}^n \cap (\mathrm{Dom}(\pi))^n$、$z_2 \in T^k \cap (\mathrm{Dom}(\pi_f))^k$ 以及 $z_3 \in T^l \cap (\mathrm{Dom}(\pi_g))^l$。

定义

$$C := \{(x_1, \ldots, x_n, y_1 \ldots, y_k, t_1, \ldots, t_l) \in \mathcal{C}^{n+k+l} : S(\overline{x}, f(\overline{y}), \mathrm{p}(\overline{t}))\}$$

显然，$C$ 是一个闭子集。此外，由于 $\models S(\overline{z})$，且 $\overline{z} \subset$定义域$(\pi^0)$，存在一个元组 $x_1, \ldots, x_n, d_1, \ldots, d_k, e_1, \ldots, e_l \subset$ 定义域$(\pi)$，使得 $\models C(\overline{x}, \overline{d}, \overline{e})$，并且 $f(\overline{d}) = z_2$ 且 $g(\overline{e}) = z_3$。由于 $C$ 是闭集，$\models C(\pi(\overline{x})\ \pi(\overline{d})\ \pi(\overline{e}))$。于是根据定义，$\models S(\pi(\overline{x})\ f(\pi(\overline{d}))\ g(\pi(\overline{e}))$。此外，根据构造，$f(\pi(\overline{d})) = \pi_f(z_2)$，且 $g(\pi(\overline{e})) = \pi_g(z_3)$。因此，$\models S(\pi(z_1)\ \pi^0(z_2)\ \pi^0(z_3))$。□

引理 2.37. 设 $\mathcal{C}_0$ 是一个扎里斯基结构，$\mathcal{C} \succeq \mathcal{C}_0$ 是一个扩张。设 $T = D/H$ 是一个轨形，其中 $H < G$ 是一个有限的 $\emptyset$-可定义子群，它在可构造集 $D \subset \mathcal{C}$ 上自由作用。设 $\pi\colon \mathcal{C} \cup T(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}_0 \cup T(\mathcal{C}_0)$ 是一个极大特化，并设 $t \in T(\mathcal{C}) \cap$ 定义域$(\pi)$。那么 $\mathrm{p}^{-1}(t) \subset$ 定义域$(\pi)$。

证明。考虑一个 $a \in \mathrm{p}^{-1}(t)$ 和一个正量词自由公式 $Q(y, z)$，使得对于某个 $c \subset C$，公式 $Q(y, c)$ 是 $a$ 在 $\mathrm{Dom}(\pi)$ 上的轨迹。记

$$Q(x, y, z) :\equiv Q(y, z)\ \&\ \mathrm{p}_T(y) = x$$

由引理 2.25 可知，公式 $\exists y\, Q(x, y, z)$ 定义了一个闭子集。根据构造，该闭子集包含 $(t, c)$，因而也包含 $(\pi(t)\ \pi(c))$。后者意味着

$$\mathcal{C}_0 \vDash \exists y (Q(y, \pi(c))\ \&\ \mathrm{p}_T(y) = t)$$

设 $a_0$ 满足公式 $Q(y, \pi(c))\ \&\ \mathrm{p}_T(y) = t$。

现在显然，令 $\pi(a) := a_0$，我们便得到特化 $\pi$ 到 $a$ 的扩张。由于 $\pi$ 是极大的，$a$ 必须属于 $\mathrm{Dom}(\pi)$。

由于 $H$ 是素模型的子结构，$H \subset$Dom$(\pi)$。回想一下，$\mathrm{p}^{-1}(t) = H \cdot a$。由引理 2.33，$H \cdot a \subset \mathrm{Dom}(\pi)$。□

引理 2.38. 设 $\mathcal{C}$ 是一个在 $\emptyset$-可定义子集 $M$ 上素且极小的扎里斯基结构。那么，对于任意 $A \subseteq C.$，$\mathcal{C}$ 都在 $M \cup A$ 上是原子的。

证明. 理论 $Th(\mathcal{C})$ 是 $\omega$-稳定的。因此，存在一个包含 $M \cup A$ 且在 $M \cup A$ 上是原子的 $\mathcal{C}^\flat \succeq \mathcal{C}$。

由于 $\mathcal{C}$ 是 $M$ 上的素极小元，我们得到 $\mathcal{C}^\flat = \mathcal{C}$。因此 $\mathcal{C}$ 是 $M \cup A$ 上的原子。□

根据引理 2.38，可以给出 $\aleph_0$-泛特化的一个有用刻画。请注意，下面定理 2.39 的第二个条件蕴含“$\pi$ 是一个 $\aleph_0$-泛特化”。

定理 2.39. 设 $\mathcal{C}_0 \prec \mathcal{C}$ 是一个扎里斯基结构及其 $\aleph_0$-饱和扩张 $\pi: \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ 是一个特化。另设存在一个 $\emptyset$-可定义子集 $M$，使得对于每个 $A \subset C$，$\mathcal{C}$ 在 $M \cup A$ 上是原子的。

那么以下条件等价:

(i) 对任意有限的 $c \subset M \cup$定义域($\pi$)、任意有限元组 $b' \in \mathcal{C}' \succeq \mathcal{C}$，以及任意特化

$$\pi' : Cb' \to C_0$$

延拓 $\pi$，存在 $b \subset$ 定义域($\pi$)，使得 $b \equiv_c b'$ 且 $\pi(b) = \pi'(b')$。

(ii) 对任意有限的 $a \subset \mathcal{C}$、任意有限元组 $b' \in \mathcal{C}' \succeq \mathcal{C}$，以及任意特化

$$\pi' : Cb' \to C_0$$

扩展 $\pi$，存在 $b \subset \mathrm{Dom}(\pi)$，使得 $b \equiv_a b'$ 且 $\pi(b) = \pi'(b')$。

证明。我们只需证明 (i) 蕴含 (ii)。反设，对于某些 $\pi'$、$a$ 和 $b'$，(ii) 不成立。那么，$a$ 不可能是 Dom($\pi$) 的子集，因为我们假设 (i) 成立。

令 $p = \mathrm{tp}(a/M \cup \mathrm{Dom}(\pi))$。根据假设，$\mathcal{C}$ 在 $M \cup \mathrm{Dom}(\pi)$ 上是原子的。因此，$p$ 是主类型；所以它等价于某个$c \subset M \cup \mathrm{Dom}(\pi)$ 上的公式 $P(z)$。

令 $q(z, y) = \mathrm{tp}(a, b'/\emptyset)$，并且

$$t(y) = \bigwedge_{Q \in q} \exists z \; P(z) \;\&\; Q(z, y)$$

根据构造，$t$是一个关于 $c$ 的类型。显然，$b'$ 实现了 $t$。由 (i)，存在$b \in \mathrm{Dom}(\pi)$ 实现 $t$，且 $\pi(b) = \pi'(b')$。于是 $\{P(z)\} \cup q(z, b)$ 是相容的，并且由饱和性可知，它在 $\mathcal{C}$ 中有一个实现。由于 $P$ 在 $M \cup \mathrm{Dom}(\pi)$ 上是完备的（是一个原子），我们有 $P(z) \vdash q(z, b)$。由此可得 $\models q(a, b)$，并且$b \equiv_a b'$。这与我们的假设矛盾。□

2.4.1. 多排序扎里斯基结构中的特化。这里我们简要讨论多排序扎里斯基结构中特化的概念。上述讨论的一切仍然有效；不过，为了完整起见，我们需要严格引入多排序扎里斯基结构中的特化概念。引理 2.33 实际上已隐约暗示了这一概念。

我们在第4节中考虑的特化实际上处于多分类设置中，尽管这一点相当隐晦，而且相关特化很容易被视为从主排序到拓扑排序的特化的扩张，如引理 2.33 所示。尽管如此，我们仍引入这一概念，以提供一幅更完整的图景。

定义2.40. 设 $M$ 是一个具有类型 $S$ 的多分类扎里斯基结构。设 $N$ 是 $M$ 的一个初等扩张。若映射 $\pi = (\pi_{s_1}, \ldots, \pi_{s_n}) : N_{s_1} \times \ldots \times N_{s_n} \to M_{s_1} \times \ldots \times M_{s_n}$ 满足对每个 $\pi_{s_i} : N_{s_i} \to M_{s_i}$ 都是一个特化，则称其为特化。

若对于任意 $N' \succ N \succ M$、任意 $A_{s_1} \subseteq N'_{s_1}$、.....、$A_{s_n} \subseteq N'_{s_n}$，其中每个 $i$ 都满足 $|A_{s_i}| < \kappa$，以及一个特化 $\pi_A =$，则称其为 $\kappa$-通用的

($\pi_{A_{s_1}}, \ldots, \pi_{A_{s_n}}$) : $N_{s_1} \cup A_{s_1} \times \ldots \times N_{s_n} \cup A_{s_n} \to M_{s_1} \times \ldots \times M_{s_n}$ 扩张 $\pi$ =($\pi_{s_1}, \ldots,$ $\pi_{s_n}$)，则存在一个嵌入 $\sigma$ =($\sigma_{s_1}, \ldots, \sigma_{s_n}$) : $A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_n} \to M$，其在 ( $N_{s_1} \times \ldots \times N_{s_n}$) ∩($A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_n}$) 上，使得对每个 $i$ 都有 $\pi_{A_{s_i}} | A_{s_i} = \pi_{s_i} \circ \sigma_{s_i}$。

## 3. Regular Covers of Zariski Structures

本节定义扎里斯基结构的正则覆盖，探讨其结构，特别是分析纤维之间的关系。此处提出的正则覆盖概念，与 Hrushovski 在 [7] 中给出、并由 Ahlbrandt 和 Ziegler 在 [2] 中重述的一阶结构覆盖这一更一般的概念相容。此处提出的正则覆盖概念还具有源自扎里斯基结构的一些额外拓扑性质；本节的主要着眼点是建立特化理论，而这需要拓扑结构。一个主要区别在于，在正则覆盖结构中，同一个群作用于各个纤维。对于一般覆盖，则有更大的灵活性，允许不同的群作用于不同的纤维。

定义 3.1. 设 $\mathcal{C}$:=($C, M$,pr) 是一个具有两个类型$M$ 和 $C$ 的扎里斯基结构（分别称为基底和覆盖），使得

(i) 存在一个扎里斯基群 $G$ in $\mathcal{C}$，它通过扎里斯基连续双射在 $C$ 上自由地态射作用。(ii) $M$ 可在 $C$ 中解释为一个拓扑排序，且 pr : $C \to M$ 表示典范商映射。它是一个 $\emptyset$-可定义的满射。(iii) 对每个 $m \in M$，纤维 pr$^{-1}$($m$) 是 $G$ 中某个元素的轨道，即对于某个 $x \in C$，有 pr$^{-1}$($m$) $= G \cdot x$。(iv) 群 $G$ 是 $M$ 中的一个扎里斯基群（特别是，$G$ 可在 $M$ 中解释为一个拓扑排序）

于是，$\mathcal{C}$:=($C, M$, pr) 被称为（ $M$ 的）正则覆盖。

命题 3.2. 设 $\mathcal{C}$ =($C, M$, pr) 是一个正则覆盖。则

(i) $G$ 在 pr 的每个纤维上都传递地作用（因此它的作用是正则的）；(ii) 映射 pr : $C \to M$ 是一个态射；(iii) $M$ 与 $C/G$ 同构；即存在一个双射态射 $C/G \to M$。

证明。（i）显然。（ii）映射 pr 是自然的商映射。因此它是一个态射。（iii）由于群 $G$ 的作用是自由的，根据定义（见定义 2.22 的（ii）和（iii））， 它也是正规的。因此，由下式定义的等价关系 $E_G$

$$cE_Gd \text{ if and only if } \exists g \in G\,(g \cdot c = d)$$

是闭集。因此， $C/E_G$ 是一个拓扑排序。此外，pr 在 $E_G$ 的等价类上为常值。根据定义 3.1 (iii)， $E_G$ 是 pr 下 = 的原像。于是 pr $/E_G$ : $C/G \to M$ 是一个同构。

□

定义 3.3。设 $\overline{b} = (b_1, \dots, b_n) \in C^n$，且 $\mathrm{pr}(\overline{b}) = (m_1, \dots, m_n) = \overline{m}$。设 $A \subset C$。我们称 $\overline{b}$ 在 $A$ 上的纤维中的强独立，当且仅当

$$loc(\overline{b}/M \cup A) = \{\overline{c} \in C^n : \mathrm{pr}\ \overline{c} = \overline{m}\}.$$

引理 3.4. 设 $\mathcal{C} = (C, M, \mathrm{pr})$ 是一个正则覆盖，且 $m \subset M$。假设存在 $b' \in \mathrm{pr}^{-1}(m)$ 在 $A$ 上的纤维中强独立，其中 $A \subseteq \mathcal{C}$。那么每个 $b \in \mathrm{pr}^{-1}(m)$ 都在 $A$ 上的纤维中独立，并且在 $A \cup M$ 上一般。

证明。如果 $b$ 具有依赖性，则它对某个 $a \in A$ 满足某个条件，并且 $m' \in M$ 一个正的量词自由公式 $Q(m', a, b)$，其中 $\dim Q(m', a, y) < \dim \mathrm{pr}^{-1}(m)$。于是，对于某个 $g \in G(M)$，有 $b' \in g \cdot Q(m', a, C)$，这给出了关于 $b'$ 的类似公式。□

引理 3.5. 假设 $\mathcal{C} \preceq \mathcal{C}'$，其中 $\overline{b'} \subset C' \setminus C$，且 $|\overline{b'}| = n$；另外设 $\overline{b'}$ 在 $A \subseteq C$ 上的纤维中强独立。令 $m' := \mathrm{pr}(b')$。那么

(i) $b'$ 在 $A \cup M'$ 上的轨迹具有 $S(y, m')$的形式，其中

$$S(y, x) \equiv x = \mathrm{pr}(y)$$

(ii) $b'm'$ 在 $A \cup M$ 上的轨迹具有 $S(y, x)$ & $R(x, a)$的形式，其中某个 $a \subset M$存在，并且 $R(y, z)$是 $\emptyset$上的正量词自由公式。

证明。(i) 根据定义立即可得。

(ii) 设 $Q(y, x, z)$是一个正量词自由公式，使得 $Q(y, x, c)$是 $b'm'$ 在 $A \cup M$上的轨迹，其中 $c \subset A \cup M$。

设 $R(x, a)$是 $m'$在 $A \cup M$上的轨迹，其中 $a \subset A \cup M$。由于 $M$ 是全超越的，并且稳定嵌入于 $\mathcal{C}$中，我们可以选择 $a \subset M$。由于 $M$是 $M'$的子模型，轨迹 $R(x, a)$是不可约的。我们可以假设 $a \subset c$，且 $Q(y, x, z) \equiv Q(y, x, z)$ & $R(x, z)$。

对于 $m \in M^n$，令 $S_m(y)$ 为公式 $S(y, m)$；它等价于 $\mathrm{pr}(y) = m$。令 $S_m$ 为相应模型中的纤维。设

$$R^0(M, c) = \{m \in M^n : S_m \cap Q(C, m, c) \neq \emptyset\}$$

为 $Q(C, m, c) \subset C^n \times M^n$在 $M^n$上的投影。

注意，$R^0(M, c)$ 是 $R(M, c)$ 的稠密子集，因为 $m'$是二者一般版本中的一般点。

现在我们考察 $g \in G^n$ 在集合 $C^n \times M^n$上的作用

$$(b, m) \mapsto (g \cdot b, m)$$

根据我们的假设，它是连续的，因此 $g \cdot Q(C, M, c)$ 是闭集。

由 (i)，$Q(C', m', c) = S_{m'}$，且这是一个一般纤维。因此，$G^n$ 在一般纤维 $Q(C', m', c)$ 上传递地作用。所以对于任意$g \in G(M)$,

$$g \cdot Q(C', m', c) = Q(C', m', c)$$

因此，在 $\mathcal{C}$ 中，对于任意 $g \in G$ 和任意 $m \in R^0(M, c)$，如果 $m$ 在 $g, c$ 上一般，则

$$g \cdot Q(C, m, c) = Q(C, m, c)$$

根据加法公式，对于给定的 $g \in G(M)$,

维数 $g \cdot Q(C, M, c) \cap Q(C, M, c) \geq$

$\geq \dim G^n + \dim\{m \in R^0(M, c) : g \cdot Q(C, m, c) = Q(C, m, c)\} \geq$

$\geq \dim Q(C, M, c)$

因此，由于 $Q(C, M, c)$ 不可约,

$$g \cdot Q(C, M, c) = Q(C, M, c)$$

对所有 $g \in G(M)$ 都成立。这证明每个纤维 $Q(C, m, c)$ 在 $G$ 的作用下保持不变，因此

$$Q(C, m, c) = S_m(C) \text{ for all } m \in R^0(M, c)$$

那么，$\mathbf{pr}^{-1} R^0(M, c) = Q(C, M, c)$ 和 $Q(C, M, c)$ 是一个闭的 $G$-不变集合。根据定义，像 $R^0(M, c)$ 在类型 $M^n$ 中是闭集。显然，$R^0(M, c) = R(M, a)$，因此 $S(y, x)$ & $R(x, a) \equiv Q(y, x, c)$。

□

推论 3.6. 若 $Q(y, x, z)$ 是 $(b, m, c)$ 在 $\emptyset$ 上的轨迹，且 $Q(C, m, c) = S_m$，那么 $Q(C, m', c') \neq \emptyset$ 蕴含 $Q(C, m', c') = S_{m'}$，对任意 $m', c'$ 均成立。

证明。根据假设，$G^n$ 在一般纤维 $Q(C, m', c')$ 上传递地作用。因此，对于任意 $g \in G(M)$，我们有

$$g \cdot Q(C, m', c') = Q(C, m', c')$$

因此，在 $\mathcal{C}$ 中，对于任意 $g \in G$ 以及满足 $\exists y\, Q(y, x, z)$ 的任意一般 $m', c'$，我们有

$$g \cdot Q(C, m', c') = Q(C, m', c')$$

按照约定，$\mathcal{C}$ 的所有元素都已命名，因此它是素模型。特别地，$M$ 的元素也已命名。因此，$m', c'$ 在任意 $g \in G(M)$ 上都是一般的。于是，$g \cdot Q(C, M, C) \cap Q(C, M, C)$ 包含原来的那个一般元素 $bmc$。因此，由于 $Q(C, M, C)$ 不可约,

$$g \cdot Q(C, M, C) = Q(C, M, C)$$

对于所有 $g \in G(M)$ 都成立。这表明，每个纤维 $Q(C, m', c')$ 在 $G(M)$ 的作用下是不变的。因此

$$Q(C, m', c') = S_{m'} \text{ when } \exists y\, Q(y, m', c')$$

□

推论 3.7。在推论 3.6 的假设下，$\exists y\ Q(y, x, z)$ 定义了一个闭集。

证明。类型 $M \times M \times C$ 上的拓扑可以通过类型 $C \times M \times C$，利用等价关系 $(y, x, z) \sim (g \cdot y, x, z)$ 以及相应的 $G$ 作用来定义,

$$C/G \times M \times C \simeq M \times M \times C$$

推论 3.6 与引理 3.5 证明了 $Q$ 定义了 $C \times M \times C$ 的一个 $G$-不变闭子集。因此，$Q/G$ 是闭集。它与由 $\exists y\ Q(y, x, z)$. □ 定义的集合同胚。

引理 3.8. 在引理 3.5 的假设下，设 $b'$ 在 $A \subseteq C$ 上强独立，且 $m' = \mathrm{pr}(b')$。那么，$S_{m'}(y)$ 在 $M' \cup A$ 上定义了一个完全类型（布尔代数的一个原子）。

证明。假设公式 $S(y, m')$ 在$A \cup M'$上不定义一个完全类型。

于是存在一个关于 $\emptyset$ 的正量词无关 $Q(y, x, z)$，使得对于某个$a \subset M' \cup A$,

$$\vDash \exists y\ Q(y, m', a)\ \&\ S(y, m')\ \&\ \neg Q(b', m', a)$$

令 $b''$ 满足 $Q(b'', m', a)$。不妨设 $Q$ 和 $a$ 使得$Q(y, x, a)$ 是 $b''m'$在 $M' \cup A$上的轨迹。因此，$Q(C', m', a) \subset S_{m'}$。

由于 $G(M')$ 在纤维上传递地作用，$b' = g \cdot b''$对于某个 $g \in G(M')$ 成立。因此，$g \cdot Q(C', m', a) \subset S_{m'}$，且 $g \cdot Q(C', m', a)$ 是在 $M' \cup A$ 上定义的扎里斯基闭集。由于 $b'$ 在 $A$ 上的纤维中的强独立性，可推出 $g \cdot Q(C', m', a) = S_{m'}$。因此，$Q(C', m', a) = S_{m'}$。矛盾。□

引理 3.9. 设 $b \in C^n$ 在 $\emptyset$ 上纤维中的强独立。设 $m' \subset {M'}^k$ 且 $Q(y, x', x, z)$ 是正量词自由公式，并且 $mw \subset M$,$m = \mathrm{pr}(b)$，使得 $Q(y, x', m, w)$ 是 $bm'$ 在 $mw$ 上的轨迹。那么存在一个关于 $\emptyset$ 的正量词自由公式 $R(x', x, z)$，使得

$$Q(y, x', x, z) \equiv R(x', x, z)\ \&\ x = \mathrm{pr}(y)$$

证明. 设 $R(x', x, z)$ 是公式 $\exists y\ Q(y, x', x, z)$。我们断言

$$Q(y, x', x, z) \equiv R(x', x, z)\ \&\ x = \mathrm{pr}(y).$$

事实上，从左到右的蕴含显然。为证明反向蕴含，我们需要证明对于任意的 $(a', b, a, c)$

$$\vDash \forall y\,(Q(b, a', a, c)\ \&\ a = \mathrm{pr}\ y) \to Q(y, a', a, c)$$

但由引理 3.8 可立即得到这个公式。断言得证。

反过来，该断言意味着 $C^n \times M^l$ 中的闭子集 $Q$ （某个 $l$）相对于 $C^n$ 上由群 $G^n$ 的作用给出的等价关系是饱和的。此外，根据定义，在拓扑排序 $M^l$ 上由 $R(x', x, z)$ 定义的子集 $R$ 是闭集（见 3.1）。因此 $R(x', x, z)$ 是正量词自由的。□

我们作出以下假设，这些假设在本文其余部分均成立：

- $G$ 是可定义几乎单纯的（即真可定义正规子群都是有限的）；并且任意可定义正规子群 $H \triangleleft G^k$ （对任意 $k \in \mathbb{N}$而言）都可在不使用参数的情况下定义。- 群 $G$在 $M$中可定义，因此对某个 $l$，$G \subset M^l$是一个可定义子集。- 对所有 $m \in M$，纤维 $\mathrm{pr}^{-1}(m)$都是 $M$上的原子。

通常，可定义几乎单纯的定义要求群是非阿贝尔且（可定义地）连通的。我们的版本不要求满足这些条件。换言之，我们允许阿贝尔群以及不连通的群成为可定义几乎单纯群。事实上，如果 $G$ 是可定义几乎单纯的且不具可定义连通性，那么它必定是有限的。

确实，在这种情况下，连通分支 $G^0$ 是有限的，因为它是一个可定义的正规子群。此外，按定义它具有有限指数。因此， $G$是有限的。

引理 3.10. 设 $b = b_1 b_2$，其中 $b_1 = (b_{11}, \ldots, b_{1n}) \in C^n$ 是一个元组，且 $b_2$ 是一个单元素组，使得 $b_{11}, \ldots, b_{1n}, b_2$ 在 $\emptyset$ 上的纤维中并非强独立。另假设 $b_2$ 在 $Mb_1$ 上的轨迹 $\varphi(b_1, C)$ 是包含 $b_2$ 的纤维的真子集。

那么存在一个有限的、 $\emptyset$-可定义的 $H \lhd G$ ，使得

$$H \cdot b_2 = \varphi(b_1, C)$$

并且 $\varphi(b_1, C)$ 是 $M \cup \{b_1\}$ 上的一个原子。此外，对于任意 $b_1' \equiv_M b_1$ ，存在 $b_2'$ 使得

$$H \cdot b_2' = \varphi(b_1', C)$$

证明。首先注意，在这些假设下，$\mathrm{pr}^{-1}(m_2)$ 是 $M$ 上的一个原子。

令 $\varphi(b_1, C)$ 为 $b_2$ 在 $Mb_1$ 上的轨迹。注意， $\varphi(b_1, C)$ 是 $Mb_1$ 上的一个原子。否则，我们可以假设存在一个真 $Mb_1$-闭子集 $\psi(b_1, C) \subset \varphi(b_1, C)$。存在一个 $g \in G$ 使得 $b_2 \in g \cdot \psi(b_1, C)$。但是 $g \cdot \psi(b_1, C)$ 是 $Mb_1$-闭的。

如下在 $\mathrm{pr}^{-1}(m_2)$ 上定义一个二元关系 $E_{b_1}$ ：

$$E_{b_1}(x, y) :\Leftrightarrow \exists g \in G \ (x \in g \cdot \varphi(b_1, C) \ \& \ y \in g \cdot \varphi(b_1, C))$$

$E_{b_1}$ 是 $\mathrm{pr}^{-1}(m_2)$ 上的一个 $Mb_1$-可定义等价关系。所有等价类都是由 $G$ 中的元素对 $\varphi(b_1, C)$ 作平移得到的。

$E_{b_1}$ 的自反性和对称性显然。为证明传递性，我们需要以下断言：

断言 1。设 $g_1$、 $g_2 \in G$，并假设 $g_1 \cdot \varphi(b_1, C) \cap g_2 \cdot \varphi(b_1, C) \neq \emptyset$。则 $g_1 \cdot \varphi(b_1, C) = g_2 \cdot \varphi(b_1, C)$。

证明。假设 $y \in g_1 \cdot \varphi(b_1, C) \cap g_2 \cdot \varphi(b_1, C)$。则存在一个 $h \in G$，使得 $h \cdot y = b_2$。于是， $b_2 \in hg_1 \cdot \varphi(b_1, C) \cap hg_2 \cdot \varphi_{b_1}(C)$。由于 $\varphi(b_1, C)$ 是 $b_2$ 在 $Mb_1$ 上的轨迹

$$hg_1 \cdot \varphi(b_1, C) = hg_2 \cdot \varphi(b_1, C) = \varphi(b_1, C) = loc(b_2/Mb_1)$$

于是可得 $g_1 \cdot \varphi(b_1, C) = g_2 \cdot \varphi(b_1, C)$。这就证明了该断言。 □

接下来我们将证明 $E_{b_1}(y, z)$ 是传递的。设 $E_{b_1}(x, y)$ 且 $E_{b_1}(y, z)$。那么存在 $g_1, g_2 \in G$ 使得

$$x \in g_1 \cdot \varphi_{b_1}(C) \ \& \ y \in g_1 \cdot \varphi_{b_1}(C)$$
$$y \in g_2 \cdot \varphi_{b_1}(C) \ \& \ z \in g_2 \cdot \varphi_{b_1}(C)$$

注意到 $g_1 \cdot \varphi_{b_1}(C) \cap g_2 \cdot \varphi_{b_1}(C) \neq \emptyset$，也就是说 $y$ 位于交集内。于是根据前面的断言

$$g_1 \cdot \varphi_{b_1}(C) = g_2 \cdot \varphi_{b_1}(C)$$

因此 $x \in g_2 \cdot \varphi_{b_1}(C)$。所以 $E_{b_1}(x, z)$。

命题 2. $E_{b_1}$ 是 $M$-可定义的。

证明。设 $b_1' \equiv_M b_1$。那么 $\varphi(b_1', C)$ 是某个 $b_2'$ 在 $Mb_1'$上的轨迹。由此，重复上述论证可知，以相同方式定义的 $E_{b_1'}$ 是一个等价关系，其等价类是 $\varphi(b_1', C)$ 的平移；而后者是 $Mb_1'$上的一个原子。特别地，对于某个 $g \in G$，有 $b_2 \in g \cdot \varphi(b_1', C)$。由于对于某个 $f \in G^n$，有 $b_1' = f \cdot b_1$，我们可知 $g \cdot \varphi(b_1', C)$ 是 $Mb_1$-可定义的，因此，$g \cdot \varphi(b_1', C) = \varphi(b_1, C)$。由此可得，$E_{b_1}$ 和 $E_{b_1'}$ 具有相同的等价类，因而相等。命题得证。□

令 $E := E_{b_1}$. 按如下方式定义子集 $H \subset G$：

$$g \in H :\Leftrightarrow g \cdot b_2 \in \varphi(b_1, C)$$

那么 $H$ 实际上是一个子群：首先注意到 $g \cdot \varphi(b_1, C) = \varphi(b_1, C)$。于是显然，$H$ 中两个元素的乘积仍属于 $H$。由此也可知，$H$ 在求逆运算下封闭；令 $h \in H$ 和 $b_2' := h^{-1} \cdot b_2$。那么 $b_2' \in h^{-1} \cdot \varphi(b_1, C)$。根据 $H$ 的定义，我们还知道 $b_2 \in h^{-1} \cdot \varphi(b_1, C)$。由于 $h^{-1} \cdot \varphi(b_1, C) \cap \varphi(b_1, C) \neq \emptyset$，我们知道 $h^{-1} \cdot \varphi(b_1, C) = \varphi(b_1, C)$。因此 $b_2' = h^{-1} \cdot b_2 \in \varphi(b_1, C)$。此外，$H \cdot b_2 = \varphi(b_1, C)$。

命题 3. 对任意 $c \in \mathrm{pr}^{-1}(m_2)$，我们有 $E(c, C) = H \cdot c$。

证明。集合

$$\{c \in \mathrm{pr}^{-1}(m_2) : E(c, C) = H \cdot c\}$$

是 $M$-可定义的（因为 $M$ 稳定嵌入于 $C$），且包含 $b_2$。因此，它必定等于 $\mathrm{pr}^{-1}(m_2)$，因为后者是一个原子。这就证明了该命题。□

由此可得 $E(x, y) \equiv \exists h \in H \; y = h \cdot x$，也就是说，$E$ 由可定义子群 $H$的作用所诱导。根据事实 2.23，$H$ 是一个闭子群。接着由 2.24 的证明可知，$E$ 是 $\mathrm{pr}^{-1}(m_2) \times \mathrm{pr}^{-1}(m_2)$ 的一个扎里斯基闭子集。

此外，$H$ 是正规子群。事实上，任意一个 $E$-等价类都具有 $H \cdot c$ 的形式，并且对任意$g \in G$，我们都有一个等价类 $H \cdot (g \cdot c)$。另一方面，根据 $E$的定义，我们知道，$G$ 中的一个元素的作用会将一个等价类映射到另一个等价类。因此，$g \cdot (H \cdot c) = g \cdot (c/E)$ 是一个等价类。此外，我们有 $g \cdot (H \cdot c) = H \cdot (g \cdot c)$，这意味着

$$gHg^{-1} = H$$

由于假设 $G$ 可定义几乎单纯，因此 $H$ 是有限的。此外，根据关于 $G$ 的假设，$H$ 是$\emptyset$-可定义的。□

定理 3.11. 设 $b = b_1 b_2$，其中 $b_1 = (b_{11}, \ldots, b_{1n}) \in C^n$ 在 $U$ 上的纤维中强独立，而 $b_2 = (b_{21}, \ldots, b_{2k})$ 满足 $b_{11}, \ldots, b_{1n}, b_{2i}$，对于每个 $i = 1, \ldots, k$ 都不是强独立的。设 $m_1 = \mathrm{pr}(b_1)$，且 $m_2 = \mathrm{pr}(b_2)$。

那么存在 $\emptyset$-可定义正规有限子群 $H_i \triangleleft G$（对于 $i = 1, \ldots, k$），一个 $\emptyset$-可定义子群 $H \leq H_1 \times \cdots \times H_k$，以及一个在 $UM$ 上的正量词自由公式 $\varphi(y_1, y_2)$，使得

$$\vDash \varphi(b_1, b_2) \; and \; H \cdot b_2 = \varphi(b_1, C^k)$$

且 $\varphi(b_1, C^k)$ 是在 $M \cup \{b_1\} \cup U$ 上的一个原子。

证明。首先，考虑 $U = \emptyset$ 的情形。对于任意 $b_{2i}$，其在 $Mb_1$ 上的轨迹 $\varphi_i(b_1, C)$ 是 $\mathrm{pr}^{-1}(m_{2i})$ 的真子集。对于 $i = 1, \ldots, k$，令 $H_i$ 为引理 3.10 给出的 $G$ 的有限、 $\emptyset$- 可定义正规子群。令 $\varphi(b_1, C^k)$ 为 $b_2$ 在 $Mb_1$ 上的轨迹。于是

$$\varphi(b_1, C^k) \subset (H_1 \times \cdots \times H_k) \cdot b_2$$

注意，与引理 3.10 的证明类似， $\varphi(b_1, C^k)$ 是在 $Mb_1$ 上的一个原子。类似的论证可得，存在一个 $Mb_1$-可定义子群 $H < G^k$，使得 $\varphi(b_1, C^k) = H \cdot b_2$。事实上， $H < H_1 \times \cdots \times H_k$。因此， $H$ 是有限的。特别地，它是素模型的一个有限子集；故为 $\emptyset$-可定义，因为素模型中的元素都有名称。这就证明了 $U = \emptyset$ 情形下的定理。

在一般情形下，我们可以假设 $U = u \subset C$ 是一个有限子集，因此 $b_1' := ub_1$ 满足我们在引理 3.10 及其应用中使用的假设。□

推论 3.12。在定理 3.11 的假设和记号下，存在一个 $U$-可定义集 $D_u$ 和函数 $f_u : D_u \to C^k/H$，使得对于给定的 $b_1 b_2$，存在一个元组 $s_b \subset M$

$$s_b m_1 m_2 b_1 \in D_u$$

*and*

$$f_u(s_b, m_1, m_2, b_1) = \hat{b}_2 \in \mathrm{pr}^{-1}(m_2)/H, \quad \textit{where } \hat{b}_2 = H \cdot b_2$$

证明。 $f_u(x, x_1, x_2, y_1) = z$ 由公式给出

$$\exists y_2 (\varphi_u(x, x_1, x_2, y_1, y_2) \ \& \ z = H \cdot y_2)$$

其中 $\varphi_u(s_b, m_1, m_2, y_1, y_2) = \varphi(y_1, y_2)$，其中 $\varphi$ 如 3.11 中所述，且 $\varphi_u$ 在 $U$上；而 $D_u$ 定义为

$$(x, x_1, x_2, y_1) \in D_u \Leftrightarrow \exists y_2 \, \{\varphi_u(x, x_1, x_2, y_1, y_2) \ \& \ \forall y_2' \, (\varphi_u(x, x_1, x_2, y_1, y_2') \to y_2' \in H \cdot y_2)\}$$

□

3.1. 例子。1. 考虑一个扎里斯基结构 $\mathcal{C} = (C, M, \mathrm{pr})$，它是复流形 M 上的主丛 $\mathrm{pr} : C \to M$，其结构群为 $G.$。由于纤维化局部平凡，pr 局部存在一个截面，

$$c : M \to C$$

一个正则映射。因此，对于足够接近的 $x_1, x_2 \in M$，我们可以定义 $z_1 = c(x_1)$ 和 $z_2 = c(x_2)$。 $\Phi$ 在 $x_1, x_2, z_1$ 和 $z_2$ 之间的无穷小版本称为丛上的联络。

当我们考虑更一般的元素选择时，情况会稍微复杂一些：在分别位于 $x_1$ 和 $x_2$ 上的纤维中取 $y_1$ 和 $y_2$。现在我们考虑到，对于某些 $g_1, g_2 \in G.$，$y_1 = g_1 \cdot z_1$ 和 $y_2 = g_2 \cdot z_2$。因此， $x_1, x_2, y_1$ 和 $y_2$ 之间的联络需要参数 $g_1, g_2$；在 3.12 中，它们对应于 $s_b$ （或自由变量 $x$）。请注意，根据构造，$g_1, g_2 \in \mathrm{dcl}(x_1, x_2, y_1, y_2)$，也就是说， $g_1, g_2$ 是 $x_1, x_2, y_1, y_2.$ 的函数。

2. 这一类例子 $\mathcal{C} = (C, M, \mathrm{pr})$ 属于有限′étale 覆盖的范畴 $\mathrm{pr} : C \to M$，其中 $C \to M$ 是定义在域 $\mathbf{k} \subset \mathrm{F}$ 上的光滑准射影代数簇，F 为代数闭域。论域

$M$ =M(F) 是该代数簇的 F-点集合，而 M 上的结构是与准射影代数簇相关联的标准 Zariski 结构。 ´étale 覆盖的形式体系假定类型 $C$ 上的结构可在带有参数 k 的域 F 中定义，但与该结构并非双可解释。 $\mathcal{C}$ 满足以下条件

(i) dcl($M$) $\cap C = \emptyset$.此外，在 Aut($\mathcal{C}/M$) 作用下，每个 $c \in C$ 的轨道都是纤维 pr$^{-1}$(pr($c$)) 的全部。(ii) 对任意 $c \in C$,

$$\mathrm{dcl}(\{c\} \cup M) \supseteq C.$$

条件 (i) 表明， $\mathcal{C}$ 是一个具有有限群 $G$. 的正则覆盖

条件 (ii) 表明，对任意 $b_1$、 $b_2 \in C$ ，存在 $s_b \subset M$，使得 $b_2 \in$ dcl($s_b, b_1$)，也就是说，对于某个定义在 k 上的有理映射 $f$，有 $b_2 = f(s_b, b_1)$。

为方便技术处理，假设子结构 M 除了包含 $M$ 外，还包含一个表示域的类型 F。于是我们可以选取 $s_b \subset$F。现在可以利用代数闭域中的虚元消去，断言 $s_b \in$ dcl($b_1, b_2$)。

下面的假设 (CC) 将上述代数几何中的例子加以推广。它将在下一节中发挥关键作用，而下一节也是本文的核心。事实上，为了使 $\mathcal{C}$ 的特化具有主定理中证明的良好模型论性质，某种形式的 CC 是必要的。

3.2. 连续连接（CC）假设。现在我们引入最重要的技术性假设。

（CC）：在假设和记号 3.11 及 3.12 下:

- $f_u(x, x_1, x_2, y_1)$ 在包含 $(s_b, m_1, m_2, b_1)$ 的闭 $u$-可定义子集 $D_u^0 \subset D_u$ 上的限制是一个态射。- 存在一个包含 $(m_1, m_2, b_1, \hat{}b_2)$ 的闭 $u$-可定义集 $D_u^\dagger$ 以及一个态射，使得，如果 $(x, x_1, x_2, y_1) \in D_u^0$ 且 $f_u(x, x_1, x_2, y_1) = \hat{}y_2$，那么 $(x, x_1, x_2, y_1, \hat{}y_2) \in D_u^\dagger$ 且 $f^\dagger(x_1, x_2, y_1, \hat{}y_2) = x$。

$f_u : D_u \to M$

注记。从构造显然可知， $x_1 \in$dcl($y_1$) 且 $x_2 \in$dcl($\hat{}y_2$)。我们仍保留变量 $x_1$ in $f_u$ 和 $x_1, x_2$ in $f_u^\dagger$，以使记号更直观。

引理 3.13. 设 $\mathcal{C} = (C, M,$ pr) 是一个满足连续联络假设的正则覆盖，则 Th($\mathcal{C}$) 的每个模型都是正则覆盖，并满足 (CC)。

证明。令 $\mathcal{D} \models$ Th($\mathcal{C}$) 。首先，我们检查 $\mathcal{D}$ 是一个正则覆盖。显然， $\mathcal{D}$ 是一个双排序 Zariski 结构。我们将记 $\mathcal{D} = (D, N)$。对拓扑 Zariski 群的解释 $G$ 给出了一个在 $N$ 中可解释的 Zariski 拓扑群 $B$ 。此外，由于这些都是一阶性质， $B$ 将通过态射方式自由地作用，并且其作用由 Zariski 自同构给出。由此足以看出， $\mathcal{D}$ 是一个正则覆盖。按构造， $\mathcal{D}$ 满足 (CC)。

□

注 3.14。论文 [8] 展示了一个非经典 Zariski 几何的（历史上第一个）例子，见 [8] 的第 10 节。将该例中的 $X^*$ 重新命名为 $C$，并将 $X$ 命名为 $M$，我们得到覆盖结构 $\mathcal{C} = (C, M, \mathrm{pr})$。不难看出，$\mathcal{C}$ 是一个满足连续连接假设 (CC) 的正则覆盖。

更多满足 (CC) 的 Zariski 覆盖结构见 [13]和 [18]。

## 4. 正则覆盖的特化

本节将同时使用两种语言：多类型扎里斯基结构的 Zariski 语言 $\mathcal{L}$，以及扩充了函数 $\pi$ 的语言 $\mathcal{L}$，其中该函数将被解释为特化。

引理 4.1. 设 $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ 是一个特化，其中 $\mathcal{C}$ 是一个多类型扎里斯基结构，且 $\mathcal{C}_0 \preceq \mathcal{C}$。假设 $\mathcal{L}^\pi$-理论 $\mathrm{Th}(\mathcal{C}, \mathcal{C}_0, \pi)$ 的每个 $\aleph_0$-饱和模型都是 $\aleph_0$-通用的。那么该理论的每个 $\kappa$-饱和模型都是 $\kappa$-通用的。

证明. 设 $(\mathcal{D}, \mathcal{D}_0, \pi)$ 是该理论的一个 $\kappa$-饱和模型 $\mathrm{Th}(\mathcal{C}, \mathcal{C}_0, \pi)$。因此，特别地，它是 $\aleph_0$-饱和的。由假设，$\pi$ 是 $\aleph_0$-通用的。设$\mathcal{D}' \succeq \mathcal{D}$, $A \subseteq \mathcal{D}'$ 满足 $|A| < \kappa$ 和 $\pi' : A \cup \mathcal{D} \to \mathcal{D}_0$ 是一个延拓$\pi$的特化。设 $A_0 := A \cap \mathcal{D}$，且 $A' := A \setminus A_0$。此外，对于 $A$ 的任意元素，不失一般性，我们可以假设其在 $\pi'$ 下的像属于 $A_0$。

令 $a' \subset A'$ 为任意有限元组，令 $B \subset A_0$ 为任意有限子集。令 $\pi'(a') =: a_0$。我们需要证明 $\mathcal{L}^\pi$-类型

$$p_{a'}(x/B) := \mathrm{tp}(a'/B) \cup \{\pi(x) = a_0\}$$

在 $\mathcal{D}$ 中可满足，其中 $\mathrm{tp}(a'/B)$ 是 $\mathcal{L}$-类型。

由于 $a'$ 是有限的且 $\pi'$ 是 $\aleph_0$-通用的，因此存在一个嵌入 $\sigma : a'B \to \mathcal{D}$，在 $B$ 上满足 $\pi'(a') = \pi(\sigma a')$。令 $a = \sigma(a')$。于是，$a \models \mathrm{tp}(a'/B)$，并且$\pi(a) = a_0 = \pi'(a')$。

根据紧致性，类型

$$\bigcup_{\substack{a' \subset A' \\ B \subset A_0}} p_{a'}(x/B)$$

其中 $a'$ 遍历 $A'$ 中的所有有限元组，$B$ 遍历 $A_0$ 的所有有限子集，在 $(\mathcal{D}, \mathcal{D}_0, \pi)$ 的某个初等扩张中可实现。但由于 $(\mathcal{D}, \mathcal{D}_0, \pi)$ 是 $\kappa$-饱和的，实际上该类型在 $(\mathcal{D}, \mathcal{D}_0, \pi)$ 中有一个实现。□

本节将研究 Zariski 结构的正规覆盖的特化。设 $\mathcal{C}_0 = (C_0, M_0, \mathrm{pr})$ 是一个正规覆盖（Zariski 结构 $M_0$ 的），我们也常将 $\mathrm{pr} : C_0 \to M_0$ 称为一个正规覆盖。令 $\mathcal{L}$ 表示双排序 Zariski 结构 $(C_0, M_0)$ 的 Zariski 语言。令 $\mathcal{C} = (C, M, \mathrm{pr}) \succeq (C_0, M_0, \mathrm{pr}) = \mathcal{C}_0$，并令 $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ 是一个极大特化，使得其限制 $\pi_M : M \to M_0$ 是一个 $\aleph_0$-泛特化。在本文其余部分中，关于 $(\mathcal{C}, \mathcal{C}_0, \pi)$ 的上述假设均成立；最重要的是，$\pi$ 是极大的，而 $\pi_M$ 是 $\aleph_0$- 泛的。

我们用 $\mathcal{L}^{\pi}$ 表示由符号 $\pi$ 扩展的语言 $\mathcal{L}$，其中该符号将解释为特化。事实上，我们将考虑 $M_0$ 以及此前假设的可定义扎里斯基群 $G$。我们将写作 $G(M_0)$，以表示 $G$ 在 Zariski 结构 $M_0$ 中的实现。因此，将考虑初等扩张 $M$ 及其相应的可定义 Zariski 拓扑群 $G(M)$。通常，我们也将以自然的方式把 $\pi_M$ 视为 Zariski 拓扑群的一个特化 $G(M) \to G(M_0)$。

特别地，若取 $\mathcal{C}$ 为某个 Zariski 结构$M$的正则覆盖，则这表明我们可以将研究范围限定为 Zariski 结构的正则覆盖的 $\aleph_0$-泛特化。

我们还可以进一步简化。只需考虑 $\mathcal{C}' \succeq \mathcal{C}$、Dom($\pi$) 的一个有限子集 $A \subset M \cup$，以及 $\mathcal{C}'$中的一个有限元组 $b'$，和一个特化$\pi'$： $\mathcal{C} \cup \{b'\} \to \mathcal{C}_0$，它扩张了 $\pi$： $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$。我们旨在证明存在一个 $b$属于 $\mathcal{C}$，使得

$$\pi(b) = \pi'(b') \text{ and } \mathrm{tp}(b'/A) = \mathrm{tp}(b/A) \tag{1}$$

根据定理 2.39，这将推出 $\pi$ 是 $\aleph_0$-泛特化。事实上，我们证明，若该正则覆盖除满足上述假设外还满足 (CC)，则总能找到一个满足 (1) 的 $b$。本节末尾，我们将给出满足 (CC) 的正则覆盖的 $\aleph_0$-泛特化的刻画。这反过来使我们能够减弱满足 (CC) 的正则覆盖所需的引理 4.1 的假设。

命题 4.2. 设 $\mathcal{C}_0 \prec \mathcal{C}$ 是一个扎里斯基结构及其扩张，且 $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ 是一个 $\aleph_0$-泛特化。假设 $M$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个类型，并且 pr : $C \to M$ 是满足 (CC) 的正则覆盖。

设 $\pi_M : M \to M_0$ 是 $\pi$ 在该子结构上的限制。那么 $\pi_M$ 是 $\aleph_0$-通用的。

证明. 设 $M' \succ M$，且 $n' \subset M'$ 是一个有限元组。设 $\pi'_M$: $M' \to M_0$ 是 $\pi_M$ : $M \to M_0$ 的一个延拓专门化，其中 $n' \subset$ Dom($\pi'_M$)，并且 $\pi'_M(n') = n_0$。

我们断言 $\pi'_M \cup \pi$ 是延拓 $\pi$ 的一个专门化。这将意味着，$n'$ 在 $M$ 的一个有限子集上的类型可由 $\mathcal{C}$ 中的某个 $n$ 实现，因此也可由 $M$ 中的某个 $n$ 实现，使得 $\pi(n) = n_0$。换言之，$\pi_M$ 是 $\aleph_0$-通用的。

考虑正量词自由公式 $Q(x', y)$，其定义域为 $\mathcal{C}$，使得对于某个 $b \in$Dom($\pi$)，$Q(x', b)$ 是 $n'$ 在 Dom($\pi$) 上的轨迹。令 $n :=$pr($b$)。由此可得 $n \in$Dom($\pi$)。

令 $b = b_1 b_2$ 为 $b$ 分解为 $b_1$和 $b_2$ 的结果，其中 $b_1$在 $\emptyset$ 上的纤维中极大独立，并且

$$\hat{b}_2 = f(s_b, m_1, m_2, b_1), \quad s_b = f^{\dagger}(m_1, m_2, b_1, \hat{b}_2)$$

其中 $m_1 =$ pr($b_1$) 且 $m_2 =$ pr($b_2$)。注意，由于$b_1, b_2 \in$ Dom($\pi$)，因此 $m_1$, $m_2 \in$ Dom($\pi$)。

我们有 ˆ $b_2 \in$ 定义域($\pi$)，因为 $b_2 \in$ 定义域($\pi$)。于是 $s_b \in$ 定义域($\pi$)，因为 $f^{\dagger}$是一个态射。现在我们用公式替换 $Q(x', y)$:

$$Q^*(x', x, w, y_1) \equiv \exists y_2 \; Q(x', y_1 y_2) \;\&\; [\hat{y}_2 = f(w, x, y_1)]$$

其中 $[\hat{}y_2 = f(w,x,y_1)]$ 是正量词自由公式（见 3.2）

$$(w,x,y_1) \in D^0 \ \&\ (x,y_1\hat{y}_2) \in D^\dagger \ \&\ \hat{y}_2 = f(w,x,y_1).$$

特别地，$\hat{}y_2 = H \cdot y_2 \in C^{|b_2|}/H$，其中 $H$ 是根据定理 3.11 关于 $b_2$ 给出的有限群。

我们断言，$Q^*$ 定义了一个扎里斯基闭集。令 $k = |x'xw|$ 和 $t = |y| = |y_1y_2|$。定义函数

$$\mathrm{id} \times \mathrm{p} : M^k \times C^t \to M^k \times C^{|y_1|} \times C^{|y_2|}/H$$

通过恒等映射 $\times \mathrm{p}(x'xwy_1y_2) = (x'xwy_1\hat{}y_2)$；也就是说，它在 $M^k \times C^{|y_1|}$ 上是恒等的，而 $\mathrm{p} : C^{|y_2|} \to C^{|y_2|}/H$ 是典范商映射。像 $M^k \times C^{|y_1|} \times C^{|y_2|}/H$ 可以通过将 $H$ 在 $M^k$ 上的作用取为平凡作用，识别为类型 $(M^k \times C^t)/H$。由于 $H$ 是有限的，$(M^k \times C^t)/H$ 是一个轨形；而恒等映射 $\times \mathrm{p}$ 变成了典范商映射。

因此，$Q^*(x',x,w,y_1)$ 是由闭集在轨形 $(M^k \times C^t)/H$ 下经 $\mathrm{id} \times \mathrm{p}$ 映射所得的像，该闭集由下式定义：

$$Q(x', y_1y_2) \ \&\ [\hat{y}_2 = f(w,x,y_1)]$$

由引理 2.25，$Q^*(x',x,w,y_1)$ 是闭集。

接下来我们断言，$Q^*(x',n,s_b,b_1)$ 定义了 $n'$ 在定义域 $\mathrm{Dom}(\pi)$ 上的轨迹。只需证明：

$$Q^*(M',n,s_b,b_1) \subseteq Q(M',b)$$

注意，由公式 $Q^*$ 的构造可知，

$$\vDash Q^*(n'',n,s_b,b_1) \Rightarrow \ \vDash Q(n'', b_1b_2') \text{ for some } b_2' \in \hat{b}_2$$

$\hat{}$其中 $b_2 = H \cdot b_2$。由定理 3.11，$H \cdot b_2$ 是 $M'b_1$ 上的一个原子。因此，$\vDash Q(n'', b_1b_2')$ 当且仅当 $\vDash Q(n'', b_1b_2)$。这就完成了该断言的证明。

显然，

$$\vDash Q^*(n',n,s_b,b_1)$$

并且 $Q^*(x',x,w,y_1)$ 满足引理 3.9 的假设。因此，将 $x = x_1x_2$, $|x_1| = |y_1|$ 分解（与 $n = m_1m_2$ 相对应），由引理 3.9 可得

$$Q^*(x', x_1x_2, w, y_1) \equiv R(x', x_1, x_2, w) \ \&\ x_1 = \mathrm{pr}(y_1)$$

对于某个正量词自由公式 $R$ .

这意味着，$n'$ 在定义域 $\pi$ 上的轨迹由公式 $R(x', m_1, m_2, s_b)$ 确定，其中 $m_1$, $m_2, s_b \subset$ 属于定义域 $\pi_M$。由于 $\pi'_M(n') = n_0$，我们得到

$$\vDash R(n_0, \pi(m_1), \pi(m_2), \pi(s_b))$$

因此

$$Q(n_0, \pi(b))$$

这证明 $\pi'_M \cup \pi$ 保持定义域 $\pi$ 上的正量词自由公式，因此是特化 $\pi$ 的一个扩张。□

引理 4.3. 设 $\mathcal{C}' \succeq \mathcal{C}$, $A \subset M \cup$定义域$(\pi)$ 是一个有限子集，$b' \subseteq \mathcal{C}'$ 是一个有限元组，且 $\pi' : \mathcal{C}b' \to \mathcal{C}_0$ 是延拓 $\pi$ 的特化。假设 $b' \subset M'$。那么我们可以找到 $b \subset M$，使得 $\pi(b) = \pi'(b')$ 且 $\mathrm{tp}(b'/A) = \mathrm{tp}(b/A)$（即性质 (1) 成立）。

证明。由于 $M'$ 在 $\mathcal{C}'$ 中是全超越且稳定嵌入的，存在一个有限 $A_{M'} \subset M'$，使得 $\mathrm{tp}(b'/A_{M'}) \vdash \mathrm{tp}(b'/A)$。由于 $\pi'$ 的限制 $\pi'_M\colon \{b'\} \cup M \to M_0$ 是延拓 $\pi_M$ 的特化，且 $\pi_M$ 是 $\aleph_0$-通用的，因此存在 $b \subset M$，使得 $\pi(b) = \pi'(b')$ 且 $\mathrm{tp}(b'/A_{M'}) = \mathrm{tp}(b/A_{M'})$。性质1随即成立。□

从这里开始，我们将假设 $M$ 是 $\aleph_0$ 饱和的。

引理 4.4。设 $\mathcal{C}' \succeq \mathcal{C}$ 和 $b' \subseteq \mathcal{C}'$ 为一个有限元组。设 $\pi' : \mathcal{C}b' \to \mathcal{C}_0$是一个延拓 $\pi$的特化，且 $A \subset M \cup$定义域$(\pi)$ 是一个有限子集。假设对于某个 $a \subset C \cap$定义域$(\pi)$，有 $\mathrm{pr}(b') = \mathrm{pr}(a)$。那么存在 $b \subset \mathcal{C}$，使得 $\pi(b) = \pi'(b')$ 且 $\mathrm{tp}(b'/A) = \mathrm{tp}(b/A)$（即性质1成立）。

证明。由于 $b'$ 和 $a$ 属于同一个纤维，故对于某个唯一的$g' \in G(M')$，有 $b' = g' \cdot a$。由于群作用是自由的，我们可以假设 $g'$ 属于 $\pi'_M$的定义域。否则，利用引理 2.33，可以将 $\pi'_M$ 延拓为一个特化$M' \to M_0$，使其定义在 $g'$上。滥用记号，我们仍将此延拓记为 $\pi'_M\colon M' \to M_0$，并且记 $g' \in$ 定义域$(\pi'_M)$。令$a_0 := \pi(a)$，$b_0 = \pi'(b')$，以及 $g_0 = \pi'_M(g')$。

由此可知，$\pi'_M$ 是特化 $\pi_M$的一个扩张。由于 $\pi_M$是 $\aleph_0$-通用的，存在 $g \in G(M)$，使得 $\mathrm{tp}(g/Aa) = \mathrm{tp}(g'/Aa)$，并且$\pi_M(g) = g_0$。

设 $b := g \cdot a$。根据此定义，$\mathrm{tp}(b'/Aa)$ 和 $\mathrm{tp}(b/Aa)$ 分别由 $\mathrm{tp}(g'/Aa)$ 和 $\mathrm{tp}(g/Aa)$ 确定。因此我们有 $\mathrm{tp}(b'/Aa) = \mathrm{tp}(b/Aa)$。最后，同样根据群作用的自由性，$\pi(b)$ 有定义。于是 $\pi(b) = \pi(g) \cdot \pi(a) = g_0 \cdot a_0$，也就是说 $\pi(b) = b_0$. 。因此，我们选择的 $b$ 满足性质1。□

注释 4.5。下面，在引理 4.6、引理 4.7 和命题 4.9 的证明中，我们会区分 $G$ 是无限还是有限的情形。乍看之下，这似乎有些奇怪。如注释 2.21 所述，这里主要的区别在于 $G$ 是否连通。在我们的设定中，唯一不连通的情形是 $G$ 有限。根据定义，当 $G$ 无限时，它是不可约的；由于 $G$ 是一个群，这意味着它是连通的。

此外，我们保留有限与无限的情形区分，以强调这两种情形也分别对应于覆盖的纤维为无限或有限的情况。

引理 4.6. 假设 $G$ 是无限的。设 $m \in M^n \cap$ 属于定义域$(\pi)$，其中 $m_0 = \pi(m)$，且 $b_0 \in \mathrm{pr}^{-1}(m_0) \cap C_0^n$。设 $\mathcal{C}' \succeq \mathcal{C}$。那么，对于任何在定义域$(\pi)$上一般的 $b' \in C'^n \cap \mathrm{pr}^{-1}(m)$，都存在一个特化 $\pi' : \mathcal{C}b' \to \mathcal{C}_0$，它扩张 $\pi$，使得 $\pi'(b') = b_0$。

证明。注意，由于 $G$是连通的，$G^n$也是连通的；因此 $\mathrm{pr}^{-1}(m)$ 是不可约的。设 $b' \in C'^n$ 是 $\mathrm{pr}^{-1}(m)$ 中的一个元素，且它在$C$上一般。

考虑一个定义在 $\emptyset$ 上的正量词自由公式 $Q(y, x, z)$，以及一个来自定义域$(\pi)$的元组$c$，使得 $\models Q(b', m, c)$。不失一般性，我们可以假设 $Q$ 定义了 $b', m, c$ 在 $\emptyset$ 上的轨迹。根据一般性假设，$Q(y, m, c) \equiv \mathrm{pr}(y) = m$。

因此，推论 3.6 的假设得到满足。于是由推论 3.7 $\exists y\, Q(y, x, z)$ 定义了一个闭集。

由此可得

$$Q(\mathcal{C}_0, \pi(m), \pi(c)) \neq \emptyset \text{ and } Q(\mathcal{C}_0, \pi(m), \pi(c)) = S_{m_0}$$

因此，对于任意这样的 $Q(y, x, c)$，都有 $\vDash Q(b_0, m_0, \pi(c))$。

令 $\pi'(b') = b_0$。根据构造， $\pi'$ 是延拓 $\pi$ 的特化。 □

引理 4.7. 设 $\mathcal{C}_0 \preceq \mathcal{C}$ 是一个正则覆盖及其扩张。假设 $m \in M^n \cap \mathrm{Dom}(\pi)$。那么存在 $b \in \mathrm{pr}^{-1}(m) \cap \mathrm{Dom}(\pi)$。

证明. 只需对 $m$ 的每个坐标证明该命题，因此我们可以假设 $n = 1$。我们将 $\mathrm{pr}^{-1}(m)$ 在 $C$ 中写作 $C_m$。

当 $G$ 是有限时，该命题由引理 2.37 得出。假设 $G$ 是无限的，并令 $\mathcal{C}' \succeq \mathcal{C}$ 使得 $\mathcal{C}'$ 是 $|\mathrm{Dom}(\pi)|^+$-饱和的。我们将考虑以下两种情况。

情况 1：在 $\mathrm{Dom}(\pi)$ 上存在 $b' \in C'_m$ 纤维中独立。于是，根据引理 3.4，每个 $b \in C_m$ 都纤维中独立，且在 $\mathrm{Dom}(\pi)$ 上一般。根据引理 4.6，存在一个扩张 $\pi'$，使得 $b \in \mathrm{Dom}(\pi')$。但是 $\pi$ 是极大的，因此 $\pi'(b) = \pi(b)$。

情况 2：任意 $b' \in C'_m$ 在 $\mathrm{Dom}(\pi)$ 上都纤维中依赖。取一个在 $\mathrm{Dom}(\pi)$ 上一般的 $b' \in C'_m$。根据引理 4.6，存在一个扩张 $\pi'$，且 $b' \in \mathrm{Dom}(\pi')$。

由于 $b'$ 是一个单元素组，按照第 3.2 段的记号，我们有 $b'_1 = \emptyset$ 和 $b' = b'_2$。此外，存在 $s_{b'}$ 属于 $M'$，且 $u \in \mathrm{Dom}(\pi)$，使得

$$f_u(s_{b'}, m) = \hat{b}', \quad f_u^\dagger(m, \hat{b}') = s_{b'}$$

第二个等式连同 $f^\dagger$ 是一个态射这一事实，意味着 $\pi'$ 可以扩张为 $s_{b'}$。为简便起见，我们将写作$s_{b'} \in \mathrm{Dom}(\pi')$。考虑 $\pi'$ 到 $M'$ 的限制，并将其记为 $\pi'_M : M' \to M_0$。

根据引理 4.3，存在一个 $s_b \in M$，使得 $\mathrm{tp}(s_{b'}/mu) = \mathrm{tp}(s_b/mu)$，并且$\pi'(s_{b'}) = \pi(s_b)$。令 $\hat{} b = f_u(s_b, m)$。那么 $\hat{} b$是拓扑类型 $C/H$ 中的一个元素，其中 $H < G$ 是有限的（见定理 3.11）；由 $\hat{} f_u$的连续性可知， $b \in \mathrm{Dom}(\pi)$。因此，对类型 $C/H$应用引理 2.37，可得 $\hat{}$ 存在一个 $b \in \mathrm{Dom}(\pi)$，使得 $b = H \cdot b$。

□

推论 4.8。设 $m \in M^n \cap \mathrm{Dom}(\pi)$，且 $A \subset C$ 满足 $|A| < \aleph_0$。假设在 $C'$ 中存在 $b' \in \mathrm{pr}^{-1}(m)$，并且 $\pi'$ 扩张 $\pi$，使得 $b' \in \mathrm{Dom}(\pi')$。那么存在 $b \in \mathrm{pr}^{-1}(m) \cap \mathrm{Dom}(\pi)$，使得 $\pi(b) = \pi'(b')$，且 $\mathrm{tp}(b'/A) = \mathrm{tp}(b/A)$。换言之，性质1成立。

证明。由引理 4.7 和引理 4.4 可得。 □

接下来我们将更详细地考察性质1。回顾一下，我们正在考虑 $\mathcal{C}' \succeq \mathcal{C}$，一个有限子集

$$A \subset M \cup \mathrm{Dom}(\pi), \tag{2}$$

一个有限元组 $b'$，以及一个特化 $\pi' : \mathcal{C} \cup \{b'\} \to \mathcal{C}_0$ 扩张 $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$。假设 $b'$ 满足性质1。也就是说，存在一个元组 $b \in \mathcal{C}$，使得

$$\pi(b) = \pi'(b') \text{ and } \mathrm{tp}(b'/A) = \mathrm{tp}(b/A)$$

将 $b' = b'_1 b'_2 \in C'^{n+k}$ 拆分，使得 $b'_1 \in C'^n$ 在 Dom($\pi$) 上的纤维中强独立且极大，而 $b'_2$ 为其余部分。

根据连续连接，

$$\hat{b}'_2 = f_u(s_{b'}, m'_1, m'_2, b'_1) \text{ and } s_{b'} = f_u^{\dagger}(m'_1, m'_2, b'_1, \hat{b}'_2) \tag{3}$$

对于态射 $f_u$，在有限的 $u \subset$ Dom($\pi$) 上，对某个 $s_{b'}$ 中的元组 $M'$，其中 $m'_1 =$ pr($b'_1$)，且 $m'_2 =$ pr($b'_2$)。并且，$\hat{} \; b'_2 = H \cdot b'_2$ 是$C'^k/H$ 中的一个元素，其中 $H$ 是 $G^n$ 的一个 $\emptyset$-可定义有限子群（见定理 3.11 和推论 3.12）。

命题 4.9. 设 $\mathcal{C}' \succeq \mathcal{C}$。假设 $b' \in C'^n$ 在 Dom($\pi$) 上纤维中的强独立，$m' =$ pr($b'$)，$s_{b'} \subset M'$ 且 $\pi' : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}_0$ 是一个特化，定义在 $s_{b'} m' b'$ 上，并扩张 $\pi$。设 $A \subset M \cup$ Dom($\pi$) 的基数小于 $\aleph_0$。那么存在 $s_b mb \subset$ Dom($\pi$)，属于 $\mathcal{C}$，使得

$$\pi(s_b mb) = \pi'(s_{b'} m' b') \text{ and } \mathrm{tp}(s_b mb/A) = \mathrm{tp}(s_{b'} m' b'/A)$$

证明。由于 $\pi_M$ 是 $\aleph_0$-通用的，存在 $s_b m \subset M \cap$Dom($\pi$)，使得 tp($s_{b'} m'/A$) = tp($s_b m/A$)，且 $\pi'(s_{b'} m') = \pi(s_b m') =: s_0 m_0$。

情况 1：若 $G$ 有限，则由引理 2.37 可得 pr$^{-1}$($m$) $\subset$Dom($\pi$)。

由于纤维的大小相等，且 $\pi$ 保持纤维上的离散扎里斯基拓扑，

$$\pi(\mathrm{pr}^{-1}(m)) = \mathrm{pr}^{-1}(m_0)$$

并且 $\pi$ 是 pr$^{-1}$($m$) 上的双射。特别地，存在 $b \in$ pr$^{-1}$($m$)，使得 $\pi$($b$) $= b_0$。

我们断言 tp($s_{b'} m' b'/A$) = tp($s_b mb/A$)。这是因为 tp($s_{b'} m'/A$) 表示 $S$($y, m'$) 是 $s_{b'} A$ 上的一个原子，因此，根据类型相等，$S$($y, m$) 是 $s_b A$ 上的一个原子。（这里 $S(y, x) \equiv x =$ pr($y$)，见引理 3.5）。

情况 2：如果 $G$ 是无限的。那么根据引理 4.6，对于任意在 $C$ 上一般的 $b'' \in$pr$^{-1}$($m$)，存在 $\pi''$ 对 $\pi$ 的一个扩张，使得 $\pi''(b'') = b_0$。注意，tp($b'/Am'$) 是一般的。

根据推论 4.8，存在 $b \in$ pr$^{-1}$($m$)$\cap$定义域($\pi$)，其在 $Am$ 上的一般类型满足 pr$^{-1}$($m$) 中的 $\pi$($b$) $= b_0$。根据关于 $b'$的假设，类型 tp($b'/Am'$) 在 pr$^{-1}$($m'$) 中是一般的。此外，根据上述选择，tp($m'/A$) =tp($m/A$)，因此 tp($b'/A$) =tp($b/A$)。

□

推论 4.10。设 $A \subset M \cup$定义域($\pi$) 的基数小于 $\aleph_0$。假设 $\mathcal{C}$ 满足连续连接假设。那么，对于任意 $b' \in C'^n \cap$(定义域($\pi'$))$^n$，性质 (1) 成立，其中 $\mathcal{C}' \succeq \mathcal{C}$ 和 $\pi' : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}_0$ 是延拓 $\pi$ 的专门化。

证明。设 $b' = b'_1 b'_2$，其中 $b'_1$ 是在 $A$ 上纤维中的极大强独立部分，而 $b'_2$ 是其余部分。我们需要找到 $b \in \mathcal{C}$，使得

$$\pi(b) = \pi'(b') \text{ and } \mathrm{tp}(b/A) = \mathrm{tp}(b'/A)$$

令 pr($b'_1$) =: $m'_1$,pr($b'_2$) =: $m'_2$。根据连续连接，

$$\hat{b}'_2 = f_u(s_{b'}, m'_1, m'_2, b'_1)$$

对于有限 $u$ 上的态射 $f_u$，且 $s_{b'} \subset M'$ 是某个有限元组。我们可以假设 $m'_1$, $m'_2, s_{b'} \in \mathrm{Dom}(\pi')$。

现在，在命题 4.9 中用 $Au$ 替代 $A$，并对 $s_{b'} m'_1 m'_2 b'_1$ 重复相同的论证，可得

$$\mathrm{tp}(s_b, m_1, m_2, b_1/Au) = \mathrm{tp}(s_{b'}, m'_1, m'_2, b'_1/Au)$$

and

$$\pi(s_b, m_1, m_2, b_1) = \pi'(s_{b'}, m'_1, m'_2, b'_1) \tag{4}$$

令 $b_2 := f_u(s_b, m_1, m_2, b_1)$。由类型相等可知,

$$\mathrm{tp}(b_1 \hat{b}_2/Au) = \mathrm{tp}(b'_1 \hat{b}'_2/Au)$$

将引理 2.33 应用于 $f_u$, †并结合 (4)，得到 $\pi(b_2) = \pi'(b'_2)$。

集据定理 3.11，$b_2 = H \cdot b_2$ 是在 $AMb_1$ 上的一个原子。因此，对这样的 $b_2$ 的任意选择都满足

$$\mathrm{tp}(b_1 b_2/Au) = \mathrm{tp}(b'_1, b'_2/Au)$$

根据引理 2.37，我们可以选择 $b_2$，使得 $\pi(b_2) = \pi'(b'_2)$。 □

本节对 Zariski 覆盖结构的特化所作的全部分析得出了以下定理。该定理刻画了满足连续连接假设的 Zariski 覆盖结构的 $\aleph_0$-泛特化。

命题4.11. 设 $\mathcal{C}_0 = (C_0, M_0, \mathrm{pr})$ $\mathcal{C} = (C, M, \mathrm{pr})$ 是两个满足连续连接假设的正则覆盖结构，$\mathcal{C}_0 \preceq \mathcal{C}$ 且$\mathcal{C}$ 是一个 $\aleph_0$-饱和扩张。设 $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ 是一个特化。则以下各项等价:

(i) $\pi$ 是 $\aleph_0$-泛特化；(ii) 限制 $\pi_M : M \to M_0$ 是 $\aleph_0$-泛特化，且 $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ 是一个极大特化；(iii) 限制 $\pi_M : M \to M_0$ 是 $\aleph_0$-泛特化，并且以下句子成立

$$\forall m \in \mathrm{Dom}(\pi_M)\ \exists c \in \mathrm{Dom}(\pi)\ \ \mathrm{pr}(c) = m. \tag{5}$$

$$\forall c \in \mathrm{Dom}(\pi)\ \forall g \in \mathrm{Dom}(\pi_G)\ g \cdot c \in \mathrm{Dom}(\pi). \tag{6}$$

证明。首先注意，$\mathcal{C}$ 和 $M$ 满足引理 2.38 的假设。因此，我们可以使用定理 2.39(ii)作为判定普适性的准则。所以，为了证明((ii)⇒(i))，我们需要验证 $A \subset M \cup \mathrm{Dom}(\pi)$满足性质 (1)。这就是推论 4.10。

((i)⇒(ii))由命题 4.2 得出，因为任何 $\aleph_0$-通用特化都是极大的。

((ii)⇒(iii)) 句子 (5)由引理 4.7 得出。句子 (6)由 $\pi$ 的极大性和引理 2.33 得出。

((iii)⇒(ii)) 只需证明 $\pi$ 是极大的。首先注意到，$\pi_M$ 是极大的，因为它是 $\aleph_0$-通用的。现在假设 $\pi' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ 是一个延拓 $\pi$ 的特化，且 $c' \in \mathrm{Dom}(\pi') \setminus \mathrm{Dom}(\pi)$。令 $m := \mathrm{pr}(c')$，由于 pr 是一个态射，可以将 $\pi_M$ 延拓到 $m'$ （根据引理 2.33）。但是 $\pi_M$ 是极大的，因此 $m \in \mathrm{Dom}(\pi_M)$。

根据 (5)，存在一个 $c \in \mathrm{Dom}(\pi)$，使得 $\mathrm{pr}(c) = m$。存在唯一的 $g \in G$ 使得 $g \cdot c' = c$。根据作用的自由性，我们可以将 $\pi'_M$ 延拓到 $g$。与之前一样，由于 $\pi_M$ 是极大的，我们实际上有 $g \in \mathrm{Dom}(\pi_M)$。特别地，$g \in \mathrm{Dom}(\pi_G)$。因此，根据 (6)，$c' \in \mathrm{Dom}(\pi)$。□

命题 4.12. 设 $\mathcal{C}_0 = (C_0, M_0, \mathrm{pr})$ 和 $\preceq \mathcal{C} = (C, M, \mathrm{pr})$ 是两个正则覆盖。设 $\pi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ 是一个特化，且其限制 $\pi_M\colon M \to M_0$ 到 $M$ 是极大的。假设定理 4.11 (iii) 的句子 (5) 和 (6) 成立。那么对于任意 $m \in$ 定义域$(\pi_M)$，存在一个 $c \in \mathrm{pr}^{-1}(m)$，使得

$$\mathrm{Dom}(\pi) \cap \mathrm{pr}^{-1}(m) = (G \cap \mathrm{Dom}(\pi)) \cdot c.$$

证明. 根据 (5)，存在一个元素 $c \in$ 定义域$(\pi) \cap \mathrm{pr}^{-1}(m)$。那么对于任意$g \in G \cap$ 定义域 $(\pi)$，根据 (6)，我们有 $g \cdot c \in$ 定义域$(\pi) \cap \mathrm{pr}^{-1}(m)$。这里我们指出，$G \cap$ 定义域$(\pi)$ 总是非空的（因为 $G(M_0) \subseteq$ 定义域$(\pi_M)$）。

现在假设 $d \in \mathrm{Dom}(\pi) \cap \mathrm{pr}^{-1}(m)$，其中 $d \neq c$。那么存在一个 $g \in G$，使得 $g \cdot c = d$。因此，由于该作用是自由的，我们可以将 $\pi$ 扩张为 $g$。根据构造，这将是 $\pi_M$ 的一个扩张（回顾引理 2.33）。但 $\pi_M$ 是极大的。因此 $g \in \mathrm{Dom}(\pi_M) \subset \mathrm{Dom}(\pi)$。这证明了 $\mathrm{Dom}(\pi) \cap \mathrm{pr}^{-1}(m) = (G \cap \mathrm{Dom}(\pi)) \cdot c$。□

注 4.13. 在假设 $\pi$ 成立时：$\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ 是极大的，且其限制 $\pi_M\colon M \to M_0$ 是 $\aleph_0$-通用的。由句子 (5) 可知，$\pi(S_m(C)) = S_{\pi(m)}(C_0)$，因为除了 $c \in \mathrm{Dom}(\pi)$ 之外，我们还有 $G(M_0) \cdot c \subset \mathrm{Dom}(\pi) \cap S_m(C)$。

命题 4.14。在命题4.11的假设下，考虑特化语言中的结构 $(\mathcal{C}, \mathcal{C}_0, \pi)$ 及其子结构$\pi_M\colon M \to M_0$。假设 $\pi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ 是极大的，并且该理论的任意 $\kappa$-饱和模型 $\pi_M : M \to M_0$ 都是 $\kappa$-通用的。

那么，该理论的任意 $\kappa$-饱和模型 $\pi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$都是 $\kappa$-通用的。

证明。考虑特化理论 $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$。取该理论的一个 $\kappa$-饱和模型。根据引理 3.13，我们不妨设它是 $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$。于是，根据我们的假设，$\pi_M\colon M \to M_0$ 是 $\kappa$-通用的。现在由定理 4.11 可得，$\pi$ 是 $\aleph_0$-通用的。引理 4.1完成证明。□

## 5. The Theory of Universal Specialisations for Regular Covers of Zariski Structures

我们提出一个理论 $\mathrm{Th}(\mathcal{C})^\pi$，它是在语言 $\mathcal{L}^\pi$ 中特化的、满足 (CC) 的 Zariski 结构正则覆盖的泛特化理论。

设 $\mathcal{C}_0$ 是满足 (CC) 的正则覆盖，且 $\mathcal{C} \succeq \mathcal{C}_0$ 是一个初等扩张。设 $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ 是一个特化，使其限制$\pi_M : M \to M_0$ 是一个 $\aleph_0$-泛特化。特别地，这意味着$\pi_M$ 是非平凡的。因此，$\pi$ 是非平凡的。

命题 5.1. 假设特化理论 $\mathrm{Th}(M, M_0, \pi)$ 在 $\mathcal{L}^\pi$中具有量词消去。另假设 $\pi : M \to M_0$ 是$\aleph_0$-泛的。那么，$\mathrm{Th}(M, M_0, \pi)$ 的每个 $\kappa$-饱和模型都是 $\kappa$-泛的。

证明。类似于引理 5.5 的证明即可证明关于 $\kappa = \aleph_0$ 的断言。然后可由引理 4.1 得到一般情形。□

现在我们来描述覆盖结构特化的理论 $\mathrm{Th}(\mathcal{C})^\pi$。它由以下公理组成：

T1. Zariski 覆盖结构对 $\mathcal{C}_0 \subsetneq \mathcal{C}$，$\mathcal{C}_0 = (C_0, M_0, \mathrm{pr})$ $\mathcal{C} = (C, M, \mathrm{pr})$ 的完备理论。T2. 特化公理指出：$\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$，对于任意正量词自由的 $\mathcal{L}$-公式 $Q(x)$，

$$\forall c \in \mathrm{Dom}(\pi)\ Q(c) \to Q(c^\pi).$$

T3. $\pi$ 在基类型 $M$ 上的限制 $\pi_M : M \to M_0$ 满足泛特化的完备理论。

T4. The 句子

$$\forall m \in \mathrm{Dom}(\pi)\ \forall a \in \mathrm{pr}^{-1}(\pi(m))\ \exists c \in \mathrm{pr}^{-1}(m)\ \pi(c) = a$$

T5. 该句子

$$\forall c \in \mathrm{Dom}(\pi)\ \forall g \in \mathrm{Dom}(\pi_G)\ g \cdot c \in \mathrm{Dom}(\pi).$$

T6. 句子

$$\forall d\ (d \in \mathrm{Dom}(\pi) \to \mathrm{pr}(d) \in \mathrm{Dom}(\pi))$$

我们将用哥特体字母 $\mathfrak{B}$、$\mathfrak{C}$、$\mathfrak{D}$ 等表示 $\mathrm{Th}(\mathcal{C})^\pi$ 的模型。更准确地说，对于模型 $\mathfrak{D} \models \mathrm{Th}(\mathcal{C})^\pi$，当我们希望强调底层结构时，将写作 $\mathfrak{D} = (\mathcal{D}, \mathcal{D}_0, \pi)$，其中类型 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}_0$ 是带有 $\mathcal{D}_0 \preceq \mathcal{D}$ 的扎里斯基结构的正则覆盖。

每当我们考虑 $\mathrm{Th}(\mathcal{C})^\pi$ 的任意模型 $\mathfrak{D} = (\mathcal{D}, \mathcal{D}_0, \pi)$ 时，我们都会将其与其在 $\emptyset$ 上的所有拓扑类型一并考虑。特别地，这意味着我们将把 $\pi$ 视为以自然方式延拓到这些类型上的特化，通过相应的商映射实现。

设 $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_0, \pi) \subset (\mathcal{D}, \mathcal{D}_0, \pi)$ 是一个子结构。对于 $D$ 中在 $\emptyset$ 上的拓扑类型 $T$，我们将考虑其到 $A$ 的相对化。回忆一下，对于某个 $\emptyset$-可定义的 $W \subseteq D^n$，将 $W$ 相对化到 $A$，得到

$$W_A := W \cap A^n = W(A)$$

其中，$W(A)$ 是 $W$ 在 $A$ 中的实现。那么，$T$ 到 $A$ 的相对化为

$$T_A := W_A/E.$$

引理 5.2。设 $\mathfrak{D} = (\mathcal{D}, \mathcal{D}_0, \pi)$ 和 $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, \mathcal{B}_0, \pi)$ 是 $\mathrm{Th}(\mathcal{C})^\pi$ 的两个模型。设 $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_0, \pi) \subset \mathfrak{D}$ 是一个子结构，且 $i : (\mathcal{A}, \mathcal{A}_0, \pi) \to \mathfrak{B}$ 是一个部分嵌入。那么，嵌入 $i$ 可以扩展到（相对化的）拓扑类型 $T_A$。

证明。设 $T_A = W_A/E$ 是一个相对拓扑排序。由于 $E$ 是一个闭等价关系，它在 $i$下保持不变。作为一个 $\mathcal{L}$-嵌入，$i$ 实际上是一个初等嵌入。因此，对于任意 $a \in W_A$，$i(a) \in W(B)$。于是定义

$$i/E : T_A \to T(B)$$
$$a/E \mapsto i(a)/E.$$

显然，$i/E$ 保持 $T_A$的闭集。显然，$i \cup i/E : \mathcal{A} \cup T_A \to \mathcal{B} \cup T(B)$也是 Zariski 结构的嵌入。为便于

记号起见，我们用 $i$ 代替 $i \cup i/E$。接下来，我们证明 $i$： $\mathcal{A} \cup T_A \to \mathcal{B} \cup T(B)$保持特化关系。

设 $a \in$ 定义域$(\pi) \cap T_A$。那么存在一个 $\alpha \in$ 定义域$(\pi) \cap W_A$，满足 $\alpha/E = a$，使得 $\pi(a) = \pi(\alpha)/E$。于是 $i(\pi(a)) = i(\pi(\alpha)/E) = \pi(i(\alpha))/E = \pi(a)$。□

定理 5.3. 假设基类型的特化理论 Th$(M, M_0, \pi_M)$ 消去了量词。那么 Th$(\mathcal{C})^\pi$，即满足 (CC) 的覆盖结构的特化理论，具有量词消去性质且是完备的。

证明。设 $\mathfrak{D} = (\mathcal{D}, \mathcal{D}_0, \pi)$ 和 $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, \mathcal{B}_0, \pi)$ 是 Th$(\mathcal{C})^\pi$ 的两个模型，且 $\mathfrak{B}$ 是 $|\mathcal{D}|^+$-饱和的。令 $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_0, \pi) \subseteq \mathfrak{D}$ 为一个子结构，并令 $i : (\mathcal{A}, \mathcal{A}_0, \pi) \to \mathfrak{B}$ 为一个部分嵌入。

我们将把 $i$ 扩展为一个嵌入 $\mathcal{A} \cup \mathcal{D}_0 \to \mathfrak{B}$。注意，作为一个$\mathcal{L}^\pi$-嵌入， $i$ 将 $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A} \cap \mathcal{D}_0$ 映射到 $\mathcal{B}_0$。考虑 $i_{|_{A_0}}$： 将 $\mathcal{A}_0 \to \mathcal{B}_0$ 视为 Zariski 语言 $\mathcal{L}$ 中的一个嵌入（不含 $\pi$）。根据假设， $\mathcal{B}_0$ 关于语言 $\mathcal{L}$是$|\mathcal{D}_0|^+$-饱和的。由该语言中的量词消去，$i_{|_{A_0}}$ 可扩展为一个 $\mathcal{L}$-嵌入 $j_0 : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{B}_0$。由于特化在两个结构 $\mathcal{D}_0$ 和 $\mathcal{B}_0$上均为恒等映射，嵌入 $j_0$实际上是一个 $\mathcal{L}^\pi$-嵌入。

那么显然， $i \cup j_0 : \mathcal{A} \cup D_0 \to \mathfrak{B}$ 是一个 $\mathcal{L}^\pi$-嵌入。为简便起见，我们将记 $i : \mathcal{A} \cup D_0 \to \mathfrak{B}$ 而不写作 $i \cup j_0$，并直接假定 $\mathcal{A}$ 包含 $\mathcal{D}_0$。

令 $N :=$ pr$(D)$ $d \in D \setminus A$ 和 $n :=$ pr$(d)$。

由于 Th$(M, M_0, \pi_M)$ 具有量词消去性质，我们可以将 $i$ 扩张为 $\{n\} \cup$，把 pr$(A)$ 映到 pr$(B)$，使之成为初等单射。令 $m := i(n)$。

我们需要找到一个元素 $b \in B$，使得 pr$(b) = m$，并且 $i : d \mapsto b$ 是给定嵌入的扩张。

若 $d \in$ 属于定义域$(\pi)$，则 $n \in$ 属于定义域$(\pi)$，因此 $m \in$ 属于定义域$(\pi)$。只需找到 $b$，使得 $nd$ 和 $mb$ 在 $A$ 上满足相同的 $\mathcal{L}$-类型，并且 $b \in$ 属于定义域$(\pi)$，其中 $\pi(b) = \pi(i(d)) = i(\pi(d))$。

在简单情形下，当 $G$ 有限时，任意 $b \in$ pr$^{-1}(m)$ 都属于定义域$(\pi)$，由引理 2.37 可知。因此，特别地，存在一个满足后一条件的 $b$。

继续讨论有限情形，若 $d \notin$ 属于定义域$(\pi)$，则由引理 2.37 可得 $n \notin$ 属于定义域$(\pi)$，因此 $m \notin$ 属于定义域$(\pi)$。同样，任何满足该 $\mathcal{L}$-类型的 $b \in$ pr$^{-1}(m)$ 都满足此条件。

因此，当 $G$ 为有限时，我们就完成了。

现在假设 $G$为无限，因此根据我们的假设，它是连通的。还剩下两种情况:

情况 1: pr$^{-1}(n)$ 是 $NA$ 上的一个 $\mathcal{L}$-原子。在这种情况下，可以用上述相同的论证，将限制 $i :$ pr$(A) \to$ pr$(B)$ 扩展为嵌入 $i$： $\{n\} \cup$pr$(A) \to$ pr$(B)$。令 $i(n) = m$。

如果 $d \in$ 定义域$(\pi)$，置 $d_0 := \pi(d)$，以及 $b_0 := i(d_0)$。我们将有 $n \in$ 定义域$(\pi)$，从而有 $m \in$ 定义域$(\pi)$。于是 $i(\pi(n)) = \pi(m) =$ pr$(b_0)$。根据公理 T4，存在 $b \in$ pr$^{-1}(m)$，使得 $\pi(b) = b_0$。因此， $dn\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 连同 $dn \mapsto bm$ 是 $i$的扩张。由于 pr$^{-1}(n)$ 是在 $NA$ 上的一个 $\mathcal{L}$-原子，该扩张是一个$\mathcal{L}^\pi$-嵌入。

如果 $d \notin$ 定义域($\pi$)，那么只需找到一个 $b \in \mathrm{pr}^{-1}(m)$ \定义域($\pi$)。根据公理 T5

$$G(N) \not\subseteq \mathrm{Dom}(\pi) \text{ implies } \mathrm{pr}^{-1}(n) \not\subseteq \mathrm{Dom}(\pi). \tag{7}$$

由于这是公理的直接推论，因此用 $m$ 和 $M$ 替代 $n$ 和 $N$ 的类似陈述也成立。

(7) 的左端可以表示为类型

$$p(x) = \{x \in G\} \cup \{\pi(x) \neq t : t \in D_0\}$$

在 $D_0$ 上。相应地，在 $i(D_0)$ 上的 $(B,\ B_0,\ \pi)$ 中的类型为

$$q(x) = \{x \in G\} \cup \{\pi(x) \neq a : a \in i(D_0)\}$$

由于 $(B,\ B_0,\ \pi)$ 是 $|\mathcal{D}|^+$-饱和的，类型 $q(x)$ 在此模型中可实现。于是，根据 (7)，这意味着 $\mathrm{pr}^{-1}(m) \not\subseteq$ 定义域($\pi$)。现在，取一个元素 $b \in \mathrm{pr}^{-1}(m)$ \定义域($\pi$)，并通过发送 $dn \mapsto bm$ 将 $i$ 扩张为 $dnA \to B$。如前所述，这足以说明该扩张是一个 $\mathcal{L}^\pi$- 嵌入。

情况 2：$\mathrm{pr}^{-1}(n)$ 不是 $\mathcal{L}$ 上的原子，并且是关于 $NA$ 的。因此，特别地，对于某个有限元组 $\overline{e} \subset A$，$\overline{e}d$ 在 $\emptyset$ 上的纤维中并非强独立。

断言 1. 我们可以假设 $\overline{e}$ 在 $\emptyset$. 上强独立。换句话说，存在$\overline{e}_1 \subset \overline{e}$，使得 $\overline{e}_1$ 在 $\emptyset$ 上纤维中的强独立，而 $\overline{e}_1 d$在 $\emptyset$.上不是纤维中的强独立

证明. 注意，由引理 3.10，$\dim(d/\overline{e} \cup N) = 0$（等价地，莫利秩）。

设 $\overline{e} = \overline{e}_1\overline{e}_2$，其中 $\overline{e}_1$ 在 $\overline{e}$中是极大强独立的，并且我们假设$\overline{e}_2 \neq \emptyset$。那么 $\overline{e} = \overline{e}_1\overline{e}_2$ 满足定理 3.11 的假设，因此存在一个关于 $N$的公式 $\varphi(\overline{y}_1, \overline{y}_2)$，使得 $\varphi(\overline{e}_1, \overline{y}_2)$是关于 $N \cup \overline{e}_1$ 的原子，由有限多个元组实现，特别是由 $\overline{e}_2$实现。由此可得 $\dim(\overline{e}_2/N \cup \overline{e}_1) = 0$。因此 $\dim(d/\overline{e}_1 \cup N) = 0 < \dim \mathrm{pr}^{-1}(n)$。因此，$d\overline{e}_1$ 在 $\emptyset$上不是纤维中的强独立。□

于是由定理 3.11 及连续连接假设，存在一个有限子群 $H \leq G$、$\emptyset$-可定义的闭子集 $D^0$ 和 $D^\dagger$，以及$\emptyset$-可定义的态射 $f\colon D^0 \to C/H$ 和 $f^\dagger\colon D^\dagger \to M$，使得

$$\hat{d} = f(s_d, \overline{k}, n, \overline{e}) \text{ and } s_d = f^\dagger(\overline{k}, n, \overline{e}, \hat{d})$$

ˆ其中 $\overline{k} =$ pr($\overline{e}$)、$d = H \cdot d$，且 $s_d$是 $N$中的某个元组。

由于 Th($M, M_0, \pi_M$) 具有量词消去性质，可以将 $i$ 延拓为一个嵌入 $ns_d$pr($A$) $\to Z$。这又将 $i$ 延拓为一个 $\mathcal{L}^\pi$-嵌入$ns_d A \to B$。设 $i(s_d) = r$、$i(\overline{k}) = \overline{l}$、$i(n) = m$，且 $i(\overline{e}) = \overline{a}$。由于 $D^0$ 是一个 $\emptyset$- 可定义的闭集，我们有 $\models D^0(r, \overline{l}, m, \overline{a})$。令 ˆ$b := f(r, \overline{l}, m, \overline{a})$。

现在我们将$\hat{d}$推拓推到 $\hat{d}/\hat{H}$ 中，通过引理 5.2 中的典范商映射。我们声称，（$i$ 的扩张）将 $d \in Ad/H$ 映射到 $b$。在引理 5.2 中，我们已证明 $i\colon A \cup (Ad/H) \to \mathfrak{B}$ 是一个 $\mathcal{L}$-嵌入，因此保持 $A^n \times (Ad/H)^m$的闭子集。特别是，它会保持 $f$ 和 $f^\dagger$的图；由于 $f$ 是一个态射，这些图是闭集。因此我们得到

$$i(\hat{d}) = i(f(s_d, \overline{k}, n, \overline{e})) = f(r, \overline{l}, m, \overline{a}) = \hat{b}$$
$$i(s_d) = i(f^\dagger(\hat{d}, \overline{k}, n, \overline{e})) = f(\hat{b}, \overline{l}, m, \overline{a}) = r.$$

ˆ根据构造， $b = H \cdot b$ ，其中某个 $b$。

若 $d \in \mathrm{Dom}(\pi)$，则置 $\pi(d) = d_0$，且 $i(d_0) = b_0$。于是我们还可看到，ˆˆˆˆˆˆˆ$\pi(d) = d_0$ 且 $i(d_0) = b_0$。我们断言 $b \in \mathrm{Dom}(\pi)$ 且 $\pi(b) = b_0$。否则，将ˆˆ $\pi$ : $B/H \to B_0/H$ 扩展为 $\pi'$ : $B/H \to B_0/H$ ，定义 $\pi'(b) = b_0$。

命题 2. $\pi' : B/H \to B_0/H$ 是一个特化。

ˆˆ 证明。设 $S \subset (B/H)^n$ 是一个闭子集。假设 $S(b, c)$，且 $b, c \in \mathrm{Dom}(\pi')$。根据构造， $S = T/H$ 属于某个 $B$ 的闭集 $T$。因此，对所有 $b \in b$ 和 $\gamma \in H \cdot c$，ˆ $T(b, \gamma)$。另注意， $T/G$ 是 $M$ 的一个闭集。于是， $T/G(m, v)$，其中 $\mathrm{pr}(b) = m$ 且 $\mathrm{pr}(\gamma) = v$。于是 $T/G(\pi_M(m)\ \pi_M(v))$。ˆ 因此， $T(b_0, \gamma_0)$。于是 $S(b_0, \hat{}c_0)$。□

命题 3. $\pi' \cup \pi$ : $B \cup B/H \to B_0 \cup B_0/H$ 是一个特化。

证明。显然。 □

命题 4. $\pi' \cup \pi$ : $B \cup B/H \to B_0 \cup B_0/H$ 可以扩展为一个特化 $\pi''$ : $B \cup B/H \to B_0 \cup B_0/H$ ，使得 $H \cdot b \subset$ 定义域($\pi''$)。

证明。注意到 $B \to B/H$ （因此 $B_0 \to B_0/H$）是一个轨形，其结构群为 t $H$。现在，利用与引理 2.37 的证明中所使用的论证类似的方法，可以证明 $\pi \cup \pi'$ 可以扩展为 $\pi''$ ，使得 $H \cdot b \subset$ 定义域($\pi''$)整个纤维 $H \cdot b$。□

这特别意味着： $\pi$ : $B \to B_0$ 可以扩展为 $H \cdot b$。但是 $\pi$ 是 $\kappa$-通用的，因此是极大的。所以 $H \cdot b \subset$ 定义域($\pi$)。于是，特别地，存在一个 $b' \in H \cdot b$ ，使得 $\pi(b') = b_0$。现在，我们可以通过 $\sigma(d) = b'$ 将 $\sigma$ 扩展为 $d$ 。

ˆ 若 $d \notin$ 定义域($\pi$)，则我们断言 $b \cap$ 定义域($\pi$) $= \emptyset$。首先考虑 $\mathrm{pr}(d) = n \in$ 定义域($\pi$) 的情形。由公理 T4，存在一个 $d' \in \mathrm{pr}^{-1}(n) \cap$ 定义域($\pi$)。此外，还存在一个 $g \in G$ 使得 $g \cdot d' = d$。由公理 T5， $g \notin$ 定义域($\pi$)。我们可以假设 $d'$ 和 $g$ 都属于 $\mathcal{A}$。

考虑类型

$$\mathrm{p}(x) = \{x \in G\} \cup \{\pi(x) \neq a : a \in D_0\} \cup \{x \cdot d' = d\}.$$

由上段可知，它在 $\mathfrak{D}$ 中实现。

考虑相应的类型

$$\mathrm{q}(x) = \{x \in G\} \cup \{\pi(x) \neq a : a \in i(D_0)\} \cup \{x \cdot b' = b\}$$

在 $\mathfrak{B}$ 中。

由稳定嵌入性，我们可以假设 q($x$) 仅含有来自 $M$ 的参数。由 Th($M$, $M_0, \pi_M$) 的量词消去可知，它也是相容的。由 $\mathfrak{B}$ 的饱和性可知，q($x$) 在 $M$ 中实现。由此可得 ˆ$b \notin$ 定义域($\pi$)。事实上，还可得 $b \cap$定义域($\pi$) $= \emptyset$。因此，由 $dn \mapsto bm$ 给出的从 $i$ 到 $dn\mathcal{A} \to \mathfrak{B}$ 的扩张是一个 $\mathcal{L}^\pi$-嵌入。

如果 $n \notin \mathrm{Dom}(\pi)$，则 $m \notin \mathrm{Dom}(\pi)$。于是可得 $\mathrm{pr}^{-1}(m) \cap \mathrm{Dom}(\pi) = \emptyset$。随后论证同上。

这就证明了量词消去。接下来我们证明 Th($\mathcal{C}$)$^\pi$ 是完备的。考虑 ($\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_0$, id)，其中 id : $\mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_0$ 是恒等映射。选取一个元素 $m \in M \setminus M_0$，并将其连同整个纤维 $\mathrm{pr}^{-1}(m)$ 一起加入 $C_0$ 。于是 ($\mathcal{C}_0\, \mathrm{pr}^{-1}(m) m, \mathcal{C}_0, \pi$)，其中 $\pi$ : $\mathcal{C}_0\, \mathrm{pr}^{-1}(m)$ $m \to \mathcal{C}_0$ 是 $\pi$ : $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ 的限制。因此 ($\mathcal{C}_0\, \mathrm{pr}^{-1}(m) m, \mathcal{C}_0, \pi$) 是一个素子结构

属于理论 Th($\mathcal{C}$)$^\pi$。结合量词消去，这意味着 Th($\mathcal{C}$)$^\pi$ 是完备的。□

推论 5.4. 设 $\mathcal{C} = (C, M, \mathrm{pr})$ 是满足 (CC) 的正则覆盖，并假设 $M$ 携带与代数闭域上的代数簇相关联的标准 Zariski 结构。那么 Th($\mathcal{C}$)$^\pi$ 是完备的，并且可以消去量词。

引理 5.5. Th($\mathcal{C}$)$^\pi$ 的任意 $\aleph_0$-饱和模型都是 $\aleph_0$-通用的。

证明. 设 $(\mathcal{D}, \mathcal{D}_0, \pi)$ 是 Th($\mathcal{C}$)$^\pi$ 的一个 $\aleph_0$-饱和模型。设 $\mathcal{D}' \succeq \mathcal{D}$ 是关于 Zariski 语言 $\mathcal{L}$（不含 $\pi$）的一个初等扩张。设 $A \subset \mathcal{D}'$ 是一个有限集，且 $\pi' : A \cup \mathcal{D} \to \mathcal{D}_0$ 是延拓 $\pi$ 的特化。不失一般性，假设对于每个 $a \in A \cap \mathrm{Dom}(\pi)$，都有 $\pi'(a) \in A$ 。

将 $A \setminus \mathcal{D}$ 枚举为 $\{a_i : i < k\}$，其中 $k \leq |A|$。令 $A_0 = A \cap \mathcal{D}$ 和 $\sigma_0 = \mathrm{id} : A_0 \to \mathcal{D}$。定义 $A_j := A_0 \cup \{a_i : i < j\}$。

令 $i = j + 1$，并假设已构造了一个部分初等嵌入 $\sigma_j : A_j \to \mathcal{D}$ ，其在 $A_0$ 上且对所有 $a \in A_j \cap \mathrm{Dom}(\pi')$ 满足 $\pi'(a) = \pi(\sigma(a))$。考虑 $\mathcal{L}^\pi$ 类型

$$\mathrm{p}(x) = \{\varphi(x, \sigma_j(\overline{a})) : \mathcal{D}' \models \varphi(b_i, \overline{a}), \text{ and } \overline{a} \in A_j\}.$$

由于 $A_j$ 是有限的，且该结构是 $\aleph_0$-饱和的，此类型由 $(\mathcal{D}, \mathcal{D}_0, \pi)$ 中某个 $b_i$ 实现。定义 $\sigma_i(a_i) = b_i$。注意到 $\pi'(a_i) \in A_0$，设 $\pi'(a_i) = \alpha$。则 $\pi(x) = \alpha \in \mathrm{p}(x)$。因此 $\pi(\sigma_i(a_i)) = \pi(b_i) = \alpha$。由此可知， $\sigma_i$ 是一个具有所需性质的部分初等映射。因此，通过归纳我们完成了证明，从而证明 $\pi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}_0$ 是 $\aleph_0$-通用的。□

推论 5.6. 任意 $\kappa$-饱和模型 Th($\mathcal{C}$)$^\pi$ 都是 $\kappa$-通用的。

证明. 由引理 5.5 和引理 4.1 得出。 □

## 6. The 1996-Example of a non-algebraic Zariski geometry as a Regular Cover with CC

我们在此考察第 [8], section 10 节中引入的一个非经典扎里斯基结构的例子，并证明它满足 (CC)。

设 $M$ 是一维 Zariski 几何，且 $B \leq ZAut(M)$ 是一个通过扎里斯基自同构在 $M$ 上自由作用的群。设 $B^*$ 是 $B$ 的一个具有有限核 $G$的群扩张：

$$1 \to G \to B^* \to B \to 1$$

设 $C$ 是一个集合，使得 $B^*$ 以与 $B$ 作用于$M$相同的方式在其上自由作用。也就是说， $B^*$ 轨道的数量与 $G$ 轨道的数量相同。

对于 $c, d \in C$ ，定义 $c \equiv d$ ，当且仅当存在一个 $h \in G$ 使得 $h \cdot c = d$。显然， $\equiv$ 是一个在 $B^*$ 的作用下不变的等价关系。此外， $\equiv$是闭集（因而是可定义的）。因此， $G$ 在商 $C/\equiv$ 上的作用是平凡的，于是 $B^*$ 的作用将在这个商上给出 $B$ 的作用。根据构造， $C/\equiv$ 与 $M$ 作为 $B$-集同构，例如由映射 pr 给出。映射 pr 可以自然地延拓为 $\mathrm{pr} : C_0 \to M_0$ ，使得对于所有 $g^* \in B^*$， $\mathrm{pr}(g^* c) = p(g^*)\,\mathrm{pr}(c)$，其中 $p : B^* \to B$ 是群同态。

然后，通过沿 pr 对 $M_0^n$ 的闭集取拉回，并将 $G^*$ 中元素的图作为基本关系（属于相关语言），再将这些谓词的布尔组合声明为闭集，从而使 $C_0$ 成为一个扎里斯基几何。

设 $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in C^n$。那么，当且仅当对于任意 $i, j$， $b_i$ 不在 $b_j$ 的轨道中时， $\overline{b}$ 在 $\emptyset$上纤维中的强独立。

现在设 $\overline{b} \in C^n$，写作 $\overline{b} = b_1 b_2$，其中 $b_1$ 是在 $\emptyset$ 上纤维中极大强独立的部分，而 $b_2$ 是其余部分。设 $\varphi(b_1, C^k)$ 是 $b_2$ 在$Mb_1$上的轨迹。根据推论 ??，存在一个 $\emptyset$-可定义函数 $f\colon D \to C^k/H$，其中$H < G^k$, $\{s_b m_1 m_2\} \times \mathrm{pr}^{-1}(m_1) \subseteq D$, $m_1 = \mathrm{pr}(b_1)$ $m_2 = \mathrm{pr}(b_2)$，且 $s_b \subset M$ 是一个参数。函数 $f$ 定义为

$$\exists y_2 (\varphi(x, x_1, x_2, y_1, y_2) \ \& \ z = H \cdot y_2)$$

而 $D$ 定义为

$$(x, x_1, x_2, y_1) \in D \Leftrightarrow \exists y_2 \, \{\varphi(x, x_1, x_2, y_1, y_2) \ \& \ \forall y_2' \, (\varphi(x, x_1, x_2, y_1, y_2') \to y_2' \in H \cdot y_2)\}$$

在下一段中，我们将看到参数 $s_b$ 实际上并非必要。在后续的分析中，我们甚至会得出结论： $m_1, m_2$ 作为参数也并非必要。

我们声称，轨迹 $\varphi(b_1, C^k)$ 是单元素组 $\{b_2\}$。记 $b_1 = (b_{11}, \ldots, b_{1n})$ 和 $b_2 = (b_{21}, \ldots, b_{2k})$。由于 $b_1 b_{2i}$，对所有 $i = 1, \ldots, k$ 而言都在纤维中依赖，因此存在一个 $b_{1j} \in b_1$ 和一个 $g_{ij} \in B^*$，使得 $g_{ij} \cdot b_{1j} = b_{2i}$。这一对 $g_{ij}$ 和 $b_{1j}$ 唯一确定 $b_{2i}$。因此， $b_2$ 属于 $b_1$ 的可定义闭包。此外，由于 $B^*$ 中元素的图都是闭集，我们看到 $\{b_2\}$ 是一个 $b_1$-闭集（也就是说，它是一个仅以 $b_1$ 为参数的闭集）。因此， $b_2$ 的轨迹 $\varphi(b_1, C^k)$ 是单元素组 $\{b_2\}$。因此，使 $H \cdot b_2 = \varphi(b_1, C^k)$ 成立的 $(B^*)^k$ 的唯一子群 $H$ 是平凡子群。

由上述分析可知，

$$\models \forall x, x_1, x_2, y_1, y_2 \, (\varphi(x, x_1, x_2, y_1, y_2) \to \bigwedge_{i,j} g_{ij}(y_{1j}) = y_{2i}).$$

这意味着

$$\models \forall x, x_1, x_2, y_1 \, \exists! y_2 \, (\varphi(x, x_1, x_2, y_1, y_2)).$$

由此观察，推论 3.12 表明存在一个 $\emptyset$-可定义的 $f : D \to C^k$，由 $\varphi(x, x_1, x_2, y_1, y_2)$ 给出，且 $D = M^t \times C^n$，其中 $t = n + k + |x|$。由于 $D$ 和 $C^k$ 是预光滑的，且 $f$ 具有闭图，根据闭图定理（见 [8, 引理 5.5]）， $f$ 是连续的。因此它是一个态射。

为了进一步简化，可以取 $D^0 := \{s_b m_1 m_2\} \times \mathrm{pr}^{-1}(m_1)$，它是有限的，因此也是 $M^t \times C^n$ 的一个闭子集。并且可以直接证明，对于所有 $n$， $f \times \mathrm{id}$： $D^0 \times C^m \to C^n \times C^m$ 都是连续的。因此，它再次是一个态射。

此外，正如上述分析所显而易见的，参数 $s_b$、 $m_1$、 $m_2$ 并非必要。正如我们已经证明的， $b_2$ 的 $Mb_1$-轨迹与 $b_1$ 上 $b_2$ 的轨迹相同。但是， $b_2$ 的 $b_1$-轨迹由 $\bigwedge_{i,j} g_{ij}(y_{1j}) = y_{2i}$ 给出。

这定义了一个函数

$$C^n \to C^k$$
$$b_1 \mapsto b_2$$

其中 $b_{2i}$ 由相应的 $b_{1j}$ 和 $g_{ij}$得到。

注 6.1。由于这个例子中不需要参数 $s_b$，函数 $f^\dagger$ 似乎不会发挥作用。事实上，对于这种结构，只需分析类型为 $g_{ij}(y_{1j}) = y_{2i}$的相关关系，就足以证明特化可以从基底扩展，而无需使用 $f^\dagger$。证明见 [4,定理 4.4.7]。

尽管函数 $f^\dagger$ 在这种结构中不起作用，我们仍将证明存在这样一个函数，使该结构满足连续连接假设。固定一个元素 $s_b \in M$。尽管我们已经说明情况简单得多，为了论证方便，我们仍可以将函数 $f$视为把任意 $(s_b, m_1, m_2, \beta_1) \in D_0$ 映射到唯一的 $\beta_2 \in \mathrm{pr}^{-1}(m_2)$。定义 $f^\dagger\colon D^\dagger \to M$为 $f^\dagger(m_1, m_2, \beta_1, \beta_2) = s_b$，其中$D^\dagger = \{m_1 m_2\} \times \mathrm{pr}^{-1}(m_1 m_2)$。由于 $f^\dagger$ 是常函数，显然是一个态射。

设 $(s_b, m_1, m_2, \beta_1) \in D_0$，则 $f(s_b, m_1, m_2, \beta_1) = \beta_2$，其中 $\beta_1 \in \mathrm{pr}^{-1}(m_1)$ 且 $\beta_2 \in \mathrm{pr}^{-1}(m_2)$。因此，$(m_1, m_2, \beta_1, \beta_2) \in D^\dagger$，且 $f^\dagger(m_1, m_2, \beta_1, \beta_2) = s_b$。

## References

[1] G. Ahlbrandt，M. Ziegler，《准有限公理化的完全范畴理论》，《纯粹与应用逻辑年刊》 30 1986 63 82 ( ) - G. Ahlbrandt，M. Ziegler，《（$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$）$^{\omega}$ 有何特殊之处》，《数学逻辑文档》31（1991）115-132。[3] U. Efem，《代数闭赋值域的特化》（已投稿至《莫斯科数学杂志》），arXiv: 1304 3699 。U. Efem，《特化理论》，哲学博士论文，[2][4] 牛津大学，2019年。[5] Henson CW。2010年春季数学571课程讲义：模型论。讲义，2010年。可访问：http://people.math.sc.edu/mcnulty/modeltheory/Henson.pdf [6] D. Haskell、E. Hrushovski、H. D. Macpherson，《代数闭赋值域中的可定义集：虚元消去》，《纯粹与应用数学杂志》597（2006），175–236。[7] E. Hrushovski，《单维理论》，载于《逻辑与数学基础研究》（编者：H. D. Ebbinghaus），逻辑学术讨论会，第376页，北荷兰，阿姆斯特丹，1987年。[8] E. Hrushosvki、B. Zilber，《扎里斯基几何》，《美国数学会杂志》第9卷第1期，1996年1月。[9] M. Junker，《扎里斯基群中的完备性》，《以色列数学杂志》109，298，1999年，273页。-[10] M. Junker，《扎里斯基几何与扎里斯基群》，博士论文，巴黎第七大学丹尼斯·狄德罗大学，1996年。[11] D. Marker，《扎里斯基几何》，载于：E. Bouscaren，编，《模型论与代数几何》。施普林格，1999年。第2版。[12] A. Onshuus、B. Zilber，《普遍特化的一阶理论》，预印本，（Modnet 预印本服务器第355号：http://www.logique.jussieu.fr/modnet/Publications/Preprint%20server/）[13] V. Solanki、D. Sustretov、B. Zilber，《量子简谐振子作为扎里斯基几何》，《纯粹与应用逻辑年刊》165（2014），1149-1168。

[14] van den Dries L. 模型论事实在（半）代数几何中的一些应用。《Indagationes Mathematicae》（会议录）1982年；第85卷，第4期：397-401。[15] Pillay A. 《几何稳定性理论》。英国牛津：牛津大学出版社，2002年。[16] D. Sustretov, 《非代数扎里斯基几何》，博士论文，牛津大学，2012年。[17] B. Zilber, 《不可数范畴理论》，美国数学学会数学专著译丛第117卷，美国罗得岛州普罗维登斯：美国数学学会，1993年。[18] B. Zilber, 《一类量子扎里斯基几何》，载于《代数与分析中的模型论及其应用 I、II》（编者：Z. Chatzidakis、H.D. Macpherson、A. Pillay、A.J. Wilkie），剑桥大学出版社，剑桥，2008
[19] B. Zilber, 《非交换扎里斯基几何及其经典极限》，Confl. Math. 2（2010），265-291。[20] Zilber B. 《扎里斯基几何》。英国剑桥：剑桥大学出版社，2010年。