arXiv:2302.08554v1 [cs.AI] 30 Jan 2023

最大乘积/卢卡西维奇模糊关系方程系统第二成员所对应的切比雪夫距离

预印本

Ismaïl Baaj 阿尔图瓦大学，法国国家科学研究中心，CRIL，法国朗斯 F-62300 baaj@cril.fr

摘要

本文研究最大乘积模糊关系方程系统和最大-卢卡西维奇模糊关系方程系统的不一致性。对于一个采用 L_∞ 范数的最大 – 最小模糊关系方程系统 $A\square^{\max}_{\min}x = b$，Baaj（2023）表明，切比雪夫距离 $\Delta = \inf_{c\in\mathcal{C}} \|b - c\|$（其中 $\mathcal{C}$ 是由相同矩阵 A 定义的相容系统的第二成员集合）可根据矩阵 A 的分量及其第二成员 b，通过显式解析公式计算。本文给出与 Baaj（2023）中的公式类似的解析公式，用于计算最大乘积模糊关系方程系统的第二成员所对应的切比雪夫距离，以及最大-卢卡西维奇模糊关系方程系统的第二成员所对应的切比雪夫距离。

关键词：模糊集理论；模糊关系方程组；切比雪夫逼近 s

1 引言

基于模糊关系方程组的人工智能（AI）应用，源于 Sanchez（1976，1977）关于求解 max – min 模糊关系方程组的开创性工作。Sanchez（1976）给出了系统相容（即存在解）的充要条件。Sanchez（1977）证明，若系统相容，则它存在一个最大解和许多极小解，随后还描述了该系统的完整解集。

然而，这些系统的不一致性仍然难以处理。尽管大多数研究方法都探讨了如何确定不相容系统的近似解（Di Nola 等人，1989年；Gottwald，1986；Klir 和 Yuan，1994；Pedrycz，1983，1990a；Wangming，1986；Wen 等人，2022；Wu等人，2021，2022；Xiao 等人，2019），Pedrycz 在（Pedrycz，1990b）中提出了另一种策略。对于一个不相容系统，Pedrycz 建议对其第二成员稍作修改，以获得相容系统。一些作者为这一方法提出了算法（Cuninghame-Green 和 Cechlárová，1995年；Li 和 Fang，2010年）。在一篇近期预印本（Baaj，2023）中，作者针对一个 max – min 模糊关系方程不相容系统 $A\square^{\max}_{\min}x = b$，给出了一个显式解析公式，利用 L_∞ 范数计算切比雪夫距离 $\Delta = \inf_{c\in\mathcal{C}} \|b - c\|$，其中 $\mathcal{C}$ 是由相同矩阵 A 定义的相容系统的第二成员集合。由于第二成员的切比雪夫逼近 b 是满足 $\|b - c\| = \Delta$ 且系统 $A\square^{\max}_{\min}x = c$ 为相容系统的向量c（Cuninghame-Green 和 Cechlárová，1995年；Li 和 Fang，2010年），Δ 的公式使（Baaj，2023）的作者得以完整描述 b 的切比雪夫逼近集的结构。随后，他描述了所研究的不相容系统的近似解集，即相容系统 $A\square^{\max}_{\min}x = c$ 的解集，其中 c 是 b 的切比雪夫逼近。

在我们看来，研究这些结果如何推广到最大 –T 模糊关系方程系统中是很有意义的，其中 T 是连续三角范数。众所周知，许多应用都基于采用最大乘积合成或最大-Lukasiewicz 合成的模糊关系方程系统，例如（Di Nola 等人，1989年；Hirota 和 Pedrycz，1999年；Nobuhara 等人，2006年）。

本文研究最大乘积模糊关系方程系统和最大-Lukasiewicz 模糊关系方程系统的不一致性问题。我们将幂等应用 F（见式（11））的定义及其性质推广到最大 $-T$ 模糊关系方程系统，其中 T 是连续三角范数。该应用由 Baaj（2023）提出，最初是对 Sanchez（1976）的结果进行改写，用于检验：在固定矩阵和给定向量作为第二成员的条件下定义的最大 – min 模糊关系方程系统是否为相容系统。该应用的幂等性和右连续性 F 使我们得以将针对最大 – min 合成的一个基本结果（Cuninghame-Green 和 Cechlárová，1995年的定理1）推广到最大 $-T$ 合成（定理1），并求得此类系统第二成员的最大切比雪夫逼近（推论1）。

随后，我们给出一个显式解析公式，用于计算与最大乘积模糊关系方程系统的第二成员相关的切比雪夫距离（定理4）。对于最大-卢卡西维奇模糊关系方程系统，也给出了类似的解析公式（定理5）。每个切比雪夫距离均根据所考察系统的矩阵分量和第二成员计算得出。

本文结构如下。在第2节中，我们首先回顾求解连续三角范数为 T 的最大 $-T$模糊关系方程系统所需的背景知识。我们将（Baaj，2023）中的幂等应用 F 扩展到最大 $-T$模糊关系方程系统。我们回顾与最大 $-T$ 模糊关系方程系统的第二成员相关的切比雪夫距离的定义，并将一个针对最大 – 最小合成给出的基本结果（Cuninghame-Green 和 Cechlárová，1995年，定理1）推广到此类系统。在第3节中，我们研究两个不等式的求解问题，它们涉及计算与最大乘积模糊关系方程系统的第二成员相关的切比雪夫距离，以及与最大-卢卡西维奇模糊关系方程系统的第二成员相关的切比雪夫距离。在第4节中，我们给出计算这两个切比雪夫距离的显式解析公式。最后，我们总结并展望未来方向。

我们的结果通过示例加以说明（请注意，在所有示例中，数值均四舍五入到小数点后两位）。

2 背景

在本节中， T表示一个连续三角范数。

下面，我们首先回顾连续三角范数及其相关剩余蕴涵算子的定义和性质。对于由通常乘积定义的三角范数，我们明确给出其相关剩余蕴涵算子，以及与 Lukasiewicz 三角范数相关的剩余蕴涵算子。

随后，我们将 Baaj（2023）中引入的幂等应用 F 扩展到 max $-T$ 模糊关系方程系统，用于检验由固定矩阵定义、并以给定向量作为第二成员的 max – min 模糊关系方程系统是否为相容系统。最后，我们回顾模糊关系方程系统的第二成员所对应的切比雪夫距离的定义，并将 Cuninghame-Green 和 Cechlárová（1995）针对 max – min 复合证明的一项基本结果扩展到此类系统。

2.1 记号

对于极大 – 小模糊关系方程系统的情形，以下记号见于（Baaj，2023），本文沿用这些记号。

用 $[0,1]^{n\times m}$ 表示大小为（n， m）的矩阵集合，即具有 n 行和 m 列、其元素属于 $[0,1]$的矩阵集合。特别地：

- $[0,1]^{n\times 1}$ 表示具有 n 个分量的列向量集合，
- $[0,1]^{1\times m}$ 表示具有 m 个分量的行矩阵集合。

在集合 $[0,1]^{n\times m}$上，我们采用由 $\leq$ 定义的序关系：

$$A \leq B \quad \text{iff we have} \quad a_{ij} \leq b_{ij} \quad \text{for all} \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m,$$

其中 $A = [a_{ij}]_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m}$ 和$B = [b_{ij}]_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m}$。

对于 x、 y、 z、 u、 $\delta \in [0,1]$， 我们定义：

- $x^+ = \max(x, 0)$,
- $\overline{z}(\delta) = \min(z + \delta, 1)$,
- $\underline{z}(\delta) = \max(z - \delta, 0) = (z - \delta)^+$

并且在 $[0,1]$ 中有以下等价关系：

$$| x - y | \leq \delta \Longleftrightarrow \underline{x}(\delta) \leq y \leq \overline{x}(\delta). \tag{1}$$

对于我们的研究，给定列向量 $b = [b_i]_{1 \leq i \leq n}$ 和一个数 $\delta \in [0,1]$，我们定义两个列向量：

$$\underline{b}(\delta) = [(b_i - \delta)^+]_{1 \leq i \leq n} \quad \text{and} \quad \overline{b}(\delta) = [\min(b_i + \delta, 1)]_{1 \leq i \leq n}. \tag{2}$$

向量 $\underline{b}(\delta)$ 和 $\overline{b}(\delta)$ 已在例如（Cuninghame-Green 和 Cechlárová，1995年）（使用了其他记号）以及（Li 和 Fang，2010年）中引入。
于是，由（1）可得，对任意 $c = [c_i]_{1 \leq i \leq n} \in [0,1]^{n \times 1}$：

$$\|b - c\| \leq \delta \Longleftrightarrow \underline{b}(\delta) \leq c \leq \overline{b}(\delta). \tag{3}$$

其中 $\|b - c\| = \max_{1 \leq i \leq n} | b_i - c_i |$。

2.2 三角范数及其相关的剩余蕴涵算子

三角范数（三角范数，参见（Klement 等人，2013年））是一个映射 T：$[0,1] \times [0,1] \mapsto [0,1]$，它满足 s:

T满足交换律：$T(x,y) = T(y,x)$，T满足结合律：$T(x,T(y,z)) = T(T(x,y)$ $z)$，T关于第二个变量单调递增：$y \leq z \implies T(x,y) \leq T(x,z)$，

T以 1 为幺元：$T(x,1) = x$。

与三角范数 T相关联的剩余蕴涵算子是映射 $\mathcal{I}_T$：$[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$：$(x,y) \mapsto \mathcal{I}_T(x,y) = \sup\{z \in [0,1] \mid T(x,z) \leq y\}$。
主要 pro 质为连续三角范数 T 的剩余蕴涵算子 $\mathcal{I}_T$ 的主要性质如下：对于所有 a、$b \in [0,1]$，我们有 ve:

- $\mathcal{I}_T(a,b) = \max\{z \in [0,1] \mid T(a,z) \leq b\}$。因此，$T(a,\mathcal{I}_T(a,b)) \leq b$。
- $\mathcal{I}_T$ 关于其第一个自变量左连续且单调递减，同时关于其第二个自变量右连续且单调递增。

- 对于所有 $z \in [0,1]$，我们有：

$$T(a,z) \leq b \Longleftrightarrow z \leq \mathcal{I}_T(a,b).$$

- 我们有 $b \leq \mathcal{I}_T(a,T(a,b))$。

由通常乘积定义的三角范数记为 T_P。其对应的剩余蕴涵算子为Goguen乘积，且有：

$$T_P(x,y) = x \cdot y \quad ; \quad \mathcal{I}_{T_P}(x,y) = x \underset{GG}{\longrightarrow} y = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq y \\ \frac{y}{x} & \text{if } x > y \end{cases}. \tag{4}$$

Lukasiewicz三角范数记为 T_L，且有：

$$T_L(x,y) = \max(x + y - 1, 0) = (x + y - 1)^+ \quad ; \quad \mathcal{I}_{T_L}(x,y) = x \underset{L}{\longrightarrow} y = \min(1 - x + y, 1). \tag{5}$$

在本节余下部分中，我们设定一个记为 T 的连续三角范数。

2.3 求解max $-T$模糊关系方程系统

设 $A = [a_{ij}] \in [0,1]^{n \times m}$ 为一个大小为 (n,m) 的矩阵，$b = [b_i] \in [0,1]^{n \times 1}$ 为一个具有 n 个分量的向量。与 (A,b) 相关联的max $-T$模糊关系方程系统具有如下形式：

$$(S) : A \square_T^{\max} x = b, \tag{6}$$

其中，$x = [x_j]_{1 \leq j \leq m} \in [0,1]^{m \times 1}$ 是一个由 m 个分量组成的未知向量，算子$\square_T^{\max}$是采用连续三角范数 T 作为乘法、采用 max 作为加法的矩阵乘积。等价地，该系统也可以写为：

$$\max_{1 \leq j \leq m} T(a_{ij}, x_j) = b_i, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

关于模糊关系方程组的研究采用两种等价的记法，它们在未知部分和第二成员的表示方式上有所不同：可以表示为列向量，也可以表示为行向量。转置映射使我们能够在两种记法之间转换。

为检验系统 (S)（见 (6)）是否相容，我们计算如下向量：

$$e = A^t \square_{\mathcal{I}_T}^{\min} b, \tag{7}$$

其中， A^t 是 A 的转置，矩阵乘积$\square_{\mathcal{I}_T}^{\min}$以剩余蕴涵算子 $\mathcal{I}_T$ （与 T相关）作为乘法，以 min 作为加法。向量 e 是系统（S）的潜在最大解。

得益于 (Sanchez, 1976) 关于求解最大 – min 模糊关系方程系统的开创性工作，以及 (Pedrycz, 1982, 1985) 和 (Miyakoshi and Shimbo, 1985)（使用了 min 以外的其他三角范数），我们得到以下等价关系：

$$A \square_T^{\max} x = b \text{ is consistent} \iff A \square_T^{\max} e = b. \tag{8}$$

在本小节余下部分，我们将给出命题1，并说明其第二个陈述的证明蕴含等价关系 (8)。

系统（S）的解集记为：

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(A, b) = \{v \in [0,1]^{m\times 1} \mid A \square_T^{\max} v = b\}. \tag{9}$$

解集的结构由（Sanchez，1977）（采用 max – min 合成）以及（Di Nola 等，1982、1984、1989）进行了描述。

例1。设：

$$A = \begin{bmatrix} 0.31 & 0.49 & 0.76 \\ 0.34 & 0.9 & 0.15 \\ 0.94 & 0.47 & 0.05 \end{bmatrix} \text{ and } b = \begin{bmatrix} 0.73 \\ 0.84 \\ 0.61 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

为检验系统 $A \square_{T_P}^{\max} x = b$ 和 $A \square_{T_L}^{\max} x = b$ 是否相容，我们计算它们各自的潜在最大解：

$$e_{T_P} = A^t \square_{\mathcal{I}_{T_P}}^{\min} b = \begin{bmatrix} 0.65 \\ 0.93 \\ 0.96 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad e_{T_L} = A^t \square_{\mathcal{I}_{T_L}}^{\min} b = \begin{bmatrix} 0.67 \\ 0.94 \\ 0.97 \end{bmatrix}.$$

这两个系统是相容的，因为：

$$A \square_{T_P}^{\max} e_{T_P} = A \square_{T_L}^{\max} e_{T_L} = b.$$

在（Baaj，2023）中，作者引入了一种幂等应用，记作 F，用于检验由固定矩阵 $A = [a_{ij}]_{1\le i\le n,\ 1\le j\le m} \in [0,1]^{n\times m}$ 和作为第二成员的给定向量 $c \in [0,1]^{n\times 1}$定义的 max $-$min 模糊关系方程系统是否相容。该应用是对（Sanchez，1976）结果的重新表述。对于采用连续三角范数 T的 max $-T$模糊关系方程系统，我们将该应用 F的定义扩展如下：

$$F : [0,1]^{n\times 1} \longrightarrow [0,1]^{n\times 1} : c = [c_i] \mapsto F(c) = [F(c)_i] \tag{11}$$

其中：

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ F(c)_i = \max_{1\le j\le m} T(a_{ij}, \min_{1\le k\le n} \mathcal{I}_T(a_{kj}, c_k)). \tag{12}$$

对于 max – min 模糊关系方程系统，(Baaj，2023) 中给出的应用 F 的性质同样适用于 max $-T$ 模糊关系方程系统：

命题1。

1. $\forall c \in [0,1]^{n\times 1}$, $F(c) \le c$. 2. 对任意向量 $c \in [0,1]^{n\times 1}$，有：3. F 是幂等的，即 $\forall c \in [0,1]^{n\times 1}$, $F(F(c)) = F(c)$。4. F 是单调递增且右连续的。

$F(c) = c \iff$ *the system* $A \square_T^{\max} x = c$ *is consistent.*

应用 F在点 $c \in [0,1]^{n\times 1}$ 处右连续，意指：对于 $[0,1]^{n\times 1}$ 中的任意序列 $(c^{(k)})$，若当 $k \to \infty$ 时 $(c^{(k)})$ 收敛到 c，并且满足 $\forall k, c^{(k)} \ge c$，则有：

$$F(c^{(k)}) \to F(c) \text{ when } k \to \infty.$$

证明。我们将 (Baaj，2023) 中针对 max – min 合成的证明，以如下方式改写为针对 max $-T$合成的证明:

第一个断言由不等式 $T(a, \mathcal{I}_T(a,b)) \leq b$ 推得。
对于第二个陈述，若假设 $F(c) = c$，这意味着 $e = A^t \square_{\mathcal{I}_T}^{\min} c$ 是系统 $A\square_T^{\max} x = c$ 的一个解（因此该系统相容）。

为了证明蕴含关系 $\Longleftarrow$，我们使用以下一般不等式:

$$\forall x \in [0,1]^{m\times 1},\ x \leq A^t \square_{\mathcal{I}_T}^{\min} (A \square_T^{\max} x),$$

该不等式由不等式 $b \leq \mathcal{I}_T(a, T(a,b))$ 推得。我们还得到，$e = A^t \square_{\mathcal{I}_T}^{\min} c$ 是系统 $A\square_T^{\max} x = c$ 的最大解。显然，我们也证明了等价关系 (8)。
借助上述两个断言，可以像在最大 – 最小合成的情形下那样，证明映射 F 的幂等性。

容易证明，映射 F是单调递增的。剩余蕴涵算子 $\mathcal{I}_T$对其第二个自变量的右连续性意味着映射 F具有右连续性。

例2（续）。设 $c = \begin{bmatrix} 0.74 \\ 0.66 \\ 0.62 \end{bmatrix}$。当我们使用两个三角范数 T_P 或 T_L中的任意一个时，有等式$F(c) = c$。因此，系统 $A\square_{T_P}^{\max} x = c$ 和 $A\square_{T_L}^{\max} x = c$ 是相容的。 □

2.4 切比雪夫距离 与 max $-T$ 模糊关系方程组的第二成员相关的距离 s

对于矩阵 A 和系统（S）的第二成员 b，该系统是 max $-T$模糊关系方程组，见式（6），我们定义向量集合 $c = [c_i] \in [0,1]^{n\times 1}$，使得系统 $A\square_T^{\max} x = c$ 相容:

$$\mathcal{C} = \{c = [c_i] \in [0,1]^{n\times 1} \mid A\square_T^{\max} x = c \text{ is consistent}\}. \tag{13}$$

这个集合使我们能够定义与系统（S）的第二成员 b 相关联的切比雪夫距离 .
定义1。与系统（S）的第二成员 b 相关联的切比雪夫距离：$A\square_T^{\max} x = b$ 为:

$$\Delta = \Delta(A,b) = \inf_{c\in\mathcal{C}} \|b - c\| \tag{14}$$

其中:

$$\|b - c\| = \max_{1\leq i\leq n} \mid b_i - c_i \mid .$$

我们有以下基本结果，该结果针对 max – min 组合已在（Cuninghame-Green 和 Cechlárová，1995年）中证明；我们将其推广到 max $-T$组合:
定理1。

$$\Delta = \min\{\delta \in [0,1] \mid \underline{b}(\delta) \leq F(\overline{b}(\delta))\}. \tag{15}$$

（定理1）的证明分为三个步骤。

证明。令 $\Delta' = \inf\{\delta \in [0,1] \mid \underline{b}(\delta) \leq F(\overline{b}(\delta))\}$。
• 步骤1。我们要证明 $\Delta' = \min\{\delta \in [0,1] \mid \underline{b}(\delta) \leq F(\overline{b}(\delta))\}$。事实上，由于 $\underline{b}(1) = 0 \leq F(\overline{b}(1))$，集合 $\{\delta \in [0,1] \mid \underline{b}(\delta) \leq F(\overline{b}(\delta))\}$ 非空。因此，我们可以找到 $[0,1]$ 中的一个序列 (δ_k)，使其满足:

1. $\forall k$, $\underline{b}(\delta_k) \leq F(\overline{b}(\delta_k))$,
2. $\forall k$, $\delta_k \geq \Delta'$, 3.
   $\delta_k \to \Delta'$。

由于 $\forall k, \overline{b}(\delta_k) \geq \overline{b}(\Delta')$ 且 $\overline{b}(\delta_k) \to \overline{b}(\Delta')$，映射 F 在 $\overline{b}(\Delta')$ 处的右连续性意味着：

$$F(\overline{b}(\delta_k)) \to F(\overline{b}(\Delta')).$$

不等式 $\underline{b}(\delta_k) \leq F(\overline{b}(\delta_k))$ 通过取极限可得：

$$\underline{b}(\Delta') \leq F(\overline{b}(\Delta')).$$

因此 $\Delta' = \min\{\delta \in [0,1] \mid \underline{b}(\delta) \leq F(\overline{b}(\delta))\}$.

• 步骤 2。我们要证明 $\Delta \leq \Delta'$。

我们有：

$$\underline{b}(\Delta') \leq F(\overline{b}(\Delta')) \leq \overline{b}(\Delta').$$

由 (3)，并注意到 $F(\overline{b}(\Delta')) \in \mathcal{C}$，可得：

$$\Delta \leq \|b - F(\overline{b}(\Delta'))\| \leq \Delta'.$$

• 步骤 3。我们要证明 $\Delta' \leq \Delta$。为此，只需证明：

$$\forall c \in \mathcal{C},\ \Delta' \leq \|b - c\|.$$

事实上，对于任意 $c \in \mathcal{C}$，令 $\delta = \|b - c\|$，由 (3) 可得：

$$\underline{b}(\delta) \leq c \leq \overline{b}(\delta).$$

因此，$F(c) = c$，而 F 的增长性给出：

$$\underline{b}(\delta) \leq c = F(c) \leq F(\overline{b}(\delta)).$$

So:

$$\Delta' \leq \delta = \|b - c\|.$$

我们已证明 $\Delta = \Delta' = \min\{\delta \in [0,1] \mid \underline{b}(\delta) \leq F(\overline{b}(\delta))\}$。

□

我们定义 b 的切比雪夫逼近集：

定义2。利用集合 $\mathcal{C}$（见 (13)）以及与 b 相关的切比雪夫距离（定义1），定义 b 的切比雪夫逼近集：

$$\mathcal{C}_b = \{c \in \mathcal{C} \mid \|b - c\| = \Delta(A, b)\}. \tag{16}$$

我们有：

推论1。 $F(\overline{b}(\Delta)) \in \mathcal{C}_b$ 是系统（S）的第二成员 b 的最大切比雪夫逼近。

证明。首先证明我们有 $\|b - F(\overline{b}(\Delta))\| = \Delta$。

事实上，根据（定理1）和（命题1），我们知道 $\underline{b}(\Delta) \leq F(\overline{b}(\Delta)) \leq \overline{b}(\Delta)$，因此由（3）可得，$\|b - F(\overline{b}(\Delta))\| \leq \Delta$。

由于 $F(\overline{b}(\Delta)) \in \mathcal{C}$（命题1），根据（定义1）我们知道：

$$\Delta \leq \|b - F(\overline{b}(\Delta))\|.$$

我们已经证明 $F(\overline{b}(\Delta)) \in \mathcal{C}_b$。

为了证明 $F(\overline{b}(\Delta))$ 是系统 (S) 的第二成员 b 的最大切比雪夫逼近，我们必须证明对于任意 $c \in \mathcal{C}_b$，都有 $c \leq F(\overline{b}(\Delta))$。

设 $c \in \mathcal{C}_b$。由于 $\Delta = \|b - c\|$，根据（3）可得：

$$\underline{b}(\Delta) \leq c \leq \overline{b}(\Delta).$$

根据 F 的增长性，我们推出：

$$c = F(c) \leq F(\overline{b}(\Delta)).$$

□

因此，我们有：

推论2。

$$\Delta = \min_{c \in \mathcal{C}} \|b - c\|.$$

$$\Delta = 0 \Longleftrightarrow \textit{ the system } (S) \textit{ is consistent.}$$

因此，$\Delta = 0$ 是系统（S）相容的充要条件。

3 预备计算

本节中，我们求解两个不等式。第一个不等式将用于解析公式，以计算当三角范数为通常乘积，即 $T = T_P$ 时，max $-T$ 模糊关系方程系统的第二成员所对应的切比雪夫距离，见（4）。第二个不等式将用于计算使用Lukasiewicz三角范数，即 $T = T_L$时的切比雪夫距离，见（5）。Baaj，2023针对max – min合成进行了类似研究。

3.1 乘积三角范数 $T = T_P$

设 x、y、z、$u \in [0,1]$ 为固定值。对于乘积三角范数 T_P，我们来研究以下涉及 Goguen乘积 $\overrightarrow{GG}$（见（4））的不等式，其中 $\delta \in [0,1]$:

$$\underline{x}(\delta) \le u \cdot (y \underset{GG}{\longrightarrow} \overline{z}(\delta)) \tag{17}$$

其中，如果 δ，则 $^{y}\underset{GG}{\longrightarrow}\overline{z} = \begin{cases} 1 & \text{；如果} \\ \end{cases}$

$y - z \le \delta$

$\frac{z+\delta}{y}$ $\quad y - z > \delta$，则。

我们要寻找使不等式（17）成立的 δ 的最小值。

Let:

$$\sigma_{GG}(u,x,y,z) = \max[(x-u)^+, \min(\varphi(u,x,y,z), (y-z)^+)] \tag{18}$$

where $\varphi(u,x,y,z) = \begin{cases} \frac{(x\cdot y - u\cdot z)^+}{u+y} & \text{if } u > 0 \\ x & \text{if } u = 0 \end{cases}$.

命题 2. 对于所有 $\delta \in [0,1]$，我们有：

$$\underline{x}(\delta) \le u \cdot (y \underset{GG}{\longrightarrow} \overline{z}(\delta)) \Longleftrightarrow \sigma_{GG}(u,x,y,z) \le \delta.$$

证明。

若 $u = 0$，则 $\sigma_{GG}(0,x,y,z) = x$，我们立即得到所需的等价关系：

$$(x-\delta)^+ \le 0 \Longleftrightarrow x \le \delta \Longleftrightarrow \sigma_{GG}(0,x,y,z) \le \delta.$$

我们还需要研究 $u > 0$ 的情况。

假设 $(x-\delta)^+ \le u(^{y}\underset{GG}{\longrightarrow}\overline{z}(\delta))$。

- 若 $y - z \le \delta$，我们有：

$$(x-\delta)^+ \le u(y \underset{GG}{\longrightarrow} \overline{z}(\delta)) = u \cdot 1 = u.$$

我们知道，不等式 $(x-\delta)^+ \le u$ 等价于不等式 $(x-u)^+ \le \delta$（Baaj，2023）。由于 $\min(\varphi(u,x,y,z), (y-z)^+) \le (y-z)^+ \le \delta$，我们得到：

$$\sigma_{GG}(u,x,y,z) = \max[(x-u)^+, \min(\varphi(u,x,y,z), (y-z)^+)] \le \delta.$$

- 如果 $y - z > \delta$，则有：

$$(x-\delta)^+ \le u(y \underset{GG}{\longrightarrow} \overline{z}(\delta)) = u\frac{z+\delta}{y} \le u$$

因此，$(x-u)^+ \le \delta$，并且

$$\begin{aligned}(x-\delta)^+ - u(y \underset{GG}{\longrightarrow} \overline{z}(\delta)) &= \max(x - \delta - \frac{uz+u\delta}{y}, -\frac{uz+u\delta}{y}) \\ &= \max(\frac{xy - \delta y - uz - u\delta}{y}, -\frac{uz+u\delta}{y}) \le 0.\end{aligned}$$

最后一个不等式等价于 $xy - \delta y - uz - u\delta \le 0$ 并且：

$$\frac{xy - uz}{u+y} \le \delta.$$

那么:

• 如果 $(xy-uz)^+=0$, 则有:

$$\varphi(u,x,y,z)=\frac{(xy-uz)^+}{u+y}=0$$

并且

$$\sigma_{GG}(u,x,y,z)=\max[(x-u)^+,\min(\varphi(u,x,y,z),(y-z)^+)=(x-u)^+\leq\delta.$$

• 如果 $(xy-uz)^+>0$, 则有:

$$\varphi(u,x,y,z)=\frac{xy-uz}{u+y}\leq\delta$$

并且

$$\begin{aligned}\sigma_{GG}(u,x,y,z)&=\max[(x-u)^+,\min(\varphi(u,x,y,z),(y-z)^+)]\\&=\max[(x-u)^+,\varphi(u,x,y,z)]\\&\leq\delta.\end{aligned}$$

现在证明剩下的蕴含关系。
假设 $\sigma_{GG}(u,x,y,z)\leq\delta$:

- If $(x-\delta)^+=0$, we get trivially that $(x-\delta)^+=0\leq u(y\underset{GG}{\longrightarrow}\overline{z}(\delta))$.
- 若 $y\underset{GG}{\longrightarrow}\overline{z}(\delta)=1$, 我们必须证明 $(x-\delta)^+\leq u$, 这等价于 $(x-u)^+\leq\delta$。我们有:

$$(x-u)^+\leq\max[(x-u)^+,\min(\varphi(u,x,y,z),(y-z)^+]=\sigma_{GG}(u,x,y,z)\leq\delta.$$

接下来需要研究 $(x-\delta)^+=x-\delta>0$ 且 $y\underset{GG}{\longrightarrow}\overline{z}(\delta)<1$ 的情形。

由 $y\underset{GG}{\longrightarrow}\overline{z}(\delta)<1$, 可推得:

$$y-z>\delta\quad\text{and}\quad y\underset{GG}{\longrightarrow}\overline{z}(\delta)=\frac{z+\delta}{y}.$$

那么, 我们有:

$$\begin{aligned}(x-\delta)^+-u(y\underset{GG}{\longrightarrow}\overline{z}(\delta))&=x-\delta-\frac{uz+u\delta}{y}\\&=\frac{u+y}{y}(\frac{xy-uz}{u+y}-\delta).\end{aligned}$$

为得到 $(x-\delta)^+-u(y\underset{GG}{\longrightarrow}\overline{z}(\delta))\leq0$, 只需证明

$$\frac{xy-uz}{u+y}\leq\delta.$$

- 若 $xy\leq uz$, 则有 $\frac{xy-uz}{u+y}\leq0\leq\delta$。
- 若 $xy>uz$, 并考虑到不等式 $y-z>\delta$, 可得:

$$\delta\geq\sigma_{GG}(u,x,y,z)\geq\min(\frac{(xy-uz)^+}{u+y},y-z)=\frac{xy-uz}{u+y}.$$

□

由（命题 2）可立即推出:
定理 2. 对于任意 x、y、z、$u\in[0,1]$, 有:

$$\sigma_{GG}(u,x,y,z)=\min\{\delta\in[0,1]\mid\underline{x}(\delta)\leq u\cdot(y\underset{GG}{\longrightarrow}\overline{z}(\delta))\}.\tag{19}$$

我们通过以下例子说明这一结果：

例3. 设 $x = 0.4$、 $y = 0.3$、 $z = 0.6$ 和 $u = 0.2$。我们希望求出使 $\underline{x}(\delta) \leq u \cdot (^{y} \overrightarrow{GG} \overline{z}(\delta))$ 成立的 $\delta \in [0,1]$ 的最小值。我们有 $u \cdot (^{y} \overrightarrow{GG} z) = 0.2$。

我们计算 $\varphi(u,\ x,\ y,\ z) = \frac{(0.4 \cdot 0.3 - 0.2 \cdot 0.6)^{+}}{0.2+0.3} = 0.$

$$\begin{aligned}\delta &= \sigma_{GG}(u,x,y,z)\\ &= \max[(0.4-0.2)^{+}, \min(0,(0.3-0.6)^{+})]\\ &= 0.2.\end{aligned}$$

我们有 $\underline{x}(\delta) = x - 0.2 = 0.2$ 和 $\overline{z}(\delta) = z + 0.2 = 0.8$。因此， $u \cdot (^{y} \overrightarrow{GG} \overline{z}(\delta)) = 0.2$ 并且：

$$\underline{x}(\delta) = u \cdot (y \underset{GG}{\longrightarrow} \overline{z}(\delta)).$$

3.2 Lukasiewicz三角范数 $T = T_L$

对于 Lukasiewicz三角范数 T_L，我们研究以下涉及卢卡西维奇蕴涵 $\overrightarrow{L}$（见式（5））的等式，其中 $\delta \in [0,1]$:

$$\underline{x}(\delta) \leq \max(0,\ y \underset{L}{\longrightarrow} \overline{z}(\delta) - u), \tag{20}$$

其中 $^{y} \overrightarrow{L} \overline{z}(\delta) = \begin{cases} 1 & \text{当且仅当 } y - z \leq \delta \\ 1 - y + z + \delta & \text{当且仅当 } y - z > \delta \end{cases}$。

令 $v = x + u - 1$ 并且：

$$\sigma_L(u,x,y,z) = \min(x, \max(v^{+}, \frac{(v+y-z)^{+}}{2})). \tag{21}$$

则：

命题3。对于所有 $\delta \in [0,1]$，我们有：

$$\underline{x}(\delta) \leq \max(0, y \underset{L}{\longrightarrow} \overline{z}(\delta) - u) \iff \sigma_L(u,x,y,z) \leq \delta. \tag{22}$$

证明。我们注意到，对于 $x \leq \delta$，等价关系的两个断言均得到验证：我们有 $(x-\delta)^{+} = 0$ 以及 $\sigma_L(u,x,y,z) \leq x \leq \delta$。剩下需要证明的是 $x > \delta$ 情况下的等价关系。

令 $f(u,x) = (x+u-1)^{+}$， $g(u,x,y,z) = \frac{(x+u-1+y-z)^{+}}{2}$。于是，我们有：

$$\sigma_L(u,x,y,z) = \min(x, \max(f(u,x), g(u,x,y,z))).$$

我们来证明 $\underline{x}(\delta) \leq \max(0, {}^{y} \overrightarrow{L} \overline{z}(\delta) - u) \implies \sigma_L(u,x,y,z) \leq \delta$。

由于我们假设 $x > \delta$，必须证明：

$$\max(f(u,x), g(u,x,y,z)) \leq \delta.$$

下面将分两步证明这一不等式：

1. If $y - z \leq \delta$, then $y \underset{L}{\longrightarrow} \overline{z}(\delta) - u = 1 - u$ and we have:

   $$x - \delta \leq \max(0, 1-u)$$

   我们将其写成如下形式

   $$\begin{aligned}x - \delta - \max(0,1-u) &= x - \delta + \min(0, u-1)\\ &= \min(x-\delta, x+u-1-\delta)\\ &\leq 0.\end{aligned}$$

   由于 $x - \delta > 0$，我们推得 $x + u - 1 \leq \delta$，并且还有：

   $$f(u,x) = (x+u-1)^{+} \leq \delta.$$

下面证明我们同样有:

$$g(u,x,y,z)=\frac{(x+u-1+y-z)^+}{2}\le\delta.$$

事实上，若 $g(u,x,y,z)=0$，则显然有 $g(u,x,y,z)=0\le\delta$。

若 $g(u,x,y,z)>0$，则有:

$$\begin{aligned}g(u,x,y,z)&=\frac{x+u-1+y-z}{2}\\&\le\frac{x+u-1+\delta}{2}\\&=\frac{x+u-1}{2}+\frac{\delta}{2}\\&\le\frac{(x+u-1)^+}{2}+\frac{\delta}{2}\quad\text{(we already know that } f(u,x)=(x+u-1)^+\le\delta)\\&\le\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta.\end{aligned}$$

总之，我们已证明 $y-z\le\delta\Longrightarrow\max(f(u,x),\ g(u,x,y,z))\le\delta$。

2. 若 $y-z>\delta$，则 $y\xrightarrow[L]{}\overline{z}(\delta)-u=1-y+z+\delta-u$，并且有:

$$x-\delta\le\max(0,1-y+z+\delta-u).$$

我们将这个最后的不等式改写为:

$$\begin{aligned}x-\delta-\max(0,1-y+z+\delta-u)&=x-\delta+\min(0,u-1+y-z-\delta)\\&=\min(x-\delta,\ x+u-1+y-z-2\delta)\\&\le 0.\end{aligned}$$

由于 $x-\delta>0$，我们推得 $x+u-1+y-z\le 2\delta$，并且:

$$g(u,x,y,z)=\frac{(x+y-z+u-1)^+}{2}\le\delta.$$

接下来只需证明 $f(u,x)=(x+u-1)^+\le\delta$。

事实上，若 $f(u,x)>0$，则有:

$$\begin{aligned}\frac{x+u-1+y-z}{2}&>\frac{x+u-1+\delta}{2}\\&=\frac{x+u-1}{2}+\frac{\delta}{2}\\&=\frac{f(u,x)}{2}+\frac{\delta}{2}.\end{aligned}$$

我们推得 $x+u-1+y-z>0$，并且:

$$g(u,x,y,z)=\frac{x+u-1+y-z}{2}>\frac{f(u,x)}{2}+\frac{\delta}{2}.$$

由于我们已经证明 $g(u,x,y,z)\le\delta$，最终得到:

$$f(u,x)<2\,g(u,x,y,z)-\delta\le 2\delta-\delta=\delta.$$

综上，我们已经证明 $y-z>\delta\Longrightarrow\max(f(u,x),\ g(u,x,y,z))\le\delta$。

我们已经完成了蕴含式 $\Longrightarrow$ 的证明。

现在假设:

$$\sigma_L(u,x,y,z)=\min(x,\max((x+u-1)^+,\frac{(x+u-1+y-z)^+}{2}))\le\delta$$

下面证明:

$$(x-\delta)^+\le\max(0,y\to_L\overline{z}(\delta)-u).$$

由于我们假设 $x > \delta$，不等式 $\sigma_L(u,x,y,z) \leq \delta$ 变为：

$$\max(f(u,x), g(u,x,y,z)) = \max((x+u-1)^+, \frac{(x+u-1+y-z)^+}{2}) \leq \delta.$$

将待证不等式写成如下形式：

$$(x-\delta)^+ - \max(0, y \underset{L}{\longrightarrow} \overline{z}(\delta) - u) \leq 0$$

并区分以下两种情况：$y - z \leq \delta$ 和 $y - z > \delta$。

1. 若 $y - z \leq \delta$，则待证不等式变为：

$$\begin{aligned} x - \delta - \max(0, 1-u) &= x - \delta + \min(0, u-1) \\ &= \min(x-\delta, x+u-1-\delta) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

由于 $x - \delta > 0$，我们必须证明 $x + u - 1 - \delta \leq 0$，即 $x + u - 1 \leq \delta$。
但是，我们有：

$$x + u - 1 \leq (x+u-1)^+ = f(u,x) \leq \max(f(u,x), g(u,x,y,z)) \leq \delta.$$

2. 若 $y - z > \delta$，则待证的不等式变为：

$$\begin{aligned} x - \delta - \max(0, 1-y+z+\delta-u) &= x - \delta + \min(0, u-1+y-z-\delta) \\ &= \min(x-\delta, x+u-1+y-z-2\delta) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

因此，我们必须证明 $x + u - 1 + y - z - 2\delta \leq 0$，即 $\frac{x+u-1+y-z}{2} \leq \delta$。

但是，我们有：

$$\frac{x+u-1+y-z}{2} \leq \frac{(x+u-1+y-z)^+}{2} = g(u,x,y,z) \leq \max(f(u,x), g(u,x,y,z)) \leq \delta.$$

我们已经完成了蕴含关系 $\Longleftarrow$ 的证明。

□

由（命题3）可立即推出：

定理3. 对任意 x、y、z、$u \in [0,1]$，有：

$$\sigma_L(u,x,y,z) = \min\{\delta \in [0,1] \mid \underline{x}(\delta) \leq \max(0, y \underset{L}{\longrightarrow} \overline{z}(\delta) - u)\}. \tag{23}$$

我们来说明这一结果：

示例4。令 $x = 0.4$, $y = 0.6$, $z = 0.3$ 和 $u = 0.6$。我们希望求得 $\delta \in [0,1]$ 的最小值，使得 $\underline{x}(\delta) \leq \max(0, y \underset{L}{\longrightarrow} z - u)$ 成立。

我们有 $\max(0, y \underset{L}{\longrightarrow} z - u) = 0.1$ 和 $v = x + u - 1 = 0$。

$$\begin{aligned} \delta &= \sigma_L(u,x,y,z) \\ &= \min(0.4, \max(0, \frac{(0+0.6-0.3)^+}{2})) \\ &= 0.15. \end{aligned}$$

我们有 $\underline{x}(\delta) = x - 0.15 = 0.25$ 和 $\overline{z}(\delta) = z + 0.15 = 0.45$。因此，$\max(0, y \underset{L}{\longrightarrow} \overline{z}(\delta) - u) = 0.25$ 并且：

$$\underline{x}(\delta) = \max(0, y \underset{L}{\longrightarrow} \overline{z}(\delta) - u).$$

4 计算系统 $A\Box_{T_P}^{\max}x = b$ 和 $A\Box_{T_L}^{\max}x = b$的第二成员相关切比雪夫距离的解析公式

本节中，我们通过一个显式解析公式，计算与最大乘积模糊关系方程系统 $A\Box_{T_P}^{\max}x = b$ 的第二成员相关联的切比雪夫距离 Δ (定义1)；该公式由矩阵 A 的分量及第二成员 b 的分量表示。我们还给出了与最大-卢卡西维奇模糊关系方程系统$A\Box_{T_L}^{\max}x = b$的第二成员相关联的切比雪夫距离的解析公式。

我们依据等式： $\Delta = \min\{\delta \in [0,1] \mid \underline{b}(\delta) \leq F(\overline{b}(\delta))\}$，见式（15）。该等式已对任意连续三角范数证明。

记号1. 使用其关联蕴涵算子为 $\mathcal{I}_T$的连续三角范数 T，对 $1 \leq i$、 $k \leq n$ 和$1 \leq j \leq m$，定义如下：

- $K_i = \{\delta \in [0,1] \mid \underline{b}(\delta)_i \leq F(\overline{b}(\delta))_i\}$,
- $\beta_j = \min_{1\leq k\leq n} \mathcal{I}_T(a_{kj}, \overline{b}(\delta))_k)$,
- $W_{ij}^T = \{\delta \in [0,1] \mid \underline{b}(\delta)_i \leq T(a_{ij}, \beta_j)\}$.

4.1 计算系统$A\Box_{T_P}^{\max}x = b$的第二成员 b 相关切比雪夫距离的解析公式

对于任意 $i = 1$、2、.....、 n 以及 $j = 1$、2、.....、 m，此时有：

$$W_{ij}^{T_P} = \{\delta \in [0,1] \mid \underline{b}(\delta)_i \leq T_P(a_{ij}, \beta_j)\} = \{\delta \in [0,1] \mid \underline{b}(\delta)_i \leq a_{ij}\beta_j\}.$$

其中 $\beta_j =$最小值$_{1\leq k\leq n}\ \mathcal{I}_{T_P}(a_{kj}, \overline{b}(\delta)_k) =$最小值$_{1\leq k\leq n}\ a_{kj} \underset{GG}{\longrightarrow} \overline{b}(\delta)_k$。于是，有：

$$W_{ij}^{T_P} = \{\delta \in [0,1] \mid \underline{b}(\delta)_i \leq \min_{1\leq k\leq n}\ a_{ij}\ (a_{kj} \underset{GG}{\longrightarrow} \overline{b}(\delta)_k)\}. \tag{24}$$

由于 $F(\overline{b}(\delta))_i =$最大值$_{1\leq j\leq m}\ T_P(a_{ij}, \beta_j)$，我们仍有：

$$K_i = \bigcup_{1\leq j\leq m} W_{ij}^{T_P}. \tag{25}$$

系统的最大乘积模糊关系方程$A\Box_{T_P}^{\max}x = b$ 的第二成员 b 所对应的切比雪夫距离 Δ 由以下公式给出：

定理4。

$$\Delta = \max_{1\leq i\leq n} \delta_i \tag{26}$$

其中对于 $i = 1$、2、.....、 n:

$$\delta_i = \min_{1\leq j\leq m} \max_{1\leq k\leq n} \sigma_{GG}\,(a_{ij}, b_i, a_{kj}, b_k). \tag{27}$$

参见式（18）中对 σ_{GG} 的定义。

证明。对于任意的 $i = 1, 2, \ldots, n$ 和 $j = 1, 2, \ldots, m$，由 (24) 可推得，对于 $\delta \in [0,1]$，有 ：

$$\delta \in W_{ij}^{T_P} \iff \delta \geq \max_{1\leq k\leq n} \sigma_{GG}\,(a_{ij}, b_i, a_{kj}, b_k).$$

利用 (25)，可得：

$$\delta \in K_i \iff \exists\, j \in \{1, 2, \ldots, m\} \text{ such that } \delta \geq \max_{1\leq k\leq n} \sigma_{GG}\,(a_{ij}, b_i, a_{kj}, b_k).$$

因此，我们得到：

$$\delta \in K_i \iff \delta \geq \min_{1\leq j\leq m} \max_{1\leq k\leq n} \sigma_{GG}\,(a_{ij}, b_i, a_{kj}, b_k).$$

根据定义，$\delta \in K_i \iff \underline{b}(\delta)_i \leq F(\overline{b}(\delta))_i$和 $\Delta = \min\{\delta \in [0,1] \mid \underline{b}(\delta) \leq F(\overline{b}(\delta))\}$，我们得到：

$$\Delta = \max_{1\leq i\leq n} \min_{1\leq j\leq m} \max_{1\leq k\leq n} \sigma_{GG}\,(a_{ij}, b_i, a_{kj}, b_k).$$

□

下面的例子说明了这一结果：
例5。下文将使用以下矩阵和向量，它们曾在（Cuninghame-Green 和 Cechlárová，1995年；Pedrycz，1990b）中作为示例：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.5 & 0.7 \\ 0.7 & 0.5 & 0.3 & 0.5 \\ 0.2 & 1 & 1 & 0.6 \\ 0.4 & 0.5 & 0.5 & 0.8 \end{bmatrix} \text{ and } b = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 1 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{28}$$

对于使用乘积三角范数 T_P 的系统 $A\square_{T_P}^{\max} x = b$，我们根据（定理4）计算 :

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \min_{1\le j\le m} \max_{1\le k\le n} \sigma_{GG}\left(a_{1j}, b_1, a_{kj}, b_k\right) = \min(0.11, 0.23, 0.2, 0.21) = 0.11, \\
\delta_2 &= \min_{1\le j\le m} \max_{1\le k\le n} \sigma_{GG}\left(a_{2j}, b_2, a_{kj}, b_k\right) = \min(0.42, 0.6, 0.72, 0.62) = 0.42, \\
\delta_3 &= \min_{1\le j\le m} \max_{1\le k\le n} \sigma_{GG}\left(a_{3j}, b_3, a_{kj}, b_k\right) = \min(0.13, 0.07, 0.07, 0.11) = 0.07, \\
\delta_4 &= \min_{1\le j\le m} \max_{1\le k\le n} \sigma_{GG}\left(a_{4j}, b_4, a_{kj}, b_k\right) = \min(0.0, 0.0, 0.0, 0.0) = 0.0.
\end{aligned}$$

因此，与系统 $A\square_{T_P}^{\max} x = b$ 的第二成员 b 相关的切比雪夫距离为 $\Delta = \max(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4) = 0.42$。
我们计算 $\overline{b}(\Delta) = \begin{bmatrix} 0.82 \\ 1 \\ 0.62 \\ 0.42 \end{bmatrix}$，而 $F(\overline{b}(\Delta)) = \begin{bmatrix} 0.82 \\ 0.57 \\ 0.62 \\ 0.42 \end{bmatrix}$ 是第二成员的最大切比雪夫逼近——

成员 b。

4.2 计算与系统$A\square_{T_L}^{\max} x = b$的第二成员 b 相关的切比雪夫距离的解析公式

对于任意 $i = 1$、2、.....、n 以及 $j = 1$、2、.....、m，在这种情况下有：

$$W_{ij}^{T_L} = \{\delta \in [0,1] \mid \underline{b}(\delta)_i \le T_L(a_{ij}, \beta_j)\} = \{\delta \in [0,1] \mid \underline{b}(\delta)_i \le \max(0,\ a_{ij} + \beta_j - 1)\}.$$

其中 $\beta_j = \min_{1\le k\le n} \mathcal{I}_{T_L}(a_{kj}, \overline{b}(\delta)_k) = \min_{1\le k\le n} a_{kj} \underset{L}{\longrightarrow} \overline{b}(\delta)_k$。
设 $u_{ij} = 1 - a_{ij}$。于是，有：

$$\begin{aligned}
T_L(a_{ij}, \beta_j) &= \max(0,\ \beta_j - u_{ij}) \\
&= \max(0,\ [\min_{1\le k\le n} a_{kj} \underset{L}{\longrightarrow} \overline{b}(\delta)_k] - u_{ij}) \\
&= \min_{1\le k\le n} \max(0,\ [a_{kj} \underset{L}{\longrightarrow} \overline{b}(\delta)_k] - u_{ij}) \\
&= \min_{1\le k\le n} ([a_{kj} \underset{L}{\longrightarrow} \overline{b}(\delta)_k] - u_{ij})^+.
\end{aligned}$$

因此，我们得到：

$$W_{ij}^{T_L} = \{\delta \in [0,1] \mid \underline{b}(\delta)_i \le \min_{1\le k\le n} ([a_{kj} \underset{L}{\longrightarrow} \overline{b}(\delta)_k] - u_{ij})^+\}. \tag{29}$$

由于 $F(\overline{b}(\delta))_i = \max_{1\le j\le m} T_L(a_{ij}, \beta_j)$，我们仍有：

$$K_i = \bigcup_{1\le j\le m} W_{ij}^{T_L}. \tag{30}$$

与最大-卢卡西维奇模糊关系方程系统的第二成员 b 相关联的切比雪夫距离 Δ $A\square_{T_L}^{\max} x = b$ 由以下公式给出：

定理5。

$$\Delta = \max_{1\leq i\leq n} \delta_i \tag{31}$$

其中，对于任意 $i = 1$，2，$\ldots n$:

$$\delta_i = \min_{1\leq j\leq m} \max_{1\leq k\leq n} \sigma_L\left(1 - a_{ij}, b_i, a_{kj}, b_k\right). \tag{32}$$

参见（21）中对 σ_L的定义。

证明。对于任意 $i = 1$、2、$\ldots$、n和 $j = 1$、2、$\ldots$、m，由（29）可推得，对于 $\delta \in [0, 1]$，有 ：

$$\delta \in W_{ij}^{T_L} \iff \delta \geq \max_{1\leq k\leq n} \sigma_{LK}\left(1 - a_{ij}, b_i, a_{kj}, b_k\right).$$

利用（30），可得:

$$\delta \in K_i \iff \exists\, j \in \{1, 2, \ldots, m\} \text{ such that } \delta \geq \max_{1\leq k\leq n} \sigma_{LK}\left(1 - a_{ij}, b_i, a_{kj}, b_k\right).$$

因此，我们得到:

$$\delta \in K_i \iff \delta \geq \min_{1\leq j\leq m} \max_{1\leq k\leq n} \sigma_{LK}\left(1 - a_{ij}, b_i, a_{kj}, b_k\right).$$

根据 定义 $\delta \in K_i \iff \underline{b}(\delta)_i \leq F(\overline{b}(\delta))_i$和 $\Delta = \min\{\delta \in [0, 1] \mid \underline{b}(\delta) \leq F(\overline{b}(\delta))\}$，我们得到:

$$\Delta = \max_{1\leq i\leq n} \min_{1\leq j\leq m} \max_{1\leq k\leq n} \sigma_{LK}\left(1 - a_{ij}, b_i, a_{kj}, b_k\right).$$

□

例6。我们利用前一个例子中使用的矩阵 A 和向量 b （见式(28)），构造系统$A\square_{T_L}^{\max} x = b$，其中采用Lukasiewicz三角范数 T_L。根据（定理5），我们有:

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \min_{1\leq j\leq m} \max_{1\leq k\leq n} \sigma_L\left(1 - a_{1j}, b_1, a_{kj}, b_k\right) = \min(0, 0.4, 0.35, 0.25) = 0,\\
\delta_2 &= \min_{1\leq j\leq m} \max_{1\leq k\leq n} \sigma_L\left(1 - a_{2j}, b_2, a_{kj}, b_k\right) = \min(0.45, 0.65, 0.75, 0.65) = 0.45,\\
\delta_3 &= \min_{1\leq j\leq m} \max_{1\leq k\leq n} \sigma_L\left(1 - a_{3j}, b_3, a_{kj}, b_k\right) = \min(0.2, 0, 0, 0.2) = 0,\\
\delta_4 &= \min_{1\leq j\leq m} \max_{1\leq k\leq n} \sigma_L\left(1 - a_{4j}, b_4, a_{kj}, b_k\right) = \min(0, 0, 0, 0) = 0.
\end{aligned}$$

因此，与系统 $A\square_{T_L}^{\max} x = b$ 的第二成员 b 相关联的切比雪夫距离为 $\Delta = \max(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4) = 0.45$。我们计算 $\overline{b}(\Delta) = \begin{bmatrix} 0.85 \\ 1 \\ 0.65 \\ 0.45 \end{bmatrix}$ 和 $F(\overline{b}(\Delta)) = \begin{bmatrix} 0.85 \\ 0.55 \\ 0.65 \\ 0.45 \end{bmatrix}$，这是第二成员 b的最大切比雪夫逼近。

5 结论

本文给出了计算最大乘积模糊关系方程系统第二成员的切比雪夫距离，以及计算最大-卢卡西维奇模糊关系方程系统第二成员的切比雪夫距离的显式解析公式。

随后，(Baaj，2023) 的结果可以扩展到这两个系统。对于每个系统，我们都可以描述其第二成员的切比雪夫逼近集及其近似解集。类似于 (Baaj，2023) 中提出的 max – min 学习范式（其中学习误差用 L_∞ 范数表示），我们可以着手构建最大乘积（分别为最大-卢卡西维奇）学习范式。(Baaj，2023) 中根据训练数据计算最小学习误差值的公式，以及构造学习误差最小的近似权重矩阵的方法，都可以直接扩展到最大乘积合成或 max-Lukasiewicz 合成的情形。

作为应用，我们完整解决了最大-Lukasiewicz合成下模糊关系可逆性的问题：我们知道哪些矩阵 A 存在左逆或右逆。此外，对于最大 – 最小合成，如果矩阵 A 没有左逆（或右逆），我们知道如何使用L_∞ 范数计算 A的近似左逆（或右逆）。对于最大 – 最小合成和最大乘积合成这两种情形，模糊关系可逆性问题都已得到解决（Wu等人，2021，2022）。

参考文献

Ismaïl Baaj。基于模糊数据的近似权重矩阵最大-最小学习，2023。网址：https://arxiv.org/abs/2301.06141。RA Cuninghame-Green 和 Katarína Cechlárová。模糊代数中的剩余运算及其若干应用。《模糊集与系统》，71(2):227–239，1995年。Antonio Di Nola、Witold Pedrycz 和 Salvatore Sessa。关于模糊关系方程的解及其刻画。Busefal，12:60–71，1982。Antonio Di Nola、Witold Pedrycz、Salvatore Sessa 和 Wang Pei Zhuang。三角范数类下的模糊关系方程：综述与新结果。Stochastica，8(2):99–145，1984。Antonio Di Nola、Elie Sanchez、Witold Pedrycz 和 Salvatore Sessa。模糊关系方程及其在知识工程中的应用。Kluwer Academic Publishers，1989年。Siegfried Gottwald。模糊方程可解性的刻画。《电子信息处理与控制论》，22(2/3):67–91，1986。Kaoru Hirota 和 Witold Pedrycz。模糊关系压缩。《IEEE系统、人、与控制论汇刊B辑（控制论）》，29(3):407–415，1999年。Erich Peter Klement、Radko Mesiar 和 Endre Pap。三角范数，第8卷。Springer Science & Business Media，2013年。George J Klir 和 Bo Yuan。模糊关系方程组的近似解。载于《1994年IEEE第三届国际模糊系统会议论文集》，第1452–1457页。IEEE，1994年。Pingke Li 和 Shu-Cherng Fang。最大-t合成下不相容模糊关系方程的切比雪夫逼近。载于《模糊优化》，第109–124页。Springer，2010年。Masaaki Miyakoshi 和 Masaru Shimbo。三角范数下复合模糊关系方程的解。《模糊集与系统》，16(1):53–63，1985年。ISSN 0165-0114。Hajime Nobuhara、Witold Pedrycz、Salvatore Sessa 和 Kaoru Hirota。一种基于最大t范数复合模糊关系方程的运动压缩/重建方法。《信息科学》，176(17):2526–2552，2006年。Witold Pedrycz。三角范数下的模糊关系方程及其求解。Busefal，11:24–32，1982。Witold Pedrycz。模糊关系方程的数值与应用方面。《模糊集与系统》，11(1):1–18，1983年。Witold Pedrycz。广义模糊关系方程及其应用。《数学分析与应用杂志》，107(2):520–536，1985年。Witold Pedrycz。概率框架下求解模糊关系方程的算法。《模糊集与系统》，38(3):313–327，1990a。Witold Pedrycz。模糊关系方程中的逆问题。《模糊集与系统》，36(2):277–291，1990b。Elie Sanchez。复合模糊关系方程的求解。《信息与控制》，30(1):38–48，1976。Elie Sanchez。布劳威尔逻辑中复合模糊关系方程的解：医学诊断应用。载于 M. M. Gupta、G. N. Saridis 和 B. R. Gaines 编，《模糊自动机与决策过程》，第221–234页。阿姆斯特丹：North-Holland，1977年。Wu Wangming。模糊推理与模糊关系方程。《模糊集与系统》，20(1):67–78，1986。Ching-Feng Wen、Yan-Kuen Wu 和 Zhaowen Li。求解最大-最小逆模糊关系方程组的代数公式。《信息科学》，2022。ISSN 0020-0255。Yan-Kuen Wu、Yung-Yih Lur、Hsun-Chih Kuo 和 Chingfeng Wen。一种计算最大乘积合成下模糊矩阵近似逆的解析方法。《IEEE模糊系统汇刊》，2021。Yan-Kuen Wu、Yung-Yih Lur、Ching-Feng Wen 和 Shie-Jue Lee。求解最大-最小逆模糊关系的解析方法。《模糊集与系统》，440:21–41，2022年。Gang Xiao、Tianxiang Zhu、Yanhua Chen 和 Xiaopeng Yang。求解最大-最小模糊关系方程组近似解的线性搜索法及其在教学信息资源分配中的应用。《IEEE Access》，7:65019–65028，2019年。