arXiv:2302.08562v1 [math.AC] 16 Feb 2023

局部代数中的局部可对偶对象

DAVE BENSON、SRIKANTH B. IYENGAR、HENNING KRAUSE 和 JULIA PEVTSOVA

Abstract. 我们讨论紧生成张量三角范畴的极小子范畴中的可对偶对象，特别关注交换诺特环的导出范畴。我们建立了一个用于检测这些局部可对偶对象的上同调判据，并讨论了向其他相关情形的推广。

1. Introduction

设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性紧生成张量三角范畴；本文仅考虑对称张量范畴。一个核心问题是对 $\mathcal{T}$中的局部化张量理想进行分类。考虑这些子范畴关于包含关系所成的格。在许多情形下，其结构由格中的极小元素决定。这些极小元素通常由某个拓扑空间参数化；例如 Balmer 谱，或作用于 $\mathcal{T}$上的某个交换环的谱，其意义见 [5]。

我们关注极小子范畴的结构，记作 $\mathcal{S}$。极小性意味着 $\mathcal{S}$ 中不存在真局部化张量理想。特别地， $\mathcal{S}$ 的紧对象子范畴中不存在真厚张量理想。然而，通常存在并非紧对象的可对偶对象。因此， $\mathcal{S}$ 的可对偶对象子范畴中存在一族厚张量理想，我们可以通过计算其谱来了解它们。

本文将对$\mathbf{D}(A$，交换诺特环 A的导出范畴，进行这项研究。在这种情况下，极小局部化子范畴为子范畴 $\Gamma_{\mathfrak{p}}\mathbf{D}(A$，它由导出范畴中所有 $\mathfrak{p}$-局部且 $\mathfrak{p}$-挠A复形组成，其中 $\mathfrak{p}$ 是 A中的一个素理想。我们的主要结果（亦见定理4.1）刻画了这些范畴中的可对偶对象。

定理。对于 X *in* $\Gamma_{\mathfrak{p}}\mathbf{D}(A)$ 中的每个对象，以下条件等价。

(1) X 在 $\Gamma_{\mathfrak{p}}\mathbf{D}(A)$中可对偶；(2) 秩$_{k(\mathfrak{p})} H(k(\mathfrak{p}) \otimes^{\mathbf{L}}_{A} X)$ 有限；(3) X 属于厚子范畴$(\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{p}}(A_{\mathfrak{p}}))$。

在命题 $k(\mathfrak{p})$ 中， $A_{\mathfrak{p}}$ 是局部环$\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{p}}(-)$ 的剩余域，而相对于 $\mathfrak{p}$的局部上同调函子；参见第3节。相反， $X\mathbf{DD}(A$中的对象是紧对象，当且仅当长度$_{A_{\mathfrak{p}}} H(X)$ 有限。

Date：2023年3月9日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 13D09（主要）；18G80、14F08（次要）。*Key words and phrases.* Balmer 谱、紧对象、导出范畴、可对偶对象、自反对象、张量三角范畴。

由上述刻画可知，$\Gamma_{\mathfrak{p}}\mathbf{D}(A)$ 中的可对偶复形构成一个厚子范畴；它们在张量积下总是封闭的。结合这一点，以及 Dwyer 和 Greenlees 建立的完备模与挠模之间的等价关系， [15], 我们推得，可对偶对象的谱与局部环 $A_{\mathfrak{p}}$ 在其极大理想处完备化所得的扎里斯基谱相同；参见推论4.7。这表明，在任意紧生成张量三角范畴中，从紧对象过渡到可对偶对象可以视为一个完备化过程。类似的考量还意味着，当环$A_{\mathfrak{p}}$ 为正则时， $\Gamma_{\mathfrak{p}}\mathbf{D}(A)$ 中的可对偶对象范畴有一个强生成元；参见推论4.10 及其相关讨论。

本文内容安排如下：第 2 节汇集了一些广为人知但鲜有记载的结果，并讨论一般紧生成张量三角范畴中关于小性和可对偶性的若干概念。第 3 节和4 节讨论交换诺特环的导出范畴，最终刻画局部可对偶对象并给出若干推论。第 5 节讨论其他背景下的可对偶对象，包括稳定同伦范畴。事实上，上述定理的表述，以及我们在此处和 [7]中报告的工作，均受到 Hovey 和 Strickland [19]关于 $K(n)$-局部稳定同伦范畴中可对偶对象的研究启发。

致谢。本工作部分是在波恩 Hausdorff 研究所举办的“三学期项目‘代数、几何与拓扑中的谱方法’”期间完成的。我们很高兴感谢 HIM 提供的款待，以及德国研究联合会通过卓越战略 EXC-2047/1-390685813 提供的经费支持。本工作也得益于参加于2022年6月在 ̊Alesund举行的阿贝尔研讨会“表示论及其他领域中的三角范畴”。感谢尼尔斯·亨里克·阿贝尔纪念基金邀请我们参加此次活动。在准备本工作期间，SBI 部分获得了美国国家科学基金会 DMS-1700985 和 DMS-2001368 项目资助。JP 部分获得了美国国家科学基金会 DMS-1901854 和 DMS-2200832 项目资助，以及 Brian 和 Tiffinie Pang 教师奖学金。

2. Dualisability

尽管我们的工作重点是交换环的导出范畴，我们还是先回顾一般张量三角范畴中的各种可对偶性概念。关于这部分内容，我们主要参考 [18, 附录 A2] 和 [21, 第三章]。虽然其中许多讨论对对称幺半范畴也成立，但我们的例子都具有与三角范畴相容的结构，因此我们将在这一背景下开展讨论。

设紧生成张量三角范畴为（$\mathcal{T}$， $\otimes$，1），其对称张量积为 $\otimes$ ，单位对象为1；后者不必是紧对象。照例，$\mathcal{T}^{c}$ 表示 $\mathcal{T}$中紧对象构成的全子范畴。

布朗可表性给出满足伴随同构的函数对象 $\mathcal{H}om(X,\ Y)$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X\otimes Y,Z)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,\mathcal{H}om(Y,Z))\quad\text{for all } X,Y,Z \text{ in } \mathcal{T}.$$

该构造表明，函子 $\mathcal{H}om(Y,-)$ 在 $\mathcal{T}$ 上是正合的；我们还假设函子 $\mathcal{H}om(-,Z)$ 也是正合的。上述伴随同构给出自然同构

$$\mathcal{H}om(X\otimes Y,Z)\cong\mathcal{H}om(X,\mathcal{H}om(Y,Z))\,.$$

上述伴随的余单位将在后文中发挥作用：

$$\varepsilon\colon \mathcal{H}om(X,Y)\otimes X \longrightarrow Y\,.$$

我们将需要 $\mathcal{T}$ 中的对称编织，记作：

$$\gamma\colon X\otimes Y \xrightarrow{\sim} Y\otimes X\,.$$

此外还有一个自然映射

$$\nu\colon \mathcal{H}om(X,Y)\otimes Z \longrightarrow \mathcal{H}om(X,Y\otimes Z)\,, \tag{2.1}$$

它由映射复合的伴随得到

$$\mathcal{H}om(X,Y)\otimes Z\otimes X \xrightarrow{1\otimes\gamma} \mathcal{H}om(X,Y)\otimes X\otimes Z \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1} Y\otimes Z\,.$$

对象*Spanier–Whitehead* 对偶 X 是

$$D^{\mathrm{sw}}X := \mathcal{H}om(X,\mathbb{1})\,.$$

赋值 $X\mapsto D^{\mathrm{sw}}X$ 是一个逆变函子 $\mathcal{T}\to\mathcal{T}$。如果对象 X 属于 $\mathcal{T}$，并且对于 $\mathcal{T}$ 中的所有 Y，自然映射

$$D^{\mathrm{sw}}X\otimes Y \longrightarrow \mathcal{H}om(X,Y)\,,$$

由（2.1）令 $Z=\mathbb{1}$所得，是一个同构。我们用 $\mathcal{T}^{\mathrm{d}}$ 表示 $\mathcal{T}$ 中可对偶对象构成的全子范畴。

编织与余单位的复合 $X\otimes D^{\mathrm{sw}}X \xrightarrow{\gamma} D^{\mathrm{sw}}X\otimes X \xrightarrow{\varepsilon}\mathbb{1}$ 的伴随 ε 给出自然的双重对偶映射

$$\rho\colon X \longrightarrow D^{\mathrm{sw}}D^{\mathrm{sw}}(X)\,.$$

若此映射是同构，我们称 X 是自反的。可对偶对象是自反的——这是下述结果的一部分——但反之不然；见 3.3。

若对任意以集合为指标的对象族 $\{Y_i\}$，下列自然映射都是同构，则称 $\mathcal{T}$ 中的对象 X 为函数紧：

$$\bigoplus_i \mathcal{H}om(X,Y_i) \longrightarrow \mathcal{H}om(X,\bigoplus_i Y_i).$$

注意，用 Hom 替换函数对象即可定义紧性。

下述结果汇集了关于这些概念的一些有用观察；我们给出证明，因为其中一些论证相当微妙，且不易在文献中找到。我们也邀请读者直接针对交换诺特环的导出范畴验证这些陈述。

命题 2.2. 设 X 是 $\mathcal{T}$中的一个对象。以下陈述成立。

(1) 对象 X 可对偶，当且仅当存在一个映射 $\eta\colon\ \mathbb{1}\to X\otimes D^{\mathrm{sw}}X$，使下图表交换

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} & \xrightarrow{\ \eta\ } & X\otimes D^{\mathrm{sw}}X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ \mathcal{H}om(X,X) & \longleftarrow & D^{\mathrm{sw}}X\otimes X \end{array}$$

左侧的垂直映射是同构 $\mathbb{1}\otimes X\xrightarrow{\sim} X$的伴随。

(2) 若 X 是可对偶对象，则 $D^{\mathrm{sw}}X$ 和 $\rho\colon\ X\to D^{\mathrm{sw}}D^{\mathrm{sw}}X$ 是同构。(3) 若 X 或 Z 是可对偶对象，则映射(2.1) 是同构。(4) 若 X 是可对偶对象，且 $C\in\mathcal{T}$ 是紧对象，则 $C\otimes X$ 是紧对象。

(5) 若 X 是可对偶对象，则它是函数紧的；反之，若 $\mathcal{T}$ 由一组可对偶对象生成，则结论也成立。(6) 若 X 是函数紧的，且$\mathbb{1}$ 是紧对象，则 X 是紧对象。

证明。 (1) 当 X是可对偶的时，映射 $D^{\mathrm{sw}}X \otimes X \to \mathcal{H}om(X,X)$ 是同构，因此我们可以使用其逆映射得到一个映射 $\eta\colon \mathbb{1} \to X \otimes D^{\mathrm{sw}}X$，它恰好构成所需的交换图。反之，给定这样的 η，通过图追踪可知复合映射

$$\begin{aligned}\mathcal{H}om(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om(X,Y)\otimes\mathbb{1} &\xrightarrow{1\otimes\eta} \mathcal{H}om(X,Y)\otimes X\otimes D^{\mathrm{sw}}X\\ &\xrightarrow{\varepsilon\otimes 1} Y\otimes D^{\mathrm{sw}}X \xrightarrow{\gamma} D^{\mathrm{sw}}X\otimes Y\end{aligned}$$

是映射 $D^{\mathrm{sw}}X\otimes Y \to \mathcal{H}om(X,Y)$ 的逆映射。

(2) 给定如 (1) 中的 $\eta\colon \mathbb{1}\to X\otimes D^{\mathrm{sw}}X$，复合映射

$$\mathbb{1} \xrightarrow{\eta} X\otimes D^{\mathrm{sw}}X \xrightarrow{\rho\otimes 1} D^{\mathrm{sw}}D^{\mathrm{sw}}X\otimes D^{\mathrm{sw}}X \xrightarrow{\gamma} D^{\mathrm{sw}}X\otimes D^{\mathrm{sw}}D^{\mathrm{sw}}X$$

起到 $D^{\mathrm{sw}}X$的 η 的作用，因此再次应用 (1)， $D^{\mathrm{sw}}X$ 是可对偶的。通过图追踪可知，映射 $\rho\colon X\to D^{\mathrm{sw}}D^{\mathrm{sw}}X$ 的逆映射由以下复合映射给出

$$\begin{aligned}D^{\mathrm{sw}}D^{\mathrm{sw}}X \xrightarrow{\sim} \mathbb{1}\otimes D^{\mathrm{sw}}D^{\mathrm{sw}}X &\xrightarrow{\eta\otimes 1} X\otimes D^{\mathrm{sw}}X\otimes D^{\mathrm{sw}}D^{\mathrm{sw}}X\\ &\xrightarrow{1\otimes\gamma} X\otimes D^{\mathrm{sw}}D^{\mathrm{sw}}X\otimes D^{\mathrm{sw}}X \xrightarrow{1\otimes\varepsilon} X\otimes\mathbb{1}\xrightarrow{\sim} X\,.\end{aligned}$$

(3) 如果 X 是可对偶的，那么 ν 的逆映射由以下复合映射给出

$$\begin{aligned}\mathcal{H}om(X,Y\otimes Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om(X,Y\otimes Z)\otimes\mathbb{1} &\xrightarrow{1\otimes\eta} \mathcal{H}om(X,Y\otimes Z)\otimes X\otimes D^{\mathrm{sw}}X\\ &\xrightarrow{\varepsilon\otimes 1} Y\otimes Z\otimes D^{\mathrm{sw}}X \xrightarrow{\gamma} D^{\mathrm{sw}}X\otimes Y\otimes Z \xrightarrow{\nu\otimes 1} \mathcal{H}om(X,Y)\otimes Z\,.\end{aligned}$$

如果 Z 是可对偶的，那么利用 (2) 可得一个交换图

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}om(X,Y)\otimes Z & \xrightarrow{\quad\nu\quad} & \mathcal{H}om(X,Y\otimes Z)\\
{\scriptstyle 1\otimes\rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (1\otimes\rho)_*}\\
\mathcal{H}om(X,Y)\otimes D^{\mathrm{sw}}D^{\mathrm{sw}}Z & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{H}om(X,Y\otimes D^{\mathrm{sw}}D^{\mathrm{sw}}Z)\\
{\scriptstyle\gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma_*}\\
D^{\mathrm{sw}}D^{\mathrm{sw}}Z\otimes\mathcal{H}om(X,Y) & & \mathcal{H}om(X,D^{\mathrm{sw}}D^{\mathrm{sw}}Z\otimes Y)\\
{\scriptstyle\nu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\nu_*}\\
\mathcal{H}om(D^{\mathrm{sw}}Z,\mathcal{H}om(X,Y)) & & \mathcal{H}om(X,\mathcal{H}om(D^{\mathrm{sw}}Z,Y))\\
\downarrow & & \downarrow\\
\mathcal{H}om(D^{\mathrm{sw}}Z\otimes X,Y) & \xrightarrow[\gamma^*]{\sim} & \mathcal{H}om(X\otimes D^{\mathrm{sw}}Z,Y)
\end{array}$$

所有竖直映射都是同构，底部的水平映射也是如此，因此顶部的水平映射也是同构。

(4) 这可由函子的同构得出

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(C\otimes X,-)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(C,\mathcal{H}om(X,-))\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(C,D^{\mathrm{sw}}X\otimes -)\,.$$

(5) 对于任意一组对象 $\{Y_i\}$，存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_i D^{\mathrm{sw}}X \otimes Y_i & \xrightarrow{\sim} & D^{\mathrm{sw}}X \otimes \bigoplus_i Y_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_i \mathcal{H}om(X, Y_i) & \longrightarrow & \mathcal{H}om(X, \bigoplus_i Y_i) \end{array}$$

当 X 可对偶时，两个竖直映射都是同构，因此下方的水平映射也是同构，从而 X 函数紧。

反过来，假设 X 函数紧。那么，上图中的下方水平映射是同构，因此可知，使映射 $D^{\mathrm{sw}}X \otimes Y \to \mathcal{H}om(X, Y)$ 成为同构的对象 Y 所构成的集合是 $\mathcal{T}$ 的一个局部化子范畴。根据 (3)，该子范畴包含可对偶对象，因此当 $\mathcal{T}$ 由这类对象生成时，我们可推得 X 可对偶。

(6) 将 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathbb{1}, -)$ 应用于定义函数紧性的同构。 □

我们汇集前述结果的一些零散推论，以备后用。

注 2.3。 设 $(\mathcal{T}, \otimes, \mathbb{1})$ 是一个紧生成张量三角范畴。命题 2.2 表明，当$\mathbb{1}$ 是紧对象时，任何可对偶对象都是紧对象。包含关系 $\mathcal{T}^{\mathrm{d}} \subseteq \mathcal{T}^{\mathrm{c}}$ 可能是严格的；参见 3.3。

子范畴 $\mathcal{T}^{\mathrm{d}}$ 是厚子范畴，并且对张量积、函数对象封闭，因此也对斯潘尼尔–怀特黑德对偶封闭。另一方面， $\mathcal{T}$ 中的紧对象构成一个厚子范畴，但未必对张量积或斯潘尼尔–怀特黑德对偶封闭；见3.3。因此，当紧对象与可对偶对象重合时，$\mathcal{T}^{\mathrm{c}}$ 是 $\mathcal{T}$的张量三角子范畴，其单位对象为$\mathbb{1}$ ，且具有相同的函数对象。

条件 $\mathcal{T}^{\mathrm{c}} = \mathcal{T}^{\mathrm{d}}$ 等价于 $\mathcal{T}$ 有一组同时是紧对象和可对偶对象的生成元。Hovey、Palmieri 和 Strickland [18]将这类范畴称为含幺代数稳定同伦范畴；Balmer 和 Favi [3] 则称之为刚性紧生成范畴。

3. Commutative noetherian rings

接下来，我们介绍本文重点研究的紧生成张量三角范畴。全文中， A 是一个交换诺特环。我们用$\mathbf{D}(A)$表示 A 的导出范畴，并用$\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\, A)$表示由$A$-复形 M组成的子范畴，其中 A-模 $H(M) \coloneqq \bigoplus_i H^i(M)$是有限生成的。

3.1. A 的导出范畴是一个由紧对象生成的三角范畴，其紧对象即完美复形，也就是说，它们在$\mathbf{D}(A)$中同构于由有限生成射影 A-模组成的有界复形；等价地，它们是 $\mathrm{Thick}(A)$中的对象。参见例如 [22, §9.2]。有

$$\mathrm{Thick}(A) \subseteq \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\, A)\,;$$

当且仅当 A 是正则的，等式才成立；也就是说，对每个 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$，局部环 $A_{\mathfrak{p}}$ 都是正则的。这只是对 Auslander、Buchsbaum 和 Serre 提出的经典刻画的一种重新表述：正则局部环恰好是有限整体维数的局部环 [11, 定理 2.2。7], ；此外，正如 Bass 和 Murthy 所指出的，对于 $\mathbf{D}(R)$ 中的对象，可以在局部检验有限投射维数；参见 [1,定理 4。1]。

导出张量积 $-\otimes^{\mathbf{L}}_{A}-$ 赋予 $\mathbf{D}(A)$ 张量三角范畴的结构，其单位对象为 A，函数对象为 $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(-,\ -)$。单位对象 A生成 $\mathbf{D}(A)$，并且是紧对象且可对偶，因此紧对象与可对偶对象一致。

关于 $\mathrm{D}(A)$ 中的自反对象：对于 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A)$ 中的对象 X，自然映射 $X \to D^{\mathrm{sw}}D^{\mathrm{sw}}X$ 是同构，当且仅当 X 具有有限戈伦斯坦维数 [13, 定理 2.4.7]。这样的 X 未必是紧对象。事实上，当 A 是 Gorenstein 时，$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A)$ 中的任意 X 都具有有限戈伦斯坦维数；但 $\mathsf{Thick}(A) = \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A)$ 当且仅当 A 是正则的。

局部上同调与局部化。 固定一个素理想 $\mathfrak{p} \in A$。$\mathbf{D}(A)$ 中的 A-复形 X 称为 $\mathfrak{p}$-局部 的，如果自然映射 $X \to X_{\mathfrak{p}}$ 在 $\mathbf{D}(A)$ 中是同构。由于局部化是正合函子，这个条件等价于 A-模之间的映射 $H(X) \to H(X)_{\mathfrak{p}}$ 是双射。

A-复形 X 称为 $\mathfrak{p}$-挠 的，如果对每个 $\mathfrak{q} \not\supseteq \mathfrak{p}$，都有 $X_{\mathfrak{q}} \cong 0 \in \mathbf{D}(A)$。再次显然，$X$ 是 $\mathfrak{p}$-挠的，当且仅当 $H(X)$ 是 $\mathfrak{p}$-挠的；等价地，每个 A-模 $H^i(X)$ 都是 $\mathfrak{p}$-挠的。一个 A-模是 $\mathfrak{p}$-挠的，当且仅当对每个 $x \in M$，都存在一个整数 $s \geq 0$ 使得 $\mathfrak{p}^s \cdot x = 0$；这解释了这个术语的由来。

不难验证，$\mathfrak{p}$-挠 A-复形构成 $\mathbf{D}(A)$ 的一个局部化子范畴。它嵌入 $\mathbf{D}(A)$ 的包含函子有一个右伴随，即 $\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{p}}(-)$，这是关于由 $\mathfrak{p}$ 定义的 $\operatorname{Spec} A$ 的（扎里斯基）闭子集的经典局部上同调函子；参见 [11, §3.5], ，另见 [4, §9]。

我们感兴趣的是 $\mathfrak{p}$-局部的 $\mathfrak{p}$-挠对象组成的类，即子范畴

$$\Gamma_{\mathfrak{p}}\mathbf{D}(A) := \{X \in \mathbf{D}(A) \mid \mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{p}}(X_{\mathfrak{p}}) \cong X\}. \tag{3.2}$$

这是 $\mathrm{D}(A)$ 中的一个局部化张量理想，甚至是极小的，也就是说，严格包含于 $\Gamma_{\mathfrak{p}}\mathrm{D}(A)$ 的局部化子范畴只有 0；参见 [23, 定理 2.8]。换言之，$\mathrm{D}(A)$ 在 $\mathrm{D}(A)$ 上由 A 的作用分层，其意义如 [5] 所述。因此，$\mathrm{D}(A)$ 的局部化子范畴与 $\operatorname{Spec}(A)$ 的子集一一对应。由此可以将范畴 $\Gamma_{\mathfrak{p}}\mathrm{D}(A)$ 视为三角范畴 $\mathrm{D}(A)$ 的构件。因此，研究其中的对象颇有意义。这正是我们在第 4 节所做的工作。

为结束本节，我们举一个紧生成张量三角范畴的例子，其中单位对象是紧对象，因此可对偶对象都是紧对象，但并非每个紧对象都是可对偶对象。该范畴还具有这样一个特点：紧对象的张量积并不总是紧对象。

3.3. 设 A 是一个交换诺特环，且 $\mathbf{K}($射影谱 $A)$ 是由投射 A-模构成的复形的同伦范畴。这是一个紧生成三角范畴，并且存在一个三角等价

$$\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} A)^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\simeq} \mathbf{K}(\operatorname{Proj} A)^{\mathrm{c}}$$

由映射 $M \mapsto (\mathbf{p}M)^*$ 给出，其中 $\mathbf{p}M$ 是 M的一个投射分解，且 $(-)^* := \operatorname{Hom}_A(-, A)$；见 [20]。

我们赋予 $\mathbf{K}(\operatorname{Proj} A)$ 张量三角范畴的结构，其中张量积是关于 A 的通常张量积。该张量积的单位对象是 A。根据布朗可表性，包含映射 $\mathbf{K}(\operatorname{Proj} A) \to \mathbf{K}(\operatorname{Mod} A)$ 具有一个右伴随 $\mathbf{q}\colon \mathbf{K}(\operatorname{Mod} A) \to \mathbf{K}(\operatorname{Proj} A)$。容易验证，$\mathbf{q}$ 保持函数对象。因此

$$\mathcal{H}om(X, Y) \cong \mathbf{q}\operatorname{Hom}_A(X, Y) \qquad (X, Y \in \mathbf{K}(\operatorname{Proj} A)).$$

显然， A 是紧对象，因此 $\mathbf{K}(\mathrm{Proj}\,A)$ 中的可对偶对象都是紧对象。

我们断言，$\mathbf{K}(\mathrm{Proj}\,A)$ 中可对偶对象的子范畴恰好是 $\mathrm{Thick}(A)$，即有限生成投射模的有界复形。

事实上，固定一个可对偶对象；由于它是紧对象，我们可以假设它具有形式 $(\mathbf{p}M)^*$，其中某个 M属于 $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\ A)$。此外，由于 A是诺特的，我们可以假设$\mathbf{p}M$ 由有限生成投射 A-模构成，并且 $(\mathbf{p}M)^i = 0$ 对于$i \gg 0$。于是，$(\mathbf{p}M)^*$ 的 Spanier–Whitehead 对偶为

$$\mathcal{H}om((\mathbf{p}M)^*, A) \cong \mathbf{q}\,\mathrm{Hom}_A((\mathbf{p}M)^*, A) \cong \mathbf{q}(\mathbf{p}M) \cong \mathbf{p}M$$

其中第二个同构成立是因为 $\mathbf{p}M$ 的结构，而最后一个同构成立是因为 $\mathbf{p}M$ 已经在 $\mathbf{K}(\mathrm{Proj}\,A)$ 中。特别地，$\mathbf{p}M$ 也是可对偶的，因为它是一个可对偶对象的 Spanier–Whitehead 对偶。但它于是也是紧对象。注意到 $\mathbf{p}M$ 属于 $\mathrm{Loc}(A)$，因此紧性蕴含它属于 $\mathrm{Thick}(A)$。剩下要注意的是，$(\mathbf{p}M)^*$也同样如此。

现在假设 A 是奇异的；这一条件等价于存在具有无限投射维数的有限生成 A-模。于是，对于任意具有无限投射维数的 $M\in\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\ A)$，复形 $(\mathbf{p}M)^*$ 在$\mathbf{K}$(射影谱 A)中是紧对象，但它不可对偶。此外，紧对象 $(\mathbf{p}M)^*$ 的 Spanier–Whitehead 对偶是$\mathbf{p}M$；根据上述论证，它不是紧对象。

对于 $M, N\in\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\ A)$，自然映射是一个同构：

$$(\mathbf{p}M)^* \otimes_A (\mathbf{p}N)^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(\mathbf{p}M, (\mathbf{p}N)^*)\,.$$

特别地，左侧对象的上同调是 $\mathrm{Ext}_A(M, \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(N, A))$。当 A 是奇异且 Gorenstein 时，$\mathbf{K}(\mathrm{Proj}\ A)$中的任意紧对象的上同调都有界。不过，可以找到 M, N，使得 $(\mathbf{p}M)^* \otimes_A (\mathbf{p}N)^*$的上同调无界，因此张量积不是紧对象。

4. Local dualisable objects in $\mathbf{D}(A)$

设 A 为交换诺特环，且 $\mathbf{D}(A)$ 为 A-模的导出范畴，并具有张量三角范畴的通常结构；参见 3.1。如那里所述，$\mathbf{D}(A)$ 中的可对偶对象与紧对象一致，且恰好是 $\mathbf{D}(A)$ 中的完美复形。本节聚焦于 $\Gamma_{\mathfrak{p}}\mathbf{D}(A)$ 中的可对偶对象，即 $\mathfrak{p}$-局部对象和 $\mathfrak{p}$-挠对象在 $\mathbf{D}(A)$ 中构成的范畴，其中 $\mathfrak{p}$ 为 A中的一个素理想；参见（3.2）。

固定一个素理想 $\mathfrak{p}$。直接验证可知，当 X 和 Y 均为 $\mathfrak{p}$-局部且 $\mathfrak{p}$-挠时，$X \otimes^{\mathbf{L}}_A Y$也具有相同性质；也就是说，三角范畴 $\Gamma_{\mathfrak{p}}\mathbf{D}(A)$ 从 $\mathbf{D}(A)$ 继承了张量积。关于此张量积，$\Gamma_{\mathfrak{p}}\mathbf{D}(A)$ 是张量三角范畴，其单位对象为 $\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{p}}A_{\mathfrak{p}}$，函数对象为

$$\mathcal{H}om(X, Y) := \mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{p}}\,\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(X, Y)\,.$$

$\Gamma_{\mathfrak{p}}\mathbf{D}(A)$ 中紧对象的厚子范畴结构简单，因为它是极小的。只有当 $\mathfrak{p}$ 是 A中的极小素理想时，单位对象 $\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{p}}(A_{\mathfrak{p}})$ 才是紧对象。因此，通常在 $\Gamma_{\mathfrak{p}}\mathbf{D}(A)$ 中，可对偶对象比紧对象更多。

下面根据上同调来刻画此范畴中的可对偶对象。我们用 $k(\mathfrak{p})$ 表示 $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$，即局部环 $A_{\mathfrak{p}}$的剩余域；用 Σ 表示三角范畴中的悬移（或移位）函子。

定理 4.1. 设 A 是一个交换诺特环，$\mathfrak{p}$ 是 A中的一个素理想。对于每个 $\mathfrak{p}$-局部且 $\mathfrak{p}$-挠的 A-复形 X，以下条件等价。

(1) X 在 $\Gamma_{\mathfrak{p}}\mathbf{D}(A)$中可对偶。(2) 秩
$_{k(\mathfrak{p})}\, H(k(\mathfrak{p}) \otimes^{\mathbf{L}}_{A} X)$ 是有限的。(3) X
属于厚子范畴($\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{p}}(A_{\mathfrak{p}})$)。
若此外 秩$_{k(\mathfrak{p})}\, H(k(\mathfrak{p}) \otimes^{\mathbf{L}}_{A} X) = 1$，则对于某个整数 s，有 $X \cong \Sigma^{s}\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{p}}(A_{\mathfrak{p}})$ 。

从证明中可以看出，蕴含关系 (1)⇒(2) 和 (3)⇒(1) 很容易验证。蕴含关系 (2)⇒(3) 则并非显然，其证明占据了本节的大部分篇幅；其中关键地用到了导出完备化。当环 $A_{\mathfrak{p}}$ 具有有限全局维数时，证明会简单一些；参见 [7]。

导出完备化。设 I 是 A 中的一个理想， M 是一个 A-模，则 M 的 I-进完备化是如下逆极限

$$\Lambda^{I}M := \lim_{n}(\cdots \twoheadrightarrow M/I^{n+1}M \twoheadrightarrow M/I^{n}M \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow M/IM)\,,$$

其中满射是自然的满射。典范映射 $M \to M/I^{n}M$ 诱导出一个映射 $M \to \Lambda^{I}M$；当该映射为双射时，我们称 M 是经典地 I-完备的。

给定一个 A-复形 M，我们用 $\mathbf{L}\Lambda^{I}M$ 表示完备化的左导出函子；参见 [16]。它配有一个态射 $M \to \mathbf{L}\Lambda^{I}M$，位于 $\mathbf{D}(A)$ 中；当映射为拟同构时，称复形 M 是 I-完备的。复形 M 是 I-完备的，当且仅当对每个 i， $H^{i}(M)$ 都是 I-完备的。需要注意的是：经典意义下完备的 A-模都是完备的，但反过来并不成立；参见[16, 例 1.4] 以及 [9, 例 2.4]。

当 M 是一个 A-模时，存在自然满射 $H^{0}(\mathbf{L}\Lambda^{I}M) \to \Lambda^{I}M$。当 M 是有限生成的时，这是一个同构，且此时对 $i \geq 1$ 有 $H^{i}(\mathbf{L}\Lambda^{I}M) = 0$；也就是说，对于任意有限生成的 A-模 M，都有同构 $\mathbf{L}\Lambda^{I}M \cong \Lambda^{I}M$ ，它位于 $\mathbf{D}(A)$ 中。特别地，$\mathbf{L}\Lambda^{I}A \cong \Lambda^{I}A$；后文会隐含地用到这一观察。

导出局部上同调函子 $\mathbf{R}\Gamma_{I}$ 和导出 I-进完备化函子 $\mathbf{L}\Lambda^{I}$ 构成一个伴随对：

$$\mathbf{D}(A) \underset{\mathbf{L}\Lambda^{I}}{\overset{\mathbf{R}\Gamma_{I}}{\leftrightarrows}} \mathbf{D}(A)\,. \tag{4.2}$$

这就是 Greenlees-May 对偶。它限制为 I-挠复形与 I-完备复形之间的等价，因此有自然同构

$$\mathbf{R}\Gamma_{I}M \cong \mathbf{R}\Gamma_{I}\mathbf{L}\Lambda^{I}M \qquad \text{and} \qquad \mathbf{L}\Lambda^{I}\mathbf{R}\Gamma_{I}M \cong \mathbf{L}\Lambda^{I}M\,. \tag{4.3}$$

关于这些结果的证明，以及从局部化这一角度对完备化的另一种理解，请参见 [15],以及 [14, Tag091N]。

下面的结果是证明定理 4.1 的关键步骤。

命题 4.4。设 A 是一个极大理想为 $\mathfrak{m}$ 、剩余域为 k的局部环， $\widehat{\ }$，并设 A 是 A 的 $\mathfrak{m}$-进完备化。对于任意对象 $X \in \mathbf{D}(A)$ ，只要它是 $\mathfrak{m}$-完备的，以下陈述成立。

(1) 如果 $H(k \otimes^{\mathbf{L}}_{A} X)$ 是有界的，则自然映射

$$X \longrightarrow k \otimes^{\mathbf{L}}_{A} X$$

由满射 $A \to k$ 诱导的映射在同调中非零。
(2) 如果 秩$_{k}\, H(k \otimes^{\mathbf{L}}_{A} X)$ 有限，那么 X 属于 厚子范畴($\widehat{\ }$
A).(3) 若对某个整数 s， $H(k \otimes^{\mathbf{L}}_{A} X) \cong \Sigma^{s}k$ ，则 $X \cong \Sigma^{s}\widehat{A}$。

证明。(1) 由于 X 是 $\mathfrak{m}$-完备的，因此对每个 n， $H^n(X)$ 也是如此。因此，若 $\mathfrak{m}\cdot H^n(X)=H^n(X)$，则 $H^n(X)=0$；参见 [26, 1.4], ，另见 [14, Tag09b9]。由此观察可知，假设 $H(k\otimes^{\mathbf{L}}_A X)$ 有界，便可推出 $H(X)$ 有界；这可通过使用 $H(K\otimes_R M)$ 的标准逐层归约论证加以验证，其中 K 是 R 的 Koszul 复形。令 $i=\inf\{n\mid H^n(X)\neq 0\}$。那么复合映射

$$H^i(X)\longrightarrow H^i(k\otimes^{\mathbf{L}}_A X)\cong k\otimes_A H^i(X)\cong H^i(X)/\mathfrak{m}H^i(X)\,,$$

其中，第一个同构成立是因为张量积右正合，映射是显然的满射，且目标非零。这就证明了该断言。

(2) 我们对整数 $r:=\operatorname{秩}_k H(k\otimes^{\mathbf{L}}_A X)$ 进行归纳来验证这一点。基础情形是 $r=0$。于是 $k\otimes^{\mathbf{L}}_A X=0$ 属于 $\mathbf{D}(A)$，也就是说， $\mathfrak{m}$ 不属于 $\operatorname{supp}_A X$。因此 $\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}X\cong 0$。接下来只需注意到

$$X\cong\mathbf{L}\Lambda^{\mathfrak{m}}X\cong\mathbf{L}\Lambda^{\mathfrak{m}}\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}X\cong 0\,,$$

其中第二个同构来自（4.3）。

假设 $r\geqslant 1$。由于 $\operatorname{Hom}^{\mathbf{D}(A)}(\Sigma^i A,-)\cong H^{-i}(-)$，(1) 等价于存在一个映射 $\Sigma^s A\to X$ 属于 $\mathbf{D}(A)$，使得诱导映射 $\Sigma^s k\to H(k\otimes^{\mathbf{L}}_A X)\widehat{\ }$非零。由于 X 是 $\mathfrak{m}$-完备的，映射 $\Sigma^s A\to X$ 可经由 $\Sigma^s A\to X$分解，并且这给出一个正合三角

$$\Sigma^s\widehat{A}\longrightarrow X\longrightarrow Y\longrightarrow\Sigma^{s+1}\widehat{A}\longrightarrow\,.$$

显然，$\operatorname{rank}_k H(k\otimes^{\mathbf{L}}_A Y)=r-1$，因此由归纳假设可得 Y 属于 $\widehat{\ }\operatorname{Thick}(A)$，从而 X 也属于其中。

(3) 当 $r=1$ 时，上述论证可得 $\Sigma^s A\cong X$，如所需。 □

一个导出 Morita 等价。 设 A 是一个极大理想为 $\mathfrak{m}$ 的局部环。考虑另一个伴随对会有所帮助：映射 $A\to\mathbf{R}\operatorname{Hom}_A(\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}A,\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}A)$ 由 (4.3) 诱导出一个拟同构

$$\widehat{A}\longrightarrow\mathbf{R}\operatorname{Hom}_A(\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}A,\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}A)\tag{4.5}$$

因此，导出 Morita 理论给出伴随函子

$$\mathbf{D}(\widehat{A})\underset{\mathbf{R}\operatorname{Hom}_A(\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}A,-)}{\overset{\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}A\otimes^{\mathbf{L}}_{\widehat{A}}-}{\longrightarrow}}\mathbf{D}(A)\,.$$

上文引入的函子为我们感兴趣的范畴提供了另一种描述，即由 $\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}A$ 生成的厚子范畴。

引理 4.6。 上述伴随对限制为三角等价

$$\operatorname{Thick}_{\widehat{A}}(\widehat{A})\underset{\mathbf{R}\operatorname{Hom}_A(\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}A,-)}{\overset{\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}A\otimes^{\mathbf{L}}_{\widehat{A}}-}{\longrightarrow}}\operatorname{Thick}_A(\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}A)\underset{\mathbf{L}\Lambda^{\mathfrak{m}}}{\overset{\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}}{\longleftarrow}}\operatorname{Thick}_A(\widehat{A})\,.$$

此外，左侧这对对象与张量积相容。

证明。左侧的等价性由莫里塔理论中的通常论证得出，依据是（4.5）。右侧的等价性来自同构（4.3），对于 $I=\mathfrak{m}$。 □

将引理 4.6 中的等价复合起来，可得到一个三角等价

$$\operatorname{Thick}_{\widehat{A}}(\widehat{A})\xrightarrow{\sim}\operatorname{Thick}_A(\widehat{A})\,.$$

容易验证，这由环的自然映射 $A \to A$ 所诱导的限制函子 $\mathbf{D}(A) \to \mathbf{D}(A)$给出。

定理 *4.1* 的证明。我们可以假设（A，$\mathfrak{m}$，k）是一个局部环，且 $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$，从而 $k(\mathfrak{p}) = k$。因此 X 是一个 $\mathfrak{m}$-挠 A-复形。回顾一下，$\mathbf{D}(A)$ 是一个张量三角范畴，由其单位对象 A生成，因此 $\mathbf{D}(A)$ 中的紧对象与可对偶对象一致。整个证明过程中都会用到这一事实。

(1) $\Rightarrow$ (2)：设 K 是理想 $\mathfrak{m}$的一组生成元所对应的 Koszul 复形。由于X 是可对偶的，A-复形 $K \otimes_A X$ 是紧对象，由命题 2.2可知，因此它属于厚子范畴 Thick(A)。于是，k-向量空间 $H(k \otimes^{\mathbf{L}}_A (K \otimes_A X))$ 的秩有限。由于 k 是一个域，存在如下同构：

$$\begin{aligned} H(k \otimes^{\mathbf{L}}_A (K \otimes_A X)) &\cong H((k \otimes_A K) \otimes_k (k \otimes^{\mathbf{L}}_A X)) \\ &\cong H(k \otimes_A K) \otimes_k H(k \otimes^{\mathbf{L}}_A X)\,. \end{aligned}$$

注意，$H(k \otimes_A K)$ 非零。由于 $H(k \otimes^{\mathbf{L}}_A (K \otimes_A X))$ 的秩有限，$H(k \otimes^{\mathbf{L}}_A X)$ 的秩也有限。

(2)$\Rightarrow$(3)：由于 k 是 $\mathfrak{m}$-挠的，下面的自然映射是一个同构：

$$k \otimes^{\mathbf{L}}_A X \xrightarrow{\sim} k \otimes^{\mathbf{L}}_A \mathbf{L}\Lambda^{\mathfrak{m}} X$$

假设和命题 4.4 表明$\mathbf{L}\Lambda^{\mathfrak{m}} X$ 属于厚子范畴（A）。引理 4.6进而推出$\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}} X$ 属于厚子范畴（$\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}} A$）。还需回顾的是，$X$ 是 $\mathfrak{m}$-挠的。

(3)$\Rightarrow$(1)：由于 $\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}} A$ 是$\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}\mathbf{D}(A)$ 的单位对象，因此它是可对偶的。接下来需要证明 e 可对偶对象构成一个厚子范畴。

定理的最后一部分由命题 4.4(3) 推出。 □

Balmer 谱。 令 $\mathcal{T} := \mathbf{D}(A)$，并固定一个素理想 $\mathfrak{p}$ 属于 Spec A。全子范畴 $(\Gamma_{\mathfrak{p}}\mathcal{T})^{\mathrm{d}}$ 中可对偶对象构成一个本质小张量三角范畴，其单位对象为$\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{p}}(A_{\mathfrak{p}})$。单位对象生成 $\Gamma_{\mathfrak{p}}\mathcal{T}$，这里的生成是指厚子范畴意义下的生成，因此厚子范畴都是张量理想；这由定理4.1得出。

我们关注的是$\Gamma_{\mathfrak{p}}\mathcal{T}$的厚子范畴格^{d}，它由 [2]中引入的 Balmer 谱刻画。由定理 4.1 和引理 4.6，可以轻松描述其底层拓扑空间。

推论 4.7。 存在一个同胚 $\operatorname{Spc}(\Gamma_{\mathfrak{p}}\mathcal{T})^{\mathrm{d}} \cong \operatorname{Spec}(\widehat{A}_{\mathfrak{p}})$。

证明。同样可以假设 A 是局部环，极大理想为 $\mathfrak{p}$。由定理 4.1，引理 4.6 左侧的范畴等价给出一个同胚

$$\operatorname{Spc}(\Gamma_{\mathfrak{p}}\mathcal{T})^{\mathrm{d}} \cong \operatorname{Spc}\operatorname{Thick}_{\widehat{A}}(\widehat{A})\,.$$

接下来要回顾的是交换诺特环的完美复形厚子范畴的分类，这是 Hopkins [17]和 Neeman [23], 所作的，并以 Balmer 谱 [2, 的方式表述为定理 5.5]。□

注 4.8。 $A_{\mathfrak{p}}$ 的（Zariksi）谱可能与 $A_{\mathfrak{p}}$的谱截然不同，尽管它们具有相同的克鲁尔维数。我们给出几点说明来阐明这一点。设 A 是局部环，且 $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$是 A的极大理想。完备化映射$\widehat{A} \to A$ 诱导出一个同态

$$\operatorname{Spec} \widehat{A} \longrightarrow \operatorname{Spec} A\,.$$

该映射是满射，因为 $A \to \widehat{A}$ 是忠实平坦的。此外，$\mathfrak{m}\widehat{A}$是 $\widehat{A}$的极大理想，因此在闭点 $\mathfrak{m}$之上只有一个点 $\dim \widehat{A} = \dim A$。由于

$\widehat{\ }$Spec A的，即 Spec A 的闭点。这表明完备化映射的纤维的克鲁尔维数至多为 dim $A-1$。

其他非闭点上的纤维可能非常复杂。即使在 Spec A 的泛点上也是如此。构造局部整环，使其泛形式纤维包含多个点并不困难。下面给出一个例子：考虑局部环

$$A := \frac{\mathbb{Q}[x,y]_{(x,y)}}{(x^2 - y^2(y-1))}.$$

由于 $x^2 - y^2(y-1)$ 在环 $\mathbb{Q}[x,y]_{(x,y)}$ 中是不可约的，环 A 是一个整环。然而，该多项式在 $(x,\ y)$-进完备化 $\mathbb{Q}[\![x,y]\!]$ 中可分解，因此 A 的完备化不是整环。

下面是一个更极端的情形：给定任意一对整数 $d,\ t$ 满足 $0 < t < d-2$，Rotthaus [24] 构造出一个诺特局部整环 A，其克鲁尔维数为 d，使得 A 在其泛点上的形式纤维的克鲁尔维数为 t。

自反对象。如前所述，取 A 和 $\mathfrak{p}$，对象 X 在 $\Gamma_{\mathfrak{p}}\mathbf{D}(A)$ 中的 Spanier–Whitehead 对偶为

$$D^{\mathrm{SW}}(X) = \mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{p}}\,\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(X, \mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{p}}(A_{\mathfrak{p}}))\,.$$

回顾第 2 节，X 是自反的，如果自然映射 $X \to D^{\mathrm{SW}}D^{\mathrm{SW}}(X)$ 是同构。下面说明这一概念与可对偶性的联系。

引理 4.9。设 A 是交换诺特环，$\mathfrak{p}$ 是 A 中的一个素理想，并取定 $X \in \Gamma_{\mathfrak{p}}\mathbf{D}(A)$。若 X 可对偶，则它是自反的；反之，若局部环 $A_{\mathfrak{p}}$ 正则且 $H(X)$ 有界，则结论也成立。

证明。该命题的第一部分由命题 2.2 得出。因此，只需证明：当 $A_{\mathfrak{p}}$ 正则、$H(X)$ 有界，且 X 自反时，它可对偶。

我们可以将 A 替换为 $A_{\mathfrak{p}}$，并假设它是一个正则局部环，记其极大理想为 $\mathfrak{m}$，剩余域为 k。范畴 $\Gamma_{\mathfrak{m}}\mathbf{D}(A)$ 上的 Spanier–Whithead 对偶是函子

$$D^{\mathrm{SW}}(X) := \mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}\,\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(X, \mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}A) \cong \mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}\,\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(X, A)\,.$$

因此，牢记格林利斯–梅对偶（4.2），可得

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{SW}} \circ D^{\mathrm{SW}}(X) &\cong \mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}\,\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}\,\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(X,A),A) \\ &\cong \mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}\,\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(X,A),\mathbf{L}\Lambda^{\mathfrak{m}}A) \\ &\cong \mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}\mathbf{L}\Lambda^{\mathfrak{m}}\,\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(X,A),A) \\ &\cong \mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}\,\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(X,A),A) \end{aligned}$$

由于 A 是正则的，A-模 k 有有限自由分解，因此同构 $X \xrightarrow{\sim} D^{\mathrm{SW}} \circ D^{\mathrm{SW}}(X)$（这是因为 X 是自反的）诱导出同构

$$\begin{aligned} k \otimes^{\mathbf{L}}_A X &\longrightarrow k \otimes^{\mathbf{L}}_A \mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}}\,\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(X,A),A) \\ &\longrightarrow \mathbf{R}\mathrm{Hom}_k(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_k(k \otimes^{\mathbf{L}}_A X, k), k) \end{aligned}$$

在同调中，这意味着自然的向量空间对偶是一个同构：

$$H(k \otimes^{\mathbf{L}}_A X) \cong \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Hom}_k(H(k \otimes^{\mathbf{L}}_A X), k))\,.$$

因此秩$_k H^i(k \otimes^{\mathbf{L}}_A X)$ 对每个 i 都是有限的。由于 A 是正则的，k 属于 Thick(A)，因此 $H(X)$ 有界意味着 $H(k \otimes^{\mathbf{L}}_A X)$ 也有界。由此可得秩$_k H(k \otimes^{\mathbf{L}}_A X)$ 有限，因此根据定理 4.1，X 是可对偶的。□

在前述结果中，要求 $H(X)$ 有界这一条件是必要的：当 A 是任意局部环时，$X := \bigoplus_i \Sigma^i A$ 是自反的，但不可对偶，因为它不是紧对象。

强生成。 让我们回到紧生成张量三角范畴的一般框架（$\mathcal{T}$，$\otimes$，$\mathbb{1}$）。我们关注这样的性质：$\mathcal{T}^{\mathrm{c}}$，即由紧对象组成的厚子范畴，拥有一个强生成元，这里的含义取自 Bondal 和 Van den Bergh [10]。粗略地说，如果存在一个整数 $G \in \mathcal{T}^{\mathrm{c}}$，使得 $\mathcal{T}$ 中的每个紧对象都能由 G 通过直和、直缩以及至多 d 次扩张构造而成，那么对象 d 就是强生成元。这可以看作一种正则性条件：当 A 是交换诺特环时，完美 A-复形的范畴 $\mathbf{D}(A)^{\mathrm{c}}$ 有强生成元，当且仅当 A 的整体维数有限；参见 [25, 命题 7.25]。

由此引出一个问题：如果 $\mathcal{T}^{\mathrm{c}}$ 有强生成元，那么每个局部可对偶对象范畴是否也有强生成元？其动机来自交换代数中的以下结果；我们回顾一下，$A_{\mathfrak{p}}$ 正则，当且仅当 $\mathbf{D}(A_{\mathfrak{p}})$ 中的紧对象子范畴有强生成元。

推论 4.10。 *设 A 为交换诺特环，$\mathfrak{p}$ 为 A 中的素理想。当 $A_{\mathfrak{p}}$ 为正则环时，$\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{p}}(A_{\mathfrak{p}})$ 是 $\mathfrak{p}$-局部 $\mathfrak{p}$-挠 A-复形中可对偶对象所成子范畴的强生成元。*

证明。 我们对 $\mathfrak{p}$ 进行局部化，并假设 A 是一个正则局部环，因此$\widehat{\ }$具有有限整体维数。于是 A，的完备化在其极大$\widehat{\ }$理想处也具有有限整体维数；参见 [11, 命题 2.2。2]因此 A 是$\widehat{\ }$厚子范畴 $\mathsf{Thick}_{\widehat{A}}(A)$ 的强生成元。还需回忆的是，该范畴与 $\Gamma_{\mathfrak{p}}\mathbf{D}(A)$ 中的可对偶对象范畴三角等价，这由定理 4.1 和引理4.6得出。□

5. Other contexts

本节讨论其他一些紧生成的张量三角范畴，对于这些范畴，我们对局部可对偶对象有一些了解。

诺特概形。 设 $\mathbb{X}$ 是一个分离诺特概形，且 $\mathcal{T}$ 是 $\mathbb{X}$上拟凝聚层的导出范畴，按通常方式视为张量三角范畴。对于每个 $x \in \mathbb{X}$，都可以考察子范畴 $\Gamma_x\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}$ 中由支撑在 $\{x\}$上的对象组成的可对偶对象。定理 4.1描述了这个范畴，因为通过标准论证，它与 $\Gamma_{\mathfrak{m}}\mathbf{D}(\mathcal{O}_{\mathbb{X},x})$ 中的可对偶对象相同，其中 $\mathcal{O}_{\mathbb{X},\,x}$ 是 x 处的局部环，而 $\mathfrak{m}$ 是它的极大理想。因此，推论 4.7和注 4.8给出以下结果。

推论 5.1。 *$(\Gamma_x\mathcal{T})^{\mathrm{d}}$ 的 Balmer 谱同胚于 $\operatorname{Spec}\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{X},\,x}$。*□

有限群的模表示。 设 k 是一个正特征域，G 是一个阶数可被 k 的特征整除的有限群。我们用 $\mathsf{StMod}\, kG$ 表示 kG-模的稳定范畴，用 $\mathsf{stmod}\, kG$ 表示其有限维模构成的全子范畴。于是 $\mathsf{StMod}\, kG$ 是一个由紧对象生成的范畴，其紧对象为 $\mathsf{stmod}\, kG$；带对角 G-作用的 k 上张量积赋予它张量三角范畴的结构。单位对象是带平凡作用的 k，函数对象则是 $\mathrm{Hom}_k(-,\,-)$，同样带有对角G作用。此外，容易看出 $\mathsf{StMod}\, kG$ 中的紧对象是可对偶的，因此有等式 $(\mathsf{StMod}\, kG)^{\mathrm{c}} = (\mathsf{StMod}\, kG)^{\mathrm{d}}$。

群上同调环 $H^*(G,k)$ 是一个有限生成的 k-代数。与交换诺特环的导出范畴情形类似，我们考虑（大）稳定模范畴中由 $\mathfrak{p}$-局部且 $\mathfrak{p}$-挠的模构成的子范畴 $\Gamma_{\mathfrak{p}}(\mathrm{StMod}\, kG)$。这些是 $\mathrm{StMod}\, G$的极小局部化张量理想，因此稳定模范畴中局部化张量理想的格由 $\mathrm{Proj}\, H^*(G,k)$ 的子集参数化；这里的元素是 $H^*(G,k)$ 中不包含极大理想 $H^{\geqslant 1}(G,k)$ 的齐次素理想。这些结果在[6]中得到证明；另见 [8]。在 [7]中，我们证明以下定理 4.1 的类似结果；当 $\mathfrak{p}$ 是一个闭点时的情形也在 Carlson [12]的研究中得到处理。

定理 5.2。 取定 $\mathfrak{p}$ *in* 射影谱 $H^*(G,k)$。对于每个 kG-模 X *in* $\Gamma_{\mathfrak{p}}(\mathrm{StMod}\ kG)$，以下条件等价：

(1) X 在 $\Gamma_{\mathfrak{p}}(\mathrm{StMod}\, kG)$中可对偶；(2) 对于每个有限维 kG-模 C， $H^*(G,k)_{\mathfrak{p}}$-模 $H^*(G, C\otimes_k X)_{\mathfrak{p}}$ 是阿廷的；(3) M 属于 厚子范畴($\Gamma_{\mathfrak{p}}(\mathrm{StMod}\, kG)$)。

□

将上述条件 (2) 与定理 4.1 中相应的条件进行比较。不难证明，后者蕴含：对于 $A_{\mathfrak{p}}$ 模 $H(C\otimes^{\mathbf{L}}_A X)$，每个紧对象（也就是说，每个完美复形）对应的都是阿廷的；参见[7]。但是，定理 4.1(2) 严格更强，因为除非局部环 $A_{\mathfrak{p}}$ 具有有限全局维数，否则剩余域不是 $\Gamma_{\mathfrak{p}}\mathbf{D}(A)$中的紧对象。这表明，存在一个比定理 4.1所涵盖的范围更广的框架，可在其中掌握可对偶对象。

稳定同伦范畴。 我们考虑的最后一个例子是谱的稳定同伦范畴。与前面讨论的情形相比，这里的背景要复杂得多，因此下面的讨论会更加简略；详情请参见 [19]。

与交换环的导出范畴类似，稳定同伦范畴由其在各个素数处的局部化决定。固定一个素数 p、一个正整数 n，并令 $\mathcal{S}$ 为 p-局部谱的同伦范畴。这是一个张量三角范畴，其张量单位为 p-局部球面 S。令 $K(n)$ 表示素理想 p 处层级为 n 的 Morava K-理论，并令 $\mathcal{K}$ 为 $K(n)$-局部谱的范畴。根据 [19, 定理 7.5], ，这是 $\mathcal{S}$ 的一个极小局部化子范畴 ˆ。令 $L\colon \mathcal{S}\to\mathcal{K}$ 为局部化函子。

定理 5.3。 固定 $X\in\mathcal{K}$，并考虑以下条件：

(1) X 在 $\mathcal{K}$中是可对偶的；(2) $K(n)_*(X)$是有限的；$\widehat{\ }$(3) X 属于厚子范畴(LS)。那么(1)和(2) 是等价的，并且由(3)推出。

□

条件 (3) 严格强于 (1) 和 (2)：Hopkins 在 $n=1$ 的情形下构造了一个 n-局部谱 Y，它是可对偶的，但不能由 $\widehat{L}S$ 有限构造而成。令 $E:=\widehat{E\,1}(\ )$，并令 $T:=\psi^a-1\in E^0(E)$，其中 ψ^a 是 Adams ψ 运算， a 是 $1+p\mathbb{Z}_p$ 的一个拓扑生成元。若 p 为奇数，则 Y 是映射 $T^2-p\colon E\to E$ 的余纤维。谱 Y 是可对偶的，但不属于由 $\mathcal{K}$ 中可逆对象的 Picard 群生成的厚子范畴，因此 $\widehat{\ }$ 不属于 Thick(LS)。详情请参见 [19, 第 15 节。1]。

References

1. L. L. Avramov、S. B. Iyengar 和 J. Lipman, *Reflexivity and rigidity for complexes I. Commutative rings*, 《代数与数论》（），第 – 期。5 2. P. Balmer, *The spectrum of prime ideals in tensor triangulated categories*, 《纯粹与应用数学杂志》588（2005），第 10 期，149–168 页。3. P. Balmer 和 G. Favi, *Generalized tensor idempotents and the telescope conjecture*, 《伦敦数学会会刊》（第 3 辑）102（2011），第 6 期，1161–1185 页。4. D. J. Benson、S. B. Iyengar 和 H. Krause, *Local cohomology and support for triangulated categories*, 《Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.》（）5（），–。5., *Stratifying triangulated categories*, 《拓扑学杂志》（），–。6., *Stratifying modular representations of finite groups*, 《数学年刊》（），1643–1684 页。7. D. J. Benson、S. B. Iyengar、H. Krause 和 J. Pevtsova, *Local dualisable objects in the stable category of a finite group*, 准备中。2, 8, 13 8., *Stratification and π-cosupport: finite groups*, 《数学杂志》（），–。9. B. Bhatt, , *Torsion completions are bounded*, 《纯粹与应用代数杂志》（），第 5 期，1940–1945 页。10. A. Bondal 和 M. van den Bergh, *Generators and representability of functors in commutative and noncommutative geometry*, 《莫斯科数学杂志》（），第 – 期。11 *Cohen–Macaulay rings*. W. Bruns 和 J. Herzog, , 《剑桥高等数学研究》，第 39 卷，5, 6, 12 12 1998，剑桥大学出版社，修订版。. J. F. Carlson, *Idempotent modules, locus of compactness and local support*, arXiv:2210.01842v2。13. L. W. Christensen, *Gorenstein dimensions*, 数学讲义，第 1747 卷，施普林格出版社，柏林/纽约，2000 6 14 . . A. J. de Jong 等, *Stacks project*, 见 https://www.math.columbia.edu/~dejong/wordpress/?p=866 8, 9 。. W. G. Dwyer 和 J. P. C. Greenlees, *Complete modules and torsion modules*, 《美国数学杂志》124（2002），第 2 期，199–220 页。. J. P. C. Greenlees 和 J. P. May, *Derived functors of I-adic completion and local homology*, 《代数杂志》149（1992），第 8 期，438–453 页。. M. J. Hopkins, *Global methods in homotopy theory*, 《同伦论》，1985 年达勒姆会议（E. Rees 和 J. D. S. Jones 编），伦敦数学会讲义系列，第 117 卷，剑桥大学出版社，1987 年 10 18 . . M. Hovey、J. H. Palmieri 和 N. P. Strickland, *Axiomatic stable homotopy theory*, 第 128 卷，美国数学会回忆录，第 610 号，美国数学会，1997 年。2, 5 19. M. Hovey 和 N. P. Strickland, *Morava K-theories and localisation*, 第 139 卷，美国数学会回忆录，第 666 号，美国数学会，1999 年。2, 13 20. P. Jørgensen, *The homotopy category of complexes of projective modules*, 《数学进展》193（2005），第 6 期，223–232 页。. L. G. Lewis Jr.、J. P. May 和 M. Steinberger，J. E. McClure 参与撰写, *Equivariant stable homotopy theory*, 数学讲义，第 Springer-Verlag 卷，柏林/纽约，1986 2 22 . . H. Krause, *Homological theory of representations*, 剑桥高等数学研究，剑桥大学出版社，. A. Neeman, *The chromatic tower for $D(R)$*, 《拓扑学》（），–。. C. Rotthaus, *On rings with low-dimensional formal fibres*, 《纯粹与应用代数杂志》71（1991），第 11 期，25 2 3，287–296 页。. R. Rouquier, *Dimensions of triangulated categories*, 《K-理论杂志》1（2008），第 2 期，193–256 页；更正：同上，257–258 页。12 26. A. M. Simon, *Some homological properties of complete modules*, 《剑桥哲学会数学会刊》108（1990），第 2 期，231–246 页。9

Dave Benson, Institute of Mathematics, University of Aberdeen, King's College, Aberdeen AB24 3UE, Scotland U.K.

Srikanth B. Iyengar, Department of Mathematics, University of Utah, Salt Lake City, UT 84112, U.S.A.

Henning Krause, Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, 33501 Bielefeld, Germany.

Julia Pevtsova, Department of Mathematics, University of Washington, Seattle, WA98195, U.S.A.