arXiv:2302.08570v1 [cs.CC] 16 Feb 2023

定义域大小为 3 的平面图同态计数的复杂性

Jin-Yi Cai* Ashwin Maran*
jyc@cs.wisc.edu amaran@wisc.edu

摘要

我们证明了一个关于定义域大小为 3 的平面图同态计数的复杂性二分定理。给定任意一个 3×3 实值对称矩阵 H，它定义了从所有平面图到 $G \mapsto Z_H(G)$ 的图同态，我们根据矩阵 H对该问题的计算复杂性进行了完整分类。我们证明，对于每个 H，该问题要么可以在多项式时间内计算，要么是 #P-困难。可在多项式时间内计算的情形，恰好包括那些对一般图可在多项式时间内计算的情形（已知完整分类[25]），以及可通过匹配门使用 Valient全息算法计算的情形。我们还证明了关于一般定义域大小下平面图同态的若干结果 q。证明主要使用解析论证。

1 引言

给定图 G 和 H，从 $V(G)$ 到 $V(H)$ 的映射称为同态，如果 G 的边被映射为 H 的边。配分函数的概念则将这一概念置于更一般或定量的框架中。设 $M = (m_{i,j})$ 是一个对称 $q \times q$矩阵。在本文中，我们考虑任意实值元素 $m_{i,j} \in \mathbb{R}$；如果 $m_{i,j} \in \{0, 1\}$ （或 $m_{i,j} \geq 0$），那么 M 是图 $H = H_M$ 的无权（或非负加权）邻接矩阵。给定 M，对于任意输入无向多重图 $G = (V, E)$，配分函数 $Z_M(G)$ 定义为

$$Z_M(G) = \sum_{\sigma: V \to [q]} \prod_{(u,v) \in E} m_{\sigma(u),\sigma(v)}.$$

显然，同构的图 $G \cong G'$ 具有相同的值 $Z_M(G) = Z_M(G')$，因此每个 M都定义了一个图性质 $Z_M(\cdot)$。对于一个 0-1 矩阵 M， $Z_M(G)$ 统计从 G 到 H的同态数量。图同态（GH）涵盖了大量图性质 [34]。

每个 M 都定义了一个计算问题，记作 GH(M)：给定一个输入图 G，计算$Z_M(G)$。GH(M) 的复杂性一直是研究的重点。人们已经得到了一系列适用范围日益广泛的复杂性二分定理。Dyer 和 Greenhill [18] 证明，对于任意 0-1 对称矩阵 M，计算 $Z_M(G)$ 要么属于多项式时间，要么是 #P 完全。Bulatov

*计算机科学系，威斯康星大学麦迪逊分校。本研究获得了威斯康星大学麦迪逊分校 VCRGE办公室的部分资助，资金由 WARF 提供，此外还获得了西蒙斯研究奖学金。

和 Grohe [7] 找到了适用于所有非负矩阵 GH(M) 的完整分类 M。Goldberg、Grohe、Jerrum 和 Thurley [25] 随后证明了适用于所有实值矩阵的二分性 M。最后，Cai、Chen 和 Lu [11] 确立了适用于所有复值矩阵的二分性 M。我们还注意到，图同态可以视为计数 CSP 的一个特例，其中只有一个二元约束函数。对于计数 CSP，一系列研究结果确立了适用于任意约束函数集合的复杂性二分 $\mathcal{F}$，其适用范围从取值为 0-1 的函数 [9, 20, 21, 19] 扩展到取非负有理数值的函数 [6], ，再扩展到取非负实数值的函数 [12],，直至所有复值函数 [1]。

与这一发展并行，Valiant [41] 提出了全息算法。众所周知，计算完美匹配数量（完美匹配计数问题）是 #P 完全的 [42]。另一方面，自 20 世纪 60 年代以来，著名的 FKT 算法 [33, 40, 32, 31] 便能在多项式时间内计算平面图上的完美匹配计数问题。Valiant全息算法极大地拓展了它的适用范围，以至于由此产生了一个极为引人深思的问题：是否存在一种通用算法，能够仅凭这一方法解决所有在平面图上可用多项式时间求解（但一般情况下为 #P 完全）的计数问题（以和积形式表示）？这种普适性论断无疑极其大胆，甚至可能显得过于雄心勃勃。

为解决这一问题，研究者引入了 Holant 问题 [16]。Holant 问题属于边模型：对于给定的输入图，将约束函数附加到顶点上，而边则充当变量。典型例子包括完美匹配计数问题、正常边着色计数和圈覆盖计数等。可以证明，计数 CSP 可以表示为 Holant 问题，但反之则不成立 [22]。在 Holant 问题的框架下，可以对这类计数问题进行分类，并理解全息算法的能力。

经过一系列研究 [16, 15, 13, 3, 2, 44, 24, 23, 13] ，人们确立了如下结论：对于布尔域上的任意一组复值约束函数 $\mathcal{F}$ （即 $q = 2$），#CSP($\mathcal{F}$) 存在三分分类：(1) 可在多项式时间内求解；(2) 在平面图上可在多项式时间内求解，但在一般图上是 #P-困难的；(3) 在平面图上是 #P-困难的。此外，类别 (2) 恰好由那些能够使用 FKT 通过 Valiant全息算法求解的问题组成。值得注意的是，颇为有趣的是，这是一种归约到 #PM 的归约；#PM 是一个 Holant 问题，而不是 #CSP 问题。更令人费解的是，进一步的研究证明，对于布尔域上更广泛的 Holant 问题，Valiant全息算法并不能普遍求解类别 (2) 中的问题 [14]。迄今为止，我们对高阶域问题中的这一普遍性问题知之甚少（$q > 2$）。在这项工作之前，人们尚不清楚 GH(M) 的平面版本在 $q = 3$上的复杂性分类，即使对于 0-1 矩阵 M也是如此。

另一方面，GH 的平面版本（针对一般的 q）已被发现与量子信息论密切相关 [4, 17, 1, 39, 37, 36]。Man˘cinska 和 Roberson [38] 证明，两个图 H 和 H' 量子同构，当且仅当对于每个平面输入图 G，配分函数 $Z_H(G) = Z_{H'}(G)$。这与 Lov´asz [35] 的一个经典结果形成对照：对于每个图 G， H 和 H'同构，当且仅当 $Z_H(G) = Z_{H'}(G)$。他们还证明，对于两个图 H和 H'，判定对所有平面图 G [38, 1]是否都有 $Z_H(G) = Z_{H'}(G)$，一般来说是不可判定的。（H 和 H' 不必是平面图。）

[1]目前尚不清楚最后一个计数CSP二分定理是否具有可判定的二分判据，而 GH 上的二分判据 [11] 是多项式时间可判定的。因此， [10] 并未严格取代 [11]。

我们的目标仅限于复杂性问题。从平面输入图 G计算 $Z_M(G)$ 的计算复杂性如何？本文开启了这一探索。令 Pl-GH(M) 表示输入图被限制为平面图时的 GH(M) 问题。（同样，底层图 H_M 不受平面图限制。）对于定义域大小 $q = 3$，我们对所有实值矩阵 M对应的 Pl-GH(M) 复杂性给出了完整分类。我们证明，对于这一类问题，按照上述三个类别进行分类是完备的，而全息归约到 FKT 仍是类别（2）的通用算法。与以往的工作一样，将定义域大小 2 的二分性推广到定义域大小 3，需要克服重重困难，也可能带来未来的进展 [8]。我们还证明了若干关于一般 q下 Pl-GH(M) 的结果。例如，我们给出了一个通用判据，可推出非负实矩阵对应的 Pl-GH(M) 是 #P-困难的（定理 24 和 25）；还证明了对几乎所有 M，Pl-GH(M) 都是 #P-困难的（定理 26）。

现在我们概述 $q = 3$ 情形证明的一些要点。首先，我们利用布尔域二分定理处理某些 3×3 矩阵。这既包括 可约 矩阵，也包括一个更微妙的情形，即 成对 矩阵。对于后一种情形，我们可以将问题转化为一种配分函数问题，其中顶点权重依赖于度。然后，我们使用 [26] 中的构件构造和插值，消除对顶点度的依赖。

然后，我们针对 M 的特征值提出一个格条件。若该条件成立，就可以利用范德蒙德方程组完成 #P-困难性证明。经过一番推导，问题归结为证明：对于某个实数 $p > 1$，Pl-GH($M(p)$) 是 #P-困难的，其中 $M(p)$ 是一族形如 $(p^{x_{ij}})$ 的矩阵，$x_{ij} \geq 0$ 为某些整数。我们对 x_{ij} 几乎没有控制，唯一知道的是，对于某个 $\epsilon > 0$，$M(p)$ 在某个小区间 $p \in I_\epsilon = (1, 1+\epsilon)$ 上满秩。令 $\lambda_i = \lambda_i(p)$ 为 $M(p)$ 的特征值，并按 $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3|$ 排序。根据佩龙定理，$|\lambda_2| < |\lambda_3|$ 是严格的，并且存在定义良好且唯一的 $t(p) \in (0, 1]$，使得 $|\lambda_2| = |\lambda_1|^{t(p)} |\lambda_3|^{1-t(p)}$。

证明的关键在于说明以下几点：(i) $\lim_{p \to 1^+} t(p)$ 存在，且其值为 1/2 或 1。(ii) $t(p)$ 不可能在 I_ϵ 中恒等于 1/2。(iii) 如果 $t(p)$ 在 I_ϵ 中恒等于 1，那么 Pl-GH(M) 是 #P-困难。由 (i) 可知，如果 $t(p)$ 在 I_ϵ 中为常数，那么它只能是 1/2 或 1。根据 (ii) 和 (iii)，我们可以假设这两种情况都不成立，因此 $t(p)$ 不是常数。于是，根据介值定理，存在某个$p \in I_\epsilon$，使得 $t(p)$ 是无理数。这个无理的 $t(p)$ 将满足格条件！

现在，敏锐的读者可能会提出异议：产生无理数 $t(p)$ 的 p 甚至可能不是代数数，而配分函数复杂度的通常定义要求实数是代数数，这样才能应用基于图灵机的严格位复杂度。

这确实是个棘手的难题。我们的证明本质上是分析性的。此外，确实存在非常数的连续函数 $f(\cdot)$，它们将所有代数数 p映射为有理数 $f(p)$（见 附录 B）。此外，似乎根本无法证明我们的 $t(p)$ 不是这样的函数（尽管这很可能是真的）。

我们通过一种大胆的方法解决这一困难——我们将允许 所有 实值 M 用于 GH(M)，同时仍保持在图灵机严格的位复杂度范围内。这使用了唯一超越次数 [30]定理。详情见 第 2.1 节。我们指出，这使其成为非构造性的。例如，目前尚不清楚 $\mathbb{Q}(e, \pi)$ 的超越次数是 1 还是 2。如果 M 同时具有 e 和 π，我们对 GH(M) 的形式化定义将这一度视为“已知”（存在性意义上）；M 是计算问题 GH(M) 的固定常数，而复杂度陈述涉及 存在性，即 P-

时间算法或归约（但不涉及如何获得它们）。

2 预备知识

令 $M = (m_{i,j})$ 为一个对称的 $q \times q$ 实值矩阵， $i, j \in [q]$。给定一个平面无向多重图 $G = (V, E)$，我们可以对图 G 执行某些保持平面性的初等操作，将其转换为新图 G'，使得对于某个矩阵 M'，$Z_M(G') = Z_{M'}(G)$。本文大部分内容将使用两种此类操作：加粗和拉伸。

给定任意平面多重图 $G = (V, E)$ 和一个正整数 k，我们可以通过将 G 中的每条边替换为连接同一对顶点的 k 条平行边，构造平面多重图 $T_k G$。这个过程称为加粗。显然， $Z_M(T_k G) = Z_{T_k M}(G)$，其中 $T_k M$ 是元素为 $\left((m_{i,\ j})^k\right)$（$i$、$j \in [q]$）的 $q \times q$ 矩阵。特别地，对于所有 $k \geq 1$，Pl-GH$(T_k M) \leq$ Pl-GH(M)。

类似地，给定任意平面多重图 $G = (V, E)$ 和一个正整数 k，我们可以通过将每条边 $e \in E$ 替换为长度为 k 的路径，构造平面多重图 $S_k G$。这个过程称为拉伸。也容易看出， $Z_M(S_k G) = Z_{S_k M}(G)$，其中 $S_k M = M^k$ 是 M 的 k 次幂。因此，对于所有 $k \geq 1$，我们也有 Pl-GH$(S_k M) \leq$Pl-GH(M)。

2.1 计算模型

图灵机模型天然适用于研究整数或图等离散结构上的计算。当 $M \in \mathbb{R}^{q \times q}$ 时，对于 Pl-GH(M)，通常将 M 限制为仅含代数数的矩阵。这纯粹是出于对计算模型的考虑，尽管允许所有实值矩阵会更加自然。

存在一种形式化的（尽管是非构造性的）方法，可以处理任意实值矩阵 M 下的 Pl-GH(M)，同时在位复杂度方面严格保持在图灵机模型之内。在本文中，由于我们的证明高度依赖于关于实线上的连续函数的解析论证，因此这种形式化的逻辑观点成为必要。

首先，我们回顾域论中的一个定理：由一组有限个实数生成的扩域 F $\mathbb{Q}$ 是某个纯超越扩域 E′ 的有限代数扩域，其中 E $= \mathbb{Q}$具有形式 E $= \mathbb{Q}(X_1, \ldots, X_m)$，且 $m \geq 0$ 和 $X_1, \ldots, X_m$ 代数独立 [30]（定理 8.35，第 512 页）。称 F 在 $\mathbb{Q}$上的有限超越次数为 m。已知，对于 F， m 是唯一确定的。由于 char $\mathbb{Q} = 0$，E′ 在 E 上的有限代数扩域实际上是单扩域，即 E′ =E(β)，其中 β为某个元素，并且它由 E$[X]$中的一个最小多项式确定。现在，给定一个实矩阵 M，令 F $= \mathbb{Q}(M)$ 表示通过添加 M的元素而得到的扩域。我们

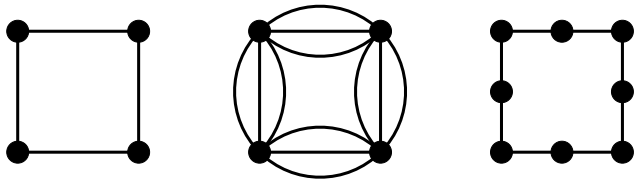

图 1：图 G、加厚图 $T_3 G$ 和拉伸图 $S_2 G$。

考虑 M 对于问题 Pl-GH(M) 是固定的，因此我们可以（非构造性地）假设形式 $\mathsf{F} = \mathsf{E}(\beta)$ 以及 $\mathsf{E} = \mathbb{Q}(X_1, \ldots, X_m)$ 已给定。（这意味着，除其他事项外，β 在 E 上的最小多项式已给定，并且可以在 F 上执行所有算术运算。）

现在，计算问题 Pl-GH(M) 如下：给定一个平面 G，计算 $Z_M(G)$ 在 F 中的值（表示为一个关于 β 的多项式，其系数属于 E）。更具体地说，我们可以证明，这等价于以下问题 COUNT(M)：输入为一对 (G, x)，其中 $G = (V, E)$ 是一个平面图，且 $x \in \mathsf{F}$。输出为

$$\#_M(G, x) = \left| \{\sigma : V \to [q] \ : \ \prod_{(u,v)\in E} m_{\sigma(u),\sigma(v)} = x\} \right|,$$

一个非负整数。请注意，在这个定义中，我们基本上是将 $Z_M(G)$ 定义中乘积值相同的项合并起来。

令 $n = |E|$。定义 X 为 $Z_M(G)$ 中所有可能出现的乘积值构成的集合：

$$X = \left\{ \prod_{i,j\in[q]} m_{ij}^{k_{ij}} \;\middle|\; \text{integers } k_{ij} \geq 0 \text{ and } \sum_{i,j\in[q]} k_{ij} = n \right\}. \tag{1}$$

存在 $\binom{n+q^2-1}{q^2-1} = n^{O(1)}$ 个整数序列 $(k_{i,j})$，使得 $k_{i,j} \geq 0$ 且 $\sum_{i,j\in[q]} k_{i,j} = n$。$X$ 被定义为一个集合，而非多重集合。移除重复元素后，其基数 $|X|$ 也关于 n呈多项式增长。对于固定且给定的 F，X 中的元素可以在关于 n的多项式时间内枚举。（重要的是，F 和 q 都被视为固定常数。）根据定义可得，对于任意 $x \notin X$，$\#_M(G, x) = 0$。由此得到以下关系：

$$Z_M(G) = \sum_{x\in X} x \cdot \#_M(G, x), \quad \text{for any graph } G,$$

因此，Pl-GH(M) $\leq$ COUNT(M)。

对于另一个方向，对于任意 $p \in [|X|]$（回顾一下，$|X|$ 是 n 的多项式），我们通过将 G 的每条边替换为 p 条平行边，从 G 构造一个平面图 T_pG。于是，

$$Z_M(T_pG) = \sum_{x\in X} x^p \cdot \#_M(G, x), \quad \text{for any graph } G.$$

这是一个范德蒙德方程组；由于根据定义，X 中的元素互不相同，因此它是满秩的。因此，通过对取值为 Z_M（T_pG）的 Pl-GH(M) 进行查询，我们可以在多项式时间内求解该方程组，并得到每个非零 $x \in X$ 对应的 $\#_M(G, x)$。为了得到 $\#_M(G, 0)$（如果 $0 \in X$），我们注意到

$$\sum_{x\in X} \#_M(G, x) = q^{|V|}.$$

这给出了一个多项式时间归约，因此，COUNT(M) $\leq$ Pl-GH(M)。我们已经证明了

引理 1. 对于任意固定的 $M \in \mathbb{R}^{q\times q}$，Pl-GH($M$) $\equiv$ COUNT(M)。

因此，Pl-GH(M) 可以等同于这样一个问题：生成 $Z_M(G)$ 的规范表达式中的那些多项式数量级的整数系数，该表达式是 X 中若干（互不相同）项之和。

这种形式主义观点的优点在于，我们可以讨论一般 Pl-GH(M) 的复杂性，而不必将其限制在代数数范围内。因此，无需排除诸如 e 或 π 这样的数。更重要的是，由于我们采用的证明技巧，这种一般性对于本文至关重要。此外，摆脱这一限制后，我们实际上还在证明中明确地将超越数用作工具（见 引理 19）。简言之，在本文中，讨论一般实数 Pl-GH(M) 的复杂性并非 缺陷，而是优势。

不过，我们注意到，这种处理方式有以下微妙之处。对于计算问题 Pl-GH(M)，形式主义观点要求将 F 指定为 F $=$ E(β) 的形式。这样的形式确实存在，而且按照输入图 G 的大小衡量，其描述长度为常数。然而，实际上，关于超越数的许多基本问题尚无定论。例如，目前仍不清楚 $e+\pi$ 或 $e\pi$ 是有理数、代数无理数还是超越数；此外，$\mathbb{Q}(e,\pi)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的超越次数是否为 2（或 1）仍是一个开放问题，也就是说，e 和 π是否代数独立尚无定论。这里的形式主义观点以非构造性的方式假定，关于 F 的这些信息已给定。在这种设定下，从一个问题到另一个问题的多项式时间归约 $\Pi_1 \leq \Pi_2$ 仅意味着：存在一个针对 Π_2 的多项式时间算法，在逻辑上蕴含存在一个针对 Π_1的多项式时间算法。我们并未通过构造实际得到这样的算法。

尽管有这一逻辑上的迂回，如果读者只关心整数矩阵 M 上 Pl-GH(M) 的复杂性，那么根据关于计算模型的整数 M 上 Pl-GH(M) 的标准定义，本文证明的复杂性二分性依然成立；这一结果是在更广泛的实矩阵 M 范围内证明的，这一点无关紧要。这类似于解析数论中的情形：人们可能只关心一个严格关于普通整数的问题，但相关定理却是在更广泛的分析学框架下证明的。

3 归约到布尔域矩阵

本节将处理那些 3×3 使平面图同态问题等价于在一个 2×2 矩阵上求解同一问题的矩阵。我们首先陈述以下定理 [27]:

定理 2. 对于 $M=\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ y & z \end{smallmatrix}\right)$，问题 Pl-GH($M$) 是 #P-困难的，除非满足以下条件之一；若满足其中任一条件，则 Pl-GH(M) 是多项式时间可解的：

$$(1)\ \ xz=y^2, \qquad (2)\ \ y=0, \qquad (3)\ \ x=z, \qquad or \qquad (4)\ \ xz=-y^2 \ \ \&\ \ x=-z.$$

情形（3）（伊辛模型）恰好对应这样一类问题：Pl-GH(M)可在多项式时间内求解，而 GH(M)是#P-困难的；这些问题也恰好是可使用匹配门通过全息算法求解的问题。

3.1 可约矩阵

定义 3. 若存在置换矩阵 P，使得 PMP^{T} 是某些（非空）矩阵 A 和 B 的直和 $A \oplus B = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$，则称 $q \times q$ 对称矩阵 M 是可约的。若一个对称矩阵 M 不可约，则称其为不可约矩阵。具体到 $q = 3$，若一个对称矩阵M 具有如下形式，则称其为可约的：

$$M^{\pi} = \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ y & z & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix} \tag{2}$$

在其行和列经过置换 π 后。

由于 M 是对称的，行和列上的置换 π 必须相同。显然，对所有 G，$Z_M(G) = Z_{M^{\pi}}(G)$。对于可约矩阵 $q \times q$ $M^{\pi} = A \oplus B$，由 [11]（引理 4.3）可知，GH(M) 是 #P-困难的，当且仅当 GH(A) 或 GH(B) 至少有一个是 #P- 困难的；而 GH(M) 是多项式时间可解的，当且仅当 GH(A) 或 GH(B) 都是多项式时间可解的。关于多项式时间可解性的结论对 Pl-GH 也成立。此外，可以验证，[11]（引理 4.3）中关于 #P-困难性的证明在平面情形下同样适用。因此，我们得到以下结论

引理 4. 对于满足 $M = A \oplus B$ 的可约对称矩阵 $q \times q$，Pl-GH(M) 是 #P-困难的，当且仅当 Pl-GH(A) 或 Pl-GH(B) 至少有一个是 #P-困难的；而 Pl-GH(M) 是多项式时间可解的，当且仅当 Pl-GH(A) 或 Pl-GH(B) 都是多项式时间可解的。

具体而言，对于 $q = 3$ 的情形，我们看到，如果 M 是可约的，M 具有形式（2），且Pl-GH（B）显然是可处理的，当 B 是一个 1×1 矩阵时。因此，我们有以下引理。

引理 5。对于 M具有形式（2）时，Pl-GH（M）$\equiv$Pl-GH（M'），其中 $M' = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ y & z \end{smallmatrix}\right)$。

因此，定理 2 已经对Pl-GH（M）的可约矩阵进行了分类。

3.2 双生矩阵

Pl-GH （M）等价于针对另一组矩阵 M的 2×2 矩阵问题 .

定义 6. 如果对称矩阵 M 的任意一行（列）都是另一行（列）的倍数，则称其为孪生矩阵。具体而言，对于 $q = 3$，如果对称矩阵 M 具有如下形式，则它是孪生矩阵

$$M^{\pi} = \begin{pmatrix} x & cx & y \\ cx & c^2x & cy \\ y & cy & z \end{pmatrix} \tag{3}$$

在通过置换 π 对其行和列进行置换之后。

令 $M' = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$ 和 $\mathcal{D} = \{D^{[r]}\}_{r \in \mathbb{N}}$，其中 $D^{[r]}$ 表示度为 r 的顶点的顶点权重 $D^{[r]} = \begin{pmatrix} 1 + c^r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。将 Pl-GH($M', \mathcal{D}$) 定义为计算以下值的问题：

$$Z_{M',\mathcal{D}}(G) = \sum_{\sigma: V \to [2]} \prod_{\{u,v\} \in E} m'_{\sigma(u)\sigma(v)} \prod_{v \in V} D^{[\deg(v)]}_{\sigma(v)\sigma(v)},$$

对于任意平面图 $G = (V, E)$。

那么对于 M 形式（3），

$$\begin{aligned} Z_M(G) &= \sum_{\sigma: V \to \{1,2\}} \prod_{\{u,v\} \in E} m'_{\sigma(u)\sigma(v)} \left(\sum_{\tau: \sigma^{-1}(1) \to \{-,+\}} \left(\prod_{v \in \tau^{-1}(+)} (c^{\deg(v)}) \right) \right) \\ &= \sum_{\sigma: V \to \{1,2\}} \prod_{\{u,v\} \in E} m'_{\sigma(u)\sigma(v)} \prod_{v \in V} D^{[\deg(v)]}_{\sigma(v)\sigma(v)} \\ &= Z_{M',\mathcal{D}}(G). \end{aligned}$$

因此，$\texttt{Pl-GH}(M) \equiv \texttt{Pl-GH}(M', \mathcal{D})$。以下定理改编自 [26]。（为完整起见，我们在附录 A中给出证明。）

定理 7. 对于上述满秩 M' 和 $\mathcal{D}$，存在 $p_0 \geq 1$，使得对于所有 $p \geq p_0$，$\text{Pl-GH}(N_p) \leq \text{Pl-GH}(M', \mathcal{D})$，其中 $N_p = \begin{pmatrix} c_p^2 x & c_p y \\ c_p y & z \end{pmatrix}$ 和 $c_p = \frac{1+c^{2p+1}}{1+c^{2p}}$。

在证明一般双生矩阵的困难性之前，我们确实需要考虑一种特殊情况，在这种情况下问题是可处理的。

定义 8. 如果一个 $q \times q$ 对称矩阵 M 具有以下形式 $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & A \\ A^{\mathsf{T}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$，其中 $r \times$是某个 $q - r$ 矩阵 A，那么它就是二部矩阵；其中 $0 < r < q$，且对 M 的行和列应用置换 π 后。

特化于 $q = 3$时，不可约二部矩阵恰好是满足 $x = z = 0$的双生矩阵。已知在此情况下 $\texttt{Pl-GH}(M)$ 是可处理的 [7, 25]。

引理 9。设 M 是形式为（3）的孪生实值对称矩阵。假设 M 不可约且非二部。那么 $\texttt{Pl-GH}(M)$ 是 #P-困难的，除非 $xz = y^2$，在这种情况下，它是多项式时间可解的。

证明。如果 $xz = y^2$，那么 M 是块秩为 1 的，并且 $\texttt{Pl-GH}(M)$ 是多项式时间可解的 [7, 25]。现在假设此情况不发生。注意，$y \neq 0$ 和 $c \neq 0$，否则 M 将是可约的。此外，$(x,\ z) \neq \mathbf{0}$，否则 M 将是二分的。

那么对于 M' 和 $\mathcal{D}$ 如上所述，定理 7 适用，我们只需证明$\texttt{Pl-GH}(N_p)$ 对于较大的正整数 p 是 #P-困难的。

我们首先假设 为 $c \neq \pm 1$。那么对于任意 p，$c_p y \neq 0$，并且 $\det(N_p) \neq 0$。容易验证 t

$$c_{p+1} - c_p = \frac{c^{2p}(c+1)(c-1)^2}{(1+c^{2p})(1+c^{2p+2})}.$$

由于 $c \neq \pm 1$，我们有一个严格单调序列 $\{c_p \mid p \geq 1\}$。因此对于足够大的 p，$c_p^2 x \neq \pm z$。那么 $\texttt{Pl-GH}(N_p)$ 根据 定理 2是 #P-困难的。由此可得 $\texttt{Pl-GH}(M)$ 也同样是 #P-困难的。

现在假设 $c = \pm 1$。我们分几种情况讨论。

情况 1： $x^2z^2 \neq y^4$ 以及 $x^2 \neq z^2$

在这种情况下，我们使用 T_2M。根据定理 7，可得 Pl-GH(N) $\leq$Pl-GH(T_2M) $\leq$Pl-GH(M)，其中 $N = \begin{pmatrix} x^2 & y^2 \\ y^2 & z^2 \end{pmatrix}$。由定理 2 可知，Pl-GH($N$) 是 #P-困难的，因此 Pl-GH($M$) 也是如此。

情况 2： $x^2z^2 \neq y^4$ 和 $x^2 = z^2$

在这种情况下，我们使用 S_2T_2M。根据定理 7，可得 Pl-GH(N') $\leq$Pl-GH(S_2T_2M) $\leq$Pl-GH(M)，其中 $N' = \begin{pmatrix} 2x^4+y^4 & 3x^2y^2 \\ 3x^2y^2 & x^4+2y^4 \end{pmatrix}$。由于 $x^2z^2 \neq y^4$， T_2M 的秩为 2，因此 S_2T_2M 的秩也为 2。因此可知，N' 也是一个秩为 2 的矩阵，所以 det(N') $\neq 0$。此外，我们注意到，由于 $x^2 = z^2$， $x^2z^2 = x^4 \neq y^4$。因此，我们看到 $2x^4 + y^4 \neq x^4 + 2y^4$。由定理 2 可知，Pl-GH($N'$) 是 #P-困难的，因此 Pl-GH($M$) 也是如此。

情形 3： $x^2z^2 = y^4$ 和 $2x^2 \neq y^2$

在这种情况下，我们使用 S_2M。由于 $xz \neq y^2$， $x^2z^2 = y^4$ 给出 $xz = -y^2$。因为 $y \neq 0$，所以我们有 $x \neq 0$和 $z \neq 0$。显然， $M = C^{\mathsf{T}}M'C$，其中 $C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 和 $M' = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ y & z \end{smallmatrix}\right)$。那么 S_2M 的矩阵为 $M^2 = C^{\mathsf{T}}M''C$，其中 $M'' = M'\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ $M' = \begin{pmatrix} x' & y' \\ y' & z' \end{pmatrix}$，且 $x' = 2x^2 + y^2$、$y' = 2xy + yz$和 $z' = 2y^2 + z^2$。

显然， M^2有一个 2×2子矩阵 M''，其 det(M'') $\neq 0$。此外， $x'z' + (y')^2 > 0$，因为 $y^2 > 0$。因此，$(x')^2(z')^2 - (y')^4 \neq 0$。此外，$(x', z') \neq (0, 0)$。最后，由于 $2x^2 \neq y^2$，我们有 $y' \neq 0$，因此 S_2M 是不可约的。因此，由情形 1 和 2 可知，Pl-GH(S_2M) 是 #P-困难。由于 Pl-GH(S_2M) $\leq$ Pl-GH(M)，Pl-GH(M) 也一样。

情形4： $x^2z^2 = y^4$ 和 $2x^2 = y^2$

在此情形中，我们使用 T_3M。同样，我们有 $xz = -y^2$。因此， $z = -\frac{y^2}{x} = -\frac{2x^2}{x} = -2x$。于是 $T_3M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} x' & y' \\ y' & z' \end{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$，其中 $x' = x^3$、$y' = y^3$和 $z' = -8x^3$。因此， T_3M是不可约的，$(x', z') \neq (0, 0)$，并且 $x'z' \neq (y')^2$。此外，$(y')^2 = y^6 = 8x^6 \neq 2x^6 = 2(x')^2$。因此，此情形可归约为情形3，故 Pl-GH($T_3M$) 是 #P-困难的。由于 Pl-GH($T_3M$) $\leq$Pl-GH(M)，这意味着 Pl-GH(M) 是 #P-困难的。

□

结合引理 9 和定理 2 的结果，我们得到

定理 10。若 M 是具有形式（3）的孪生实值对称矩阵，则Pl-GH(M) 属于#P-困难，以下情况除外；在这些情况下，Pl-GH(M) 可在多项式时间内求解：

$$(1)\ y = 0,\quad (2)\ x = z = 0,\quad (3)\ xz = y^2,\quad (4)\ c = 0\ \&\ x = z\ \ or\ \ (5)\ c = 0\ \&\ x = -z\ \&\ xz = -y^2.$$

4 通过加粗进行插值

我们已成功将所有满足 Pl-GH(M) 等价于二域问题的 Pl-GH(M) 问题分类为多项式时间可解或 #P-困难。现在我们将考虑以下问题：

对于这些问题，这种等价关系并不成立。本节中，我们也不再将范围限制在$q = 3$，而是更一般地讨论该问题。

现在让我们更仔细地考察增厚操作。注意，

$$Z_M(T_kG) = Z_{T_kM}(G) = \sum_{x\in X} x^k \cdot \#_M(G, x) \tag{4}$$

其中 X如 方程 (1)所示。注意，$\#_M(G, x)$ 不依赖于 k，但依赖于矩阵 M的元素。我们现在来处理这种依赖关系。

4.1 生成集

定义 11. 设 $\mathcal{A}$是一个非零实数集合。对于某个整数 $d \geq 0$，正实数的有限集合$\{g_t\}_{t\in[d]}$是 $\mathcal{A}$ 的一个生成集，当且仅当对每个 $a \in \mathcal{A}$，都存在唯一的 $(e_1, \ldots, e_d) \in \mathbb{Z}^d$ 使得 $a = \pm g_1^{e_1} \cdots g_d^{e_d}$。

引理 12. 每个非零实数的有限集合 $\mathcal{A}$ 都有一个生成集 t.

证明. 考虑由正实数 $\{|a|$ 生成的乘法群 $\mathcal{G}$： $a \in \mathcal{A}\}$。它是乘法群 $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ 的一个子群。由于 $\mathcal{A}$ 是有限的，且 $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ 是无挠的，因此群 $\mathcal{G}$ 是一个有限生成自由阿贝尔群，从而与某个 $d \geq 0$的 $\mathbb{Z}^d$ 同构。设$\{g_t\}_{t\in[d]}$ 是这个自由阿贝尔群的一组基，即得引理。

□

我们注意到， $\{g_t\}_{t\in[d]} \subset \mathcal{G}$ 和 $\{\log g_t\}_{t\in[d]}$ 在 $\mathbb{Q}$上是线性无关的。

现在我们使用 引理 12 为任意不含零元素的矩阵 $M \in \mathbb{R}^{q\times q}$的元素 $(m_{ij})_{i,\ j\in[q]}$ 找出一个生成集。注意，这个生成集不一定唯一。对于某个生成集，任意 m_{ij}都存在唯一的整数 $e_{ij0} \in \{0, 1\}, e_{ij1}, \ldots, e_{ijd}$, 使得

$$m_{ij} = (-1)^{e_{ij0}} \cdot g_1^{e_{ij1}} \cdots g_d^{e_{ijd}}. \tag{5}$$

我们还注意到，对于任意实数 $c \neq 0$，Pl-GH(M) $\equiv$Pl-GH(cM)，因为 $Z_{cM}(G) = c^{|E(G)|}Z_M(G)$。通过选择某个 $c = g_1^{e'_1} \cdots g_d^{e'_d}$，我们可以假设对于所有 $i, j \in [q]$ 和 $t \in [d]$， $e_{ijt} \geq 0$。

引理 13. 设 $M \in \mathbb{R}^{q\times q}$ 为对称且没有零元素，其元素 $(m_{ij})_{1\leq i\leq j\leq q}$ 由方程（5）给出。定义 $\mathcal{M}$: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{q\times q}$，其中 $\mathcal{M}(\mathsf{p})_{ij} = \mathcal{M}(p_1, \ldots, p_d)_{ij} = (-1)^{e_{ij0}} \cdot p_1^{e_{ij1}} \cdots p_d^{e_{ijd}}$ 对所有 $i, j \in [q]$ 均成立。则对所有 $\mathsf{p} \in \mathbb{R}^d$， Pl-GH($\mathcal{M}(\mathsf{p})$) $\leq$Pl-GH(M)。

证明. 我们已经知道，对于任意 $k \geq 1$,

$$Z_M(T_kG) = \sum_{x\in X} x^k \cdot \#_M(G, x),$$

其中

$$X = \left\{ \prod_{i,j\in[q]} m_{ij}^{k_{ij}} \;\middle|\; \text{integers } k_{ij} \geq 0 \text{ and } \sum_{i,j\in[q]} k_{ij} = |E| \right\}.$$

由于每个 $x \in X$ 都各不相同，并且 $|X| \leq |E|^{O(1)}$，如果我们能够计算 $k \in [|X|]$ 对应的 $Z_M(T_k G)$，就能得到一个满秩范德蒙德方程组，该方程组可在多项式时间内求解，从而找出所有 $x \in X$ 的 $\#_M(G, x)$。

现在，让我们更仔细地考察集合 X。给定任意 $x \in X$，我们可以看到 $x = \prod m_{ij}^{k_{ij}}$，其中存在一些（不一定唯一的）整数 $k_{ij} \geq 0$，使得 $\sum k_{ij} = |E|$。根据 公式（5），我们知道每个m_{ij}都由集合 $\{g_t\}_{t\in[d]}$生成。因此，任意 $x \in X$ 都可以表示为

$$x = (-1)^{e_0^x} g_1^{e_1^x} \cdots g_d^{e_d^x}$$

此外，指数 $e_0^x \in \{0, 1\}$、e_1^x、……、$e_d^x \in \mathbb{Z}$ 是唯一的，因为 $\{g_t\}_{t\in[d]}$ 是一个生成集。

考虑一个固定的 $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d) \in \mathbb{R}^d$。现在我们可以定义函数 $y\colon X \to \mathbb{R}$，使得对所有 $x \in X$，$y(x) = (-1)^{e_0^x} \cdot p_1^{e_1^x} \cdots p_d^{e_d^x}$。现在，令

$$Y = \left\{ \prod_{i,j\in[q]} (\mathcal{M}(\mathbf{p})_{ij}^{k_{ij}} \;\middle|\; \text{integers } k_{ij} \geq 0 \text{ and } \sum_{i,j\in[q]} k_{ij} = |E| \right\}.$$

注意，对于任意 $y \in Y$，

$$\#_{\mathcal{M}(\mathbf{p})}(G, y) = \sum_{x\in X:\ y(x)=y} \#_M(G, x).$$

由于对于所有 $x \in X$，$\#_M(G, x)$ 均已计算完毕，因此现在可以在多项式时间内计算，

$$\sum_{x\in X} y(x) \cdot \#_M(G, x) = \sum_{y\in Y} y \cdot \#_{\mathcal{M}(\mathbf{p})}(G, y) = Z_{\mathcal{M}(\mathbf{p})}(G).$$

因此，Pl-GH($\mathcal{M}(\mathbf{p})$) $\leq$ Pl-GH(M)。 □

我们需要以下来自 [43] 的定理:

定理 14. 对于 $x, y \in \mathbb{C}$，在 (x, y) 处计算图特多项式在平面图上是 #P-困难的，除非 $(x-1)(y-1) \in \{1, 2\}$ 或 $(x, y) \in \{(1, 1)、(-1, -1)、(\omega, \omega^2)、(\omega^2, \omega)\}$，其中 $\omega = e^{2\pi i/3}$。在每种例外情况下，该问题都可在多项式时间内求解。

推论 15. 对于 $q \geq 3$，Pl-GH(VC_q) 是 #P-困难的，其中 VC_q 是具有元素 (v_{ij}) 的 $q \times q$ 矩阵，若 $i \neq j$ 则 $v_{ij} = 1$，否则为 $v_{ij} = 0$。

定理 14 使我们能够证明第一个困难性结果。

引理 16。设 M 为一个 $q \times q$ $(q \geq 3)$ 实值对称矩阵，且没有零元素，如 方程(5)所示。此外，假设对于所有 $i \in [q]$ 都存在某个（不一定互异的）$t(i) \in \{1, \ldots, d\}$，使得 $e_{iit(i)} > 0$，并且 $e_{jkt(i)} = 0$ 对于所有 $j \neq k$均成立。那么 Pl-GH(M) 是 #P-困难的。

证明。我们应用 引理 13。设 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$，定义为 $p_{t(i)} = 0$ 当 $i \in [q]$时，且 $p_i = 1$ 对于所有其他 $i \in [d]$。那么，很容易看出 $T_2(\mathcal{M}(\mathbf{p})) = \mathrm{VC}_q$。

根据 引理 13，我们得到 Pl-GH($\mathcal{M}(\mathbf{p})$) $\leq$ Pl-GH(M)。因此，

$$\text{Pl-GH}(\mathrm{VC}_q) \leq \text{Pl-GH}(\mathcal{M}(\mathbf{p})) \leq \text{Pl-GH}(M).$$

由此可得推论 15表明Pl-GH(M) 是 #P-困难的。 □

5 通过拉伸进行插值

本节重点讨论满秩矩阵。利用拉伸，我们将证明一类比在引理 16中所能证明的更有趣的矩阵类的困难性。

考虑一个 $q \times q$ 正实值、对称矩阵 M。存在实正交矩阵$H = (h_{ij})_{i,\ j\in[q]}$ 以及对角矩阵 $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$，使得

$$M = HDH^{\mathsf{T}},$$

其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$是 M 的特征值， H 的列是对应的特征向量 .

5.1 格条件

根据分解 $M = HDH^{\mathsf{T}}$，我们有 $M^k = HD^kH^{\mathsf{T}}$，并且

$$(M^k)_{ij} = (h_{i1}h_{j1})\lambda_1^k + \cdots + (h_{iq}h_{jq})\lambda_q^k.$$

由此可得

$$Z_{M^k}(G) = \sum_{\substack{x_1,\ldots,x_q\geq 0\\ \sum_i x_i = |E|}} c_{(x_i)_{i\leq q}} \cdot \left(\lambda_1^{x_1}\cdots\lambda_q^{x_q}\right)^k, \tag{6}$$

其中

$$c_{(x_i)_{i\leq q}} = \sum_{\sigma: V\to[q]} \left(\sum_{\substack{E_1\sqcup\cdots\sqcup E_q = E\\ |E_i| = x_i}} \left(\prod_{i\in[q]} \prod_{\{u,v\}\in E_i} h_{\sigma(u)i}h_{\sigma(v)i} \right) \right)$$

仅取决于 G 和正交矩阵 H，而不取决于 D。

定义 17. 非空非零实数集合 $(r_i)_{i\in[d]}$ 满足格条件，当且仅当唯一具有性质 $n_1 + \cdots + n_d = 0$和 $r_1^{n_1}\cdots r_d^{n_d} = 1$的整数序列 $(n_i)_{i\in[d]}$为 $(n_i)_{i\in[d]} = \mathbf{0}$。

引理 18. 若 M是一个满秩、实值、对称矩阵，其特征值 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$ 满足格条件，则对任意对角矩阵 Δ，$\text{Pl-GH}(H\Delta H^{\mathsf{T}}) \leq \text{Pl-GH}(M)$。

证明. 根据格条件，对于任意满足 $\prod_{i\in[q]}\lambda_i^{x_i} = \prod_{i\in[q]}\lambda_i^{y_i}$和 $\sum_{i\leq q} x_i = \sum_{i\leq q} y_i$ 的整数序列 $(x_i)_{i\leq q}$和 $(y_i)_{i\leq q}$，可得 $x_i = y_i$ 对所有 $i \in [q]$均成立。因此，根据取值$Z_M(S_kG) = Z_{M^k}(G)$（其中 $k \in \left[\binom{|E|+q-1}{q-1}\right]$），我们得到一个关于未知数 $c_{(x_i)i\leq q}$的满秩范德蒙德线性方程组。通过多项式时间求解该线性方程组，我们可以计算

$$\sum_{\substack{x_1,\ldots,x_q\\ \sum x_i = |E|}} c_{(x_i)_{i\leq q}} \cdot \left(\alpha_1^{x_1}\cdots\alpha_q^{x_q}\right) = Z_{H\Delta H^{\mathsf{T}}}(G)$$

对于任意 $\Delta = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$。因此，$\text{Pl-GH}(H\Delta H^{\mathsf{T}}) \leq \text{Pl-GH}(M)$。 □

现在证明存在某个 Δ，使得 $\text{Pl-GH}(H\Delta H^{\mathsf{T}})$ 是 #P-困难的。

引理 19. 如果 $M = HDH^T$ 是一个 $q \times q$ （$q \geq 3$）满秩、正实值的对称矩阵，其特征值（$\lambda_1, \ldots, \lambda_q$）满足格条件，那么存在一个对角矩阵 Δ，使得 Pl-GH($H\Delta H^T$) 是 #P- 困难的。

证明。 令 $(m_{ij})_{i,\ j\in[q]}$ 为矩阵 M的元素。根据假设，我们知道这些都是正实数。我们选取某个 $\kappa \in \mathbb{R}$ 使得 $\kappa + m_{ii} > 0$，且它在域 $\mathbf{F} = \mathbb{Q}(\{m_{ij}\}_{i,\ j\in[q]})$ 上是超越的。这样的超越实数存在，因为 $\mathbf{F}$ 上的代数数只有可数多个。令 $\{g_i\}_{i\in[d]}$ (分别地， $\{f_i\}_{i\in[d']}$) 为由 $\{m_{ij}\}_{i\neq j\in[q]}$ (分别地，$\{\kappa + m_{ii}\}_{i\in[q]}$) 生成的乘法自由阿贝尔群的一个基，如 引理 12的证明中所示。最后，令 $\Delta = D + \kappa I$。

断言 20. $\{g_i\}_{i\in[d]} \cup \{f_i\}_{i\in[d']}$ 是 $H\Delta H^T$的元素的一个生成集。

显然，根据构造， $H\Delta H^{\mathsf{T}}$ 中的每个元素都可以表示为 $\{g_i\}_{i\in[d]} \cup \{f_i\}_{i\in[d']}$的整数次幂之积。现在我们要证明这种表示的唯一性。

由于属于由 $\{\kappa + m_{jj}\}_{j\in[q]}$生成的阿贝尔群，存在整数$x_{i,\ j}$，使得对于 $i \in [d']$ 和$j \in [q]$，有

$$f_i = (\kappa + m_{11})^{x_{i,1}} \cdots (\kappa + m_{qq})^{x_{i,q}}. \tag{7}$$

$\{g_i\}_{i\in[d]} \cup \{f_i\}_{i\in[d']}$ 中的每个元素都是正数。假设存在某个$(e_1, \ldots, e_d, e'_1, \ldots, e'_{d'}) \in \mathbb{Z}^{d+d'}$，使得

$$g_1^{e_1} \cdots g_d^{e_d} \cdot (f_1)^{e'_1} \cdots (f_{d'})^{e'_{d'}} = 1.$$

首先，如果$(e_1, \ldots, e_d) = \mathbf{0}$，那么$\prod_{i\in[d]} g_i^{e_i} = 1$；又因为 $\{f_i\}_{i\in[d']}$ 是一个生成集，所以我们得到 $(e'_1, \ldots, e'_{d'}) = \mathbf{0}$，因此$(e_1, \ldots, e_d, e'_1, \ldots, e'_{d'}) = \mathbf{0}$。现在假设$(e_1, \ldots, e_d) \neq \mathbf{0}$。

代入 f_i，利用等式 (7)，我们得到

$$\prod_{i\in[d]} g_i^{e_i} \cdot \prod_{j\in[q]} (\kappa + m_{jj})^{y_j} = 1,$$

其中 $y_j = \sum_{i\in[d']} e'_i x_{i,\ j}$对 $j \in [q]$成立。由于 $(e_1, \ldots, e_d) \neq \mathbf{0}$，我们看到 $\prod_{i\in[d]} g_i^{e_i} \neq 1$。因此，$(y_1, \ldots, y_q) \neq \mathbf{0}$。将正的和负的 y_j 分开，我们得到

$$\left(\prod_{i\in[d]} g_i^{e_i}\right) \cdot \prod_{j\in[q]:y_j>0} (\kappa + m_{jj})^{y_j} = \prod_{j\in[q]:y_j<0} (\kappa + m_{jj})^{-y_j}. \tag{8}$$

方程方程 (8) 两边都是关于 κ 的多项式，系数属于域$\mathbf{F}$，且首项系数不同。这与我们的假设矛盾，即 κ对$\mathbf{F}$是超越的。 断言 20 由此得证。

现在，对于任意 $i \in [q]$，都存在某个 $t(i) \in [d']$，使得 $e_{iit(i)} > 0$，但 $e_{jkt(i)} = 0$ 对所有 $j \neq k$均成立。这是因为 $\{f_i\}_{i\in[d']}$去掉 $\{g_i\}_{i\in[d]}$后，是 $\{\kappa + m_{ii}\}_{i\in[q]}$的生成集，并且 $\kappa + m_{ii} \neq 1$。此外， $\{g_i\}_{i\in[d]}$去掉 $\{f_i\}_{i\in[d']}$后，是 $\{m_{ij}\}_{i\neq j\in[q]}$的生成集。因此，根据引理 16，我们得出结论：Pl-GH($H\Delta H^{\mathsf{T}}$) 是 #P-困难。 □

我们证明了以下定理:

定理 21. 如果 M 是一个 $q \times q$ ($q \geq 3$) 满秩、正实值、对称矩阵，其特征值（$\lambda_1, \ldots, \lambda_q$）满足格条件，那么 Pl-GH($M$) 是 #P-困难。

5.2 困难性判据的延拓

定理 21 中 要求 特征值满足格条件并非完全必要。以下是对 引理 18 的简单改编。

引理 22. 若 M 是一个满秩、实值、对称矩阵，且其特征值集合 $\{\lambda_i : i \in [q]\}$（作为集合不含重复元素）满足格条件，那么对于任意函数 $f\colon \{\lambda_i\colon i \in [q]\} \to \mathbb{R}$，我们有 Pl-GH($H\Delta H^{\mathrm{T}}$) $\leq$ Pl-GH(M)，其中 $\Delta = \mathrm{diag}(f(\lambda_1)\ldots, f(\lambda_q))$。

证明. 注意，作为一个函数，若 $\lambda_i = \lambda_j$，则 f 必须将 $f(\lambda_i)$ 映射到 $= f(\lambda_j)$。因此，我们可以定义 $[q]$ 上的一个划分 $\mathcal{P} = (P_1, \ldots, P_\ell)$，将 λ_i 的相等值归为一组。我们将这些互不相同的值重记为 $\{\mu_1, \ldots, \mu_\ell\}$，使得 μ_i 彼此互不相同，且对所有 $i \in [\ell]$ 和 $j \in P_i$，$\lambda_j = \mu_i$。根据假设，$(\mu_1, \ldots, \mu_\ell)$ 满足格条件，而 f 定义在集合 $\{\mu_i\colon i \in [\ell]\}$上。

现在注意到

$$Z_M(G) = \sum_{\substack{x_1,\ldots,x_\ell \\ \sum x_i = |E|}} c_{(x_i)_{i\leq\ell}} \cdot \mu_1^{x_1} \cdots \mu_\ell^{x_\ell}$$

其中

$$c_{(x_i)_{i\leq\ell}} = \sum_{\sigma: V\to[q]} \left(\sum_{\substack{E_1 \sqcup \cdots \sqcup E_q = E, \\ \sum_{t\in P_i} |E_t| = x_i}} \left(\prod_{i\in[q]} \prod_{\{u,v\}\in E_i} h_{\sigma(u)i} h_{\sigma(v)i} \right) \right).$$

由于 $(\mu_1, \ldots, \mu_\ell)$ 满足格条件，对于任意 $(x_i)_{i\leq\ell}$ 和 $(y_i)_{i\leq\ell}$，使得 $\sum_i x_i = \sum_i y_i = |E|$，且

$$\mu_1^{x_1} \cdots \mu_\ell^{x_\ell} = \mu_1^{y_1} \cdots \mu_\ell^{y_\ell},$$

对于 $i \in [\ell]$，我们有 $x_i = y_i$。因此，根据 $k \in \left[\binom{|E|+\ell-1}{\ell-1} \right]$ 的取值 $Z_M(S_k G) = Z_{M^k}(G)$，可以构造一个以 $c_{(x_i)i\leq\ell}$ 为未知数的满秩范德蒙德方程组。通过多项式时间求解该方程组，我们可以计算

$$\sum_{\substack{x_1,\ldots,x_\ell \\ \sum x_i = |E|}} c_{(x_i)_{i\leq\ell}} \cdot f(\mu_1)^{x_1} \cdots f(\mu_\ell)^{x_\ell} = Z_{H\Delta H^{\mathrm{T}}}(G)$$

对于任意 $\Delta = \mathrm{diag}(f(\lambda_1)\ldots, f(\lambda_q))$。因此，Pl-GH($H\Delta H^{\mathrm{T}}$) $\leq$ Pl-GH(M)。 □

我们现在得到以下定理 21的延拓。

定理 23. 如果 M 是一个 $q \times q$ ($q \geq 3$) 满秩、正实值的对称矩阵，其特征值集合 $\{\lambda_i : i \in [q]\}$（作为集合不含重复项）满足格条件，那么 Pl-GH(M) 是 #P-困难的。

证明。 设 $(m_{ij})_{i,j\in[q]}$ 是矩阵 M 的元素。根据假设，我们知道这些都是正实数。我们选取某个 $\kappa \in \mathbb{R}$ 使得 $\kappa + m_{ii} > 0$，且它对于域 $\mathbf{F} = \mathbb{Q}(\{m_{ij}\}_{i,j\in[q]})$ 是超越的。设 $\{g_i\}_{i\in[d]}$ 为由 $\{m_{ij}\}_{i\neq j\in[q]}$ 生成的乘法自由阿贝尔群的一个基，如引理 12的证明中所述。设 $\{f_i\}_{i\in[d']}$ 为由.....生成的乘法自由

阿贝尔群，其由 $\{\kappa + m_{ii}\}_{i\in[q]}$生成。最后，令 $\Delta = D + \kappa I$。根据断言 20，集合 $\{g_i\}_{i\in[d]} \cup \{f_i\}_{i\in[d']}$是 $H\Delta H^{\mathsf{T}} = M + \kappa I$的元素的生成集。

现在，对于任意 $i \in [q]$，存在某个 $t(i) \in [d']$，使得 $e_{iit(i)} > 0$，但对所有 $i \neq k$，$e_{jkt(i)} = 0$。因此，由引理 16 可知，Pl-GH($H\Delta H^{\mathsf{T}}$) 是 #P-困难的。此外，Δ 的形式为 diag($f(\lambda_1) \ldots, f(\lambda_q)$)，且 $f(\lambda_i) = \lambda_i + \kappa$。因此，由引理 22 可知，Pl-GH($M$) 是 #P-困难的。

□

显然，定 理 21 是 定理 23的特例。我们还有以下定理 .

定理 24。设 M 是一个 $q\times q$ ($q \geq 3$) 非二部、不可约、满秩、非负实值对称矩阵。若其特征值绝对值的集合 $\{|\lambda_i| : i \in [q]\}$（作为集合不含重复元素）满足格条件，则 Pl-GH(M) 是 #P-困难的。

证明。具有非负值的矩阵 M 表示一个加权图 H。由于 M 不可约，H 是一个连通图。由于 M 是非二部的，H 包含一个奇长度圈 t。此外，H 显然含有长度为 2 的环。由于 H 是连通的，且 gcd(t, 2) $= 1$，对于任意足够大的整数 n，任意 i、$j \in [q]$之间都存在一条长度为 n 的路径。换言之，对于某个足够大的整数 n，M^n 是一个满秩的正值矩阵。由于这对所有充分大的 n都成立，我们可以假设 n 是偶数。M^n的特征值为 λ_1^n、.....、λ_q^n，可能有重复。设 $\{\mu_1, \ldots, \mu_\ell\}$ 是集合 $\{|\lambda_i| : i \in [q]\}$ 去重后的结果，则根据假设，它满足格条件。于是，$\{\mu_1^n, \ldots, \mu_\ell^n\}$ 是集合 $\{\lambda_i^n : i \in [q]\}$，其中不含重复元素。事实上，若 $\lambda_i^n = \lambda_j^n$，则作为实数有 $\lambda_i = \pm\lambda_j$，因此 $|\lambda_i| = |\lambda_j|$。所以，$\lambda_i^n$和$\lambda_j^n$中至多只有一个出现在 $\{\mu_1^n, \ldots, \mu_\ell^n\}$中。由此可知，$\{\mu_1^n, \ldots, \mu_\ell^n\}$ 也满足格条件。因此，根据定理 23，Pl-GH($S_n M$) 是 #P-困难的。由此可知，Pl-GH(M) 也是 #P-困难的。

□

接下来，我们为二部情形证明同一定理。对于二部情形，我们注意到，如果一个$q \times q$ 矩阵 M 是满秩的，那么 q 就是偶数，且经过一个置换后，M 具有如下形式 $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{0} & A \\ A^{\mathsf{T}} & \mathbf{0} \end{smallmatrix}\right)$，其中某个矩阵 A 的阶为 $q/2$。与定理 24中一样，格条件蕴含 #P-困难性这一结论实际上仅在 $q/2 \geq 3$时成立。因此，下述定理针对 $q \geq 6$给出。定理之后，我们将对满足 $q = 4$的这类二分矩阵给出完整分类。

定理 25. 设 M 是一个 $q \times q$ ($q \geq 6$) 二分、不可约、满秩的非负实值对称矩阵。若特征值 $\{|\lambda_i|$ 的绝对值：$i \in [q]\}$作为一个不含重复元素的集合满足格条件，则 Pl-GH(M) 是 #P-困难的。

证明。对于一个 $q\times q$二部矩阵 M，其平方 M^2是形如 $M^2 = A \oplus B$ 的可约矩阵。由于 M 满秩 q，q 必为偶数，并且 A 和 B 均为 $q/2 \times q/2$。A 和 B 都是非负实值对称矩阵。由于 M 不可约且为二分的，底层图是连通的，并且每一部分中的任意一对顶点之间都由一条偶数长度的路径连接。因此，A 和 B 均不可约。A 和 B 都包含自环，因此它们是非二部的。由于 det(M^2) $=$ det(A) det(B)，它们满秩。$\{\lambda_i^2 : i \in [q]\}$ 是 A 和 B 的特征值并集。由于 $\{|\lambda_i| : i \in [q]\}$（作为集合去除重复项后）满足格条件，因此 $\{\lambda_i^2 : i \in [q]\}$ 中对应于 A（以及 B）的子集也满足格条件，这两者均已作为集合去除重复项。由于 $q \geq 6$，我们有 $q/2 \geq 3$，由此可根据定理 24 得出 Pl-GH(A) 是 #P-困难。然后，根据引理 4，Pl-GH(M) 是 #P-困难。

□

相应的情形 $q = 4$ 在定理 25中可以得到完整分类。在此情形下，$M = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{0} & N \\ N^{\mathsf{T}} & \mathbf{0} \end{smallmatrix}\right)$，其中 $N = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ 是一个满秩的非负实值矩阵。现在，我们考虑$M^2 = A \oplus B$，其中

$$A = NN^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}, \qquad B = N^{\mathsf{T}}N = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

由于 M 不可约，A 和 B 的所有元素均为正（因为二分图的两侧各有一个顶点与另一侧的两个顶点都相连）。因此，我们看到 Pl-GH(M^2) 是 #P-困难的，除非 Pl-GH(A) 和 Pl-GH(B) 均可处理；根据定理 2，这当且仅当 $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ 和 $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ 时成立。由于 N 是一个非负矩阵，这意味着 $a = d$ 和 $b = c$。因此，只要 $(a, b) \neq (d, c)$，Pl-GH(A) 和 Pl-GH(B) 中至少有一个是 #P-困难的，这将意味着 Pl-GH(M) 具有 #P-困难性。

若 $(a, b) = (d, c)$，则 $M = X \otimes Y$，其中 $X = (0\,1\,1\,0)$，且 $Y = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$。Pl-GH（$X$）和Pl-GH（$Y$）根据定理 2可处理。我们注意到，对于任意平面图 $G = (V, E)$，

$$\begin{aligned} Z_M(G) &= \sum_{\sigma: V \to [4]} \prod_{\{u,v\} \in E} m_{\sigma(u)\sigma(v)} \\ &= \sum_{(\sigma_1, \sigma_2): V \to [2] \times [2]} \prod_{\{u,v\} \in E} X_{\sigma_1(u)\sigma_1(v)} Y_{\sigma_2(u)\sigma_2(v)} \\ &= \left(\sum_{\sigma_1: V \to [2]} \prod_{\{u,v\} \in E} X_{\sigma_1(u)\sigma_1(v)} \right) \left(\sum_{\sigma_2: V \to [2]} \prod_{\{u,v\} \in E} Y_{\sigma_2(u)\sigma_2(v)} \right) \\ &= Z_X(G) \cdot Z_Y(G) \end{aligned}$$

因此，Pl-GH(M) 也是多项式时间可处理的。

注意，在这种情况下，M 的特征值为 $\{\pm(a + b)\ \pm(a - b)\}$ 对实数 $a \neq \pm b$而言，其绝对值为 $\{|a + b|, |a - b|\}$（去除重复值后）。其中一个大于另一个，因此它们确实满足格条件。因此，定理 25 关于 $q = 4$ 的正式表述是错误的（假设 #P 不会坍缩为 P）。

定理 26。使 Pl-GH(M) 不是 #P-困难的 $q \times q$ ($q \geq 3$) 实对称矩阵 M 构成的集合是零测集。

证明。运用引理 1 的相同证明思路，我们可以证明 Pl-GH($|M|$) $\leq$ Pl-GH(M)，其中$|M|$ 表示对 M 逐项取绝对值得到的矩阵 $(|m_{i,j}|)$。考虑 $q \times q$ 非负实对称矩阵的集合。秩为 $< q$ 的子集是零测集。二分矩阵和可约矩阵也同样如此。定义 17 中由整数序列 $(n_i)_{i \in [d]} \neq \mathbf{0}$ 指定的格条件集合是可数集。每个这样的条件都定义了一个超曲面 $n_1 \log(\lambda_1^2) + \cdots + n_d \log(\lambda_d^2) = 1$，其中特征值 λ_i^2 是矩阵 M的元素的连续分段可微函数。（如果对 $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$排序，就可以避开两个特征值相等的零测子集；这一子集由判别式为零所确定，而判别式是 M的元素的多项式。）因此，格条件不成立的子集

也为零测集。由此可知，对于几乎所有 M （按勒贝格测度的意义），Pl-GH(M) 都是 #P-困难的。[2] □

6 矩阵的困难性

考虑一个 $q \times q$满秩、正实值的对称矩阵 M，它具有一个生成集 $\{g_t\}_{t\in[d]}$，该生成集按 引理 12 中的方法得到。令 $\mathcal{M}: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{q\times q}$ 按 引理 13中的方法定义。

引理 27。对于任意非零多项式 $f(x_1,\ldots,x_d) \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_d]$，存在非负整数 $e_1,\ldots,e_d$，使得 $f(x^{e_1},\ldots,x^{e_d}) \in \mathbb{Z}[x]$ 是一个非零多项式。

证明。若 $d=0$，则 f 是一个非零整数，引理显然成立。若 $d=1$，取 $e_1=1$即可证明引理。假设 $d>1$。存在 $p,p_2,\ldots,p_d \in \mathbb{Z}$，使得 $f(p,p_2,\ldots,p_d) \neq 0$。不妨设 $p\neq -1$，0，1，因为 $f(x,p_2,\ldots,p_d) \in \mathbb{Z}[x]$ 是一个非零多项式，且只有有限个零点。于是 $f(p,x_2,p_3,\ldots,p_d) \in \mathbb{Z}[x_2]$ 是一个非零一元多项式，它只有有限个零点。因此，对于某个整数 $e_2\geq 0$，$f(p,p^{e_2},p_3,\ldots,p_d)\neq 0$。归纳地，假设对于某个 t，$f(p^1,p^{e_2},\ldots,p^{e_{t-1}},p_t,\ldots,p_d)\neq 0$，则 $f(p^1,p^{e_2},\ldots,p^{e_{t-1}},x_t,p_{t+1},\ldots,p_d) \in \mathbb{Z}[x_t]$ 是一个非零一元多项式，因此对于某个整数 $e_t\geq 0$，$f(p^1,p^{e_2},\ldots,p^{e_t},p_{t+1},\ldots,p_d)\neq 0$。最后，$f(p^1,p^{e_2},\ldots,p^{e_d})\neq 0$，因此一元多项式 $f(x^1,x^{e_2},\ldots,x^{e_d}) \in \mathbb{Z}[x]$ 非零。

□

推论 28. 如果 M 是一个 $q\times q$ 满秩、正实值的对称矩阵，那么存在非负整数 $e_1,\ldots,e_d$以及实数 $\epsilon>0$，使得对所有 $1<p<e^\epsilon$，$\det(\mathcal{M}(p^{e_1},\ldots,p^{e_d}))\neq 0$。

证明。$\det(\mathcal{M}(x_1,\ldots,x_d)) \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_d]$ 是一个非零多项式，因为 $\det(\mathcal{M}(g_1,\ldots,g_d)) = \det(M) \neq 0$。根据 引理 27，我们有一个非零一元多项式 $\det(\mathcal{M}(p^{e_1},\ldots,p^{e_d}))$。它至多有有限个零点，因此存在某个 $\epsilon>0$，使得对所有 $1<p<e^\epsilon$，其值均非零。 □

现在我们将注意力重新转向 3×3 矩阵，并证明所有满秩、正实值矩阵的困难性。我们将函数 $M: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^{3\times 3}$ 定义为 $M(p) := \mathcal{M}(p^{e_1},\ldots,p^{e_d})$，其中 $e_1,\ldots,e_d$如引理 27 和推论 28 所述。$M(p)$ 的每个元素都具有 $M(p)_{ij}=p^{x_{ij}}$ 的形式，其中 x_{ij} 是某个非负整数，且 $x_{ij}=x_{ji}$。根据推论 28，我们知道存在某个 $\epsilon>0$，使得对所有 $1<p<e^\epsilon$，$\det(M(p))\neq 0$。

引理 29. 如果 M 是一个 3×3 满秩的正实值对称矩阵，并且对于所有 i、$j\in[3]$ 和 $x_{ij}=x_{ji}$ 都有 $M(p)_{ij}=p^{x_{ij}}$，那么

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\det M(e^\delta)}{\delta^2}=0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{\delta\to 0}\frac{\det M(e^\delta)}{\delta^3}\neq 0.$$

[2]图灵机的数量是可数的，因此算法的数量也只有可数多个。但这一观察并不会使定理 26变得无关紧要，因为单个图灵机可以解决不可数多个问题（这确实如此）Pl-GH(M)，根据对Pl-GH(M) 对所有实数 M的严格定义。

证明。考虑矩阵 $M(e^{\delta}) = (e^{x_{ij}\delta})_{i,\ j\in[3]}$。定义 X 为具有元素 $(x_{ij})_{i\text{的}j\in[3]}$ 矩阵，并考虑 $f(\delta) = \det M(e^{\delta})$ 的泰勒级数展开，

$$f(\delta) = f(0) + f'(0)\delta + f''(0)\frac{\delta^2}{2!} + \big(3g(X) + 6\det X\big)\frac{\delta^3}{3!} + O(\delta^4), \tag{9}$$

其中 $f(0) = \det M(e^0) = 0$ as $M(e^0) = J$ 是全 1 矩阵，并且

$$f'(0) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\frac{1}{2}f''(0) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 1 & 1 & 1 \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix}, \text{ and}$$

$$\begin{aligned} g(X) = &\begin{vmatrix} (x_{11})^2 & (x_{12})^2 & (x_{13})^2 \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (x_{12})^2 & (x_{22})^2 & (x_{23})^2 \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 1 & 1 & 1 \\ (x_{13})^2 & (x_{23})^2 & (x_{33})^2 \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ (x_{12})^2 & (x_{22})^2 & (x_{23})^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} \\ (x_{13})^2 & (x_{23})^2 & (x_{33})^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (x_{11})^2 & (x_{12})^2 & (x_{13})^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

我们指出，$f''(0) = 0$ 当秩 $X \le 1$ 时。

根据泰勒展开，

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\det M(e^{\delta})}{\delta^2} = \frac{1}{2}f''(0).$$

经过一些行变换后，我们得到

$$\frac{1}{2}f''(0) = \begin{vmatrix} x_{11}-x_{13} & x_{12}-x_{23} & x_{13}-x_{33} \\ x_{12}-x_{13} & x_{22}-x_{23} & x_{23}-x_{33} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

现在我们假设 $f''(0) = 0$。因此，存在实数 $(a,b,c,d) \neq \mathbf{0}$，使得 $a+b+c=0$，并且

$$a\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} x_{12} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

由于 $(a,b,c,d) \neq \mathbf{0}$，这个等式也给出 $(a,b,c) \neq \mathbf{0}$。因此，不失一般性，我们可以假设 $c = -(a+b) \neq 0$。令 $\alpha = \frac{a}{a+b}$ 和 $\beta = \frac{d}{a+b}$，则

$$\begin{pmatrix} x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \end{pmatrix} + (1-\alpha)\begin{pmatrix} x_{12} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由此得到表达式 $X = A + \beta B$，其中

$$A = N^{\mathsf{T}}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix}N, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1-\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

现在我们将用到以下断言，稍后会给出证明：

断言 30. 若 $x_{11}+x_{22}=2x_{12}$，则对所有 $\delta>0$，$\det M(e^{\delta})=0$。

由于我们假设 M 是一个满秩矩阵，根据引理 27可知，当 δ的值足够小时，$\det M(e^{\delta})\neq 0$。因此，我们有 $x_{11}+x_{22}\neq 2x_{12}$。接下来考虑矩阵 $A-kJ$，其中

$$k=\frac{x_{11}x_{22}-(x_{12})^2}{x_{11}+x_{22}-2x_{12}},\qquad J=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

由于 $x_{11}+x_{22}\neq 2x_{12}$，值 k 是良定义的。下面的命题也将在后面证明 r:

命题 31。矩阵 $A-kJ$的秩至多为一。

这意味着存在一个向量

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}u_1&u_2&u_3\end{pmatrix}^{\mathsf{T}},$$

使得 $A=\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathsf{T}}+kJ$。因此，$X=\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathsf{T}}+kJ+\beta B$。接下来注意到

$$\begin{aligned}\det M(e^{\delta}) &= \begin{vmatrix} e^{\delta((u_1)^2+k)} & e^{\delta(u_1u_2+k)} & e^{\delta(u_1u_3+k+\beta)}\\ e^{\delta(u_1u_2+k)} & e^{\delta((u_2)^2+k)} & e^{\delta(u_2u_3+k+\beta)}\\ e^{\delta(u_1u_3+k+\beta)} & e^{\delta(u_2u_3+k+\beta)} & e^{\delta((u_3)^2+k+2\beta)}\end{vmatrix}\\ &= e^{\delta(3k+2\beta)}\begin{vmatrix} e^{\delta(u_1)^2} & e^{\delta u_1u_2} & e^{\delta u_1u_3}\\ e^{\delta u_1u_2} & e^{\delta(u_2)^2} & e^{\delta u_2u_3}\\ e^{\delta u_1u_3} & e^{\delta u_2u_3} & e^{\delta(u_3)^2}\end{vmatrix} \qquad (10)\\ &= e^{\delta(3k+2\beta)}\left(g(\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathsf{T}})\frac{\delta^3}{2}+O(\delta^4)\right). \qquad (11)\end{aligned}$$

此处从方程 （10）到（11）使用了秩一矩阵方程（9）的泰勒展开$\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathsf{T}}$.

最后，我们将使用以下命题，稍后也会对其进行证明:

命题 32。 $g(\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathsf{T}})=((u_2-u_1)(u_3-u_1)(u_3-u_2))^2$。

因此，如果 $g(\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathsf{T}})=0$，那么必然有 $u_i=u_j$ 对于某个 $i\neq j$。但在这种情况下，根据方程（10），我们看到对于所有 $\delta>0$，$\det M(e^{\delta})=0$，而我们知道这不成立。因此，必然有 $g(\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathsf{T}})\neq 0$。由于 $e^{\delta(3k+2\beta)}$ 的首项为 1，这意味着当 $f''(0)=0$时，$\det M(e^{\delta})$ 中 δ^3的系数为 $\frac{1}{2}g(\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathsf{T}})\neq 0$。所以，$\lim_{\delta\to 0}\frac{\det M(e^{\delta})}{\delta^3}\neq 0$。 □

泰勒展开方程 (9) 和引理 29 表明，$\det M(e^{\delta})$ 的精确阶为 δ^2 或δ^3。现在我们将完成上述断言的证明。

断言 30. 如果 $x_{11}+x_{22}=2x_{12}$，那么对于所有 $\delta>0$，$\det M(e^{\delta})=0$。

证明。考虑矩阵 $M(e^{\delta})$。注意，

$$\begin{pmatrix}e^{\delta(x_{12})}\\ e^{\delta(x_{22})}\\ e^{\delta(\alpha x_{12}+(1-\alpha)x_{22}+\beta)}\end{pmatrix}=e^{\delta(x_{12}-x_{11})}\begin{pmatrix}e^{\delta(x_{11})}\\ e^{\delta(x_{12})}\\ e^{\delta(\alpha x_{11}+(1-\alpha)x_{12}+\beta)}\end{pmatrix}$$

这意味着对于所有 $\delta > 0$，矩阵的第二列都是第一列的倍数。因此，对于所有 $\delta > 0$，$\det M(e^\delta) = 0$。□

命题 31. 矩阵 $A - kJ$ 的秩至多为一。

证明. 我们有

$$A - kJ = N^{\intercal}\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} - kJ_2\right) N,$$

其中 $N = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1-\alpha \end{smallmatrix}\right)$，且 $J_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$。由于 $x_{11} + x_{22} \neq 2x_{12}$, k 定义良好并满足

$$(x_{11} - k)(x_{22} - k) = (x_{12} - k)^2.$$

由矩阵分解可知，$A - kJ$ 的秩至多为一。□

命题 32. $g(\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}) = ((u_2 - u_1)(u_3 - u_1)(u_3 - u_2))^2$。

证明。注意到

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}) &= \begin{vmatrix} (u_1)^4 & (u_1u_2)^2 & (u_1u_3)^2 \\ u_1u_2 & (u_2)^2 & u_2u_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (u_1u_2)^2 & (u_2)^4 & (u_2u_3)^2 \\ u_1u_3 & u_2u_3 & (u_3)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (u_1)^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ (u_1u_3)^2 & (u_2u_3)^2 & (u_3)^4 \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} (u_1)^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ (u_1u_2)^2 & (u_2)^4 & (u_2u_3)^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u_1u_2 & (u_2)^2 & u_2u_3 \\ (u_1u_3)^2 & (u_2u_3)^2 & (u_3)^4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (u_1)^4 & (u_1u_2)^2 & (u_1u_3)^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ u_1u_3 & u_2u_3 & (u_3)^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 \end{vmatrix} \left(-(u_1)^2u_2 - (u_2)^2u_3 - (u_3)^2u_1 + (u_2)^2u_1 + (u_3)^2u_2 + (u_1)^2u_3\right) \\ &= \left((u_2 - u_1)(u_3 - u_1)(u_3 - u_2)\right)^2 \end{aligned}$$

□

令 $\lambda_i = \lambda_i(p)$ 为 $M(p)$ 的特征值，并按 $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3|$ 排序。显然，对于 $i \in [3]$，$\lambda_i(p)$ 是 p 的良定义连续函数（参见 [5] 第 154–155 页中的定理 VI.1.4 和推论 VI.1.6）。由于 $M(1)$ 是全 1 矩阵 J，$\lambda_1(1) = \lambda_2(1) = 0$ 且 $\lambda_3(1) = 3$，并且当 $1 < p < e^\epsilon$ 时，根据推论 28，$\lambda_i(p) \neq 0$ 对于 $i \in [3]$。此外，由于 $M(p)$ 是正值矩阵，佩龙定理（参见 [28] 第 526 页中的定理 8.2.8）意味着 $|\lambda_1(p)| \leq |\lambda_2(p)| < |\lambda_3(p)|$，因此我们有 $\log\left(|\lambda_1(p)| / |\lambda_3(p)|\right) \neq 0$。所以，下面的函数 $t(p)$ 在 $I_\epsilon = (1, e^\epsilon)$ 上是良定义的，并且作为 p 的函数是连续的：

$$t(p) = \frac{\log\left(|\lambda_2(p)| / |\lambda_3(p)|\right)}{\log\left(|\lambda_1(p)| / |\lambda_3(p)|\right)}.$$

显然，$|\lambda_2| = |\lambda_1|^{t(p)}|\lambda_3|^{1-t(p)}$，且满足此方程的 $t(p)$ 是唯一的。

引理 33. 设 $M(p)$ 是一个针对 $p \in I_\epsilon$（其中$\epsilon > 0$）的 3×3满秩、正实值对称矩阵，并且对于所有 $i, j \in [3]$，都有 $(M(p))_{ij} = p^{x_{ij}}$。若对于某个 $r \in I_\epsilon$， $t(r)$ 是无理数，则 Pl-GH($M(r)$) 是 #P- 困难。

证明。我们有

$$|\lambda_2(r)| = |\lambda_1(r)|^{t(r)} |\lambda_3(r)|^{1-t(r)}.$$

如果特征值 $\lambda_i(r)$ 不满足格条件，那么存在不全为 0 的整数 n_i，使得 $n_1 + n_2 + n_3 = 0$ 且 $\lambda_1(r)^{n_1}\lambda_2(r)^{n_2}\lambda_3(r)^{n_3} = 1$。我们有 $n_2 = -(n_1 + n_3) \neq 0$，否则$n_1 = -n_3 \neq 0$ 且 $|\lambda_1(r)| = |\lambda_3(r)|$，这就产生矛盾。于是，

$$|\lambda_2(r)| = |\lambda_1(r)|^{\frac{n_1}{n_1+n_3}} |\lambda_3(r)|^{\frac{n_3}{n_1+n_3}}.$$

根据唯一性， $t(r)= \frac{n_1}{n_1+n_3}$ 是有理数。

因此，如果 $t(r)$ 是无理数，那么 λ_1、 λ_2、 λ_3 作为 $M(r$ 的特征值，必须满足格条件，并且 Pl-GH($M(r)$) 是 #P-困难的，依据 定理 23。 □

推论 34。 对于 $M(p)$ 由 引理 33 给出的情况，若 $t(p)$ 对于所有 $p \in I_\epsilon$ 都不是常数，那么 Pl-GH(M)是 #P-困难。

证明。根据连续函数的介值定理，若 $t(p)$ 在 I_ϵ 内不是常函数，则存在某个 $r \in I_\epsilon$，使得 $t(r)$ 是无理数。因此，Pl-GH($M(r)$) 是 #P-困难 的。由于 Pl-GH($M(r)$) $\leq$Pl-GH(M)，这也意味着 Pl-GH(M) 是 #P-困难 的。 □

注 35。 这里，重要的是要注意，我们在 r 中对 推论 34 的选择不必是有理数。事实上，甚至可能出现以下情况： r 是超越的。（见附录 B。）因此，我们不能假设 $M(r)$ 具有有理值，甚至不能假设其具有代数值。然而，正如我们在 第 2.1 节中所见，这不会给我们的计算模型带来任何问题，因为我们仍可将$Z_{M(r)}(G)$ 表示为一个多项式大小的整数元组，其形式为 COUNT($M(r)$)。

引理 36. 设 $M(p)$如引理 33所述。则 Pl-GH(M)是 #P-困难的，除非 $t(p) = 1$或$t(p) = \frac{1}{2}$对所有 $p \in I_\epsilon$均成立。

证明。回忆一下， $\lambda_1(1) = 0$, $\lambda_2(1) = 0$ 和 $\lambda_3(1) = 3$，以及 $\lambda_i(p)$ 都是关于 p 的连续函数。根据定义，$|\lambda_1(p)|/|\lambda_2(p)| \leq 1$。我们声称，要么 $\lim_{p \to 1^+} \frac{|\lambda_1(p)|}{|\lambda_2(p)|} = 0$，要么这个比值始终大于某个 $c > 0$。为证明这一点，令

$$S(p) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_3} + \frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_1} + \frac{\lambda_3\lambda_1}{\lambda_2}.$$

$S(p)$ 是一个对称有理函数。事实上， $S(p) = \frac{s_2^2 - 2s_1s_3}{s_3}$，其中

$$s_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad s_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1, \quad s_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

是 λ_i 的初等对称多项式，它们是 $M(p)$ 的元素的多项式。

注意到 $S(p) = \frac{\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2 - \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$ [1]不可能恒等于 0，否则作为关于 p的多项式，分子恒等于 0，这将意味着 $\lambda_1\lambda_2 = \lambda_2\lambda_3 = \lambda_3\lambda_1$ 是恒等于 0 的函数

在 p中。但 $\lambda_3 \to 3 \neq 0$ 作为 $p \to 1^+$，因此 λ_1、λ_2 恒等于 0。然而，这与对于 $p \in I_\epsilon$有 $\det M(p) \neq 0$ 相矛盾。

将 $S(p)$ 展开为关于 $(p-1)$ 的洛朗级数，得到 $S(p) = c_k(p-1)^k + c_{k+1}(p-1)^{k+1} + \ldots$，其中 $k \in \mathbb{Z}$，且 $c_k \neq 0$。由于 $\lambda_1\lambda_2/\lambda_3 \to 0$ 随着 $p \to 1^+$，且 $|\lambda_3|\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|$ 始终有上界，因此对于所有 $p \in I_\epsilon$，$k < 0$ 当且仅当 $S(p) \to \infty$ 当且仅当 $\lambda_1/\lambda_2 \to 0$，并且 $k \geq 0$ 当且仅当 $|\lambda_1/\lambda_2| \geq c > 0$。

假设对于所有 $p \in I_\epsilon$，$|\lambda_1/\lambda_2| \geq c > 0$，则

$$t(p) = 1 - \frac{\log\left(|\lambda_1(p)| \,/\, |\lambda_2(p)|\right)}{\log\left(|\lambda_1(p)| \,/\, |\lambda_3(p)|\right)} \to 1.$$

因此，使 $t(p)$ 在 I_ϵ 上为常数的唯一可能情况是它恒等于 1。如果 $t(p)$ 不恒等于 1，那么 Pl-GH(M) 根据 推论 34 是 #P-困难。

现在假设 $\lim_{p\to 1^+} |\lambda_1(\frac{p}{|\lambda_2\, p|})()| = 0$。正如我们已经指出的，$s_2$ 是关于 $M(p)$的元素的多项式，我们可以将其表示为关于（$p-1$）的多项式。它并非恒等于 0。这可以通过$s_2 = \lambda_2(\lambda_1 + \lambda_3(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}))$看出，因为第二个因子的极限与 $\lambda_3 \to 3$相同。因此，如果 s_2 恒等于 0，那么 λ_2 也将恒等于 0，这与对 $p \in I_\epsilon$有 $\det M(p) \neq 0$矛盾。设 $s_2 = a_j(p-1)^j + a_{j+1}(p-1)^{j+1} + \ldots$按幂次递增排列，其中 $a_j \neq 0$ 是第一个非零项。当 $p \to 1^+$时，它与 λ_2 具有相同的阶，因为 $s_2 = \lambda_2(\lambda_1 + \lambda_3(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}))$，其中 $\lambda_1 \to 0$、$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \to 0$ $\lambda_3 \to 3$ λ_2 j 以及 。因此，它也具有精确阶 。重要的是，这个精确阶j 是一个整数。

根据引理 29，我们知道 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ 的精确阶要么是 $\Theta((p-1)^2)$，要么是 $\Theta((p-1)^3)$。由于 $\lambda_3 \to 3$，乘积 $\lambda_1\lambda_2$也具有相同性质。因为 λ_1、$\lambda_2 \to 0$，且我们处于$|\lambda_1|/|\lambda_2| \to 0$的情形，唯一的可能性是 $j = 1$，即 $\lambda_1 = \Theta((p-1)^2)$ 且 $\lambda_2 = \Theta((p-1)^1)$。

在这种情况下，我们看到 $\lim_{p\to 1^+} t(p) = \frac{1}{2}$。因此，再次由 推论 34可知，如果 $t(p)$ 对于 $p \in I_\epsilon$ 不是常数 1 2，那么 Pl-GH(M) 是 #P-困难。 □

引理 37. 设 $M(p)$是 引理 33中给定的 $t(p) = 1$对所有 $p \in I_\epsilon$均成立，则 Pl-GH(M)是 #P-困难。

证明。由 $t(p) = 1$ 可得 $|\lambda_2(p)| = |\lambda_1(p)|$。考虑矩阵 $M(p)^2$。由于 $M(p)$ 是正矩阵，因此 $M(p)^2$ 也是正矩阵。此外，其特征值为 $\lambda_1(p)^2 = \lambda_2(p)^2 < \lambda_3(p)^2$。因此，根据定理 23，Pl-GH($M(p)^2$) 是 #P-困难的。由于 Pl-GH($M(p)^2$) $\leq$Pl-GH($M(p)$) $\leq$Pl-GH(M)，这也意味着 Pl-GH(M) 是 #P-困难的。 □

引理 38。令 定义 $M(p)$，如 引理 33 中所述。则 $t(p)$ 在区间 I_ϵ 上不是常数 1 2 .

证明。令 $\mu_i = \lambda_i^2 = (\lambda_i(p))^2$, , 我们定义函数

$$F(p) = (\mu_1^2 - \mu_2\mu_3)(\mu_2^2 - \mu_3\mu_1)(\mu_3^2 - \mu_1\mu_2).$$

Note 即 $F(p)$ 是特征值 $\mu_i$of $M(p)^2$, 的对称多项式，事实上 t

$$F(p) = s_1^3 s_3 - s_2^3,$$

其中 s_i 是 $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$的初等对称多项式，

$$s_1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \quad s_2 = \mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1, \quad s_3 = \mu_1\mu_2\mu_3.$$

作为 det($xI - M(p)^2$) 的系数，它们是 $M(p)$ 的元素构成的多项式 .

反设 $t(p) = \frac{1}{2}$ 在区间 I_ϵ上成立，那么 $\mu_2^2 = \mu_1\mu_3$ 在该区间内。因此，对所有 $p \in I_\epsilon$，都有 $F(p) = 0$。由于 $F(p)$是关于 p的多项式，我们得到一个多项式恒等式

$$s_1^3 s_3 = s_2^3.$$

由于 $p \to 1^+$， s_1 和 s_3 都非零，因此这三者都是非零多项式。根据多项式唯一分解， $s_1 \mid s_2$，因此存在某个非零多项式 $f(p)$使得 $s_2 = s_1 f$。由此可得 $f^3 = s_3 =$det$(M(p))^2$。任意不可约多项式 q在 f^3中的精确阶为 ord$_q(f^3)$ $=3 \cdot$ ord$_q(f)$ $\equiv 0$模 3，这也等于 $2 \cdot$ord$_q$(det$(M(p))$)。因此，det($M(p)$)是一个多项式的三次幂，即 det($M(p)$) $= g^3$。

Now

$$g(p)^3 = \det(M(p)) = p^{x_{11}+x_{22}+x_{33}} + p^{x_{12}+x_{23}+x_{13}} + p^{x_{12}+x_{23}+x_{13}} - p^{x_{11}+2x_{23}} - p^{x_{33}+2x_{12}} - p^{x_{22}+2x_{13}}.$$

在 det($M(p)$) 的表达式中，有三项正项和三项负项。如果发生抵消，则正项和负项会以相同的数量被抵消，因此，非零多项式 det($M(p)$) 在抵消后有 2 项、4 项或 6 项，其中正系数和负系数的项数相同。所以 $g(p)$ 不是单项式。我们可以将 $g(p)$ 写为 $= c_1 p^{x_1} + \cdots + c_k p^{x_k}$，其中 $x_1 > \cdots > x_k$ 和 $k \geq 2$，且 c_1、.....、c_k 是非零整数。于是， $g(p)^3$ 有以下这些度互不相同、无法相互抵消的项：

$$c_1^3 p^{3x_1}, \quad 3c_1^2 c_2 p^{2x_1+x_2}, \quad 3c_k^2 c_{k-1} p^{2x_k+x_{k-1}}, \quad c_k^3 p^{3x_k}.$$

在系数为 ± 1 的单项式项中，至少有 8 项。它们无法与至多 6 个系数为 ± 1 的单项式项匹配。这一矛盾证明了该引理。 □

定理 39. 如果 M 是一个满秩、正实值的对称矩阵，那么 Pl-GH(M) 是 #P-困难的。

证明。对于某个 $\epsilon > 0$，我们定义 $M(p)$，如推论 28 后所做的那样。根据引理 38，对于所有 $p \in I_\epsilon$，$t(p)$ 都不是常数 1 2。另一方面，如果对于所有 $p \in I_\epsilon$， $t(p) = 1$，那么根据引理 37，我们知道 Pl-GH(M) 是 #P-困难。最后，如果对于所有 $p \in I_\epsilon$， $t(p)$ 不是常数 1 或 1 2，那么根据引理 36，Pl-GH(M) 是 #P-困难。 □

7 3×3 矩阵的二分性

根据 第6节，如果 M 是 3×3 满秩、正实值的对称矩阵，那么 Pl-GH(M) 是 #P-困难。现在我们将使用 定理 39 来确立所有 3×3 矩阵的二分性。

引理 40。如果 M 是一个满秩、非负实值的对称矩阵，且该矩阵不可约，那么 Pl-GH(M) 是 #P-困难的。

证明。 正如我们在第3.2节中看到的， 3×3 矩阵只有在是孪生矩阵时才可能是二分的。由于 M 满秩，因此它是非二部的。这个引理的证明与定理 24的证明相同，并且是定理 39的推论。

□

引理 41. 如果 M 是一个秩二、实值、对称、不可约且非孪生的矩阵，那么 Pl-GH(M) 是 #P-困难。

证明。若 M 是一个非成对的秩二矩阵，则它必定具有以下形式 m

$$M = N^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} N, \quad \text{where} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha \neq 0$ 和 $\beta \neq 0$。

若 $xz = y^2$，则 M 的秩至多为一，与假设矛盾。因此，$xz \neq y^2$。现在，我们考虑 T_2M。我们有

$$T_2M = \begin{pmatrix} x^2 & y^2 & \alpha^2x^2 + \beta^2y^2 + 2\alpha\beta xy \\ y^2 & z^2 & \alpha^2y^2 + \beta^2z^2 + 2\alpha\beta yz \\ \alpha^2x^2 + \beta^2y^2 + 2\alpha\beta xy & \alpha^2y^2 + \beta^2z^2 + 2\alpha\beta yz & \left(\alpha^2x + 2\alpha\beta y + \beta^2z\right)^2 \end{pmatrix}.$$

令人惊讶的是,

$$\det(T_2M) = 2\alpha^2\beta^2 \left(xz - y^2\right)^3.$$

因此，T_2M 是一个满秩矩阵。由于 M 是不可约的，因此也可推出 T_2M 是不可约的。此外，由于 T_2M 是非负值，我们由引理 40可知Pl-GH(T_2M) 是 #P-困难。该引理由Pl-GH(T_2M) $\leq$Pl-GH(M) 得证。 □

引理 42。若 M 是一个 3×3 满秩、实值、对称且不可约的矩阵，则 Pl-GH(M) 是 #P-困难。

证明。 我们考虑矩阵 T_2M。注意，这是一个非负值矩阵。由于M是不可约的， T_2M也不可约。若 T_2M是满秩矩阵，则Pl-GH(T_2M) 的困难性，以及由此得到的Pl-GH(M) 的困难性，均可由引理 40推出。

接下来，假设 T_2M 的秩为二。若 T_2M 不是成对的，则Pl-GH(T_2M) 的困难性，以及由此得到的 Pl-GH(M) 的困难性，可由引理 41推出。因此，我们考虑 T_2M 是成对的情形。根据定理 10，可知只有当Pl-GH(T_2M) 是多项式时间可解时， T_2M 才是秩一，或 T_2M 可约，或 T_2M 具有以下形式

$$T_2M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \\ y & z & 0 \end{pmatrix}$$

在置换意义下；此时，必有 M 也具有上述形式，且必须是秩二矩阵。由于这些条件均不成立，根据定理 10 可知，Pl-GH(T_2M) 是 #P-困难的，因此Pl-GH(M) 也是如此。

最后，假设 T_2M 的秩为一。若 T_2M 含有任何零元素，则容易验证T_2M，因此 M 是可约的。所以， T_2M 不含零元素。在这种情况下，我们考虑 $\mathcal{M}(1)$。该矩阵的元素可记为 $\sigma_{ij} \in \{+1, -1\}$。由于 T_2M 是一个秩一矩阵，三行互为倍数。进一步地，若 $\mathcal{M}(1)$中有两行互为倍数

，那么 M 本身就不是满秩的。因此， $\mathcal{M}(1)$中任意两行都不互为倍数。现在，我们考虑 $S_2\mathcal{M}(1) = \mathcal{M}(1)^2$。显然，对于$i \in 3$， $\left(\mathcal{M}(1)^2\right)_{ii} = \sigma_{i1}^2 + \sigma_{i2}^2 + \sigma_{i3}^2 = 3$ 。此外，若 $i \neq j$，由于任意两行都不互为倍数，我们可以看出 $\left(\mathcal{M}(1)^2\right)_{ij} = \sigma_{i1}\sigma_{j1} + \sigma_{i2}\sigma_{j2} + \sigma_{i3}\sigma_{j3} \in \{+1, -1\}$，因为恰有一对相消。因此，集合 $\{3\}$ 是 $\mathcal{M}(1)^2$, 中元素的生成集，由引理 16 可知 Pl-GH($\mathcal{M}(1)^2$) 的困难性。由于 Pl-GH($\mathcal{M}(1)^2$) $\leq$ Pl-GH($\mathcal{M}(1)$) $\leq$ Pl-GH(M)，我们可知 Pl-GH(M) 也是 #P-困难的。

□

综合所有结果，我们得到最终的二分性结论：

定理 43. 若 M 是一个 3×3 实值对称矩阵，则 Pl-GH(M) 是 #P-困难的，除非M 在行和列置换后属于以下某种形式；在这种情况下，Pl-GH(M) 可在多项式时间内处理：

1.
$$M = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix} = \mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathsf{t}}.$$

2.
$$M = \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ y & z & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

使得

$$(1)\ \ xz = y^2, \quad (2)\ \ y = 0, \quad (3)\ \ x = z, \quad \text{or} \quad (4)\ \ xz = -y^2 \ \ \&\ \ x = -z.$$

3.
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ x & y & 0 \end{pmatrix}.$$

证明. 所列形式均可在多项式时间内处理。若 M 的秩为 ≤ 1，则 M 具有形式 1。现在假设 M 的秩为 ≥ 2。若 M 是可约的，根据引理 5 和定理 2，Pl-GH(M) 是 #P-困难的，除非 M 具有形式 2。下文假设 M 是不可约的。若 M 是秩为二的孪生矩阵，根据定理 10，Pl-GH(M) 是 #P-困难的，除非它具有形式 3（即 M 是二分的）。若 M 的秩为二且不是成对的，根据引理 41，Pl-GH(M) 是 #P-困难的。因此现在假设 M 是一个满秩矩阵。于是，根据引理 42，Pl-GH(M) 是 #P-困难的。

□

参考文献

[1] Albert Atserias、Laura Manˇcinska、David E Roberson、Robert ˇS´amal、Simone Severini 和 Antonios Varvitsiotis。“量子与非信号图同构”。载于：《组合理论杂志》B辑 136 (2019)，第289–328页。

[2] Miriam Backens。“复值 Holantˆc 的完整二分性”。载于：第45届国际自动机、语言与程序设计学术研讨会，ICALP 2018，2018年7月9日至13日，布拉格，捷克共和国。第107卷。LIPIcs。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2018，12:1–12:14。[3] Miriam Backens。“受量子计算启发的新的 Holant 二分性”。载于：第44届国际自动机、语言与程序设计学术研讨会，ICALP 2017，2017年7月10日至14日，华沙，波兰。第80卷。LIPIcs。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Infor- matik，2017，16:1–16:14。[4] Teodor Banica。“齐性图的量子自同构群”。载于：《泛函分析杂志》224.2 (2005)，第243–280页。[5] Rajendra Bhatia。《矩阵分析》。第169卷。Springer Science & Business Media，2013。[6] Andrei Bulatov、Martin Dyer、Leslie Ann Goldberg、Markus Jalsenius、Mark Jerrum 和 David Richerby。“加权与非加权 # CSP 的复杂度”。载于：Journal of Computer and System Sciences 78.2 (2012)，第681–688页。[7] Andrei Bulatov 和 Martin Grohe。“配分函数的复杂度”。载于：《理论计算机科学》348.2-3 (2005)，第148–186页。[8] Andrei A Bulatov。“三元素集合上约束的二分性定理”。载于：第43届 IEEE 计算机科学基础年度研讨会，2002。会议论文集。IEEE。2002，第649–658页。[9] Andrei A Bulatov。“计数约束满足问题的复杂度”。载于：《ACM学报》60.5 (2013)，第1–41页。[10] Jin-Yi Cai 和 Xi Chen。“带复权重的计数 CSP 的复杂度”。载于：第44届 ACM 计算理论年度研讨会论文集（STOC）（2012），第909–920页。第64(3)卷。《ACM学报》。2017，第1–39页。[11] Jin-Yi Cai、Xi Chen 和 Pinyan Lu。“复值图同态：二分性定理”。载于：《SIAM计算杂志》42.3 (2013)，第924–1029页。[12] Jin-Yi Cai、Xi Chen 和 Pinyan Lu。“非负加权 # CSP：有效复杂性二分”。载于：《SIAM计算杂志》45.6 (2016)，第2177–2198页。[13] Jin-Yi Cai 和 Zhiguo Fu。“匹配门全息算法对布尔域上的平面 # CSP 是通用的”。载于：《SIAM计算杂志》51.2 (2019)，STOC17–50。[14] Jin-Yi Cai、Zhiguo Fu、Heng Guo 和 Tyson Williams。“Holant 二分性：FKT 算法是通用的吗？”载于：IEEE第56届计算机科学基础年度研讨会（2015），第1259–1276页。第66(1)卷。“FKT并非通用——对称约束的平面 Holant 二分性”，《计算系统理论》。2022，第143–308页。[15] Jin-Yi Cai、Heng Guo 和 Tyson Williams。“捕捉消失签名带来完整二分性”。载于：《SIAM计算杂志》45.5 (2016)，第1671–1728页。[16] Jin-Yi Cai、Pinyan Lu 和 Mingji Xia。“Holant 问题与计数 CSP”。载于：第41届 ACM 计算理论年度研讨会论文集。2009，第715–724页。

[17] Richard Cleve、Li Liu 和 William Slofstra。《线性系统博弈的完美对易算子策略》。载于：《数学物理学杂志》58.1（2017），第 012202 页。[18] Martin Dyer 和 Catherine Greenhill。《图同态计数的复杂性（扩展摘要）》。载于：《第十一届年度 ACM-SIAM离散算法研讨会论文集》，2000 年 1 月 9—11 日，美国加利福尼亚州旧金山。David B. Shmoys 编。ACM/SIAM，2000 年，第 246—255 页。[19] Martin E Dyer 和 David M Richerby。《计数约束满足问题的有效二分性》。载于：《SIAM计算杂志》42.3（2013），第 1245—1274 页。[20] Martin E Dyer 和 David M Richerby。《关于 #CSP 的复杂性》。载于：《第四十二届 ACM计算理论研讨会论文集》。2010 年，第 725—734 页。[21] Martin E Dyer 和 David M Richerby。《#CSP 二分性是可判定的》。载于：《第 28 届国际计算机科学理论方面研讨会（STACS 2011）》。Thomas Schwentick 和 Christoph D¨urr 编。第 9 卷。德国达格斯图尔：Schloss Dagstuhl–Leibniz信息学中心，2011 年，第 261—272 页。 DOI：10.4230/LIPIcs.STACS.2011.261。[22] Michael Freedman、L´aszl´o Lov´asz 和 Alexander Schrijver。《反射正性、秩连通性与图同态》。载于：《美国数学会杂志》20.1（2007），第 37—51 页。[23] Zhiguo Fu 和 Fengqin Yang。《秩 2 基上的全息算法》。载于：《信息处理快报》114.11（2014），第 585—590 页。[24] Zhiguo Fu、Fengqin Yang 和 Minghao Yin。《关于分块对称匹配门签名与高域 #CSP》。载于：《信息与计算》264（2019），第 1—11 页。[25] Leslie Ann Goldberg、Martin Grohe、Mark Jerrum 和 Marc Thurley。《具有混合符号的配分函数的复杂性二分性》。载于：《SIAM计算杂志》39.7（2010），第 3336—3402 页。[26] Artem Govorov、Jin-Yi Cai 和 Martin Dyer。《带非负权重的有界度图同态的二分性》。载于：arXiv 预印本 arXiv:2002.02021（2020）。[27] Heng Guo 和 Tyson Williams。《带复权重的平面布尔#CSP 的复杂性》。载于：《计算机与系统科学杂志》107（2020），第 1—27 页。[28] Roger A Horn 和 Charles R Johnson。《矩阵分析》。剑桥大学出版社，2012 年。[29] Karel Hrbacek 和 Thomas Jech。《集合论导论（修订扩展版）》。CRC出版社，1999 年。[30] N. Jacobson。《基础代数》。《基础代数》第 2 卷。W.H. Freeman，1985 年。 ISBN：9780716719335。URL：https://books.google.com/books?id=oNmDSAAACAAJ。[31] Pieter Kasteleyn。《图论与晶体物理学》。载于：《图论与理论物理学》（1967），第 43—110 页。[32] Pieter W Kasteleyn。《二聚体统计与相变》。载于：《数学物理学杂志》4.2（1963），第 287—293 页。

[33] Pieter W Kasteleyn。《晶格上的二聚体统计：I. 二次晶格上二聚体排列的数量》。载于：Physica 27.12（1961），第 1209—1225 页。[34] L´aszl´o Lov´asz。《大型网络与图极限》。第 60 卷。美国数学学会，2012 年。[35] L´aszl´o Lov´asz。《结构上的运算》。载于：Acta Math. Acad. Sci. Hungar 18.3-4（1967），第 321—328 页。[36] Martino Lupini、Laura Man˘cinska 和 David E Roberson。《非定域博弈与量子置换群》。载于：《泛函分析杂志》279.5（2020），第 108592 页。[37] Laura Mancinska 和 David Roberson。《面向量子玩家的图同态》。载于：第九届量子计算、通信与密码学理论会议（TQC 2014）。Schloss Dagstuhl-Leibniz信息学中心，2014 年。[38] Laura Man˘cinska 和 David E Roberson。《量子同构等价于来自平面图的同态计数相等》。载于：2020 年 IEEE 第 61 届年度计算机科学基础研讨会（FOCS）。IEEE，2020 年，第 661—672 页。[39] Benjamin Musto、David Reutter 和 Dominic Verdon。《量子图同构的 Morita理论》。载于：Communications in Mathematical Physics 365.2（2019），第 797—845 页。[40] Harold NV Temperley 和 Michael E Fisher。《统计力学中的二聚体问题——一个精确结果》。载于：Philosophical Magazine 6.68（1961），第 1061—1063 页。[41] Leslie G Valiant。《全息算法》。载于：《SIAM计算杂志》37.5（2008），第 1565—1594 页。[42] Leslie G Valiant。《计算积和式的复杂性》。载于：《理论计算机科学》8.2（1979），第 189—201 页。[43] Dirk Vertigan。《平面图 Tutte不变量的计算复杂性》。载于：《SIAM计算杂志》35.3（2005），第 690—712 页。[44] Peng Yang 和 Zhiguo Fu。《局部全息变换：可处理性与困难性》。载于：Frontiers of Computer Science 17.2（2022），第 1—11 页。

A 附录 A

我们将简要概述定理 7的证明。该定理的主要构件是边小工具 $\mathcal{P}_{n,\ p}$和顶点小工具 $\mathcal{R}_{d,\ n,\ p}$。边小工具 $\mathcal{P}_{n,\ p}$ 就是 $S_2T_pS_n(e)$，其中 e 是一条边。顶点小工具 $\mathcal{R}_{d,\ n,\ p}$ 的构造方法是：将一个含有 d 个顶点的简单环上的每条边替换为边小工具 $\mathcal{P}_{n,\ p}$，并在原始 d- 环上的 d 个顶点 F_1、……、F_d 各添加一条悬挂边。

现在，考虑一个平面图 $G=(V,E)$。对于任意 $u\in V$，考虑与 u 相 incident 的边。由于图 G 是平面图，我们可以任意将其中一条边编号为 1，然后从标记为 1 的边开始，按顺时针方向依次经过所有其他与 u 相 incident 的边，并将这些边标记为 2、3、…、deg(u)。因此，标号函数 ℓ_u：$\{\{u,v\}\in E\colon v\in V\}\to[\deg(u)]$ 定义良好。现在，我们按如下方式构造图 $G_{n,\ p}$：将每个顶点 $u\in V$ 替换为

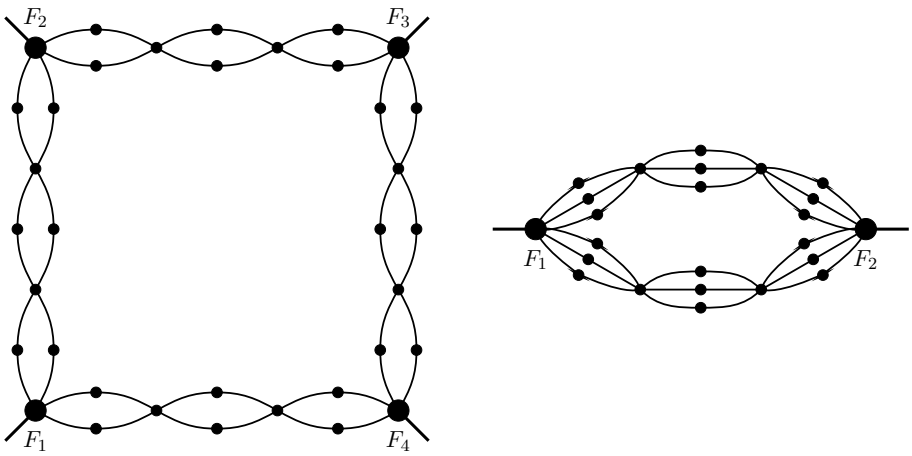

图 2：构件 $\mathcal{R}_{4,3,2}$ 和$\mathcal{R}_{2,3,3}$

小部件 $\mathcal{R}_{\deg(u),n,p}$ （我们可以将其标记为 $\mathcal{R}_{\deg(u),n,p}(u)$）。我们知道，这个小部件上有 d 条悬挂边，分别与顶点 $F_1(u)\ldots,F_{\deg(u)}(u)$ 相 incident。现在，考虑每条边$\{u,v\}\in E$，对于每条这样的边，我们将图 $G_{n,p}$ 中位于顶点 $F_{\ell_u(\{u,v\})}(u)$ 和$F_{\ell_v(\{u,v\})}(v)$ 之间的悬挂边连接起来。注意，通过这种构造，对于所有 n,p，图$G_{n,p}$ 都是平面图。我们将针对 n,p 的不同取值构造 $G_{n,p}$，然后通过插值证明定理 7。

首先，选取一个合适的 p，使得 $B=T_p(M'D^{[2]}M')$ 非退化。根据以下技术引理，存在这样的 p；其证明见 [26]。

引理 44。设 A 和 D 为 $n\times n$ 矩阵，其中 A 是实对称矩阵，所有列均非零且两两线性无关，而 D 是正对角矩阵。那么，对于所有充分大的正整数 p，矩阵 $B=T_p(ADA)$ 都是非退化的。

选取合适的 p 后，我们注意到构件 $\mathcal{P}_{n,\ p}$ 能够有效模拟由矩阵给出的边权重

$$L^{(n)}=BD^{[2p]}B\cdots BD^{[2p]}B=B(D^{[2p]}B)^{n-1}=\left(D^{[2p]}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\left(D^{[2p]}\right)^{\frac{1}{2}}B\left(D^{[2p]}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{n}\left(D^{[2p]}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

由于 $\tilde{B}=\left(D^{[2p]}\right)^{\frac{1}{2}}B\left(D^{[2p]}\right)^{\frac{1}{2}}$是实对称矩阵，我们知道它可以对角化。因此，存在一个实值正交归一对称矩阵 S和一个实值对角矩阵 J，使得 $\tilde{B}=SJS^T$。所以，我们看到

$$L^{(n)}=\left(D^{[2p]}\right)^{-\frac{1}{2}}\tilde{B}^n\left(D^{[2p]}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(D^{[2p]}\right)^{-\frac{1}{2}}SJ^nS^T\left(D^{[2p]}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

˜由引理 44可知，B 是非退化的，因此 B也是非退化的。因此，J =diag(λ_1,λ_2)，其中 $\lambda_i\neq 0$对所有 $i\in[2]$都成立。因此我们看到，对于任意 i，$j\in[2]$，$L^{(n)}{}_{ij}=a_{ij1}\lambda_1^n+a_{ij2}\lambda_2^n$，其中$a_{ij1}$，$a_{ij2}$ 取决于 S 和 $D^{[2p]}$，但不取决于 J 或 n。

现在，我们终于考虑 $Z_{M',\ \mathcal{D}}(G_{n,\ p})$。为方便起见，令 $V'=\bigcup_{u\in V}\{F_1(u)\ldots,F_{\deg(u)}(u)\}$表示 $G_{n,\ p}$ 中位于 $\mathcal{R}_{d,\ n,\ p}(u)$ 原始环上的顶点子集，并令

$E' = \left\{\{F_{\ell_u(\{u,v\})}(u)\, F_{\ell_v(\{u,v\})}(v)\} : \ \{u,v\} \in E\right\}$ 是 $G_{n,\ p}$ 中由连接顶点构件的悬挂边而生成的边的子集。于是，我们可得

$$Z_{M',\mathcal{D}}(G_{n,p}) = \sum_{\sigma:V'\to[2]} \left(\prod_{\{u,v\}\in E'} M'_{\sigma(u),\sigma(v)} \right) \left(\prod_{u\in V} \prod_{i=1}^{\deg(u)} D^{[2p+1]}_{\sigma(F_i(u))} \cdot {L^{(n)}}_{\sigma(F_i(u)),\sigma(F_{i+1}(u))} \right)$$

重新整理各项后，我们看到

$$Z_{M',\mathcal{D}}(G_{n,p}) = \sum_{x_1,x_2:x_1+x_2=2|E|} c_{(x_1,x_2)} \left(\lambda_1^{x_1}\lambda_2^{x_2}\right)^n$$

其中常数 $c_{(x_1,x_2)}$ 不依赖于 λ_i 或 n。通过计算 $Z_{M',\mathcal{D}}(G_{n,p})$（其中 $n \in [2|E|]$），我们得到一个范德蒙德方程组。若存在任何 $(x_1,x_2) \neq (y_1,y_2)$ 使得 $\lambda_1^{x_1}\lambda_2^{x_2} = \lambda_1^{y_1}\lambda_2^{y_2}$，那么我们可以删除矩阵中对应于 $(\lambda_1^{y_1}\lambda_2^{y_2})^n$ 的列，并将两个系数 $c_{(x_1,x_2)}$ 和 $c_{(y_1,y_2)}$ 合并为一个新系数 $c_{(x_1,x_2),(y_1,y_2)}$，它表示前两个系数之和。重复这一过程，我们便得到一个满秩范德蒙德方程组，从而可以求解。求解该方程组后，我们可以计算

$$\begin{aligned}
X &= \sum_{x_1,x_2:x_1+x_2=2|E|} c_{(x_1,x_2)} \\
&= \sum_{x_1,x_2:x_1+x_2=2|E|} c_{(x_1,x_2)} (1)^{x_1} (1)^{x_2} \\
&= \sum_{\sigma:V'\to[2]} \left(\prod_{\{u,v\}\in E'} M'_{\sigma(u),\sigma(v)} \right) \left(\prod_{u\in V} \prod_{i=1}^{\deg(u)} D^{[2p+1]}_{\sigma(F_i(u))} L^{(0)}_{\sigma(F_i(u)),\sigma(F_{i+1}(u))} \right)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
L^{(0)} &= \left(D^{[2p]}\right)^{-\frac{1}{2}} SIS^T \left(D^{[2p]}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \left(D^{[2p]}\right)^{-\frac{1}{2}} (I) \left(D^{[2p]}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \left(D^{[2p]}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

由于 $L^{(0)}$ 是对角矩阵，只有当对所有 $i \in [\deg(u)]$，和所有 $u \in V$，均有 $\sigma(F_i(u)) = \sigma(F_{i+1}(u))$ 时，任意置换 $\sigma : V' \to [2]$ 才会对总和 X 有贡献。在这种情况下，我们看到

$$X = \sum_{\sigma':V\to[2]} \left(\prod_{\{u,v\}\in E} M'_{\sigma'(u),\sigma'(v)} \right) \left(\prod_{u\in V} \left(\frac{D^{[2p+1]}_{\sigma'(u)}}{D^{[2p]}_{\sigma'(u)}} \right)^{\deg(u)} \right)$$

实际上，我们可以计算 $X = Z_{M',\hat{}\mathcal{D}}(G)$，其中 $\hat{}\,\mathcal{D} = \{\,\hat{}D^{[r]}\}_{r\in\mathbb{N}}$，使得

$$\hat{D}^{[r]} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1+c^{2p+1}}{1+c^{2p}}\right)^r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

换句话说，我们看到 $\hat{\mathcal{D}}^{[r]} = \left(\hat{D}\right)^r$，其中

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1+c^{2p+1}}{1+c^{2p}}\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因此，我们可以计算

$$\begin{aligned} X &= \sum_{\sigma' : V \to [2]} \left(\prod_{\{u,v\} \in E} M'_{\sigma'(u),\sigma'(v)} \right) \left(\prod_{u \in V} \left(\hat{D}_{\sigma'(u)} \right)^{\deg(u)} \right) \\ &= \sum_{\sigma' : V \to [2]} \left(\prod_{\{u,v\} \in E} M'_{\sigma'(u),\sigma'(v)} \left(\hat{D}_{\sigma'(u)} \right) \left(\hat{D}_{\sigma'(v)} \right) \right) \\ &= Z_{N_p}(G) \end{aligned}$$

其中

$$N_p = \begin{pmatrix} \left(\frac{1+c^{2p+1}}{1+c^{2p}}\right)^2 M'_{11} & \left(\frac{1+c^{2p+1}}{1+c^{2p}}\right) M'_{12} \\ \left(\frac{1+c^{2p+1}}{1+c^{2p}}\right) M'_{12} & M'_{22} \end{pmatrix}$$

如定理 7所示。

$$\therefore \texttt{Pl-GH}(N_p) \equiv \texttt{Pl-GH}(M', \hat{\mathcal{D}}) \leq \texttt{Pl-GH}(M', \mathcal{D})$$

这就完成了定理 7的证明。

B 附录 B

定理 45. 存在一个单调递增连续函数 $F : (0, 1) \to (0, 1)$，使得 $F(a)$ 是有理数，当且仅当 $a \in (0, 1)$ 是代数数。

证明。 考虑 $X = \overline{\mathbb{Q}} \cap (0,1)$ 和 $Y = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$，其中 $\mathbb{Q}$ 和 $\overline{\mathbb{Q}}$ 分别是有理数和代数数。根据康托尔稠密性定理（参见 [29]第 83 页的定理 4.9），任意两个可数、无界且稠密的序集都序同构。这意味着存在一个从 f 到 X 的 Y 保序双射。

现在我们可以将 f 延拓为连续函数 $F : (0, 1) \to (0, 1)$，如下所示：对于任意 $r \in (0, 1)$，令 $X_r = \{x \in X : x < r\}$，并令 $X^r = \{x \in X : x > r\}$。$X_r$ 和 X^r 都是 X的有界子集。因此，下面的上确界和下确界都存在且有限。我们断言它们相等：

$$\sup_{x \in X_r} f(x) = \inf_{x \in X^r} f(x). \tag{12}$$

由于 f 保持序，显然 $\sup_{x \in X_r} f(x) \leq \inf_{x \in X^r} f(x)$。假设它们不相等。则由$Y$稠密可知，存在 $y, y' \in Y$，使得 $\sup_{x \in X_r} f(x) < y < y' < \inf_{x \in X^r} f(x)$。考虑$a = f^{-1}(y) \in X$。若 $a < r$，则存在某个 $x \in X_r$，使得 $x > a$。于是 $f(x) > f(a) = y > \sup_{x \in X_r} f(x)$，这与之矛盾。因此 $a \geq r$。同理，$a' = f^{-1}(y') \in X$，且 $a' \leq r$。然而此时$y' = f(a') \leq f(a) = y$，这与之矛盾。

现在，我们将 $F(r)$ 定义为方程 (12) 中的公共值。我们声称，这个 F 是序同构 f 的延拓。令 $r \in X$。对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $y \in Y$，使得 $f(r) < y < f(r)+\epsilon$。于是 $f^{-1}(y) \in X^r$，且 $F(r) = \inf_{x \in X^r} f(x) \leq y < f(r) + \epsilon$。同理，$F(r) > f(r) - \epsilon$。由于 $\epsilon > 0$ 是任意的，$F(r) = f(r)$。

现在证明 F 是连续的。对于任意 $r \in (0,1)$ 和 $\epsilon > 0$，存在 $x \in X_r$ 和 $x' \in X^r$，使得 $F(r) - \epsilon < f(x) < F(r) < f(x') < F(r) + \epsilon$。我们断言，对于每个 $z \in (x, x')$，

$$|F(z) - F(r)| < \epsilon.$$

这是因为根据下确界和上确界的定义，$f(x) \leq F(z) \leq f(x')$。因此

$$F(r) - \epsilon < f(x) \leq F(z) \leq f(x') < F(r) + \epsilon.$$

最后，容易看出 F 是严格递增的。假设 $x < x'$。存在 $a, a' \in X$，使得 $x < a < a' < x'$。于是 $F(x) \leq f(a) < f(a') \leq F(x')$。由此可得，若 $F(x)$ 是有理数，则 x 是代数数。事实上，$a = f^{-1}(F(x))$ 有定义且是代数数，并且 $F(a) = f(a) = F(x)$。因此 $x = a$ 是代数数。反过来，若 x 是代数数，由于 F 是 f 的延拓，$F(x) = f(x)$，根据 f 给定的性质，它是代数数。

□