arXiv:2302.08574v1 [math.AT] 16 Feb 2023

等变上同调维数的比较

MARK GRA NT、KEVIN LI、EHUD MEIR 和 IRAKLI PAT CHKORIA

Abstract. 我们比较了 Takasu、Adamson 和 Bredon 相对群上同调所导出的、带算子群的三种等变上同调维数定义，并给出了所有可能出现严格不等式的情形的实例。我们证明并运用了 Stallings–Swan 型结果，这些结果刻画了等变上同调维数为一的群。我们的一些例子与 Farber 问题相关；该问题寻求离散群拓扑复杂度的代数刻画。特别是，群的拓扑复杂度一般并不等于相对于对角子群的乘积的相对上同调维数。

1. Introduction

设 G 和 Γ 为离散群，且 Γ 通过自同构作用于 G。在较早的文献中，G 可能被描述为带有 Γ 中算子的群；在此我们简单地称 G 为一个 Γ-群。Γ-群的等变群上同调已在包括 [10, 24, 22, 25] 在内的多篇文章中得到定义和研究。其中有三种替代性定义，均基于某种形式的对 $(G\rtimes\Gamma,\Gamma)$ 的相对上同调；该对由半直积构成，其中 Γ 按照标准方式视为一个子群。相应地，对于 Γ-群的等变上同调维数，也有三种定义。本文旨在比较这些维数，并在可能的情况下给出严格不等式的例子。为构造此类例子，我们采用等变 Stallings–Swan 型结果，这些结果刻画了等变上同调维数为一的 Γ-群。

设 (K,L) 是一个子群对，且 M 是一个 K-模（这里指 $\mathbb{Z}K$-模）。相对群上同调有两种经典定义：一种由 Auslander [6] 和 Massey [35] 提出，后由 Takasu[44, 45], 研究，我们记作 $H^*(K,L;M)$，称为 Takasu 上同调；另一种由 Adamson [1] 提出，后由 Hochschild [23] 从相对同调代数的角度加以阐释，我们记作 $H^*([K\colon L];M)$，称为 Adamson 上同调。更多详情请参见下文第 2 节；有关历史背景及更多参考文献，请参见[4] 的引言。在 Bredon 关于等变上同调 [9], 的开创性工作之后，出现了第三种相对群上同调，其系数模更为一般，定义如下。令 $\mathcal{L}$ 表示 K 中与 L 的某个子群共轭的所有子群组成的子群族。我们可以在限制轨道范畴 $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}(K)$上的模构成的阿贝尔范畴中进行同调代数。

Date：2023年2月20日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 55N91，20J05（主要）；55M30，20E36（次要）。*Key words and phrases.* 等变群上同调、相对群上同调、Stallings–Swan 定理。

给定一个 $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}(K)$-模 $\underline{M}$，便可按照标准方式，利用平凡模 $\underline{\mathbb{Z}}$ 的投射分解来定义 Bredon 上同调 $H^*_{\mathcal{L}}(K;\underline{M})$。更多详情同样请参见第 2 节。

相对群上同调的每种定义都会导出相对上同调维数的定义，即对某个系数模而言，相对上同调非零的最高次数（若不存在这样的最高次数，则为 ∞）。这些维数分别记作 $\mathrm{cd}(K,L)$、$\mathrm{cd}([K:L])$ 和 $\mathrm{cd}_{\mathcal{L}}(K)$，并分别称为二元组 (K,L) 的高须维数、Adamson 维数和布雷登维数。

当 G 是第一段中所述的 Γ-群时，二元组 $(G\rtimes\Gamma,\Gamma)$ 的相对群上同调称为 G 的等变群上同调。Cegarra 、 Garc´ıa-Calcines 和 Ortega 在 [10], 首先研究了高须版本，而 Inassaridze 在 [24] 首先研究了 Adamson 版本。为向这些作者致意，我们将 $G\rtimes\Gamma,\Gamma$ 的 cd 记作 Cegarra–Calcines–Ortega 维数，并将 $[G\rtimes\Gamma:\Gamma]$ 的 cd 称为 Γ-群 G 的 Inassaridze 维数。令 $\mathcal{G}$ 表示 $G\rtimes\Gamma$ 中 Γ 的子共轭子群族，我们将 $\mathrm{cd}_{\mathcal{G}}(G\rtimes\Gamma)$ 称为 Γ-群 G 的布雷登维数。

众所周知，Adamson 上同调可以视为 Bredon 上同调的一个特例，其中系数取为 K-模 [36,37, 8, 5] 的 $\mathcal{L}$-不动点。因此，$\mathrm{cd}([K:L])\leq\mathrm{cd}_{\mathcal{L}}(K)$ 始终成立；在等变群上同调的语境下，我们有 $\mathrm{cd}([G\rtimes\Gamma:\Gamma])\leq\mathrm{cd}_{\mathcal{G}}(G\rtimes\Gamma)$。Inassaridze 在 [25, §8] 中猜想，严格不等式可能成立。我们将在下文第 4 节证明这一猜想成立（见例 4.10 和 4.14）。

定理 1.1. 存在 Γ-群 G，满足：
(a) $\mathrm{cd}([G\rtimes\Gamma:\Gamma])=1$ 且 $\mathrm{cd}_{\mathcal{G}}(G\rtimes\Gamma)=\infty$；(b) $\mathrm{cd}([G\rtimes\Gamma:\Gamma])=3n$ 且 $\mathrm{cd}_{\mathcal{G}}(G\rtimes\Gamma)=4n$，对任意 $n\geq1$ 均成立。

所有这些例子都源自等变 Bestvina–Brady 群，我们大量运用了 Leary 和 Nucinkis 关于其非阿贝尔上同调的一个定理 [28] 。定理 1.1(a) 中的例子具有 G 自由且 Γ 有限的性质，我们证明并运用以下刻画：Inassaridze 维数小于或等于一的 Γ-群。这里应将其与 Stallings [42] 和 Swan [43] 的经典定理作比较；该定理将自由群刻画为上同调维数小于或等于一的群。

定理 1.2. 设 G 是一个 Γ 有限的 Γ 群。那么，$\mathrm{cd}([G\rtimes\Gamma:\Gamma])\leq1$ 当且仅当对于每个素数 p 以及 Γ的每个 p-子群 P，群 G 都是以一个P-集合为基的自由群。

定理 1.1(b) 推自 Mart´ınez-P´erez [33] 以及 Degrijse 和 Petrosyan [14], 的研究；他们给出了一些群的例子，这些群相对于有限子群族 $\mathcal{FIN}$ 的上同调维数小于其相对于 $\mathcal{FIN}$的布雷登维数。这些群是与等变 Bestvina–Brady 群相关联的半直积，我们利用非阿贝尔上同调证明，在这些例子中$\mathcal{FIN}=\mathcal{G}$。

在第 4 节中，我们将比较高须维数与布雷登维数。我们指出，在最近发表的两篇论文中， [4, 5] Arciniega-Nev´arez、Cisneros-Molina 和 S´anchez Salda˜na 研究了高须上同调与 Adamson 上同调之间的一个自然比较映射。他们证明，自共轭性是该映射成为同构的充要条件。由于我们在此关注的是维数，因此他们的工作与我们的工作似乎几乎没有重叠。我们还

更具体地关注等变群上同调，这相当于考虑满足附加假设 L 是 K的直缩的对 (K, L)。对于 L 在 K中正规这样的对，举出高须维数超过布雷登维数的例子相对容易；而利用下面这个关于高须等变群上同调的 Stallings–Swan 型结果（作为下文定理 5.5 给出），我们能够构造出一大类非正规例子。

定理 1.3. 设 G 是一个 Γ-群。则 $\mathrm{cd}(G \rtimes \Gamma, \Gamma) \leq 1$ 当且仅当 G 是自由的，且其基是一个自由 Γ-集。

这里我们采用 Alonso [3], 给出的高须维数刻画；在维数为一的情形下，这一结果主要归功于 Dicks [15]。这一结果应与 Bredon 等变群上同调的等变 Stallings–Swan 定理 [22, 定理 1.5/4.4], 相比较。该定理指出，若一个 Γ-群 G 的 Γ 有限，则 $\mathrm{cd}_{\mathcal{G}}(G \rtimes \Gamma) \leq 1$ 当且仅当 G 是自由的，且其基是一个（不一定自由的） Γ-集。事实上，“Γ-自由 Γ-群”有两种可能的概念，分别对应于两个可能的遗忘函子 $U\colon \Gamma\text{-Grp} \to \mathrm{Set}$ 和 $U\colon \Gamma\text{-Grp} \to \Gamma\text{-Set}$ 的左伴随函子的像。第一种对应于 Cegarra–Calcines–Ortega 等变上同调维数为一，第二种对应于 Bredon 等变维数为一。

作为定理 1.3 的推论，我们得到， Γ-群范畴中的射影对象恰好是以自由 Γ-集为基的自由 Γ-群，见推论 5.7。

最后，我们给出一些例子，其中布雷登维数大于 Cegarra–Calcines–Ortega 维数。若不要求存在收缩映射（即考虑一般的相对群上同调，而非等变群上同调），这相对容易做到。

命题 1.4. 设 G 为克莱因瓶的基本群。将 G 视为一个 G-群，其通过共轭作用于自身。则 $\mathrm{cd}(G \rtimes G, G) = 4$ 且 $\mathrm{cd}_{\mathcal{G}}(G \rtimes G) = \infty$。

这个例子与 Farber 问题有关；该问题由 [18], 提出，旨在寻找离散群的拓扑复杂度的代数刻画。回顾一下，$\mathrm{TC}(X)$ 定义为自由路径纤维化 $X^I \to X \times X$的截面范畴 [39] 。它是一个数值型同伦不变量，其值满足关于 Lusternik–Schnirelmann 范畴的界：$\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{TC}(X) \leq \mathrm{cat}(X \times X)$ [17]。当 X 是无球面空间时，这些不变量仅取决于基本群 $G := \pi_1(X)$，因此我们用 $\mathrm{TC}(G)$ 和 $\mathrm{cat}(G)$ 分别表示 $\mathrm{TC}(X)$ 和 $\mathrm{cat}(X)$。由 Eilenberg–Ganea [16], 、Stallings [42] 和 Swan [43] 的结果可知，$\mathrm{cd}(G) \leq \mathrm{TC}(G) \leq \mathrm{cd}(G \times G)$。这些界通常并不尖锐，已有例子表明，$\mathrm{TC}(G)$ 可以取 $\mathrm{cd}(G)$ 与 $\mathrm{cd}(G \times G)$ 之间的任意值。最近，第一作者与 Farber、Lupton 和 Oprea [19] 证明，$\mathrm{TC}(G) \leq \mathrm{cd}_{\mathcal{D}}(G \times G)$，即相对于 $\mathcal{D}$ 族的 Bredon 维数 $G \times G$ ；该族由对角子群$\Delta(G)$的子共轭构成。$G \times G$一方面，已知只有在自由阿贝尔群的情形下，以 Bredon 维数给出的这个上界才优于上界 $\mathrm{cd}(G \times G)$（此时 $\mathrm{TC}(G)$ 的值此前已知）。另一方面，此前并无满足 $\mathrm{TC}(G) < \mathrm{cd}_{\mathcal{D}}(G \times G)$ 的严格不等式例子。命题 1.4 给出了这样一个例子，因为群 G 在自身上通过共轭作用时，有序对 $(G \rtimes G, G)$ 同构于有序对 $(G \times G, \Delta(G))$。因此，对于克莱因瓶的基本群 G , 我们有 $\mathrm{cd}_{\mathcal{D}}(G \times G) = \mathrm{cd}_{\mathcal{G}}(G \rtimes G) = \infty$；而 Cohen 和 Vandembroucq 在 [12] 中证明了 $\mathrm{TC}(G) = 4$。

致谢。我们感谢 2022年英国拓扑学会议和 BIRS研讨会22w5182 的组织者；本工作的部分内容曾在这两个活动期间进行讨论。感谢 Dave Benson 与我们进行了富有成效的讨论。K.L. 获得了 SFB 1085 高阶不变量（雷根斯堡大学，德国研究联合会资助）的支持。

2. Relative group cohomology

我们首先定义群对 (K, L) 的各种相对群上同调，并证明它们的一些基本性质。全文中我们都在整数上进行讨论，因此 K-模与 $\mathbb{Z}K$-模同义。重要的 K-模例子包括平凡模 $\mathbb{Z}$、置换模 $\mathbb{Z}(K/L)$，以及模 $I(K/L) = \ker(\epsilon : \mathbb{Z}(K/L) \to \mathbb{Z})$；后者是显然的增广同态的核。

2.1. Takasu 上同调。

定义 2.1. 设 M 是一个 K-模。群对 (K, L) 关于系数 M 的 Takasu 相对上同调为

$$H^i(K, L; M) := \operatorname{Ext}_K^{i-1}(I(K/L), M)$$

对于 $i \geq 1$，以及 $H^0(K, L; M) := 0$。

上述概念已由 Auslander [6], 、Takasu [45] 、Ribes [38],以及其他学者进行研究；Wall [46], 、Bieri–Eckmann [7] 和 Alonso [3], 等人还研究了更一般的形式，其中将 L 替换为 K 的子群集合。根据定义显然，当 $L = K$时，$H^i(K, L; M)$ 消失；通过一个简单的维数平移论证，当$L = \{1\}$ 且 $i \geq 2$时，它可归结为普通群上同调 $H^i(K; M)$。另一个重要性质是长正合列 (1)

$$\cdots \longrightarrow H^i(K, L; M) \longrightarrow H^i(K; M) \xrightarrow{\text{res}} H^i(L; M|_L) \longrightarrow H^{i+1}(K, L; M) \longrightarrow \cdots$$

该长正合列对任意系数模 M均成立。这样的正合列的存在性可由 Takasu [45]给出的拓扑解释推出：

$$H^i(K, L; M) \cong H^i(BK, BL; \mathcal{M}),$$

其中，等式右侧是分类空间 BK 的某个模型的相对奇异上同调，该模型包含作为子空间的 BL 的一个模型；其系数为由 M决定的、定义在 BK 上的阿贝尔群局部系统 $\mathcal{M}$ 。

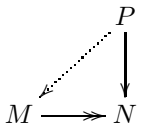
定义 2.2. 对 (K, L) 的高须相对上同调维数，或简称高须维数，定义为

$$\operatorname{cd}(K, L) := \sup\{n \mid H^n(K, L; M) \neq 0 \text{ for some } K\text{-module } M\}.$$

引理 2.3. 当且仅当 $I(K/L)$ 是一个投射K-模时，(K, L) 具有 $\operatorname{cd}(K, L) \leq 1$。

证明。根据标准论证，$\operatorname{cd}(K, L) = \operatorname{pd} I(K/L) + 1$，其中 pd 表示 K-模的投射维数。□

2.2. Adamson 上同调。接下来我们转向 Adamson 上同调。Adamson 最初的定义 [1] 是基于陪集空间 K/L上构造的标准分解的一种自然推广。这里我们采用 Hochschild [23], 基于相对同调代数给出的解释，为此需要回顾一些定义。 K-模之间的满同态 $\phi\colon M \twoheadrightarrow N$ 称为 (K,L)-满同态，若将其视为 L-模之间的映射时它有截面；也就是说，若存在一个 L-模映射 $\psi\colon N \to M$ 使得 $\phi\circ\psi = \mathrm{Id}_N$。若在下述任意 K-模图表中都存在虚线提升，则称 K-模 P 为 (K,L)-投射，其中水平箭头是一个 (K,L)-满同态:



例 2.4. 增广映射 $\epsilon\colon \mathbb{Z}(K/L) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ 是一个 (K,L)-满同态。任意诱导模 $\mathbb{Z}K \otimes_L A$ 都是 (K,L)-投射的（因为诱导是限制的左伴随）。特别地， $\mathbb{Z}(K/L) \cong \mathbb{Z}K \otimes_L \mathbb{Z}$ 是 (K,L)-投射的。

由 K-模映射 $\partial_i\colon M_i \to M_{i-1}$ 组成的正合列称为 (K,L)-正合的，若每个短正合列

$$0 \longrightarrow \ker\partial_i \longrightarrow M_i \longrightarrow \operatorname{im}\partial_i \longrightarrow 0$$

在视为 L-模的正合列时分裂。于是， K-模 M 的 (K,L)-投射分解是一个 (K,L)-正合列

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\partial_0} M \longrightarrow 0$$

其中每个 P_i 都是 (K,L)-投射的。根据这些定义，可以用通常的方法，借助 (K,L)-投射分解构造相对 Ext 函子 $\mathrm{Ext}^i_{(K,L)}(-,-)$，并证明它们与所选分解无关 [23, §2]。

定义 2.5. 设 M 是一个 K-模。对偶 (K,L) 的 Adamson 相对上同调（系数为 M）为

$$H^i([K:L];M) := \mathrm{Ext}^i_{(K,L)}(\mathbb{Z},M).$$

定义 2.6. 对偶 (K,L) 的 Adamson 相对上同调维数，或简称 Adamson 维数，定义为

$$\mathsf{cd}([K:L]) := \sup\{n \mid H^n([K:L];M) \neq 0 \text{ for some } K\text{-module } M\}.$$

引理 2.7. 对偶 (K,L) 满足 $\mathsf{cd}([K:L]) \leq 1$，当且仅当 $I(K/L)$ 是一个 (K,L)-投射模。

证明. 由于 K-模的短 (K,L)-正合列会导出一个相对 Ext 群的长正合列 [23], 例 2.4 和增广正合列

$$0 \longrightarrow I(K/L) \longrightarrow \mathbb{Z}(K/L) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

这意味着对于 $i \geq 2$,

$$H^i([K:L];M) \cong \mathrm{Ext}^{i-1}_{(K,L)}(I(K/L),M).$$

□

Adamson 上同调最重要的特征之一，是当 L 是 K 的正规子群时，它与商群的普通群上同调之间的关系。在这种情况下，对于任意 K-模 M，我们有一个同构

$$H^i([K:L];M)\cong H^i(K/L;M^L),$$

其中，$M^L\subseteq M$ 表示 L-不变元的子模 [1]。因此，当 L 是 K的正规子群时，cd($[K:L]$) =cd(K/L)。另一方面，在一般情况下，Adamson 上同调并不存在像 (1) 那样的长正合列。

我们还可以将 Adamson 上同调推广到子群族，只需以直接明了的方式推广上述定义。我们称 K 的子群的一个非空集合 $\mathcal{F}$ 为 K 的子群族，若它在共轭和取子群运算下封闭。重要的例子有 $\mathcal{F}=\{1\}$、$\mathcal{FIN}$、$\mathcal{VCYC}$，它们分别是平凡子群、有限子群和几乎循环子群的族，这些族已在文献中得到广泛研究。对我们而言最相关的例子是由 $L\leq K$生成的族：

$$\mathcal{L}=\langle L\rangle:=\{H\leq K\mid H\leq kLk^{-1}\text{ for some }k\in K\},$$

它由 L的所有 K-子共轭组成。给定 K中子群的一个族 $\mathcal{F}$，我们称 K-模之间的满同态 $M\twoheadrightarrow N$ 为 $(K,\mathcal{F})$-满同态，若对每个 $H\in\mathcal{F}$，它作为 H-模之间的映射都可分裂。$(K,\mathcal{F})$-正合和 $(K,\mathcal{F})$-投射的定义也类似。

定义 2.8. 设 M 是一个 K-模，$\mathcal{F}$ 是 K 的一个子群族。对偶 $(K,\mathcal{F})$ 的 Adamson 相对上同调，也称为 K 的 $\mathcal{F}$-相对上同调，其系数取自 M，定义为

$$\mathcal{F}H^i(K;M):=\operatorname{Ext}^i_{(K,\mathcal{F})}(\mathbb{Z},M).$$

这里我们将原本预期的记号 $H^i([K:\mathcal{F}];M)$ 改为与参考文献 [36, 37] 保持一致的记法。

定义 2.9. K 的 $\mathcal{F}$-相对上同调维数定义为

$$\mathcal{F}\mathsf{cd}(K):=\sup\{n\mid\mathcal{F}H^n(K;M)\neq 0\text{ for some }K\text{-module }M\}.$$

当 $L\leq K$ 且 $\mathcal{L}$ 是由 L 生成的子群族时，容易验证 $\mathcal{L}H^i(K;M)\cong H^i([K:L];M)$ 且 $\mathcal{L}\mathsf{cd}(K)=\mathsf{cd}([K:L])$。

2.3. Bredon 上同调。接下来我们回顾群关于某个子群族的 Bredon 上同调基础知识，入门参考资料见 [21]，更深入的参考资料见 [30]。给定 K 的子群族 $\mathcal{F}$，K 的 $\mathcal{F}$-限制轨道范畴定义为范畴 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(K)$，其对象是 $H\in\mathcal{F}$ 的传递 K-集 K/H，其态射 $K/H\to K/H'$ 是 K-等变映射。$\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(K)$-模是一个反变函子 $\underline{M}:\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(K)\to\mathsf{Ab}$，其取值为阿贝尔群。例如，常值模 $\underline{\mathbb{Z}}$ 在每个对象上取值 $\mathbb{Z}$，并在每个态射上取恒等映射 $\mathrm{Id}:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$，具有特殊作用。$\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(K)$-模范畴是一个有足够多投射对象的阿贝尔范畴，其中单态射、满同态、核、余核等概念均按对象逐点定义。因此，我们可以按标准方式定义 Ext 函子 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(K)}(-,-)$，并证明它们与所选分解无关。

定义 2.10. 设 $\underline{M}$ 是一个 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(K)$-模。 K 关于子群族 $\mathcal{F}$ 且系数取自 $\underline{M}$ 的 Bredon 上同调定义为

$$H^i_{\mathcal{F}}(K;\underline{M}) := \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(K)}(\underline{\mathbb{Z}},\underline{M}).$$

在 $\mathcal{F}=\mathcal{L}$ 对某个子群 $L\le K$ 的特殊情形下，我们称之为这对 (K,L) 的布雷登相对上同调。

定义 2.11. K 关于族 $\mathcal{F}$ 的布雷登上同调维数为

$$\mathsf{cd}_{\mathcal{F}}(K) := \sup\{n \mid H^n_{\mathcal{F}}(K;\underline{M}) \neq 0 \text{ for some } \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(K)\text{-module } \underline{M}\}.$$

在 $\mathcal{F}=\mathcal{L}$ 对某个子群 $L\le K$ 的特殊情形下，我们称 $\mathsf{cd}_{\mathcal{L}}(K)$ 为这对 (K,L) 的布雷登相对上同调维数，或简称布雷登维数。

设 Δ 是一个 K-集。定义一个 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(K)$-模 $\underline{\mathbb{Z}}\Delta$，令对每个 $H\in\mathcal{F}$， $\underline{\mathbb{Z}}\Delta(K/H)=\mathbb{Z}(\Delta^H)$。 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(K)$-模有自由性的概念，并且 $\underline{\mathbb{Z}}\Delta$ 是自由的，当且仅当 Δ 的所有稳定子群都属于族 $\mathcal{F}$ （例如参见 [21,第 1 章，§5-6]）。一个 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(K)$-模是投射的，当且仅当它是自由模的一个直和项；特别地，自由的 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(K)$-模是投射的。

上述观察为构造 $\underline{\mathbb{Z}}$ 的投射分解提供了拓扑方法。若一个 K-CW 复形 X 对于族 $\mathcal{F}$ 关于 K 被称为分类空间，则对于任意其各向同性群属于 $\mathcal{F}$ 的 K-CW 复形 Y，存在唯一的 K-同伦意义下的 K-映射 $Y\to X$。这等价于不动点集满足以下条件：对所有 $H\le K$，

(i) 当 $H\notin\mathcal{F}$ 时， $X^H=\emptyset$；

(ii) 当 $H\in\mathcal{F}$ 时， X^H 是可缩的。

我们将这样的分类空间记为 $E_{\mathcal{F}}(K)$，同时注意到它仅在 K-同伦类型意义下唯一。令 Δ_i 为 $E_{\mathcal{F}}(K)$ 的 i-胞腔集合。则 $\underline{C}_i(E_{\mathcal{F}}(K)) := \underline{\mathbb{Z}}\Delta_i$ 是 $E_{\mathcal{F}}(K)$ 的 i-链模，并且根据条件 (i)，它作为 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(K)$-模是自由的。增广胞腔链复形

$$\cdots\longrightarrow \underline{C}_2(E_{\mathcal{F}}(K))\xrightarrow{\partial_2}\underline{C}_1(E_{\mathcal{F}}(K))\xrightarrow{\partial_1}\underline{C}_0(E_{\mathcal{F}}(K))\xrightarrow{\partial_0}\underline{\mathbb{Z}}\longrightarrow 0$$

根据条件 (ii)，于是是 $\underline{\mathbb{Z}}$ 的自由分解，因而也是投射分解。记 $\mathsf{gd}_{\mathcal{F}}(K)$ 为 $E_{\mathcal{F}}(K)$ 的一个 K-CW 复形模型的最小维数，则可得 $\mathsf{cd}_{\mathcal{F}}(K)\le\mathsf{gd}_{\mathcal{F}}(K)$。L¨uck 和 Meintrup [31] 已证明，$\mathsf{gd}_{\mathcal{F}}(K)\le\max\{3,\mathsf{cd}_{\mathcal{F}}(K)\}$。特别地，我们有

$$\mathsf{cd}_{\mathcal{L}}(K)\le\mathsf{gd}_{\mathcal{L}}(K)\le\max\{3,\mathsf{cd}_{\mathcal{L}}(K)\}.$$

为了解释其与 Adamson 上同调的关系，我们回顾一对伴随函子

$$\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{\{1\}} : \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(K)\text{-mod} \rightleftarrows K\text{-mod} : \mathrm{coind}^{\mathcal{F}}_{\{1\}} \tag{2}$$

称为限制和余诱导。具体而言，

$$\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{\{1\}}(\underline{M}) = \underline{M}(K/1),\qquad \mathrm{coind}^{\mathcal{F}}_{\{1\}}(M) : K/H\mapsto M^H.$$

余归纳函子也称为不动点函子。文献[36, 37, 5] 证明，对一个 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$（$K$）-投射分解施加限制

$$\cdots\longrightarrow \underline{P}_2\longrightarrow\underline{P}_1\longrightarrow\underline{P}_0\longrightarrow\underline{\mathbb{Z}}\longrightarrow 0$$

可得到一个（K， $\mathcal{F}$）-投射分解

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{\{1\}}(\underline{P}_2) \longrightarrow \mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{\{1\}}(\underline{P}_1) \longrightarrow \mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{\{1\}}(\underline{P}_0) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

结合伴随（2），可得如下结果（另见 [8,定理 3.10]）。

命题 2.12. 设 M 是一个 K-模，且 $\mathcal{F}$ 是 K 的一个子群族。那么

$$\mathcal{F}H^i(K;M) \cong H^i_{\mathcal{F}}(K;\mathrm{coind}^{\mathcal{F}}_{\{1\}}(M)).$$

特别地， $\mathcal{F}\mathsf{cd}(K) \leq \mathsf{cd}_{\mathcal{F}}(K)$ 总是成立。当 $\mathcal{L} = \langle L \rangle$ 是由子群 $L \leq K$ 生成的子群族时，有 $\mathsf{cd}([K:L]) \leq \mathsf{cd}_{\mathcal{L}}(K)$。

为便于后文使用，我们在此记录 Bredon 上同调的 Shapiro 引理（见 [21,第 3] 章）以及 $\mathcal{F}$-相对上同调的 Shapiro 引理。设 $\mathcal{F}$ 是 K 的一个子群族，且 $P \leq K$ 是一个子群。那么 $\mathcal{F} \cap P$ 是 P 的一个子群族，并且存在一对伴随函子

$$\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}\cap P} : \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(K)\text{-}\mathsf{mod} \rightleftarrows \mathcal{O}_{\mathcal{F}\cap P}(P)\text{-}\mathsf{mod} : \mathrm{coind}^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}\cap P}$$

限制函子保持投射对象，从而得到以下结果。

引理 2.13（Bredon 上同调的 Shapiro 引理）。设 $\mathcal{F}$ 是 K 的一个子群族，且 $P \leq K$ 是一个子群。则对于任意 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}\cap P}$（$P$）-模 $\underline{M}$，存在同构

$$H^i_{\mathcal{F}\cap P}(P;\underline{M}) \cong H^i_{\mathcal{F}}(K;\mathrm{coind}^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}\cap P}(\underline{M})),$$

且在 $\underline{M}$ 中自然。特别地，$\mathsf{cd}_{\mathcal{F}\cap P}$（$P$） $\leq \mathsf{cd}_{\mathcal{F}}$（$K$）。

引理 2.14（ $\mathcal{F}$-相对上同调的 Shapiro 引理）。设 $\mathcal{F}$ 是 K 的一个子群族，且 $P \leq K$ 是一个子群。则对于任意 P-模 M，存在同构

$$(\mathcal{F} \cap P)H^i(P;M) \cong \mathcal{F}H^i(K;\mathrm{coind}^K_P(M)),$$

且在 M 中自然。特别地，（$\mathcal{F} \cap P$）cd（P） $\leq \mathcal{F}\mathsf{cd}$（$K$）。

证明。这由命题 2.12 和引理 2.13 得出，因为从一个 P-模到一个 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$（$K$）-模的各种余诱导方式是一致的。□

最后，在本节中我们注意到，如果 L 是 K 的正规子群，那么

$$\mathsf{cd}_{\mathcal{L}}(K) = \mathsf{cd}(K/L) = \mathsf{cd}([K:L]),$$

其中第一个等式已在 [22, 引理 2.6] 中证明，第二个等式则在上面的第 2.2 小节中指出。

3. Equivariant group cohomology

设 Γ 是一个离散群。 Γ-群是一个离散群 G ，并带有 Γ 通过自同构作用于它的作用（等价地，一个同态 $\varphi\colon \Gamma \to \mathrm{Aut}\, G$）。本节将讨论定义 Γ-群的等变群上同调的各种方式，每种方式都将不同形式的相对群上同调应用于对子 $(G \rtimes \Gamma, \Gamma)$。这里， $G \rtimes \Gamma = G \rtimes_{\varphi} \Gamma$ 是与该作用相对应的半直积，而 Γ 与标准子群 $\{(1,\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$ 等同。

定义 3.1（[10]）。设 M 是一个 $G \rtimes \Gamma$-模。 Γ-群 G 的 Cegarra–Calcines–Ortega 等变上同调（系数为 M ）定义为 Takasu 上同调 $H^i(G \rtimes \Gamma, \Gamma;\ M)$，参见定义 2.1。

Γ-群 G 的 Cegarra–Calcines–Ortega 等变上同调维数，或简称 Cegarra–Calcines–Ortega 维数，为 $\mathsf{cd}(G \rtimes \Gamma, \Gamma)$。

这是 Cegarra、Garc´ıa-Calcines 和 Ortega 在 [10]中给出的等变群上同调的若干等价定义之一。他们推导了这一上同调理论的若干性质，其中包括用 $H^2(G \rtimes \Gamma, \Gamma;\ -)$ 对Γ-群的等变扩张进行分类。在发展这一理论时，他们受到分次范畴群 [11], 的应用所启发，并未讨论等变上同调维数。

定义 3.2（[24, 25]）。设 M是一个 $G \rtimes \Gamma$-模。 Γ-群 G 在系数 M 下的 Inassaridze 等变上同调是 Adamson 上同调$H^i([G \rtimes \Gamma :\ \Gamma];\ M)$，见定义 2.5。

Γ-群 G 的 Inassaridze 等变上同调维数，或简称 Inassaridze 维数，为 $\mathsf{cd}([G \rtimes \Gamma :\ \Gamma])$。

受其在等变代数 K理论中的应用启发，Inassaridze 在 [24]（最近又在 [25]）定义并研究了这一等变群上同调变体。这里的 $H^2([G \rtimes \Gamma :\ \Gamma]; -)$ 可用于对具有 Γ-分裂的 Γ-群的等变扩张进行分类。Inassaridze 还指出 [24, 推论 5] ：若 G 是一个自由群，且其基在 Γ作用下保持置换，则 $\mathsf{cd}([G \rtimes \Gamma :\ \Gamma]) \leq 1$。我们将在下一节看到，反命题并不成立。

现在我们用 $\mathcal{G} = \langle \Gamma \rangle$ 表示由 Γ生成的 $G \rtimes \Gamma$ 的子群族。

定义 3.3（[22]）。设 $\underline{M}$是一个 $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}(G \rtimes \Gamma)$-模。 Γ-群 G取系数于 $\underline{M}$的 Bredon 等变上同调为 $H^i_{\mathcal{G}}(G \rtimes \Gamma;\ \underline{M})$，参见定义 2.10。

Γ-群 G 的 Bredon 等变上同调维数，或简称 Bredon 维数，为 $\mathsf{cd}_{\mathcal{G}}(G \rtimes \Gamma)$。

推论 3.4（由命题 2.12 得出）。对于任意 Γ-群 G,

$$\mathsf{cd}([G \rtimes \Gamma : \Gamma]) \leq \mathsf{cd}_{\mathcal{G}}(G \rtimes \Gamma).$$

若 Γ 在 G 上平凡作用，则 $\Gamma \lhd G \rtimes \Gamma$ 是正规子群，商群为 G，并且

$$\mathsf{cd}([G \rtimes \Gamma : \Gamma]) = \mathsf{cd}_{\mathcal{G}}(G \rtimes \Gamma) = \mathsf{cd}(G).$$

4. Comparison of Inassaridze and Bredon dimensions

本节的目标是举出一些 Γ-群的例子，使推论 3.4 中给出的 Inassaridze 维数与 Bredon 维数之间的不等式为严格不等式，从而证实 Inassaridze 在 [25, §8] 中提出的猜想。

我们首先指出，寻找有限群Γ 及其族 $\mathcal{F}$ 的例子相对容易，使得 $\mathcal{F}\mathsf{cd}(\Gamma) < \mathsf{cd}_{\mathcal{F}}(\Gamma)$。这些例子的源头是下面这个简单的代数引理。

引理 4.1. 设 Γ 是一个有限群。 Γ-模的满同态 $\pi :\ M \to N$ 作为 Γ-模态射可分裂，当且仅当对于每个 p-子群 $P \leq \Gamma$ 以及所有素数 p，它作为 P-模态射可分裂。

证明。必要性显然。设 $p_1, \ldots, p_k$ 是整除 $|\Gamma|$ 的素数，并固定西洛子群 $P_1, \ldots, P_k$。假设对于每个 $i = 1, \ldots, k$，给定了 π 的一个 P_i-分裂 $s_i \colon N \to M$。我们通过如下方式定义阿贝尔群态射 $t_i \colon N \to M$

$$t_i = \sum_{\gamma \in \Gamma / P_i} \gamma s_i \gamma^{-1},$$

其中求和遍历 P_i 在 Γ 中的一组陪集代表元。由于 s_i 是 P_i-模的态射，这与所选的陪集代表元无关。我们声称 t_i 实际上是 Γ-模的态射。事实上，给定 $\sigma \in \Gamma$，有

$$\begin{aligned} t_i \sigma &= \sum_{\gamma \in \Gamma / P_i} \gamma s_i \gamma^{-1} \sigma \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma / P_i} \sigma (\sigma^{-1}\gamma) s_i (\sigma^{-1}\gamma)^{-1} \\ &= \sigma \sum_{\sigma^{-1}\gamma \in \Gamma / P_i} (\sigma^{-1}\gamma) s_i (\sigma^{-1}\gamma)^{-1} \\ &= \sigma t_i \end{aligned}$$

其中最后一个等式由上文提到的陪集代表元无关性得出。

注意，$\pi t_i \colon N \to N$ 是乘以 $|\Gamma / P_i|$ 的映射。由于整数 $|\Gamma/P_1|$、……、$|\Gamma/P_k|$ 两两互素，存在整数 a_1、……、a_k 使得 $\sum a_i |\Gamma/P_i| = 1$。于是 $\sum a_i t_i$ 是 π 的一个 Γ-分裂。□

推论 4.2. 设 $\mathcal{F}$ 是有限群 Γ 的真子群族，其中包含所有 p-子群。那么 $\mathcal{F}\mathrm{cd}(\Gamma) = 0$，而 $\mathrm{cd}_{\mathcal{F}}(\Gamma) \geq 2$。

证明。由引理 4.1，任意 $(\Gamma, \mathcal{F})$-满同态 $M \to N$ 都是 Γ-分裂的。因此，每个 Γ-模都是 $(\Gamma, \mathcal{F})$-投射的。于是 $\mathcal{F}\mathrm{cd}(\Gamma) = 0$。第二个结论由 [22,定理 1.6] 得出。（注意，$\mathrm{cd}_{\mathcal{F}}(\Gamma) \geq 1$ 是 $\Gamma \notin \mathcal{F}$的一个简单推论。）□

现在我们利用这一论证，给出一些自由 Γ-群 G 的例子，使得 $\mathrm{cd}([G \rtimes \Gamma \colon \Gamma]) = 1$ 且 $\mathrm{cd}_{\mathcal{G}}(G \rtimes \Gamma) > 1$。

定义 4.3。若 Γ-群 G 满足 G 是一个基由 Γ置换的自由群，则称其为 Γ-自由群。

定理 4.4（[22]）。设 G 是一个 Γ-群，且 Γ 有限。那么，$\mathrm{cd}_{\mathcal{G}}(G \rtimes \Gamma) \leq 1$ 当且仅当 G 是 Γ-自由的。

自由的 Γ-群是否为 Γ-自由，可通过非阿贝尔上同调来判定。下面简要回顾相关定义，更多详情请参阅 [41, I.§5]。给定一个 Γ-群 G，1-余循环是一个映射 $c \colon \Gamma \to G$，满足 $c(\gamma\delta) = c(\gamma)^{\gamma} c(\delta)$，对所有 $\gamma, \delta \in \Gamma$ 均成立。若存在 $g \in G$ 使得对所有 $\gamma \in \Gamma$均有 $c_1(\gamma) = g^{-1} c_2(\gamma)^{\gamma} g$，则称两个 1-余循环 $c_1, c_2 \colon \Gamma \to G$ 等价。这确实是一种等价关系，其等价类集合记作 $H^1(\Gamma; G)$，称为 Γ 以 G为系数的第一非阿贝尔上同调。它是一个带基点集合，基点为平凡 1-余循环的等价类；该余循环在 G的单位元处取常值。属于此等价类的任何 1-余循环都称为主余循环。如果每个 1-余循环都是主余循环，则称 $H^1(\Gamma; G)$是平凡的，并记作 $H^1(\Gamma; G) = \{1\}$；否则称$H^1(\Gamma; G)$是非平凡的，并记作 $H^1(\Gamma; G) \neq \{1\}$。

˜注意，1-余循环 $c\colon \Gamma \to G$ 确定了 $G \rtimes \Gamma$ 的一个子群 $\Gamma = \{(c(\gamma)\ \gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$，该子群到 Γ的投影是一个同构。众所周知， $H^1(\Gamma; G)$与这类子群在 $G \rtimes \Gamma$ 中的 G-共轭类集合之间存在双射（例如参见 [41, 第43]页）。

引理 4.5。设 G 是一个自由的 Γ-群，且 Γ 有限。那么，当且仅当对于每个子群 $P \leq \Gamma$，第一非阿贝尔上同调 $H^1(P; G)$ 是平凡的， G 才是 Γ-自由的。

证明。假设对于某个 $P \leq \Gamma$， $H^1(P; G) \neq \{1\}$。一个非主 1-余循环 $c\colon P \to G$ 确定了一个不属于族 $\mathcal{G}$ 的有限子群 $P \leq G \rtimes \Gamma$，参见 [22, 命题 4.1]。于是，根据 Bredon 上同调的 Shapiro 引理以及 [22, 定理 1.6],

$$2 \leq \mathsf{cd}_{\mathcal{G}\cap\tilde{P}}(\tilde{P}) \leq \mathsf{cd}_{\mathcal{G}}(G \rtimes \Gamma).$$

为证明逆命题，我们必须更深入地探究 [22, 定- 理 1.5]的证明。由于 $G \rtimes \Gamma$ 是几乎自由的，根据 Karass–Pietrowski–Solitar [27], Cohen [13] 和 Scott [40]的结果，它作用在一棵具有有限稳定子的树 T 上。子群$G \leq G \rtimes \Gamma$ 在 T上自由作用，而子群 $\Gamma \leq G \rtimes \Gamma$ 固定某个顶点 v_0（正如作用在树上的任何有限群都必然如此）。因此，商图 $X := T/G$继承了 Γ 的一个固定顶点 $x_0 = [v_0]$的作用，并且 $\pi_1(X, x_0)$ 作为一个 Γ- 群同构于 G。

剩下要证明的是， $\pi_1(X, x_0)$有一个被 Γ置换的基。为此，我们证明 X 与一个只有一个顶点的 Γ-CW复形 Γ-同伦等价，方法是证明 X 存在一棵 Γ-等变生成树。根据 [26] 的主要结果（该结果对无限图也成立），只需证明对于每个顶点 $x \in X$，由 x 的稳定子群 Γ_x 固定的子图 X^{Γ_x} 是连通的。现在，证明与 [22, 定理 1.5]的证明完全相同：假设$H^1(\Gamma_x; G) = \{1\}$ 使我们能够断定，由 x 表示的 T 的 G顶点轨道包含一个不动点。□

定理 4.6. 设 G 是一个自由 Γ-群，且 Γ 有限。那么，$\mathsf{cd}([G \rtimes \Gamma : \Gamma]) \leq 1$ 当且仅当对于所有 p-子群 $P \leq \Gamma$ 和所有素数 p， $H^1(P; G)$都是平凡的。

证明。首先假设对于所有 p-子群 $P \leq \Gamma$， $H^1(P; G)$ 都是平凡的。根据引理 2.7，要证明 $\mathsf{cd}([G \rtimes \Gamma : \Gamma]) \leq 1$，只需证明增广模 $I(G \rtimes \Gamma/\Gamma) \cong I(G)$ 是 $(G \rtimes \Gamma, \Gamma)$-投射的。这等价于证明每个 $(G \rtimes \Gamma, \Gamma)$-满同态 $M \to I(G)$ 都存在一个 $G \rtimes \Gamma$-模分裂。

设 $P \leq \Gamma$ 是一个 p-子群。我们可以将 G 视为一个自由 P-群，因此根据引理 4.5，它是 P-自由的。因此

$$\mathsf{cd}([G \rtimes P : P]) \leq \mathsf{cd}_{\mathcal{P}}(G \rtimes P) \leq 1,$$

其中 $\mathcal{P}$ 表示由 P 生成的 $G \rtimes P$ 的子群族。再次应用引理 2.7，我们看到，将 $I(G)$ 视为 $G \rtimes P$-模时，它是 $(G \rtimes P, P)$-投射的。

任意的 $(G \rtimes \Gamma, \Gamma)$-满同态 $\pi\colon M \to I(G)$，经限制后都可视为一个 $(G \rtimes P, P)$-满同态，因此存在一个 $G \rtimes P$-模分裂。现在我们仿照引理 4.1 的证明，证明 π 存在一个 $G \rtimes \Gamma$-模分裂。具体而言，选取西洛子群 $P_1, \ldots, P_k$（每个整除 $|\Gamma|$ 的素数对应一个），以及 $G \rtimes P_i$-分裂 $s_i\colon I(G) \to M$，它们都是 π的分裂。然后令

$$t_i = \sum_{\gamma \in (G\rtimes\Gamma/G\rtimes P)} \gamma s_i \gamma^{-1}.$$

于是存在整数 $a_1,\dots,a_k$，使得 $\sum a_i t_i$ 是 π的一个 $G \rtimes \Gamma$-模分裂。

为证明逆命题，设存在一个 p-子群 $P \leq \Gamma$，使得$H^1(P;\ G) \neq \{1\}$。那么存在一个子群 $\tilde{P} \leq G \rtimes \Gamma$，它同构投影˜到 P，且不属于族 $\mathcal{G}$。不妨取这样的 P 为极小者，从而˜ P 的任意真子群都属于 $\mathcal{G}$。于是根据 Shapiro 引理 2.14,

$$\mathcal{F}\mathsf{cd}(P) = (\mathcal{G} \cap \tilde{P})\mathsf{cd}(\tilde{P}) \leq \mathsf{cd}([G \rtimes \Gamma : \Gamma]),$$

其中 $\mathcal{F}$ 是 p-群 P的所有真子群所构成的族。证明现由以下引理完成。□

引理 4.7。设 P 为一个 p-群，且令 $\mathcal{F}$ 为 P的所有真子群所构成的族。那么 $\mathcal{F}\mathsf{cd}(P) = \infty$。

证明。反设 $\mathcal{F}\mathsf{cd}(P) = n < \infty$。由于 P 是有限的，标准的同调代数表明，存在一个长度为 n 的（P，$\mathcal{F}$）-投射分解，其各项为有限生成的 P-模

$$0 \longrightarrow M_n \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

令 $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$。 $\mathbb{Z}$ 的 $(P,\mathcal{F})$-投射分解在 $\mathbb{Z}$ 上分裂，因此应用函子 $k \otimes_{\mathbb{Z}} -$ 后仍保持正合。于是我们得到一个正合列

$$0 \longrightarrow k \otimes M_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow k \otimes M_0 \longrightarrow k \longrightarrow 0,$$

其欧拉示性数为

$$-1 + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim_k(k \otimes M_i).$$

由于该列正合，其欧拉示性数为零。现在我们将证明，对于每个 i，$\dim_k(k \otimes M_i)$ 都必须被 p 整除。将上式模 p 化简，我们得到 $-1 = 0$ 模 p，这就产生了矛盾。

为了证明关于维数的结论，我们使用 $(P,\mathcal{F})$-投射模的刻画 [37, 命题 2.5]。也就是说，它们都是形如 $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\Delta$ 的模的直和项，其中 M 是一个 P-模，而 Δ 是一个稳定子属于 $\mathcal{F}$ 的 P- 集。这意味着每个 $k \otimes M_i$ 都是形如 $M \otimes k\Delta$ 的模的直和项，其中 M 是一个 kP-模，而 Δ 是一个稳定子属于 $\mathcal{F}$ 的 P-集。只需证明，$M \otimes k\Delta$ 的任意不可分解直和项 N 都满足 $p \mid \dim_k(N)$。

为此，我们首先注意到，将 Δ 分解为 P-轨道的不交并后，可以将 $M \otimes k\Delta \cong \bigoplus_i M \otimes kP/H_i$ 写成 $H_i \in \mathcal{F}$。根据 Krull–Schmidt 定理，N 是某个 i 的 $M \otimes kP/H_i$ 的直和项。设 $H = H_i$。由于 H 是 p-群 P 的真子群，因此它包含在某个真正规子群 $K \subseteq P$ 中。取 $g \notin K$。我们将证明，$M \otimes kP/H$ 作为 $k\langle g\rangle$-模的每个不可分解直和项，其维数都能被 p 整除。考虑将 N 限制到 $\langle g\rangle$ 上，并再次利用 Krull–Schmidt 定理，即可证明结论。

记 p^a 为 g 在 P 中的阶。然后，通过取 $x = g - 1$ 并利用 k 的特征为 p 这一事实，可得 $k\langle g\rangle \cong k[x]/(x^{p^a})$。因此我们看到，每个不可分解的 $k\langle g\rangle$-模都具有 $k[x]/x^i$ 的形式，其中某个 $i \in \{1,\dots,p^a\}$。由于 $g \notin K$，且 K 是 P 的一个正规子群并包含 H，因此 $\langle g\rangle$ 在 P/H 中的所有稳定子都不是 $\langle g\rangle$。这意味着 $M \otimes kP/H$ 将分解

为若干具有 $k[x]/x^i \otimes k\langle g\rangle/\langle g^{p^b}\rangle$ 形式的模的直和，其中某个 $0 < b \le a$。这与该模相同

$$\mathrm{Ind}_{\langle g^{p^b}\rangle}^{\langle g\rangle}\mathrm{Res}_{\langle g^{p^b}\rangle}^{\langle g\rangle} k[x]/(x^i).$$

群 $\langle g^{p^b}\rangle$ 也是循环群，我们可以将 $\mathrm{Res}_{\langle g^{p^b}\rangle}^{\langle g\rangle} k[x]/(x^i)$ 写成形如 $k[y]/y^j$ 的模的直和，其中 $y = g^{p^b} - 1$ 且 $0 < j \le p^{a-b}$。于是有

$$\mathrm{Ind}_{\langle g^{p^b}\rangle}^{\langle g\rangle} k[y]/y^j \cong k[x]/x^{p^b j},$$

它是维数为 $p^b j$ 的不可分解模，而 p 能整除该维数，因为 $b > 0$。证毕。□

注 4.8. 上述结果揭示了一个有趣的二分现象：当 G 是非平凡自由 Γ-群且 Γ 有限时，Inassaridze 维数 $\mathrm{cd}([G \rtimes \Gamma : \Gamma])$ 要么为 1，要么为 ∞。

根据上述结果，要构造满足 $\mathrm{cd}([G \rtimes \Gamma : \Gamma]) \le 1 < \mathrm{cd}_{\mathcal{G}}(G \rtimes \Gamma)$ 的例子，只需构造自由 Γ-群 G，使得 $H^1(\Gamma; G) \neq \{1\}$，而对所有 p-子群 $P \le \Gamma$，都有 $H^1(P; G) = \{1\}$。为此，我们使用 Leary 和 Nucinkis 的一个定理 [28]。回顾一下，若每个一骨架 $L^{(1)}$ 中的团都张成一个单纯形，则称单纯复形 L 为旗复形。与 L 关联的直角 Artin 群 G_L 的表示以 L 的顶点为生成元，且仅规定相邻顶点在 $L^{(1)}$ 中彼此交换。存在一个同态 $G_L \to \mathbb{Z}$，将每个生成元映至 $1 \in \mathbb{Z}$；该同态的核就是与 L 关联的 Bestvina–Brady 群 H_L。这些构造对旗复形之间的单纯映射是自然的。特别地，若 L 具有 Γ 的单纯作用，则 G_L 和 H_L 都以自然方式成为 Γ-群。若每个单纯形 $\sigma \subseteq L$ 的集合稳定子与逐点稳定子相等，则称 Γ 在 L 上的作用是容许的；若只有 Γ 的单位元固定 L 中的所有元素，则称该作用是有效的。

定理 4.9（[28]）。设 L 是一个非空有限旗复形，有限群 Γ在其上有一个有效的容许作用。那么对每个子群 $P \le \Gamma$，有$H^1(P; H_L) = \{1\}$ 当且仅当 $L^P \neq \emptyset$。

尽管 [28] 中的陈述涉及 $H_L \rtimes \Gamma$的有限子群的共轭类，但很容易看出，它蕴含了上述以非阿贝尔上同调表述的结论。注意，并不要求 L 是连通的。特别地，当 L 是一个有限 Γ-集，并将其视为维数为 0 的单纯复形时， G_L是一个有限生成的 Γ-自由 Γ-群，而 H_L 是一个 Γ-子群，它不一定是（有限生成的或） Γ-自由的。

例 4.10。设 $L = \{a, b, c, d, e\}$，循环群 C_6按如下方式作用：

$$a \mapsto b \mapsto c \mapsto a, \qquad d \mapsto e \mapsto d.$$

于是定理 4.9 蕴含 $H^1(C_6; H_L) \neq \{1\}$，而对所有p-子群 $P \le C_6$，都有 $H^1(P; H_L) = \{1\}$。接着，定理 4.6 蕴含 $\mathrm{cd}([H_L \rtimes C_6 : C_6]) = 1$，而定理 4.4 和引理 4.5 蕴含 $\mathrm{cd}_{\mathcal{G}}(H_L \rtimes C_6) > 1$。

事实上可以看出，在这个例子中布雷登维数是无限的。根据˜构造，存在一个有限子群 $C_6 \le H_L \rtimes C_6$，它同构地投影到

C_6，不属于 $\mathcal{G}$，但它的所有子群都属于 $\mathcal{G}$。因此，由 Shapiro 引理 2.13，

$$\mathsf{cd}_{\mathcal{F}}(C_6) = \mathsf{cd}_{\mathcal{G}\cap\tilde{C}_6}(\tilde{C}_6) \leq \mathsf{cd}_{\mathcal{G}}(H_L \rtimes C_6),$$

其中 $\mathcal{F}$ 表示 C_6的所有真子群所构成的子群族。接下来，我们使用 [22, 引理 5.2], ，该引理指出，如果 $N \lhd \Gamma$ 是 $p\colon \Gamma \to \Gamma/N$ 的核，并且 $\mathcal{F}$ 是 Γ的任意子群族，那么

$$\mathsf{cd}_{\mathcal{F}_N}(\Gamma/N) \leq \mathsf{cd}_{\mathcal{F}}(\Gamma),$$

其中 $\mathcal{F}_N = \{L \leq \Gamma/N \mid p^{-1}(L) \in \mathcal{F}\}$。将此结果应用于 $N = C_3$ 和 $\Gamma = C_6$，其中 $\mathcal{F}$ 为真子群族，可得

$$\infty = \mathsf{cd}_{\{1\}}(C_2) \leq \mathsf{cd}_{\mathcal{F}}(C_6) \leq \mathsf{cd}_{\mathcal{G}}(H_L \rtimes C_6).$$

例 4.11。设 M 为 Floyd–Richardson 例子 [20] ，这是一个无环的二维复形，带有一个不具有全局不动点的可容许 A_5-作用（这一例子在几何群论文献中随处可见）。令 L 为 M的 0-骨架，我们再次发现 $L^{A_5} = \emptyset$ ，而对于所有 p-子群 $P \leq A_5$， $L^P \neq \emptyset$ 。由此可得 $\mathsf{cd}([H_L \rtimes A_5 \colon A_5]) = 1$ ，而 $\mathsf{cd}_{\mathcal{G}}(H_L \rtimes A_5) > 1$。

现在我们实际上将证明 $\mathsf{cd}_{\mathcal{G}}(H_L \rtimes A_5) \leq 3$。考虑 $H_L \rtimes A_5$ 的子群族 $\mathcal{G} \subset \mathcal{FIN}$，并应用 [32, 推论 4.1]中的 Bredon 上同调谱序列论证。由此得到

$$\mathsf{cd}_{\mathcal{G}}(H_L \rtimes A_5) \leq \mathsf{cd}_{\mathcal{FIN}}(H_L \rtimes A_5) + \sup_{S\in\mathcal{FIN}} \mathsf{cd}_{\mathcal{G}\cap S}(S).$$

设 $S \leq H_L \rtimes A_5$ 是任意有限子群。由于对于每个真子群 $W \leq A_5$， $L^{A_5} = \emptyset$ 且 $L^W \neq \emptyset$ ，因此有以下两种情形（见 [28, 定理 3]）。要么 S 是 A_5的共轭子群，在这种情况下 $\mathsf{cd}_{\mathcal{G}\cap S}(S) = 0$。要么 S 与 A_5 同构，但不与 A_5共轭，而 S 的所有真子群都是 A_5的共轭子群。在这种情况下，$\mathsf{cd}_{\mathcal{G}\cap S}(S) = \mathsf{cd}_{\mathcal{P}}(A_5)$，其中 $\mathcal{P}$ 是由 A_5的所有真子群组成的族。由 [2, 例 5.1] 和 [22, 定理 1.6], 可知，$\mathsf{cd}_{\mathcal{P}}(A_5) = 2$。由于 $H_L \rtimes A_5$ 几乎自由，$\mathsf{cd}_{\mathcal{FIN}}(H_L \rtimes A_5) = 1$。综上可得，$\mathsf{cd}_{\mathcal{G}}(H_L \rtimes A_5) \leq 1 + 2 = 3$。另一方面，我们已经知道 $\mathsf{cd}_{\mathcal{G}}(H_L \rtimes A_5) \geq 2$。因此，$\mathsf{cd}_{\mathcal{G}}(H_L \rtimes A_5)$ 要么为 2，要么为 3。我们不知道其确切值。

Martınez-Pérez [33] 和 Degrijse–Petrosyan [14] 给出了虚拟无挠群的例子，这些群的虚拟上同调维数小于其相对于有限子群族的 Bredon 维数。现在我们说明这些例子如何纳入我们的框架，从而给出满足 $1 < \mathsf{cd}([G \rtimes \Gamma \colon \Gamma]) < \mathsf{cd}_{\mathcal{G}}(G \rtimes \Gamma)$ 的 Γ-群的例子。

令 $\mathcal{FIN}$ 表示有限子群族。 [34]的主要结果之一指出，对于虚拟无挠群，相对维数 $\mathcal{FIN}\mathsf{cd}$ 与虚拟上同调维数相同。

引理 4.12（[22, 命题 4.1]）。设 G 为一个 Γ-群，其中 G 无挠且 Γ 有限。那么，对于每个子群$P \leq \Gamma$， $\mathcal{G} = \mathcal{FIN}$当且仅当 $H^1(P; G) = \{1\}$。

例 4.13. 设 p 为奇素数，且令 C_p 表示阶为 p的循环群。根据 [33, 例 3.6], ，存在一个有限旗复形 L ，其上带有一个可容许的有效 C_p-作用且具有全局不动点（即 $L^{C_p} \neq \emptyset$），使得等变 Bestvina–Brady 群 H_L 无挠并满足

$$\mathcal{FIN}\mathsf{cd}(H_L \rtimes C_p) = 3 < 4 = \mathsf{cd}_{\mathcal{FIN}}(H_L \rtimes C_p).$$

由定理 4.9 可知，对于每个子群 $P \leq C_p$，都有 $H^1(P;\, H_L) = \{1\}$，因此由引理 4.12，半直积 $H_L \rtimes C_p$的族 $\mathcal{FIN}$和 $\mathcal{G}$ 相同，从而得到

$$\mathcal{G}\mathsf{cd}(H_L \rtimes C_p) = \mathsf{cd}([H_L \rtimes C_p : C_p]) = 3 < 4 = \mathsf{cd}_{\mathcal{G}}(H_L \rtimes C_p).$$

例 4.14。设 p_1，……，p_n 为互不相同的奇素数。对于 $i = 1$，……，n，设 L_i 为例 4.13 中的有限旗复形。令 $G := \prod_{i=1}^n H_{L_i}$ 且 $\Gamma := \prod_{i=1}^n C_{p_i}$，并将 G 视为带有乘积作用的 Γ-群。根据 [14, 定理 C]，我们有

$$\mathcal{FIN}\mathsf{cd}(G \rtimes \Gamma) = 3n < 4n = \mathsf{cd}_{\mathcal{FIN}}(G \rtimes \Gamma).$$

要应用引理 4.12 并得出本例中的 $\mathcal{FIN} = \mathcal{G}$，我们需要验证对于每个子群 $P \leq \Gamma = \prod_{i=1}^n C_{p_i}$，$H^1(P;\, G) = \{1\}$。由于素数 p_i 互不相同，Γ 的任意子群 P 都可写成某个 $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ 的形式 $\prod_{j\in J} C_{p_j}$。通过反复应用下面的引理 4.15，我们有

$$H^1(P; G) \cong \left(\prod_{j\in J} H^1(C_{p_j}; H_{L_j})\right) \times \left(\prod_{i\notin J} H^1(\{1\}; H_{L_i})\right).$$

由定理 4.9 得 $H^1(C_{p_j};\, H_{L_j}) = \{1\}$，因此我们看到，对所有$P \leq \Gamma$，$H^1(P;\, G) = \{1\}$。最后，我们得出

$$\mathcal{G}\mathsf{cd}(G \rtimes \Gamma) = \mathsf{cd}([G \rtimes \Gamma : \Gamma]) = 3n < 4n = \mathsf{cd}_{\mathcal{G}}(G \rtimes \Gamma).$$

引理 4.15. 对于 $i = 1$，2，设 Γ_i 为有限群，且设 G_i 为无挠Γ_i-群。那么

$$H^1(\Gamma_1 \times \Gamma_2; G_1 \times G_2) \cong H^1(\Gamma_1; G_1) \times H^1(\Gamma_2; G_2).$$

证明. 回想一下，$H^1(\Gamma; G)$ 与 $G \rtimes \Gamma$ 的子群集之间存在双射；这些子群在被投影同构映至 Γ的条件下，按 G中元素的共轭关系取等价类。

考虑一个子群

$$A \leq (G_1 \times G_2) \rtimes (\Gamma_1 \times \Gamma_2) \cong (G_1 \rtimes \Gamma_1) \times (G_2 \rtimes \Gamma_2)$$

它同构地投影到 $\Gamma_1 \times \Gamma_2$上。我们断言，若 A 包含形如 $\big((g_1, g_2), (\gamma_1, 1)\big)$ 的元素，则 $g_2 = 1$。事实上，若 $\big((g_1, g_2), (\gamma_1, 1)\big) \in A$，则它具有有限阶，因为 A 是有限的。该元素在投影到 $G_2 \rtimes \Gamma_2$ 后的像为 $(g_2, 1)$。此元素也具有有限阶，但由于 G_2 是无挠的，它必为平凡元。现在令 A_i 表示 A 的子群，该子群对于 $i = 1$，2 同构地投影到 Γ_i 上。由此可知，对于 $i = 1$，2，A_i 包含于 $G_i \rtimes \Gamma_i$ 中，并且A 分裂为 $A_1 \times A_2$。此外，两个这样的子群 A 和 B 在 $G_1 \times G_2$ 的某个元素作用下共轭，当且仅当 A_1 与 B_1 在 G_1 的某个元素作用下共轭，且 A_2 与 B_2 在 G_2的某个元素作用下共轭。这就得到了所需的双射。□

5. Comparison of Cegarra–Calcines–Ortega and Bredon dimensions

本节给出一些 Γ-群的例子，对于这些群，Cegarra–Calcines–Ortega 维数严格大于布雷登维数（因此也大于 Inassaridze 维数）；而 Cegarra–Calcines–Ortega 维数又严格小于 Inassaridze 维数（因此也小于布雷登维数）。以下两个例子已在 [4, §7] 中讨论过。

例5.1. 考虑对子 $(K, L) = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$，其中子群是第二个因子。其相对群上同调就是将 $\mathbb{Z}$ 视为带有平凡作用的 $\mathbb{Z}$-群时的等变群上同调。正如第3节末尾所述，这意味着

$$\mathsf{cd}_{\mathcal{G}}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \mathsf{cd}([\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \mathbb{Z}]) = \mathsf{cd}(\mathbb{Z}) = 1.$$

对于 Cegarra–Calcines–Ortega 维数，我们注意到，由长正合列 (1) 以及 $\mathsf{cd}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = 2 > 1 = \mathsf{cd}(\mathbb{Z})$ 这一事实，很容易推出 $\mathsf{cd}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathsf{cd}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = 2$。因此，在这个例子中，Cegarra–Calcines–Ortega 维数大于布雷登维数。

更一般地，若 L 是 K 的正规子群，且 $\mathsf{cd}(L) < \mathsf{cd}(K)$，则 $\mathsf{cd}_{\mathcal{L}}(K) = \mathsf{cd}(K/L)$，而 $\mathsf{cd}(K, L) = \mathsf{cd}(K)$。

例5.2。考虑这对 $(K, L) = (\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z})$。注意，这个例子不符合等变群上同调的框架，因为 $2\mathbb{Z}$ 不是 $\mathbb{Z}$的直缩。由正规性可知，Adamson 维数和布雷登维数均等于 $\mathsf{cd}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，因此都是无限的。我们断言 $\mathsf{cd}(\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}) = 2$。由于 $\mathsf{cd}(\mathbb{Z}) = \mathsf{cd}(2\mathbb{Z}) = 1$，长正合列 (1) 立即推出 $\mathsf{cd}(\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}) \leq 2$。取系数为符号模 $\mathbb{Z}^-$，得到一个正合列

$$\cdots \longrightarrow H^1(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}^-) \longrightarrow H^1(2\mathbb{Z}; \mathbb{Z}^-|_{2\mathbb{Z}}) \longrightarrow H^2(\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}; \mathbb{Z}^-)$$
$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$
$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \qquad\qquad\qquad\qquad \mathbb{Z}$$

这表明 $H^2(\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}; \mathbb{Z}^-) \neq 0$，因此 $\mathsf{cd}(\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}) = 2$。

例5.1 属于等变群上同调的框架，但其中的 aΓ-群具有平凡作用。我们希望给出一些具有非平凡作用的 Γ-群的例子，使得 Cegarra–Calcines–Ortega 维数大于布雷登维数，且 Inassaridze 维数大于 Cegarra–Calcines–Ortega 维数。

为实现我们的第一个目标，我们将证明一个适用于 Cegarra–Calcines–Ortega 等变群上同调的等变 Stallings–Swan 型结果。该结果将由下述命题推出，其表述归功于 Alonso [3]。如果群在复形上的作用使得任意正维胞腔的稳定子都是平凡的，则称该作用为 0-自由的。

定理5.3（[3, 定理 3]）。群对（K, L）满足 $\mathsf{cd}(K, L) \leq n$，当且仅当 K 在一个无环的 n 维复形上容许地且 0-自由地作用，并且该复形只有一个类型为 K/L 的顶点轨道。

情形 $n = 1$ 等价于（通过群作用于树的 Bass–Serre 理论）Dicks 证明的一个结果 [15, 定理 IV.2.11]。Alonso 证明了一个更一般的结论，涉及群对 $\left(K、(L_i)_{i \in I}\right)$ 以及非传递作用。

定义 5.4。 Γ-群 G 称为强 Γ-自由的，如果 G 是一个以自由Γ-集为基的自由群。

定理 5.5. 设 G 是一个 Γ-群。当且仅当 G 是强 Γ-自由的时，$\mathsf{cd}(G \rtimes \Gamma, \Gamma) \leq 1$。

证明. 假设 G 是自由的，其基为自由的 Γ-集 S。考虑 Cayley 图$T = T(G, S)$，其顶点集为 G，边为 (g, gs)，其中 $g \in G$, $s \in S$。G 在 T 上的标准作用是自由的。Γ 在 T 上还有一个作用，它来自 Γ 在 G 上的作用（这用到了 S 是一个 Γ-集）。这些作用是相容的，因此共同给出 $G \rtimes \Gamma$ 在 T 上的一个作用。具体而言，元素 $(h, \gamma) \in G \rtimes \Gamma$ 将边 (g, gs) 映射为边 $(h^\gamma g, h^\gamma g^\gamma s)$。该作用是顶点传递的，因为 G-作用本身就具有这一性质。顶点 $g \in G$ 的稳定子是单位元 $1 \in G$ 的稳定子的 $(g, 1)$-共轭；容易看出，后者等于 Γ。边 (g, gs) 的稳定子是 $(1, s)$ 的稳定子的 $(g, 1)$-共轭；它是平凡的，因为Γ 在 S 上自由作用。这说明该作用是 0-非自由的，由定理5.3可知 $\mathrm{cd}(G \rtimes \Gamma, \Gamma) \leq 1$。

反过来，假设 $\mathrm{cd}(G \rtimes \Gamma, \Gamma) \leq 1$。根据定理5.3，群 $G \rtimes \Gamma$容许地且 0-自由地作用在一棵树 T 上，其中只有一个类型为$G \rtimes \Gamma/\Gamma \cong G$的顶点轨道。由于 G 的非平凡元素都不与 Γ中的元素在 $G \rtimes \Gamma$ 中共轭，因此 G在 T上自由作用。商图 $X := T/G$的基本群为 G，根据上述结果，它只有一个顶点，因而是一个圆圈的花束。因此， G 由 X的定向边自由生成。$G \rtimes \Gamma$在 T上的作用下降为 X上的一个 Γ作用，只需验证此作用自由地置换这些定向边。

X 的一条边是 T中一条边 e 的 G-轨道 $[e]$。假设 $\gamma \in \Gamma$ 稳定 $[e]$。那么存在一个元素 $g \in G$ 使得 $^\gamma e = ge$。因此，$(g^{-1}, \gamma) \in G \rtimes \Gamma$稳定 e；根据 0-自由假设，(g^{-1}, γ)，所以 γ 必为单位元。这就证明了该断言和定理。□

结合这一结果与定理 4.4，我们可以构造许多具有Γ-群 G 的例子

$$\mathrm{cd}(G \rtimes \Gamma, \Gamma) > \mathrm{cd}_{\mathcal{G}}(G \rtimes \Gamma) = 1.$$

事实上，对于任何 Γ-群 G，只要它是 Γ-自由但并非强 Γ-自由，这一结论都成立。显然，对于带平凡作用的自由群，这一结论成立；而当 G 的秩小于 $|\Gamma|$时，这一结论也成立。

例 5.6。考虑例 4.10 中所描述的 C_6对 $L = \{a, b, c, d, e\}$ 的作用，其对应的直角 Artin 群 G_L 是秩为 5 的自由 C_6-群。由于 L 是一个 C_6-基， G_L 是 C_6-自由的，且其布雷登维数 $\mathrm{cd}_{\mathcal{G}}(G_L \rtimes C_6) = 1$。这里，Cegarra–Calcines–Ortega 维数 $\mathrm{cd}(G_L \rtimes C_6, C_6)$ 是无限的；考察带平凡模 $\mathbb{Z}$系数的长正合列 (1)，并结合扩张 $1 \to G_L \to G_L \rtimes C_6 \to C_6 \to 1$对应的 Lyndon–Hochschild–Serre 谱序列即可看出，限制$H^i(G_L \rtimes C_6; \mathbb{Z}) \to H^i(C_6; \mathbb{Z})$在无穷多个次数上有非平凡核。

作为定理 5.5 的另一项应用，我们能够确定范畴 Γ-Grp（由 Γ-群构成）中的射影对象。回顾一下，在范畴 $\mathcal{C}$中，对象 P 若满足以下条件，则称为射影对象：对于 $\mathcal{C}$ 中的任意态射 $P \to N$，它都能沿着 $\mathcal{C}$中的任意满同态 $M \twoheadrightarrow N$ 提升。由于 Γ-Grp 是一个具体范畴，满射的 Γ-同态特别是满同态。另一方面，由 [29] 可知，群的范畴 Grp 中的满同态是满射。利用从遗忘函子（从 Grp 到 Γ-Grp）的右伴随函子，我们看到，范畴 Γ-Grp 中的满同态也是满射。现在通过标准论证可知，强 Γ-自由 Γ-群是射影的，并且任何射影对象都是某个强 Γ-自由 Γ-群的直缩。请注意，强 Γ-自由 Γ-群的 Γ-子群未必

是强 Γ-自由的（甚至未必是 Γ-自由的）。然而，定理 5.5 以及 Takasu 上同调的自然性性质使我们能够推导出，任何强 Γ-自由 Γ-群的直缩，其 Cegarra–Calcines–Ortega 维数小于或等于 1，因此是强 Γ-自由的。

推论 5.7。 Γ-Grp 中的投射对象是强 Γ-自由 Γ-群。

最后，我们给出一些 Γ-群 G 的例子，它们的 Cegarra–Calcines–Ortega 维数小于其 Inassaridze 维数，因而也小于其布雷登维数。

我们考虑 $\Gamma = G$ 通过共轭作用 Ad : $G \to \mathrm{Aut}(G)$作用于自身。存在一对同构

$$(G \rtimes_{\mathrm{Ad}} G, G) \xrightarrow{\cong} (G \times G, \Delta(G)), \qquad (g, h) \mapsto (gh, h),$$

其中 $\Delta(G) \leq G \times G$ 是对角子群。因此， G 在共轭作用下的等变群上同调与对 $(G \times G, \Delta(G))$ 的相对群上同调一致。

注 5.8. 文献 [19, 8]探讨了群 G的对偶 $(G \times G, \Delta(G))$ 的 Adamson 上同调和 Bredon 上同调与 Farber 的拓扑复杂性 $\mathsf{TC}(G)$ 之间的联系。特别地，令 $\mathcal{D} := \langle \Delta(G) \rangle$ 表示由对角子群生成的子群族，则有

$$\mathsf{cd}_{\{1\} \hookrightarrow \mathcal{D}}(G \times G) \leq \mathsf{TC}(G) \leq \mathsf{cd}_{\mathcal{D}}(G \times G). \tag{3}$$

（此处 $\mathsf{cd}^{\{1\} \hookrightarrow \mathcal{D}}(G \times G)$ 表示满足如下条件的最大 n： 存在某个 $\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(G \times G)$-模 $\underline{M}$，使得由限制函子诱导的同态 $H^n_{\mathcal{D}}(G \times G; \underline{M}) \to H^n(G \times G; \mathrm{res}^{\mathcal{D}}_{\{1\}}(\underline{M}))$

$$\mathrm{res}^{\mathcal{D}}_{\{1\}} : \mathcal{O}_{\mathcal{D}}(G \times G)\text{-}\mathsf{mod} \to (G \times G)\text{-}\mathsf{mod}$$

非零。）Farber 在文献 2006 [18] 中提出了一个尚未解决的问题：寻找 $\mathsf{TC}(G)$ 的代数刻画。在下文给出的例子中，$\mathsf{TC}(G)$ 严格小于 $\mathsf{cd}([G \times G : \Delta(G)])$（因此也严格小于 $\mathsf{cd}_{\mathcal{D}}(G \times G)$）。这意味着，通常情况下，$\mathsf{TC}(G)$ 与对偶 $(G \times G, \Delta(G))$ 的 Adamson 维数或布雷登维数均不相同。另一方面，我们尚未发现下界 (3) 严格成立的例子。

注意，当 G 是自由阿贝尔群时，我们有

$$\mathsf{TC}(G) = \mathsf{cd}(G) < \mathsf{cd}(G \times G) = \mathsf{cd}(G \times G, \Delta(G)),$$

这表明，$\mathsf{TC}(G)$ 通常也不等于该对 $(G \times G, \Delta(G))$ 的高须维数。

例5.9。设 $G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 \rangle$ 是克莱因瓶的基本群。设 $c = a^2 = b^2$，并注意到 $G \cong \langle a \rangle *_{\langle c \rangle} \langle b \rangle$ 分解为一个 amalgamated积。特别地，如果 a^m 和 b^n 在 G 中共轭，其中 m、$n \in \mathbb{Z}$ 为整数，那么实际上对于某个 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $a^m = b^n = c^k$，有 $m = n = 2k$。

我们将 G 视为一个 G-群，其中 G 通过共轭作用于自身。我们断言

$$\mathsf{cd}([G \rtimes G : G]) = \mathsf{cd}_{\mathcal{G}}(G \rtimes G) = \infty, \qquad \mathsf{cd}(G \rtimes G, G) = 4.$$

如上所述，这等价于证明

$$\mathsf{cd}([G \times G : \Delta(G)]) = \mathsf{cd}_{\mathcal{D}}(G \times G) = \infty, \qquad \mathsf{cd}(G \times G, \Delta(G)) = 4.$$

由于 $\mathsf{cd}(G) = 2$ 且 $\mathsf{cd}(G \times G) = 4$，后一个等式可由对 $(G \times G, \Delta(G))$ 的长正合列 (1) 显然得出（参见例5.1）。其他等式由对该子群应用 Shapiro 引理得到

$$\delta = \{(a^m, b^m) \mid m \in \mathbb{Z}\} \leq G \times G$$

由元素 (a, b) 生成。我们给出 Bredon 上同调的证明；Adamson 上同调的证明类似。

我们断言，$\mathcal{D} \cap \delta$ 是由 $\langle (c, c) \rangle$生成的族。注意，$\langle (c, c) \rangle$ 显然属于 $\mathcal{D} \cap \delta$，因此只需证明，δ 中属于族 $\mathcal{D}$ 某个子群的元素，也属于 $\langle (c, c) \rangle$。这由 amalgamated积的结构可知，因为若 a^m 在 G 中与 b^m 共轭，则 $m = 2k$ 和 $(a^m, b^m) = (c^k, c^k)$。

现在注意到，由于 $\langle (c, c) \rangle$ 是 δ 的正规子群，且商群为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，由 Shapiro 引理可得

$$\infty = \mathsf{cd}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathsf{cd}_{\mathcal{D}\cap\delta}(\delta) \leq \mathsf{cd}_{\mathcal{D}}(G \times G).$$

最后，Cohen 和 Vandembroucq 已证明 $\mathsf{TC}(G) = 4$ [12]。

例5.10。上述例子可以推广如下。若 $G = A *_C A$是一个 amalgamated积，且 C 是 A 的正规子群，则

$$\mathsf{cd}_{\mathcal{G}}(G \rtimes G) = \mathsf{cd}_{\mathcal{D}}(G \times G) \geq \mathsf{cd}(A/C). \tag{4}$$

特别地，如果 C 在 A 中的指数有限，那么 $\mathsf{cd}_{\mathcal{G}}(G \rtimes G)$ 和 $\mathsf{cd}_{\mathcal{D}}(G \times G)$ 都是无限的。另一方面，G 的上同调维数可能是有限的，这迫使 Takasu 维数 $\mathsf{cd}(G \rtimes G, G)$ 和 $\mathsf{cd}(G \times G, \Delta(G))$，以及拓扑复杂度 $\mathsf{TC}(G)$ 都是有限的。

（4）在 A/C 无挠时有一个有趣的应用：自由群 F_n（秩为 n）的换位子群 $[F_n, F_n]$。由（4）可知，群 $G_n := F_n *_{[F_n,F_n]} F_n$ 满足 $\mathsf{cd}_{\mathcal{D}}(G \times G) \geq \mathsf{cd}(\mathbb{Z}^n) = n$。另一方面，无论 n 如何，我们都有 $\mathsf{TC}(G_n) \leq \mathsf{cd}(G_n \times G_n) \leq 4$。因此，对于 $n > 4$，群 G_n 满足 $\mathsf{TC}(G_n) < \mathsf{cd}_{\mathcal{D}}(G_n \times G_n)$，再次表明（3）中的上界可能是严格的。细节留给感兴趣的读者。

References

[1] I. T. Adamson, *Cohomology theory for non-normal subgroups and non-normal fields*, 格拉斯哥数学协会会刊 2 (1954), 66–76. [2] A. Adem, *Finite group actions on acyclic 2-complexes*, S´eminaire N. Bourbaki, 894, (2001- 2002), 1–17. [3] J. M. Alonso, *Quasi-Projective and Relative Cohomological Dimension of Groups*,《美国数学学会汇刊》325 no. 2 (1991), 715–39. [4] J. A. Arciniega-Nev´arez, J. L. Cisneros-Molina, *Comparison of relative group (co)homologies*, 墨西哥数学会通报 23 (2017), 41–74. [5] J. A. Arciniega-Nev´arez, J. L. Cisneros-Molina, L. J. S´anchez Salda˜na, *Relative group homology theories with coefficients and the comparison homomorphism*,《数学问题》44:8 (2021), 1107–1132. [6] M. Auslander, *Relative cohomology theory of groups and continuations of homomorphisms*, 学位论文（博士）— 哥伦比亚大学。1954 年。70 页 [7] R. Bieri, B. Eckmann, *Relative homology and Poincaré duality for group pairs*,《纯粹与应用代数杂志》13 Issue 3 (1978), 277–319.[8] Z. B´laszczyk, J. Carrasquel-Vera, A. Espinosa Baro, *On the sectional category of subgroup inclusions and Adamson cohomology theory* **226** 2022 6, ,《纯粹与应用代数杂志》( ), no. Paper No. 106959, 18页.[9] G. E. Bredon, *Equivariant cohomology theories*, 《数学讲义》34, 施普林格出版社, 柏林-纽约 1967年。

[10] A. M. Cegarra, J. M. Garc´ıa-Calcines, J. A. Ortega, *Cohomology of groups with operators*,《同调与同伦应用》4 (2002), no. 1, 1–23. [11] A. M. Cegarra, J. M. Garc
´ *On Graded Categorical Groups and Equivariant Group Extensions* **54** 5 2002 970 997
ıa-Calcines, J. A. Ortega, ,《加拿大数学杂志》 ( ) ( ), – . [12] D. C. Cohen, L. Vandembroucq, *Topological complexity of the Klein bottle*,《应用与计算拓扑学杂志》1 (2017), 199–213. [13] D. E. Cohen, *Groups with free subgroups of finite index*, 群论会议（威斯康星大学帕克赛德分校，威斯康星州基诺沙，1972年），第26–44页。《数学讲义》319，施普林格，柏林，1973年。[14] D. Degrijse, N. Petrosyan, *Geometric dimension of groups for the family of virtually cyclic subgroups* **7** 2014 3, 697 726 ,《拓扑学杂志》 ( ), no. – . [15] W. Dicks, *Groups, Trees and Projective Modules*,《数学讲义》790，施普林格，柏林，1980年。[16] S. Eilenberg, T. Ganea, *On the Lusternik-Schnirelmann category of abstract groups*,《数学年刊》(2) 65 (1957), 517–518. [17] M. Farber, *Topological complexity of motion planning*,《离散与计算几何》29 (2003), no. 2, 211—221.[18] M. Farber, *Topology of robot motion planning*, 非线性分析与辛拓扑中的Morse理论方法，《北约科学丛书II：数学、物理与化学》，第217卷，施普林格，多德雷赫特，2006年，第185—230页。[19] M. Farber, M. Grant, G. Lupton, J. Oprea, *Bredon cohomology and robot motion planning*,《代数与几何拓扑》19 (2019), no. 4, 2023–2059. [20] E. E. Floyd, R. W. Richardson, *An action of a finite group on an n-cell without stationary points* **65** 1959 73 76 ,《美国数学学会公报》 ( ), – . [21] M. Fluch, *On Bredon (co-)homological dimensions of groups*, 博士论文，南安普顿大学，2010年9月。[22] M. Grant, E. Meir, I. Patchkoria, *Equivariant dimensions of groups with operators*,《群、几何与动力学》16 (2022), no. 3, 1049–1075. [23] G. Hochschild, *Relative homological algebra*,《美国数学学会汇刊》82 (1956), 246–269. [24] H. Inassaridze, *Equivariant homology and cohomology of groups*,《拓扑学及其应用》153 (2005), no. 1, 66–89.[25] H. Inassaridze, *(Co)homology of* Γ*-groups and* Γ*-homological algebra*,《欧洲数学杂志》8 (2022), suppl. 2, 720–763.[26] M. Kano, A. Sakamoto, *Spanning trees fixed by automorphisms of a graph*,《离散数学》82 (1990), no. 2, 219–222. [27] A. Karrass, A. Pietrowski, D. Solitar, *Finite and infinite cyclic extensions of free groups*, 献给Hanna Neumann纪念的论文集，IV.《澳大利亚数学学会杂志》16 (1973), 458–466. [28] I. J. Leary, B. E. A. Nucinkis, *Some groups of type VF* **151** 2003 1, ,《数学发明》 ( ), No. – .[29] C. E. Linderholm, *A group epimorphism is surjective*,《美国数学月刊》77 (1970), No. 1, 176–177.[30] W. L¨uck, *Transformation groups and algebraic K-theory*,《数学讲义》1408，施普林格出版社，柏林，1989年。[31] W. L¨uck, D. Meintrup, *On the universal space for group actions with compact isotropy*,《几何与拓扑：奥胡斯》(1998), 293–305,《当代数学》258，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2000年。[32] C. Mart´ınez-P´erez, *A spectral sequence in Bredon (co)homology*,《纯粹与应用代数杂志》176 (2002), no. 2-3, 161–173. [33] C. Mart ´ ´ *Euler classes and Bredon cohomology for groups with restricted families of finite subgroups* **275** 2013 3 4, 761 780
ınez-Perez, ,《数学杂志》 ( ), no. - – . [34] C. Mart
´ ´ *Cohomological dimension of Mackey functors for infinite groups* **74** 2006 2, 379 396
ınez-Perez, B. E. Nucinkis, ,《伦敦数学学会杂志》 ( ), no. – . [35] W. S. Massey, *Some problems in algebraic topology and the theory of fibre bundles*,《数学年刊》(2) 62 (1955), 327–359. [36] B. Nucinkis, *Is there an easy algebraic characterisation of universal proper G-spaces?*,《数学手稿》102 (2000), 335–345.

[37] S. Pamuk, E. Yalçın, *Relative group cohomology and the orbit category*,《代数通讯》42 (2014)，第 7 期，3220–3243。[38] L. Ribes, *On a cohomology theory for pairs of groups*,《美国数学会会刊》21 (1969)，230–234。[39] A. Schwarz, *The genus of a fiber space*,《美国数学会译丛》55 (1966)，49–140。[40] G. P. Scott,
An embedding theorem for groups with a free subgroup of finite index,《伦敦数学会通报》6 (1974)，304–306。[41] J-P. Serre, *Cohomologie Galoisiennes*,施普林格出版社，1994。[42] J. R. Stallings, *On torsion-free groups with infinitely many ends*《数学年刊》(第 2 辑) 88 (1968)，312–334。[43] R. Swan, *Groups of cohomological dimension one*,《代数杂志》12 (1969)，585–610。[44] S. Takasu, *On the change of rings in the homological algebra*,《日本数学会杂志》9 (1957)，315–329。[45] S. Takasu, *Relative homology and relative cohomology theory of groups*,《东京大学理学部纪要》第一辑 8 (1959)，75–110。[46] C. T. C. Wall,
Pairs of relative cohomological dimension one,《纯粹与应用代数杂志》1，第 2 期 (1971)，141–154。

Institute of Mathematics, Fraser Noble Building, University of Aberdeen, Aberdeen AB24 3UE, UK

Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg, Germany
Email address: mark.grant@abdn.ac.uk*Email address*: kevin.li@mathematik.uni-regensburg.de*Email address*: ehud.meir@abdn.ac.uk
Email address: irakli.patchkoria@abdn.ac.uk