arXiv:2302.08600v1 [cs.DC] 16 Feb 2023

记忆在鲁棒意见动态中的作用

Luca Becchetti、Andrea Clementi、AmosKorman、Francesco Pasquale、Luca Trevisan 和 Robin Vacus

2022年12月

摘要

我们研究一个由 n 个相同且匿名的智能体组成的全连接系统中的意见动力学，其中一种意见（称为正确意见）代表一条需要传播的信息。具体而言，一个源智能体最初持有正确意见，并在整个执行过程中始终保持这一意见。非源智能体的目标是迅速就正确意见达成一致，并且稳健地做到这一点，即从任意初始配置出发都能达成一致。系统按轮次演化。每一轮中，均匀随机选取一个智能体激活：除非该智能体是源智能体，否则它会获取 ℓ 个随机智能体的意见，然后按照某种规则更新自己的意见。我们考虑一种受限情形，其中智能体没有存储器，只根据当前采样到的智能体的意见来修正自己的意见。尽管限制颇多，这种情形仍涵盖了非常流行的意见动力学，例如投票者模型和择优k 多数规则。

从定性角度来看，我们证明，缺乏存储器会阻碍高效收敛。具体而言，即使在模型的一个强版本下——被激活的代理能够完整访问整个系统的当前配置，即 $\ell = n$ 的情形——我们仍证明，没有任何动力学能够在关于 n 的次二次期望步数内实现正确收敛。反过来，我们证明，简单的投票者模型（其中 $\ell = 1$）能够正确地解决该问题，同时其步数几乎达到上述下界。

这些结果表明，与对称共识问题（不涉及正确意见这一概念）不同，利用随机意见动态使正确意见快速收敛，或许确实需要使用存储器。这一发现或许也适用于依赖少数知情个体的自然信息传播过程。

1 引言

要确定生物系统采用的具体算法极具挑战性。这项探索需要综合实证证据、有根据的猜测、计算机模拟、分析、预测和验证。试图明确某种算法时，主要困难之一在于可能的算法种类繁多。对于多智能体系统而言，这一点尤为突出；许多生物情境都涉及此类系统，尤其是群体行为 [1,2]。为了缩小算法的范围，科学界通常只关注简单算法，同时隐含地假设：尽管现实中的算法未必容易描述，但仍可用简单规则加以近似 [3,4,5]。然而，尽管这一限制大幅缩小了算法范围，简单算法的数量仍然极其庞大。

缩小参数空间的另一个方向是识别在自然场景中较不可能被采用的算法类别，例如，因为它们无法高效应对此类场景所带来的挑战 [6,7,8]。在不同算法类别和设定下分析计算的极限，一直是理论计算机科学这一学科的主要关注点。因此，遵循通过计算视角 [9], 理解科学的框架，将来自计算机科学的下界技术应用于受生物学启发的场景似乎很有前景，以理解哪些算法是

较不可能被使用，或者换言之，设定中的哪些参数对于高效计算至关重要 [6, 10]。这种下界方法可能有助于识别和刻画一些现象，而使用更传统的方法可能更难发现这些现象，例如采用基于模拟的方法，甚至微分方程技术。这种方法的缺点在于，它仅限于可进行解析处理的设定；这类设定可能过于“干净”，因而无法完美捕捉现实设定。

沿着上述方向更进一步，我们聚焦于信息传播中的一个基本问题：少数个体掌握有关环境的相关信息，而其他代理希望在通信受限且随机的情况下获取这些信息[11,12,13,14]。此类信息可能包括，例如，关于首选迁徙路线的知识 [15, 16]，食物来源的位置 [17]，或招募代理执行特定任务的需要 [18]。在某些物种中，会使用特定信号来传播这类信息，一个引人注目的例子是蜜蜂的摇摆舞，它能促使蜂群成员前往食物来源 [15, 19]。然而，在许多其他生物系统中，个体可能难以区分群体中哪些成员掌握相关信息[3, 18]。此外，在多种生物情境下，动物无法依赖明确的信号，只能通过观察其他动物的行为特征（例如它们在空间中的位置、速度等）来获取信息。这种弱形式的通信，通常称为被动通信 [20]，，甚至不需要动物有意发送通信信号 [21, 22]。一个关键的理论问题是，确定通过被动通信实现高效信息传播所必需的最低计算资源。

在此，我们沿用 [14]，中的研究，考虑一个受以下情景启发的理想化模型。

池塘边的动物。 设想一群 n 动物聚集在池塘边饮水。假设池塘的一侧——北侧或南侧——更理想（例如，因为那里遭遇捕食者的风险较低）。然而，只有少数动物知道哪一侧更理想。因此，这些知情动物会留在池塘较理想的一侧。群体中的其他成员也想弄清楚池塘哪一侧更理想，但他们无法辨认哪些动物掌握相关信息。他们能做的是观察池塘，估算两侧各有多少动物，然后根据某种规则在两侧之间移动。粗略地说，[14]中的主要结果是，存在一种规则，能够让所有动物相对迅速地聚集到较理想的一侧，尽管它们最初可能在池塘中任意分散。该规则的核心是：每个代理都会将自己当前观测到的两侧代理数量与上一轮观测到的样本进行比较；如果代理发现现在北侧（相应地，南侧）的动物比上一样本中更多，就会移向北侧（相应地，南侧）。

在上述框架下，我们探讨：了解先前样本的任何信息是否确实必要，还是仅考虑当前样本就能实现快速收敛。粗略而言，我们证明，如果不记住先前样本中的信息，就不可能快速收敛到正确意见。接下来，我们将以更正式的方式描述模型和结果。

问题定义。我们考虑 n 个代理，每个代理都持有一个意见，取自 $\{0, 1, \ldots, k\}$，其中 k是某个固定整数。这些意见之一称为正确意见。其中一个源代理[1] 知道哪个意见是正确的，因此在整个执行过程中始终持有这一意见。非源智能体的目标是从任意初始配置出发，尽可能快地收敛到正确意见。具体而言，该过程按离散轮次进行。每轮中，均匀随机地抽取一个代理并将其激活。随后，被激活的代理可以访问

[1]我们提出的所有结果都可以无缝推广（常数因子范围内）至源智能体数量为常数的情形 .

以下代理的意见： ℓ 从群体中所有意见组成的多重集（包括源代理和采样代理自身）中均匀随机采样（可重复[2]），样本大小为指定的整数 ℓ，称为样本大小。如果该代理不是源代理，它随后会依据决策规则修正当前意见；该规则定义了动力学，并由所有非源智能体使用。我们只关注这样一种动力学：不允许切换到其所见样本中未包含的意见。如果相应的决策规则仅取决于当前样本中包含的意见以及作出决策的代理自身的意见，则称这种动力学为无记忆。请注意，经典的投票者模型和多数动力学都是无记忆的。

1.1 我们的结果

在第3节中，我们证明，对于任何常数数量的意见，无记忆动力学的期望运行时间都必须为 $\Omega(n^2)$。有些出人意料的是，即使在一个更强的模型下，我们的分析仍然成立：在每一轮中，被激活的代理都可以访问系统中所有智能体当前的意见。

相比之下，在对称共识[3]中，对于一大类多数型动力学，使用大小为常数的样本，经过 $\mathcal{O}(n\log\, n)$轮次即可高概率收敛[23]。因此，就每个代理的平均激活次数而言，这两种情形之间存在指数级差距。[4]

我们进一步证明，我们的下界在本质上是紧的。有趣的是，尽管标准投票者模型使用的样本大小为 $\ell = 1$，我们仍证明它几乎达到了最优性能。具体而言，在第4节中，我们证明投票者模型在期望$\mathcal{O}(n^2 \log n)$轮次内收敛到正确意见，并且以高概率在 $\mathcal{O}(n^2 \log^2 n)$轮次内收敛。该结果与第3 节的下界共同表明，样本大小终究并非实现快速收敛至正确意见的关键因素。

最后，我们论证，允许智能体使用相对少量的存储器，可以大幅缩短收敛时间。正如引言中所述，这一结果已在 [14] 中得到形式化证明，适用于并行情形，即每一轮中所有智能体同时激活。我们针对本文研究的顺序随机激活模型，对 [14] 提出的算法进行了适当改造，使其适用于该模型。该改造使用大小为 $\ell = \Theta(\log\, n)$ 的样本，并使用 $\Theta(\text{loglog}\, n)$ 位本地记忆。第5 节讨论的实证证据表明，其收敛时间可能与 $n\text{log}^{O(1)}\, n$相当。就并行时间而言，这意味着该情形与无存储器情形之间可能存在指数级差距。

1.2 先前工作

我们研究的问题涉及多个可能值得关注的领域。将信息从一小部分智能体传播到更大的群体，是许多生物、社会或人工系统中的关键基本机制。毫不奇怪，许多领域长期以来一直在研究应对这一挑战的动力学/协议，但所用术语往往各不相同，因此“流行病” [25], 和“谣言传播” [26] 等术语，视具体语境而定，可能指相同或相似的问题。

相关文献浩如烟海，在此不可能进行全面综述。下文将讨论与本文工作最为密切相关的前人贡献。

通信受限的多智能体系统中的信息传播。 当通信受限和/或环境嘈杂或不可预测时，信息传播尤其困难——

[2]如果采用无放回抽样，所有结果也都直接成立。[3]在下文中， *symmetric consensus* 指的是标准设定：要求智能体最终就系统中初始存在的 *any* 个意见达成共识。[4]在分布式计算文献中，这一指标通常称为 *parallel time* [24]。

因此，分布式计算领域近期的一系列研究致力于设计鲁棒协议，使其能够容忍故障和/或仅需对通信模式作出最少假设。应对这些挑战的有效理论框架是自稳定；与我们所考虑情境相关的问题已在该框架下得到研究，例如自稳定时钟同步或多数计算 [11, 12, 27]。

然而，总体而言，这些模型对存储器和／或通信能力作出的假设很少，而且很少符合被动通信框架。近期研究重点之一是将自稳定框架扩展到源自生物分布式系统的多智能体系统 [22,28] ；引言前文已讨论了其中颇具启发性的初步成果 [14] 。

意见动力学。 意见动力学是数学模型，已被广泛用于研究多智能体系统中的意见形成过程，这些过程会形成稳定的共识和／或聚类均衡 [29, 30, 31]。最受欢迎的意见动力学模型之一是投票者模型，该模型最初用于研究生物学中的物种空间冲突以及相互作用粒子系统中的空间冲突 [32, 33]。对多数更新规则的研究源于对自旋系统中共识过程的研究 [34]。过去几十年来，人们研究了基本多数动力学的若干变体 [29, 35, 36, 37]。

近年来，人们对意见动力学的偏置变体日益关注，这类模型描述的是多智能体系统，其中智能体可能偏向某一种或某一子集的意见，例如，这种偏向反映了创新技术在社会系统中扩散所带来的吸引力。人们通过多种模型研究了这一一般性问题 [35,38,39,40]。总体而言，这一研究方向的重点与我们的不同，主要关注偏置与收敛至某种均衡之间有时颇为复杂的相互作用，而这种均衡可能表现为全面采纳某一种意见。相比之下，我们关注动力学能够以多快的速度收敛到（未知的）正确意见；也就是说，一条信息能够以多快的速度在一个由匿名被动智能体构成的系统中传播，而这些智能体只能通过获取其他智能体持有的意见的随机样本来推断“正确”意见。[5]

顽固派智能体存在时的共识。大量研究探讨了顽固派智能体存在时的意见动力学，即那些永不偏离其初始意见的智能体（通常持有不同意见） [41, 42, 43, 44] ，他们还可能试图影响智能体群体中的其他成员。在这种情况下，特定动力学所产生的过程可能会达到以多个意见为特征的均衡。这类研究主要关注顽固派的数量、他们在网络中的位置以及网络拓扑本身对这类均衡的影响 [42, 43, 44, 45], ，尤其是在系统的社会目标可能是就不同于顽固派所支持的意见达成自稳定的“近似共识”时。同样，本文的关注重点截然不同，因此，关于顽固派存在时共识的既有研究结果并不适用于本文，至少据我们所知是如此。

2 记号与预备知识

我们考虑一个由 n 匿名智能体组成的系统。我们用 $x_u^{(t)}$表示智能体 u 在第 t轮结束时持有的意见；若上下文清楚，则省略上标。系统在第 t 轮的配置是向量 $\mathbf{x}^{(t)}$ ，其中有 n 个条目，且第 u个条目为 $x_u^{(t)}$。

我们关注能够高效传播正确意见的动力学。也就是说，(i) 它们最终会使系统进入正确配置，使所有智能体都持有正确的

[5]作为参考，容易验证，多数规则或最佳-k 多数规则 [23] （在上述文献中经常被考察 en ）通常无法完成我们所考虑的传播任务。

意见，并且 (ii) 尽可能少地完成这一过程。为简洁起见，我们有时将后者称为收敛时间。如果 T 是一次执行过程的收敛时间，我们用T/n 表示每个代理的平均激活次数，这是分布式计算文献中常称为并行时间的量 [24]。为便于阐述，下文假设意见是二元的（即，它们属于 $\{1,0\}$）。我们指出：(i) 第3 节给出的收敛时间下界，在仅考虑二元情形时已经成立；(ii) 使用标准论证，可以轻松地将第4 节对投票者模型的分析扩展到一般的 k 意见情形。为完整起见，我们在第 4.2 小节简要概述这些论证。

无记忆动力学。 我们考虑这样一类动力学：除了匿名性之外，非源代理也是无记忆且同一的。我们用以下决策规则来描述这些要求，以及第 1 节概述的一般要求；该规则描述代理 u 的行为

1. u 会收到一个大小为 ℓ 的均匀样本 S；
2. u 以概率 $g_{x_u}(|S|)$ 采纳意见 1，其中 $|S|$ 表示样本S中 1 的数量。

这里，$g_{x_u}\colon \{0,\dots,\ell\} \to [0,1]$ 是一个函数，它为 S 中出现的 1 的数量分配一个概率值。具体而言，g_{x_u} 为样本中没有支持的意见分配概率零，即 $g_{x_u}(0) = 0$ 且 $g_{x_u}(\ell) = 1$。[6] 请注意，原则上，g_{x_u} 可能取决于代理 u 当前的意见。

上述一般规则所描述的动力学类别，严格包含所有基于固定大小随机样本的无记忆算法，其中包括投票者模型等广受欢迎的动力学，以及一大类准多数动力学 [23, 29, 46]。

马尔可夫链。 在下文中，我们考虑离散时间、离散空间的马尔可夫链，其状态空间表示为整数区间 $\chi = \{z, z+1, \dots, n\}$，其中 $z \geqslant 1$ 和 $n > z$ 取适当值；这样设定不失一般性（下一节将说明如此标记状态的原因）。令 X_t 为表示该链在第 $t \geqslant 0$ 轮所处状态的随机变量。状态 $x \in S$ 的命中时间 [47, Section 1] 是指该链首次处于状态 x 的时刻，即：

$$\tau_x = \min\{t \geqslant 0 : X_t = x\}.^{7}$$

本文使用的一个基本要素是用适当的生灭 链来描述我们所考虑的动力学。在这类链中，从给定状态 $i \geqslant z$ 出发，唯一可能的转移是到达状态 i、$i+1$（若 $i \leqslant n-1$）以及 $i-1$（若 $i \geqslant z+1$）。在下文中，我们分别用 p_i 和 q_i 表示当链处于状态 i 时转移到 $i+1$ 的概率和转移到 $i-1$ 的概率。注意，$p_n = 0$ 和 $q_z = 0$。最后，$r_i = 1 - p_i - q_i$ 表示链处于状态 i 时，下一步仍保持在该状态的概率。

无记忆动力学的生灭链。在z 个持有意见（不失一般性地设为）1 的源智能体，以及所有其他智能体被激活时均按照前文所述的一般动力学修正其意见的系统中，系统的整体行为可由生灭链 $\mathcal{C}_1$ 完全描述，其状态空间为 $\{z, ..., n\}$，转移概率如下，其中$i = z, \dots n-1$:

$$\begin{aligned} p_i &= \mathbb{P}\left(X_{t+1} = i+1 \mid X_t = i\right) \\ &= \frac{n-i}{n} \sum_{s=0}^{\ell} g_0(s) \mathbb{P}\left(|S| = s \mid X_t = i\right) \end{aligned}$$

[6] 一般而言，不满足这一约束的动力学无法实现共识。
[7] 注意，命中时间通常取决于初始状态。接下来，[47], 我们会在需要时对其加以说明。

$$= \frac{n-i}{n}\mathbb{E}_i\left[g_0(|S|)\right], \tag{1}$$

其中 X_t 只是第 t 轮次结束时持有意见 1 的智能体数量；此外，沿用 [47], 中对定义在某个马尔可夫链 V 上的随机变量 $\mathcal{C}$的记法，我们用 $\mathbb{E}_i[V]$ 表示当 V从状态 $\mathcal{C}$ 开始时 i的期望。式（1）由全概率公式对 $|S|$ 的可能取值应用后得到，并注意到：(a) 只有当一个持有意见 0 的智能体被选中更新时，才会发生转移$i \to i+1$，其发生概率为（$n-i$）；(b) 如果该智能体在其样本中观察到/n个持有意见 1 的智能体，它就会以概率 s 采纳该意见 g_0（s）。同理，对于 $i = z+1$, ..., $n-1$:

$$q_i = \mathbb{P}\left(X_{t+1} = i-1 \mid X_t = i\right) = \frac{i-z}{n}(1 - \mathbb{E}_i\left[g_1(|S|)\right]), \tag{2}$$

唯一需要说明的是，与前一种情况不同，只有在选择一个持有意见 1 的代理进行更新，且该代理不是源时，转移 $i+1 \to i$ 才会发生。对于该生灭链，除了 $p_n = 0$ 和 $q_z = 0$ 之外，我们还有 $q_n = 0$；这是因为 $g_1(\ell) = 1$。

最后，我们指出 $\mathcal{C}_1$ 与任何特定意见动力学之间存在以下（显而易见的）联系 P：(i) 对于 P，其特定的生灭链可通过指定 $\mathcal{C}_1$ 相应的 g_0 和 g_1，由上述公式（1）和（2）中的 P得到；(ii) $i \geqslant z$ 个代理持有意见 1 的配置下，$\mathbb{E}_i[\tau_n]$的期望收敛时间就是。

3 下界

本节证明无记忆动力学的收敛时间下界。我们将表明，这一否定性结果以一种非常强的意义成立：即使代理拥有当前系统配置的完全信息，任何动力学仍然需要 $\Omega(n^2)$ 的期望时间。

如上一节所述，我们不失一般性地将分析限制在只有两种意见（即 0 和 1）的情形。为考虑到智能体能够获取系统的精确配置这一事实，我们对第 2 节引入的记号稍作修改，因此这里 $g_{x_u} : \{0,\dots,n\} \to [0,1]$ 表示群体中出现的 1 的数量的概率，而非大小为 ℓ 的随机样本中出现的 1 的数量的概率。在证明主要结果之前，我们需要以下技术结果。

引理1. 对于每个 $N \in \mathbb{N}$，对于每个 $x \in \mathbb{R}^N$，使得对于每个 $i \in \{1,\dots,N\}$，$x_i > 0$，我们有 $\sum_{i=1}^N x_i \geqslant N$ 或 $\sum_{i=1}^N \frac{1}{x_i} \geqslant N$。

证明. 考虑 $\sum_{i=1}^n x_i \leqslant N$ 的情形。利用算术平均数与几何平均数不等式，我们可以写出

$$1 \geqslant \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N x_i \geqslant \left(\prod_{i=1}^N x_i\right)^{\frac{1}{N}}.$$

因此，

$$1 \leqslant \left(\prod_{i=1}^N \frac{1}{x_i}\right)^{\frac{1}{N}} \leqslant \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \frac{1}{x_i},$$

这就完成了引理1的证明。 □

引理 2。 考虑 $\{0,\dots,n\}$ 上的任意生灭链。对于 $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$，令 $a_i = q_i/p_{i-1}$和 $a(i:\ j) = \prod_{k=i}^j a_k$。那么，$\mathbb{E}_0[\tau_n] \geqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a(i:\ j)$。

证明。 令 $w_0 = 1$，并且对于 $i \in \{1,\dots,n\}$，令 $w_i = 1/a\ (1:\ i)$。以下结果是众所周知的（例如，见 [47]中的公式（2.13））。对于每个 $\ell \in \{1,\dots,n\}$,

$$\mathbb{E}_{\ell-1}[\tau_\ell] = \frac{1}{q_\ell w_\ell}\sum_{i=0}^{\ell-1} w_i.$$

因此，

$$\mathbb{E}_{\ell-1}\left[\tau_\ell\right] = \frac{1}{q_\ell}\sum_{i=0}^{\ell-1}\frac{a(1:\ell)}{a(1:i)} = \frac{1}{q_\ell}\sum_{i=1}^{\ell}a(i:\ell) \geqslant \sum_{i=1}^{\ell}a(i:\ell).$$

最终，我们可以写作

$$\mathbb{E}_0\left[\tau_n\right] = \sum_{\ell=1}^{n}\mathbb{E}_{\ell-1}\left[\tau_\ell\right] \geqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a(i:j),$$

这就完成了引理的证明2。 □

定理 3。 固定 $z \in \mathbb{N}$。存在 z 个源智能体时，即使每个样本都包含系统中的完整意见配置，也就是说在 $\ell = n$的情况下，任何无记忆动力学的期望收敛时间至少为 $\Omega(n^2)$。

证明。 固定 $z \in \mathbb{N}$。令 $n \in \mathbb{N}$，使得 $n > 4z$，并令 P 为任意无记忆动力学。证明的思路是表明，与 P相关联的生灭链，通过为动力学 $\mathcal{C}_1$ 所描述的链指定 2 中的 g_0 和 g_1 而得到的 P，不可能同时在两个方向上都“快速”。我们将分析限制在状态 $\chi = \{n/4, \ldots, 3n/4\}$的子集上。更准确地说，我们考虑以下两个生灭链：

- $\mathcal{C}$，其状态空间为 χ，其中状态表示意见为 1 的智能体数量，并假设源智能体持有意见 1。
- $\mathcal{C}'$，其状态空间为 χ，其中状态表示意见为 0 的智能体数量，并假设源智能体持有意见 0。

令 $\tau_{3n/4}$（分别为 $\tau'_{3n/4}$）表示链 $\mathcal{C}$（分别为 $\mathcal{C}'$）到达状态 $3n/4$ 的命中时间。我们将证明

$$\max\left(\mathbb{E}_{n/4}\left[\tau_{3n/4}\right], \mathbb{E}_{n/4}\left[\tau'_{3n/4}\right]\right) = \Omega(n^2).$$

令 g_0，g_1：$\chi \to [0,1]$ 为描述 P在 χ上的函数。根据第 1 式和第 2 式（见第 2 节），我们可以推导出 $\mathcal{C}$ 的转移概率如下

$$p_i = \frac{n-i}{n}g_0(i), \qquad q_i = \frac{i-z}{n}(1-g_1(i)). \tag{3}$$

请注意，由于智能体对配置“完全了解”，期望已被消去。类似地，对于 $\mathcal{C}'$，转移概率为

$$p'_i = \frac{n-i}{n}(1-g_1(n-i)), \qquad q'_i = \frac{i-z}{n}g_0(n-i). \tag{4}$$

根据引理 2 陈述中的定义，我们定义 a_i 和 a'_i 分别对应 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$。我们有

$$a_i = \frac{q_i}{p_{i-1}} = \frac{i-z}{n-i+1}\cdot\frac{1-g_1(i)}{g_0(i-1)},$$

and

$$a'_i = \frac{q'_i}{p'_{i-1}} = \frac{i-z}{n-i+1}\cdot\frac{g_0(n-i)}{1-g_1(n-i+1)}.$$

请注意，我们可以将这些量两两相乘，以消去右侧的因子：

$$a_{n-i+1}\cdot a'_i = \frac{i-z}{i}\cdot\frac{n-i+1-z}{n-i+1}. \tag{5}$$

$(i-z)/i$在 i上递增，因此其在 χ处（当 $i=n/4$时）取得最小值。同样，$(n-i+1-z)/(n-i+1)$在 $i=3n/4$时取得最小值。因此，根据公式（5），我们得到以下（粗略的）下界：对于每个 $i\in\chi$,

$$a_{n-i+1}\cdot a'_i \geqslant \left(1-\frac{4z}{n}\right)^2. \tag{6}$$

根据引理2陈述中的定义，我们将 $a(i:j)$ 和 $a'(i:j)$ 分别定义为 $\mathcal{C}$ 和$\mathcal{C}'$。由式（6）可得，对于任意 $i,\ j\in\chi$ 满足 $i\leqslant j$:

$$\begin{aligned} a'(i:j) &\geqslant \left(1-\frac{4z}{n}\right)^{2(j-i+1)} \frac{1}{a(n-j+1:n-i+1)} \\ &\geqslant \left(1-\frac{4z}{n}\right)^{n} \frac{1}{a(n-j+1:n-i+1)}. \end{aligned}$$

令 $c=c(z)=\exp(-4z)/2$。当 n 足够大时，

$$a'(i:j)\geqslant \frac{c}{a(n-j+1:n-i+1)}. \tag{7}$$

令 $N=n^2/8+n/4$。根据引理 1，以下两者必有其一

$$\sum_{\substack{i,j\in\chi\\ i<j}} a(i:j)\geqslant N,$$

或者（根据式（7））

$$\sum_{\substack{i,j\in\chi\\ i<j}} a'(i:j)\geqslant c\sum_{\substack{i,j\in\chi\\ i<j}} \frac{1}{a(i:j)}\geqslant cN.$$

根据引理 2，可知以下两者必有其一

$$\mathbb{E}_{n/4}\left[\tau_{3n/4}\right]\geqslant N,\quad \text{or}\quad \mathbb{E}_{n/4}\left[\tau'_{3n/4}\right]\geqslant cN.$$

在这两种情况下，都存在一个初始配置，使得至少需要 $\Omega(n^2)$ 轮次才能达成共识，由此完成定理3的证明。 □

4 投票者模型几乎是最优的

投票者模型是一种广为人知的动力学过程：随机个体 v 在第 t 轮次被激活后，均匀随机地选择另一个代理 $u\in V$，并将其意见更新为 u 的意见。

在本节中，我们证明该动力学过程的期望共识时间为 $\mathcal{O}(n^2\log n)$ 轮次。我们针对 $z=1$ 证明这一结果，并指出对于 $z>1$，该上界只会更优。不失一般性地，我们假设 1 是正确意见。

修正链 $\mathcal{C}_2$。原则上，我们可以利用第 2 节中引入、并用于证明第3节结果的链 $\mathcal{C}_1$ 来研究投票者模型的收敛。不幸的是，$\mathcal{C}_1$ 有一个吸收态（即对应于共识的状态 n），因此它不可逆，我们无法借助第 2 节中可逆生灭链的已知性质 [47,来简化证明 5]。不过请注意，我们关心的是 τ_n，即在投票者模型下到达状态 n 所需的轮次数。为此，可以考虑第二条链 $\mathcal{C}_2$，它与 $\mathcal{C}_1$ 几乎完全相同，但具有可逆性。具体而言，$\mathcal{C}_2$ 的转移概率 p_i 和 q_i 与 $\mathcal{C}_1$中的相同，其中 $i=z,\ldots\ldots,n-1$。此外，我们有 $p_n=0$（与 $\mathcal{C}_1$中一样），但 $q_n=1$。显然，对于任意初始状态 $i\leqslant n-1$，τ_n 在 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$中的分布完全相同。因此，除非另有说明，本节余下部分我们考虑链 $\mathcal{C}_2$。

[8]令 $q_n=1$，这只是为了简化表达，任何正值均可。

定理 4。 对于 $z=1$，投票者模型在期望意义下于 $\mathcal{O}\left(n^2 \text{对数} n\right)$ 轮内达成意见 1 的共识，并且以至少 $1-\delta$的概率在 $\mathcal{O}\left(n^2 \text{对数}\ n \text{对数} \frac{1}{\delta}\right)$轮内达成共识，其中 $0<\delta<1$。

4.1 定理 4的证明

我们首先计算 $\mathbb{E}_z\left[\tau_n\right]$的一般表达式，即在 $\mathcal{C}_2$ 中，从初始状态 z到达状态 n（也就是达到共识）所需的期望时间，其中初始状态对应于系统从仅源代理持有意见 1 的状态开始。接着，我们给出 $z=1$时的一个具体上界。首先回顾一下，对于 z 个源代理，有 $\mathbb{E}_z\left[\tau_n\right]=\sum_{k=z+1}^n \mathbb{E}_{k-1}\left[\tau_k\right]$。考察式（1）和式（2）中 p_i和 q_i的一般表达式，我们很快就会发现，对于投票者模型 $g_0=g_1=g$，由于输出不取决于代理的意见，因此 $\mathbb{E}\left[g(|S|)\right]=i/n$ 。只要系统中意见为 1 的代理数量为 i，上述结论就成立。因此，对于 $\mathcal{C}_2$ ，有

$$
\begin{aligned}
p_i &= \begin{cases} \frac{(n-i)i}{n^2}, & \text{for } i=z,\ldots,n-1 \\ 0, & \text{for } i=n \end{cases} \\
q_i &= \begin{cases} 0, & \text{for } i=z \\ \frac{(n-i)(i-z)}{n^2}, & \text{for } i=z+1,\ldots,n-1 \\ 1, & \text{for } i=n. \end{cases}
\end{aligned} \tag{8}
$$

证明接下来按以下轮次进行。

的一般表达式 $\mathbb{E}_{k-1}\left[\tau_k\right]$。 不难看出

$$
\mathbb{E}_{k-1}\left[\tau_k\right]=\frac{1}{q_k w_k} \sum_{j=z}^{k-1} w_j\,, \tag{9}
$$

其中 $w_0=1$ 和 $w_k=\prod_{i=z+1}^k \frac{p_{i-1}}{q_i}$，对于 $k=z+1, \ldots, n$。事实上，w_k’满足细致平衡条件 $p_{k-1} w_{k-1}=q_k w_k$，对于 $k=z+1, \ldots, n$，

$$
\begin{aligned}
p_{k-1} w_{k-1} &= p_{k-1} \prod_{i=z+1}^{k-1} \frac{p_{i-1}}{q_i} \\
&= p_{k-1} \frac{q_k}{p_{k-1}} \prod_{i=z+1}^{k} \frac{p_{i-1}}{q_i}=q_k w_k .
\end{aligned}
$$

并且式（9）的推导方式与 [47, 第 2 节5]。类似

计算 $\mathbb{E}_{k-1}\left[\tau_k\right]$ **对于** $\mathcal{C}_2$。 首先，考虑式（ p_i 和 q_i 中的表达式8），对于 $k=z+1, \ldots, n-1$ 我们有

$$
\begin{aligned}
w_k &= \prod_{i=z+1}^{k} \frac{(n-i+1)(i-1)}{(i-z)(n-i)} \\
&= \prod_{i=z+1}^{k} \frac{n-i+1}{n-i} \cdot \prod_{i=z+1}^{k} \frac{i-1}{i-z}=\frac{n-z}{n-k} \cdot \prod_{i=z+1}^{k} \frac{i-1}{i-z} .
\end{aligned}
$$

因此

$$
w_k = \begin{cases} \frac{n-z}{n-k} f(k), & \text{for } k=z+1,\ldots,n-1 \\ \frac{(n-z)(n-1)}{n^2} f(n-1), & \text{for } k=n \end{cases}
$$

其中 $f(k)=\prod_{i=z+1}^k \frac{i-1}{i-z}$。

这种情况 $z = 1$。在这种情况下，上述公式可简化，并且对于 $k = z+1, \ldots, n-1$，我们有

$$\mathbb{E}_{k-1}[\tau_k] = \frac{n^2}{(k-1)f(k)} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{f(j)}{n-j} = \frac{n^2}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{n-j},$$

其中，最后一个等式由以下事实得出：只要 $z = 1$，$f(z) = f(z+1) = \cdots = f(k) = 1$。此外，对于 $k = n$，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{n-1}[\tau_n] &= \frac{1}{q_n w_n} \sum_{j=1}^{n-1} w_j = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-1}{n-j} \\ &= \frac{n}{n-1} H_{n-1} = \mathcal{O}(\log n),\end{aligned}$$

其中，H_k 表示第 k 个调和数。因此，对于 $z = 1$，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_1[\tau_n] &= \sum_{k=2}^{n} \mathbb{E}_{k-1}[\tau_k] \\ &= n^2 \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{n-j} + \mathcal{O}(\log n),\end{aligned} \tag{10}$$

其中，在第二个等式中，我们考虑到了 $\mathbb{E}_{n-1}[\tau_n] = \mathcal{O}(\log n)$。最后，容易看出

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{n-j} = \mathcal{O}(\log n) \tag{11}$$

事实上，若将求和在 $\lfloor n/2 \rfloor$ 处分开，则对于 $k \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$，我们有

$$\sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{n-j} \leqslant \sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2}{n} = \mathcal{O}(1) \tag{12}$$

而对于 $k > \lfloor n/2 \rfloor$，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor+1}^{n-1} \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{n-j} \leqslant \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor+1}^{n-1} \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n-j} \\ &= \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor+1}^{n-1} \frac{2}{n} H_n = \mathcal{O}(\log n)\,.\end{aligned} \tag{13}$$

由式（12）和（13）可得式（11），利用式（10）中的式（11）界，即可得到该结论的第一部分。

为证明该命题的第二部分，我们采用标准论证。考虑 $\lceil \log \frac{1}{\delta} \rceil$ 个连续的时间区间，每个区间由 $s = 2\lceil \mathbb{E}_1[\tau_n] \rceil = \mathcal{O}(n^2 \log n)$ 个连续轮次组成。对于$i = 1, \ldots, s-1$，如果该链在前 $i-1$ 个区间中均未到达状态 n，那么根据马尔可夫不等式，该链在第 i 个区间内未到达状态 n 的概率至多为 $1/2$。因此，该链在所有区间内均未到达状态 n 的概率至多为 $(1/2)^{\log(1/\delta)} = \delta$。

4.2 处理多个意见

考虑可能意见集合为 $\{1, \ldots, k\}$ for $k \geqslant 2$ 的情况，其中 1 仍为正确意见。我们将意见 $2, \ldots, k$ 合并为一类，即意见 0，这不会损失一般性

。然后考虑随机变量 X_t，表示在第 t轮结束时持有意见 1 的智能体数量。显然，在投票者模型下，所有智能体都持有意见 1 的配置是唯一的吸收态，收敛时间定义为 $\min\{t \geqslant 0 : X_t = n\}$。对于持有意见 1 的智能体数量为一般值 i 的情况，我们接下来计算转移 $i \to i+1$（对于 $i \leqslant n-1$）的概率p_i 以及转移 $i \to i-1$（对于 $i \geqslant z+1$）的概率 q_i：

$$p_i = \mathbb{P}\left(X_{t+1} = i+1 \mid X_t = i\right) = \frac{n-i}{n} \cdot \frac{i}{n},$$

其中，上述等式右侧的第一个因子表示激活持有非 1 意见的代理的概率，而第二个因子表示该代理随后复制持有正确意见的代理的意见的概率。同样地，我们有：

$$q_i = \mathbb{P}\left(X_{t+1} = i-1 \mid X_t = i\right) = \frac{i-z}{n} \cdot \frac{n-i}{n},$$

右侧的第一个因子表示抽取持有意见 1 的非源代理的概率，第二个因子表示该代理随后复制持有任意非 1 意见的代理的意见的概率。

上述论证意味着，如果我们关注收敛到正确意见所需的时间，那么变量 X_t 才是我们真正关心的对象。另一方面，很明显，X_t 的演化由第 $\mathcal{C}_1$ 节引入的生灭链 2 （同样以 n 作为唯一吸收态）描述，或者由其可逆对应链 $\mathcal{C}_2$描述。这意味着，第4节的分析可以无缝地推广到多个意见的情形。

5 借助存储器实现更快传播

在本节中，我们给出实验性证据，表明使用少量存储器的动力学能够在近乎线性的轮次数内达成共识。与无记忆动力学相比，这意味着存在指数级差距（依据第3节的结果）。

我们使用的动力学源自算法 [14]，并将在下一小节中介绍。

5.1 “跟随趋势”：我们提出的方法

我们在仿真中运行的动力学源自 [14], 的算法，并使用大小为 $\ell = 10 \log n$的样本。每当一个代理被激活时，它就将倒计时减 1。当倒计时达到 0 时，相应的激活称为忙激活。在忙激活时，代理会比较当前观察到的意见为 1 的数量与上一次忙激活期间观察到的数量。

- 如果当前样本中 1 的数量更多，那么代理就采用意见 1。
- 相反，如果其中 1 的数量较少，它就会采用意见 0。
- 如果当前样本中的 1 与上一个样本中的 1 数量相同，代理就保持相同的意见。

忙激活结束时，代理会将倒计时重置为 ℓ （等于样本大小），这样每经过 ℓ 次激活，就恰好有一次忙激活。此外，代理会记住它观察到的 1 的数量，以便执行下一次忙激活。

总的来说，每个代理需要存储两个介于 0 和 ℓ 之间的整数（倒计时，以及上一次忙激活期间观察到的意见为 1 的数量），因此该动力学需要 $2\log(\ell) = \Theta(\log\log n)$ 位存储器。

该动力学的形式化描述见算法 1。

样本大小： $\ell = 10\log\, n$
存储器： 前一个样本，倒计时 $\in \{0, \ldots, \ell\}$
输入： k，样本中 1 的数量
如果 倒计时 $= 0$ **则**
  如果 $k <$前一个样本 **则**
    $x_u \leftarrow 0$
  否则如果 $k >$前一个样本 **则**
    $x_u \leftarrow 1$
  end
  前一个样本 $\leftarrow k$
  倒计时 $\leftarrow \ell$
else
  倒计时 $\leftarrow$ 倒计时 $- 1$
end

算法1： 跟随趋势

5.2 实验结果

仿真在以下条件下进行 $n = 2^i$，其中 $i \in \{3, \ldots, 10\}$ 用于投票者模型，而 $i \in \{3, \ldots, 17\}$ 用于算法 1，每种条件均重复 100 次。每个群体都包含一个源智能体（$z = 1$）。在自稳定设置中，对于给定的动力学，最糟糕的初始配置尚不明确。本文考察了两种不同的初始配置：

- 一种配置，其中所有意见（包括源智能体的意见）均在 $\{0, 1\}$ 中独立且均匀分布，
- 一种配置，其中源智能体持有意见 0，而所有其他智能体持有意见 1。

我们通过实验将其与投票者模型进行比较。我们针对 $n = 2^i$进行了仿真，其中 $i \in \{3, \ldots, 10\}$ 适用于投票者模型，$i \in \{3, \ldots, 17\}$ 适用于我们的候选动力学，并且每种情况都重复 100 次。结果汇总于图 1，以并行轮次表示（一轮并行轮次对应 n 次激活）。结果表明，我们的候选动力学大约需要 $\Theta(\text{polylog}n)$ 个并行轮次才能收敛。就并行时间而言，与定理 3 针对无记忆动力学所确立的下界相比，这代表着指数级差距。

6 讨论与未来工作

本文探究了存储器在多智能体系统中所发挥的作用。这类系统依赖被动通信，并旨在使少数“知识渊博”的个体所持有的意见达成共识 [3, 14, 48]。在我们考虑的模型下，我们证明，即使关于当前意见配置的观察是完整的，在当前决策中纳入过去的观察，仍是实现快速收敛的必要条件。事实上，同一个下界证明也可以推广至任何需要交替达成共识（或半共识）意见的过程，即让群体就一种意见达成一致（或基本一致），随后再就另一种意见达成一致，如此往复。这种振荡行为是序贯决策过程的基本特征 [48]。

这项研究的最终目标是反思生物过程，并得出生物参数的下界。然而，尽管我们的模型具有普适性，仍需开展更多工作

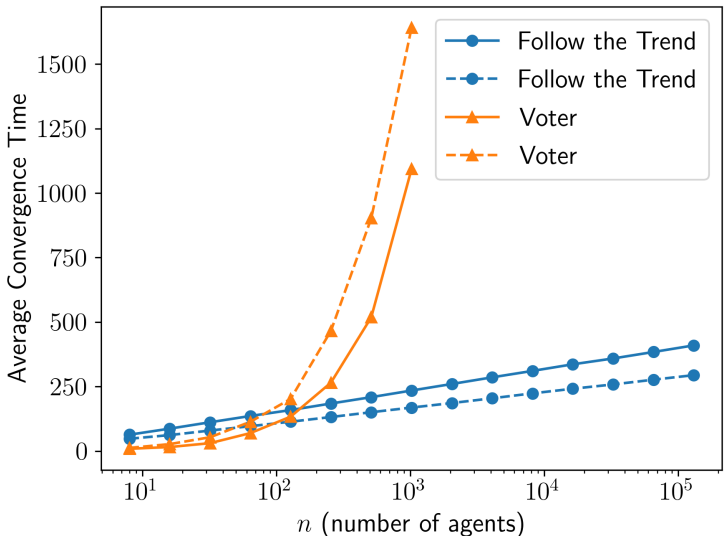

图1：**“跟随趋势”与投票者模型的比较。** 对于不同的 n，分别进行*100*次迭代，展示平均收敛时间（以并行轮次计），其中 $z = 1$ 为源智能体。带圆形标记的蓝线对应于我们的候选动态，该动态是对 *[14]*中的“跟随趋势”算法的改编。带三角形标记的橙线对应于投票者模型。实线表示所有意见均从 $\{0, 1\}$中均匀随机抽取的初始配置。点线表示所有意见均取为与源智能体不同的初始配置。

才能得出具体的生物学结论。开展一项完全遵循我们模型的实验，或改进我们的结果以使其适用于更现实的场景，仍有待未来研究完成。看起来较有前景的候选实验场景包括鱼群集群行为 [3,17],蚂蚁的集体序贯决策 [48], 以及蚂蚁的招募 [18]。如果取得成功，这样的成果将从方法论视角来看具有开创性。事实上，据我们所知，通过数学考量以间接方式获得针对某一生物参数的具体下界，这在以往从未实现过。

致谢。 作者谨此感谢Yoav Rodeh，就下界证明（定理 3）进行了非常有益的讨论。

参考文献

[1] David JT Sumpter。集体动物行为。载于集体动物行为。普林斯顿大学出版社，2010年。[2] Ofer Feinerman 和 Amos Korman。社会性昆虫中的个体与集体认知。《实验生物学杂志》，220(1)：73–82，2017年。[3] Iain D Couzin、Jens Krause、Nigel R Franks 和 Simon A Levin。移动中的动物群体中的有效领导与决策。《自然》，433(7025)：513–516，2005年。[4] Aviram Gelblum、Itai Pinkoviezky、Ehud Fonio、Abhijit Ghosh、Nir Gov 和 Ofer Feiner- man。蚁群能够最优地放大短暂获知信息的个体所产生的影响。《自然·通讯》，6(1)：1–9，2015年。[5] Ehud Fonio、Yael Heyman、Lucas Boczkowski、Aviram Gelblum、Adrian Kosowski、Amos Korman 和 Ofer Feinerman。一条局部标记的蚁道尽管信息有限，仍能实现高效的集体导航。《电子生命》，5:e20185，2016年。

[6]Lucas Boczkowski、Emanuele Natale、Ofer Feinerman 和 Amos Korman。随机群体中可靠信息流的极限。《*PLoS*计算生物学》，14(6):e1006195，2018年。[7] Ofer Feinerman 和 Amos Korman。蚂蚁问题。分布式计算，30(3):149–168，2017年。[8] William Bialek、Andrea Cavagna、Irene Giardina、Thierry Mora、Edmondo Silvestri、Massi- miliano Viale 和 Aleksandra M Walczak。鸟类自然群体的统计力学。《美国国家科学院院刊》，109(13):4786–4791，2012年。[9] Richard M Karp。从计算视角理解科学。计算机科学与技术杂志，26(4):569–577，2011年。[10] Brieuc Guinard 和 Amos Korman。间歇性反平方莱维行走适用于寻找任意尺寸的目标。《科学进展》，7(15):eabe8211，2021年。[11] James Aspnes 和 Eric Ruppert。群体协议导论。《网络异构与移动应用中间件》，第97–120页，2009年。[12]Lucas Boczkowski、Amos Korman 和 Emanuele Natale。随机通信模式中的消息长度最小化：仅用3比特的快速自稳定协议。分布式计算，32(3)，2019年。[13] Paul Bastide、George Giakkoupis 和 Hayk Saribekyan。使用1比特消息实现自稳定时钟同步。载于*ACM-SIAM* 离散算法研讨会，第2154–2173页。SIAM，2021年。[14] Amos Korman 和 Robin Vacus。及早适应趋势：利用被动通信实现自稳定信息传播。载于*ACM* 分布式计算原理研讨会，第235–245页。ACM，2022年。[15] Nigel R Franks、Stephen C Pratt、Eamonn B Mallon、Nicholas F Britton 和 David JT Sumpter。筑巢社会性昆虫中的信息流、意见调查与集体智能。《伦敦皇家学会哲学汇刊*B*辑：生物科学》，357(1427):1567–1583，2002年。[16]M Lindauer。蜜蜂群寻找新居时的通信。《自然》，179(4550):63–66，1957年。[17] Iain D Couzin、Christos C Ioannou、G¨uven Demirel、Thilo Gross、Colin J Torney、Andrew Hartnett、Larissa Conradt、Simon A Levin 和 Naomi E Leonard。未掌握信息的个体促进动物群体形成民主共识。《科学》，334(6062):1578–1580，2011年。[18] Nitzan Razin、Jean-Pierre Eckmann 和 Ofer Feinerman。沙漠蚂蚁在噪声交互中实现可靠招募。《英国皇家学会界面期刊》，10(82):20130079，2013年。[19] Thomas D Seeley。蜜蜂群巢址选择过程中的共识形成：异议的消退。《行为生态学与社会生物学》，53(6):417–424，2003年。[20] Gerald S Wilkinson。黄昏蝠群中的信息传递。《动物行为》，44:501–518，1992年。[21] Noam Cvikel、Katya Egert Berg、Eran Levin、Edward Hurme、Ivailo Borissov、Arjan Boon- man、Eran Amichai 和 Yossi Yovel。蝙蝠聚集有助于改善猎物搜寻，但密度过高时可能会受到影响。《当代生物学》，25(2):206–211，2015年。

[22] Luc-Alain Giraldeau 和 Thomas Caraco。《社会觅食理论》。载于社会觅食理论。普林斯顿大学出版社，2018年。[23] Grant Schoenebeck 和 Fang-Yi Yu。Erd¨ős-R´ényi 图上的相互作用粒子系统的共识。载于第*29*届 *ACM-SIAM* 离散算法研讨会论文集，第1945–1964页，2018年。[24] Artur Czumaj 和 Andrzej Lingas。群体协议中的并行时间。《style id='10'>信息处理快报，179：106314，2023年。[25] Alan Demers、Dan Greene、Carl Hauser、Wes Irish、John Larson、Scott Shenker、Howard Sturgis、Dan Swinehart 和 Doug Terry。用于复制数据库维护的流行病算法。载于第*6*届 *ACM* 分布式计算原理研讨会，第1–12页，1987年。[26] Richard Karp、Christian Schindelhauer、Scott Shenker 和 Berthold Vocking。随机谣言传播。载于第*41*届 *IEEE* 计算机科学基础研讨会，第565–574页，2000年。[27] Michael Ben-Or、Danny Dolev 和 Ezra N Hoch。快速自稳定拜占庭容错数字时钟同步。载于第*27*届 *ACM* 分布式计算原理研讨会，第385–394页，2008年。[28] Dana Angluin、James Aspnes、Zo¨e Diamadi、Michael J Fischer 和 Ren´e Peralta。被动移动有限状态传感器网络中的计算。载于第*23*届 *ACM* 分布式计算原理研讨会，第290–299页，2004年。[29] Luca Becchetti、Andrea E. F. Clementi 和 Emanuele Natale。共识动力学：综述。《*SIGACT* 新闻》，51(1)：58–104，2020年。[30] Adam Coates、Liangxiu Han 和 Anthony Kleerekoper。意见动力学的统一框架。载于第*17*届自主智能体与多智能体系统国际会议（*AAMAS 2018*），第1079–1086页，2018年。[31] Charlotte Out 和 Ahad N. Zehmakan。社交网络中的多数投票：随机结交朋友，或保持固执以压倒精英。载于第*30*届人工智能国际联合会议，第349–355页，2021年。[32] Peter Clifford 和 Aidan Sudbury。空间冲突模型。《style id='36'>《生物计量学》，60(3)：581–588，1973年。[33] Richard A Holley 和 Thomas M Liggett。弱相互作用无限系统及投票者模型的遍历定理。《概率年刊》，第643–663页，1975年。[34] P. L. Krapivsky 和 S. Redner。双态相互作用自旋系统中的多数规则动力学。《物理评论快报》，90：238701，2003年。[35] Petra Berenbrink、Martin Hoefer、Dominik Kaaser、Pascal Lenzner、Malin Rau 和 Daniel Schmand。社交网络中的异步意见动力学。载于第*21*届自主智能体与多智能体系统国际会议，第109–117页，2022年。[36] Benjamin Doerr、Leslie Ann Goldberg、Lorenz Minder、Thomas Sauerwald 和 Christian Scheideler。利用双选项优势稳定共识。载于第*23*届 *ACM* 算法与体系结构并行性研讨会，2011年。[37] Elchanan Mossel、Joe Neeman 和 Omer Tamuz。社交网络中的多数动力学与信息聚合。《自主智能体与多智能体系统》，28(3)：408–429，2014年。

[38]Aris Anagnostopoulos、Luca Becchetti、Emilio Cruciani、Francesco Pasquale 和 Sara Rizzo。偏置意见动力学：细节决定成败。载于第*29*届人工智能国际联合会议，第53–59页，2020年。[39] Emilio Cruciani、Hlafo Alfie Mimun、Matteo Quattropani 和 Sara Rizzo。偏置通信模型中k多数动力学的相变。载于*ACM*分布式计算与网络国际会议，第146–155页。ACM，2021年。[40] Hicham Lesfari、Fr´ed´eric Giroire 和 St´ephane P´erennes。偏置多数意见动力学：利用图k支配。载于第*31*届人工智能国际联合会议，第377–383页。ijcai.org，2022年。[41] Francesco D'Amore、Andrea E. F. Clementi 和 Emanuele Natale。噪声交互下非线性意见动力学的相变。《群智能》，16(4)：261–304，2022年。[42] Naoki Masuda。复杂网络中的意见控制。《新物理学杂志》，17，2015年3月。[43] Guillermo Romero Moreno、Long Tran-Thanh 和 Markus Brede。投票者动力学中的连续影响力最大化：针对高阶节点是良策吗？载于自主智能体与多智能体系统国际会议，2020年。[44] Ercan Yildiz、Asuman Ozdaglar、Daron Acemoglu、Amin Saberi 和 Anna Scaglione。固执智能体的二元意见动力学。《*ACM* 经济学与计算汇刊》，1(4)，2013年12月。[45] Mikaela Irene D Fudolig 和 Jose Perico H Esguerra。单类型狂热投票者模型中共识达成的解析处理。《物理学*A*：统计力学及其应用》，413：626–634，2014年。[46] Thomas Milton Liggett。相互作用粒子系统，第276卷。Springer Science & Business Media，2012年。[47] David A Levin 和 Yuval Peres。马尔可夫链与混合时间，第107卷。美国数学学会，2017年。[48] Oran Ayalon、Yigal Sternklar、Ehud Fonio、Amos Korman、Nir S Gov 和 Ofer Feinerman。蚂蚁的序贯决策及其对证据累积决策模型的启示。《应用数学与统计学前沿》，第37页，2021年。