arXiv:2302.08608v2 [math.SP] 4 Mar 2024

量子猫映射特征函数的界

ELENA KIM 和 ROBERT KOIRALA

Abstract. 我们研究 ℓ^∞ 范数为 ℓ^2-归一化的量子猫映射特征函数。对于量子周期较短的映射（由 Bonechi 和 de Bi`evre 在[4]中构造），我们证明存在一个特征函数序列 u 其 $\|u\|_\infty \gtrsim (\log\ N)^{-1/2}$。对于一般的特征函数，我们证明了上界 $\|u\|_\infty \lesssim (\log\ N)^{-1/2}$。这里，半经典参数为 $h = (2\pi N)^{-1}$。我们的上界类似于 B´erard 在[2] 中针对无共轭点的紧黎曼流形所证明的上界。

1. Introduction

本文基于已有的一系列研究，这些研究考察了经典混沌量子系统中特征函数的极值。具体而言，我们研究量子猫映射这一研究最为充分的模型之一。猫映射最早由 Berry 和 Hannay 于 [3], 引入，是二维环面上 SL(2, $\mathbb{Z}$) 中双曲线性映射的量子化。

量子猫映射是量子混沌中的一个玩具模型。另一类标准的量子混沌模型由负曲率紧流形上的拉普拉斯特征函数给出（M, g），其满足 $-\Delta_g u = \lambda^2 u$，并且归一化为 $\|u\|_{L^2} = 1$。估计这些拉普拉斯特征函数的上确界一直是备受关注的领域。例如，Rudnick 和 Sarnak 在 [17] 中证明，在双曲三维流形上，存在一本征态序列 u_k，使得 $\|u_k\|_{L^\infty} \gg \lambda^{1/4}$。关于上界，Levitan、Avakumovi´c 和 H¨ormander 分别在[13], [1], [8], 中证明了如下著名结果：在一个紧黎曼流形上，$\|u\|_{L^\infty} \lesssim \lambda^{\frac{n-1}{2}}$，其中 $n =$dim M。然而，人们猜想实际上成立更强得多的结果。具体而言，Iwaniec 和 Sarnak 在 [9], 中猜想，对于常负曲率曲面，对所有 $\varepsilon > 0$均有 $\|u\|_{L^\infty} \lesssim_\varepsilon \lambda^\varepsilon$；在算术曲面上的 Hecke特征函数这一特殊情形下，他们得到了界 $\|u\|_{L^\infty} \lesssim_\varepsilon \lambda^{\frac{5}{12}+\varepsilon}$。在算术情形之外，目前已知的最佳界是 B´erard 在[2]中的结果：当（M, g）没有共轭点时，$\|u\|_{L^\infty} = O(\lambda^{\frac{n-1}{2}}/\sqrt{\log\ \lambda})$。

本文研究梅塔普列克变换，即双曲映射的量子化

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}), \quad |a+d| > 2, \quad ab, cd \in 2\mathbb{Z}. \tag{1}$$

我们谨感谢匿名审稿人认真审阅本文并提出宝贵意见。作者衷心感谢Semyon Dyatlov提出并指导本项目；他部分受美国国家科学基金会CAREER资助DMS-1749858支持。第一作者获美国国家科学基金会研究生研究奖学金计划（项目编号1745302）资助。第二作者曾获麻省理工学院本科生研究机会计划资助。

我们将 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 分解为有限维空间 $\mathcal{H}_N(\theta)$ 的直积分，其中 $\theta \in \mathbb{T}^2$和 $N \in \mathbb{N}$。如第 2 节所示，要求 ab、cd 为偶数，是为了确保与 A 相关联的元辛映射能够下降为从 $\mathcal{H}_N(0)$ 到其自身的映射。我们将所得的量子猫映射记为 M_N,0。引理 3 给出了每个 $\mathcal{H}_N(\theta)$ 的一个显式基。对于 $u \in \mathcal{H}_N(\theta)$，我们使用 $\|u\|_{\ell^p}$ 表示应用于该基的系数的标准 ℓ^p 范数。我们证明了定理 1 和定理 2，即 $\mathcal{H}_N(0)$ 上特征函数的 ℓ^∞ 范数界。数值示例见图 1。注意，由于空间 ℓ^2 和 ℓ^∞ 中的归一化，关于拉普拉斯特征函数的标准界 $\|u\|_{L^2} \lesssim \|u\|_{L^\infty} \lesssim \lambda^{\frac{n-1}{2}}\|u\|_{L^2}$ 变为界 $\frac{1}{\sqrt{N}}\|u\|_{\ell^2} \le \|u\|_{\ell^\infty} \le \|u\|_{\ell^2}$。

对于[4], Bonechi 和 De Bi`èvre 证明，对于每个 $A$，都存在一个周期较短的 $M_{N,\ 0}$ 序列。Faure、Nonnenmacher 和 Bi`èvre 在 [6] 中利用这一结果，证明存在一个特征函数序列，其局域化性质可由半经典测度量化。我们也利用[4] 证明存在一个具有局域化特征函数的 $M_{N,\ 0}$ 序列，具体如下界所示。

定理 1. 设 A 是一个满足(1)的矩阵，其特征值为正、迹为偶数，且非对角项互质。那么，我们可以找到一个奇整数序列 ，使得对所有 ，都存在 ，使得对所有 ，都存在一个特征函数 ，它是 ，$_0$的特征函数，并且满足 $\|u\|_{\ell^2} = 1$ ，且

$$\|u\|_{\ell^\infty} \ge \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2\log_\lambda N_k}}. \tag{2}$$

在更　　一般假设下，对于所有奇数 N，我们有如下上界　　d.

定理 2. 设 A 是一个满足（1）的矩阵。那么对于 $0 < \varepsilon < 1$，存在 N_0，使得对所有奇数 $N \ge N_0$，若 u 是 $M_{N,\ 0}$ 的特征函数，且满足 $\|u\|_{\ell^2} = 1$，则

$$\|u\|_{\ell^\infty} \le \frac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon)\log_\lambda N}}. \tag{3}$$

对于一列偶数 N 以及任意 θ，也可以证明类似的结论，证明方法与定理 1 和 2 的证明类似。然而，我们不再给出这些论证，因为它们过于技术化，且不会引入任何新思想。

关于量子猫映射的 ℓ^∞ 特征函数的界，算术量子混沌领域已经进行了广泛研究，参见 [10,12,14–16]。这些研究主要关注 Hecke特征函数，即量子猫映射 $M_{N,\ 0}$ 与海克算子的共同特征函数；在这一背景下，海克算子由 Kurlberg–Rudnick [11] 构造。 $\mathcal{H}_N(0)$ 总存在一个由 Hecke特征函数组成的标准正交基；然而，由于 $M_{N,\ 0}$ 的特征子空间可能具有很大的重数（见 [11, 脚注 3]），对 Hecke特征函数的 ℓ^∞范数给出的上界并不意味着一般特征函数也满足相同的界。下面列出已知的关于 ℓ^2-归一化 Hecke特征函数 u 的界：

- Kurlberg–Rudnick [12] 证明了上界 $\|u\|_{\ell^\infty} \lesssim_\varepsilon N^{-\frac{1}{8}+\varepsilon}$。
- 在 [12]（其处理了约一半的 N素数值）的基础上，Kurlberg [10]证明，对于 N 的所有素数值，除有限多个外，都有上界

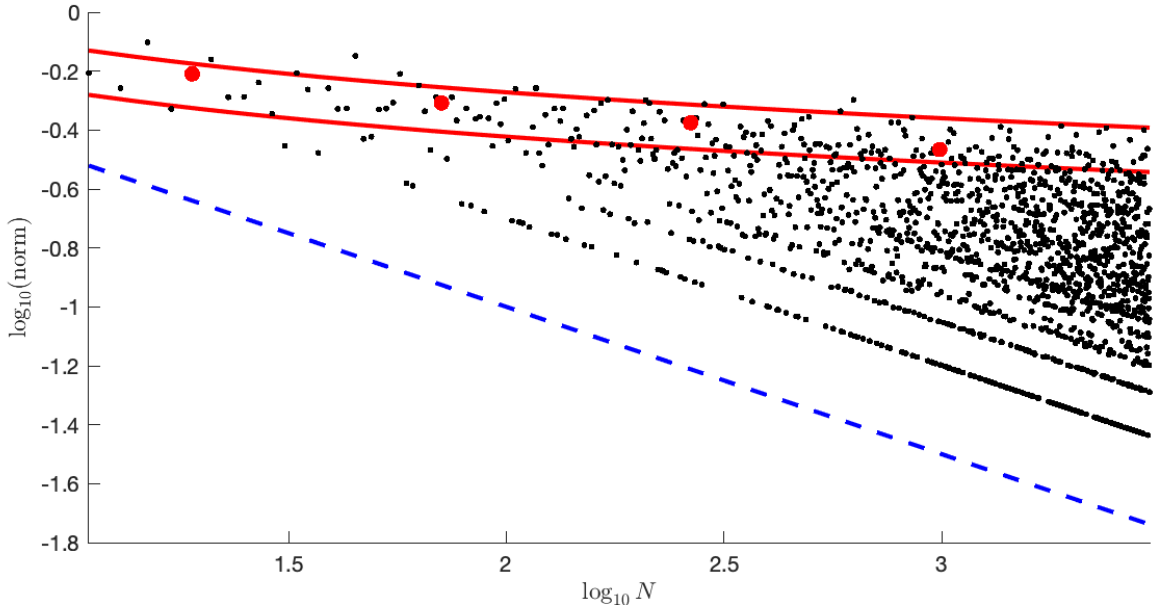


FIGURE 1. 特征函数的最大 ℓ^∞-范数图像，其中该 ℓ^2-归一化特征函数属于 $M_{N,0}$ 其中 $M_{N,0}$ 与 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 相关。定理 1 和 2给出的下界和上界 $(2 \log_\lambda N)^{-1/2}$ 和 $(\log_\lambda N)^{-1/2}$分别对应红色实线。蓝色虚线表示平凡下界 $N^{-1/2}$。最后，大红点对应定理 N_k 中的序列 1。

$\|u\|_{\ell^\infty} \le 2N^{-\frac{1}{2}}$，并推导出 N无平方因子值的上界 $\|u\|_{\ell^\infty} \lesssim_\varepsilon N^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$。

• Olofsson[14, 15] 证明了，对于 $\|u\|_{\ell^\infty} \lesssim N^{-\frac{1}{4}}$ 的大多数取值，上界为 N （按密度的意义，当 $N \to \infty$时）。另一方面，这些论文还构造了特征函数，对于大多数 $\|u\|_{\ell^\infty} \gtrsim N^{-\frac{1}{4}}$取值 N，其下界为，且这些取值不是无平方因子的。

2. PRELIMINARIES

我们首先回顾本文所需的定义。首先，回顾半经典Weyl量子化。对于 $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$ 以及一个半经典参数 $h \in (0, 1]$,

$$\mathrm{Op}_h(a)f(x) := \frac{1}{2\pi h} \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{i}{h}(x-x')\xi} a\left(\frac{x+x'}{2}, \xi\right) f(x')dx'd\xi, \quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

定义符号类

$$S(1) = \left\{ a \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2\right) : \sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^2} \left|\partial^\alpha_{(x,\xi)} a\right| < \infty \text{ for all } \alpha \in \mathbb{N}^2 \right\},$$

由此自然导出半范数 $\|a\|_{C^m} := \max_{|\alpha|\le m} \sup_{\mathbb{R}^2} |\partial^\alpha_{(x,\xi)} a|$ for $m \in \mathbb{N}_0$。根据[18, 定理 4.16], , 我们知道，对于 $a \in S(1)$，$\mathrm{Op}_h(a)$ 同时作用于 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 和 $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$。

现在，令 $\omega=(y,\eta)$ $z=(x,\xi)\in\mathbb{R}^2$。在 $\mathbb{R}^2$ 上定义标准辛形式 σ 为$\sigma(z,\omega):=\xi y-x\eta$，并定义量子平移为 $U_\omega:=\mathrm{Op}_h(a_\omega)$，其中 $a_\omega(z):=\exp(\frac{i}{h}\sigma(\omega,z))$。注意到 $a_\omega(z)\in S(1)$，可知 U_ω 定义良好，并作用于 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$。在[18, 定理 4.7],中证明了

$$U_\omega f(x)=e^{\frac{i}{h}\eta x-\frac{i}{2h}y\eta}f(x-y).$$

因此，U_ω 是一个酉 算子，作用于 $L^2(\mathbb{R})$，并满足以下精确的埃戈罗夫定理 ，

$$U_\omega^{-1}\mathrm{Op}_h(a)U_\omega=\mathrm{Op}_h(\tilde{a})\quad\text{for all } a\in S(1),\quad \tilde{a}(z):=a(z+\omega). \tag{4}$$

由 $U_\omega U_{\omega'}=e^{\frac{i}{2h}\sigma(\omega$<style id='5'>，$\omega')}U_{\omega+\omega'}$ 这一事实，我们推得以下对易子公式，

$$U_\omega U_{\omega'}=e^{\frac{i}{h}\sigma(\omega,\omega')}U_{\omega'}U_\omega. \tag{5}$$

现在令 $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ 表示实辛 2×2矩阵群。换言之，当且仅当 $A\in\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ 满足 $\sigma(Az,A\omega)=\sigma(z,\omega)$ 时，才有此关系。注意，在这个特定的二维情形下，$\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$。对于每个 $A\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$，记 $\mathcal{M}_A$ 为满足以下精确埃戈罗夫定理的所有酉变换M 的集合： $L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})$,

$$M^{-1}\mathrm{Op}_h(a)M=\mathrm{Op}_h(a\circ A)\quad\text{for all } a\in S(1). \tag{6}$$

根据[18, 定理 11。9], ，这些变换既存在，也在相差一个酉因子的意义下唯一。

那么， $\mathcal{M}:=\cup_{A\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}\mathcal{M}_A$ 是 $L^2(\mathbb{R}$的酉变换子群，称为元辛群，映射 $M\mapsto A$ 是一个群同态 $\mathcal{M}\to\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{R})$。作为方程（6的推论，我们得到元辛变换与量子变换之间的以下交织关系： $M^{-1}U_\omega M=U_{A^{-1}\omega}$ 对所有 $M\in\mathcal{M}_A,\ \ \omega\in\mathbb{R}^2$.

我们将注意力转向环面 $\mathbb{T}^2:=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上函数的量子化。每个 $a\in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ 都可以视为 $\mathbb{R}^2$ 上的 $\mathbb{Z}^2$-周期函数。注意，任意 $a\in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ 也是 $S(1)$ 的一个元素，因此其 Weyl量子化 $\mathrm{Op}_h(a)$ 是作用于 $L^2(\mathbb{R})$ 上的算子。
根据方程（5），我们有以下对易关系，

$$\mathrm{Op}_h(a)U_\omega=U_\omega\mathrm{Op}_h(a)\quad\text{for all } a\in C^\infty(\mathbb{T}^2),\quad \omega\in\mathbb{Z}^2. \tag{7}$$

这些对易关系促使我们将 $L^2(\mathbb{R})$ 分解为有限维空间的直积分 $\mathcal{H}_N(\theta)$ ，其中 $\theta\in\mathbb{T}^2$，使得 $\mathrm{Op}_h(a)$ 可作用于这些空间。根据[5, 命题 2。1], 为确保这些空间非平凡，本文余下部分我们假设

$$h=(2\pi N)^{-1}\quad\text{where } N\in\mathbb{N}.$$

We 将 $\mathcal{H}_N(\theta)$ 称为量子态空间。具体而言，对于每个 $\theta\in\mathbb{T}^2$，令

$$\mathcal{H}_N(\theta):=\left\{f\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}):U_\omega f=e^{2\pi i\sigma(\theta,\omega)+N\pi iQ(\omega)}f\text{ for all }\omega\in\mathbb{Z}^2\right\},$$

其中，二次型 Q 在 $\mathbb{R}^2$ 上由 $Q(\omega)=y\eta$ 对 $\omega=(y,\eta)\in\mathbb{R}^2$定义。下面的引理给出了 $\mathcal{H}_N(\theta)$ 的一个显式基。

引理 3 ([7],引理 2.5)。 空间 $\mathcal{H}_N(\theta)$ 是 N 维的，其基为 $\{e_j^\theta\}$，定义于 $j \in \{0,\dots,N-1\}$ 和 $\theta = (\theta_x,\ \theta_\xi) \in \mathbb{R}^2$。特别地，

$$e_j^\theta(x) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi i \theta_\xi k} \delta\left(x - \frac{Nk + j - \theta_x}{N}\right).$$

我们通过要求 $\{e_j^\theta\}$为标准正交基，在每个量子态 $\mathcal{H}_N(\theta)$ 上固定一个内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$。利用 e_j^θ 的平移恒等式（见 [7, (2.35)]）可以证明，尽管每个 $\{e_j^\theta\}$ 取决于代表元 $\theta_x \in \mathbb{R}$的选择，但内积只取决于 $\theta \in \mathbb{T}^2$。我们常用 $\|\cdot\|_{\ell^2}$表示由该内积定义的范数。利用基 $\{e_j^\theta\}$，我们可以将空间 $\mathcal{H}_N(\theta)$视为 $\mathbb{T}^2$上的光滑 N维向量丛的纤维，并将其称为 $\mathcal{H}_N$。

对于 $u = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j e_j^\theta$，我们令

$$\|u\|_{\ell^p} := \|(\alpha_0,\dots,\alpha_{N-1})\|_{\ell^p}.$$

固定 $N \in \mathbb{N}$ 和 $a \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$以定义量子化

$$\mathrm{Op}_{N,\theta}(a) := \mathrm{Op}_h(a)|_{\mathcal{H}_N(\theta)} : \mathcal{H}_N(\theta) \to \mathcal{H}_N(\theta), \quad \theta \in \mathbb{T}^2,$$

其光滑地依赖于 θ。根据 $\mathcal{H}_N(\theta)$ 的定义以及方程（7）中给出的对易关系，该限制成立。

我们设

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \tag{8}$$

并选取一个梅塔普勒克算子 $M \in \mathcal{M}_A$。回忆一下，对于 $\omega = (y,\eta)$ $z = (x,\xi) \in \mathbb{Z}^2$,$\sigma(z,\omega)$ $= \xi y - x\eta$ 和 $Q(\omega) = y\eta$。根据 [7, 引理 2.9],，存在唯一的 $\varphi_A \in (\mathbb{Z}/2)^2$，使得对所有 $\omega \in \mathbb{Z}^2$, $Q(A^{-1}\omega) - Q(\omega) = \sigma(\varphi_A,\omega)$ 模 $2\mathbb{Z}$。利用$\mathcal{H}_N(\theta)$的定义以及 $M^{-1}U_\omega M = U_{A^{-1}\omega}$这一事实，我们可以验证，对于所有 $\theta \in \mathbb{T}^2$， $M(\mathcal{H}_N(\theta)) \subset \mathcal{H}(A\theta + \frac{N\varphi_A}{2})$。

记 $M_{N,\theta}$:= $M|_{\mathcal{H}_N(\theta)}$: $\mathcal{H}_N(\theta) \to \mathcal{H}_N(A\theta + \frac{N\varphi_A}{2})$，它关于 $\theta \in \mathbb{T}^2$ 光滑变化。我们要求 $M_{N,\theta}$ 的定义域和值域相同，换言之，必须有

$$(I - A)\theta = \frac{N\varphi_A}{2} \mod \mathbb{Z}^2. \tag{9}$$

因此，当 $\theta = 0$时，条件 (9) 在 N 为偶数或 $\varphi_A = 0$ 时成立。

我们以下假设 $\varphi_A = 0$，由此得到 $\sigma(\varphi_A,\omega) = 0$ 模 $\mathbb{Z}/2$。注意，对所有$\omega = (y,\eta)$,

$$Q(A^{-1}\omega) - Q(\omega) = (dy - b\eta)(-cy + a\eta) - y\eta = -dcy^2 + 2bcy\eta - ba\eta^2,$$

我们必须有 $dcy^2 + ba\eta^2 = 0$ 模 $2\mathbb{Z}$。由此可得， dc 和 ab 必须为偶数。

假设条件 (9成立，则对所有 $a \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$，有如下精确的埃戈罗夫定理，

$$M_{N,\theta}^{-1}\mathrm{Op}_{N,\theta}(a)M_{N,\theta} = \mathrm{Op}_{N,\theta}(a \circ A).$$

我们证明定理2 的关键是下面这个关于 M的显式公式。

Lemma 4. 当 A 由(8) 给出，且 $b \neq 0$是 $\mathcal{M}_A$ 的一个元素时，其由下式给出

$$Mu(x) = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{|b|}} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi N i \Phi(x,y)} u(y) dy, \tag{10}$$

其中

$$\Phi(x,y) = \frac{d}{2b}x^2 - \frac{xy}{b} + \frac{a}{2b}y^2. \tag{11}$$

我们简要概述该公式的推导；更多细节请参见 [18] 中的定理 11.10 及其后续评注。设 $\Lambda = \{(x,y,\xi,-\eta) : (x,\xi) = A(y,\eta)\}$，并注意到 Λ 是 $\mathbb{R}^4$ 的拉格朗日子流形。此外，由于 $b \neq 0$，$\Lambda \ni (x,y,\xi,\eta) \mapsto (x,\eta)$ 是满射。因此，存在一个生成函数 $\Phi(x,y)$，使得 $\Lambda = \{(x, y, \partial_x\Phi, \partial_y\Phi)\}$。由于 $\eta = -\partial_y\Phi$ 且 $\xi = \partial_x\Phi$，我们知道 $\Phi(x,y)$ 由 (11) 给出。于是得到 (10)，其中的系数保证 M 是酉的，至多相差一个单位因子。

3. Proof of Theorem 1

首先，按照 [4], 第 3.1 节中的表述，我们证明对于一个序列 N_k，$M_{N_k,\,0}$具有一个维数很大的退化特征空间。在 3.2 节中，我们随后将定理 1 的证明归结为一个线性代数论证。

3.1. 的特征子空间, $_0$。 考虑 A 由（8）给出，满足 b 和 c 互质，且 Tr A为大于 2 的偶数。设 λ 为 A的最大特征值。那么对每个 $t \in \mathbb{N}$,

$$A^t = p_t A - p_{t-1} I, \quad p_{t+1} = \mathrm{Tr}(A) p_t - p_{t-1}, \text{ where } \quad p_t = \frac{\lambda^t - \lambda^{-t}}{\lambda - \lambda^{-1}} \in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

令 $T_N = \min\{t : A^t = I \text{ 模 } N\}$，并且对于 $k \in \mathbb{N}$，定义

$$N_k' := \max\{N : A^k = I \mod N\}.$$

定理 1 的证明中至关重要的是 [4]中的以下论述。为方便读者，我们在此重现其证明。

定理 5（[4], 命题 11）。对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们有 $N'_{2k} = 2p_k$、$N'_{2k+1} = p_k + p_{k+1}$ 和 $T_{N_k'} = k$。

证明。 由方程（12）可知， N_k' 是满足以下条件的最大整数

$$\begin{bmatrix} p_k a - p_{k-1} - 1 & p_k b \\ p_k c & p_k d - p_{k-1} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mod N_k'.$$

回顾一下，我们假设 b 和 c 互质。因此， $p_k = 0$ 模 N_k' 且 $p_{k-1} = -1$模 N_k'，从而得到 N_k' =最大公约数$(p_k, p_{k-1}+1)$。我们声称，对于 $s = 0$，……，$k-1$,

$$N_k' = \gcd(p_{k-s} + p_s, p_{k-(s+1)} + p_{s+1}). \tag{13}$$

我们通过归纳法进行证明。注意到 $p_0 = 0$ 且 $p_1 = 1$，因此，(13) 对 $s = 0$显然成立。现在假设我们已知对于某个 $s \geq 0$，(13) 成立。利用(12)以及恒等式 最大公约数$(a, ca - b)$ = 最大公约数(a, b)，我们得到

$$\begin{aligned} N'_k &= \gcd(\operatorname{Tr} Ap_{k-s-1} - p_{k-s-2} + p_s,\ p_{k-s-1} + p_{s+1}) \\ &= \gcd(\operatorname{Tr} A(p_{k-s-1} + p_{s+1}) - \operatorname{Tr} Ap_{s+1} - p_{k-s-2} + p_s,\ p_{k-s-1} + p_{s+1}) \\ &= \gcd(p_{s+2} + p_{k-(s+2)},\ p_{k-(s+1)} + p_{s+1}), \end{aligned}$$

由此完成归纳法。我们在 $k = 2\ell$中令 $s = \ell$，代入式（13）即可得出结论

$$N'_{2\ell} = \gcd(2p_\ell, p_{\ell-1} + p_{\ell+1}) = \gcd(2p_\ell, \operatorname{Tr} Ap_\ell) = 2p_\ell,$$

其中，最后一个等号由我们的假设 Tr A 为偶数得出。类似地，在式（$k = 2\ell + 1$ 和 $s = \ell$ 中令 13，可得 $N'_{2\ell+1} = p_\ell + p_{\ell+1}$。
现在注意到，对于每个 k，都有

$$A^k = 1 \mod N'_k, \tag{14}$$

$$A^{T_{N'_k}} = 1 \mod N'_k, \quad \text{and} \quad A^{T_{N'_k}} = 1 \mod N'_{T_{N'_k}}. \tag{15}$$

根据 $T_{N'_k}$ 的定义和式（14），我们可知 $T_{N'_k} \leq k$。根据 N'_k 的定义和式（15），我们可知 $N'_k \leq N'_{T_{N'_k}}$。由于 $\{N'_k\}$是递增的，因此可得 $T_{N'_k} \geq k$。因此，$T_{N'_k} = k$。□

现在，令 $n(N)$ 表示 $M_{N,\ 0}$ 的周期；具体而言

$$n(N) := \min\{t : M^t_{N,0} = e^{i\varphi} \text{ for some } \varphi \in \mathbb{R}\}.$$

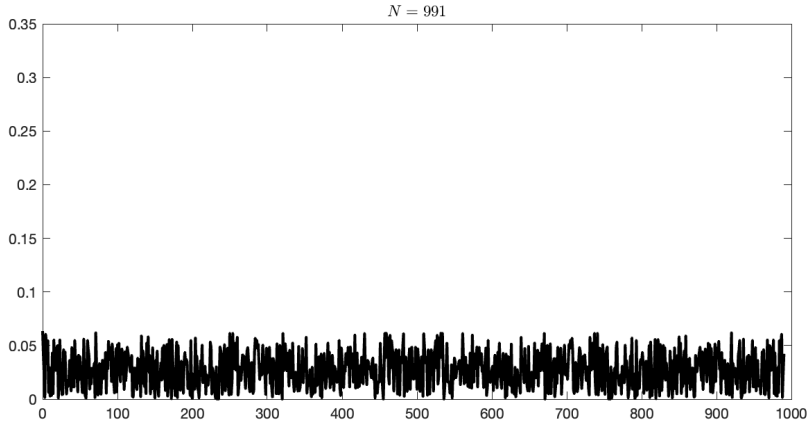
假设 A_N是一个满足 $A^{T_N} = 1 + NA_N$的整数项矩阵。由 [3, (36)-(46)], 可知，若 $n(N) = T_N$ 为奇数，或者 N为偶数且（ N）和（$A_N)_{12}$均为偶数，则$A_N)_{21}$。否则， $n(N) = 2T_N$。

利用 $n(N)$的这个公式和定理5，仿照 [4], 我们证明 $n(N$的一个上界，该上界仅取决于 λ 和 N。

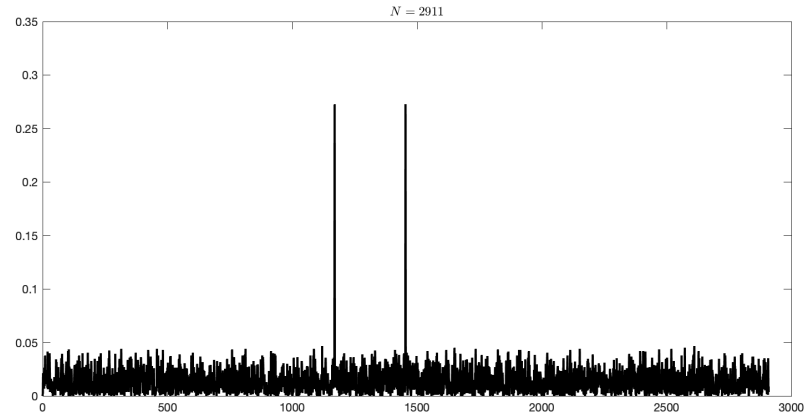
推论 6。设 λ 是 A的最大特征值。那么，存在一个由奇数 N_k构成的序列，使得 2 log $_\lambda N_k + 1 \geq n(N_k)$。

证明。利用我们的假设 Tr A 是偶数，我们注意到 p_{2k} 是偶数，而 p_{2k+1} 是奇数。因此， $n(N'_{2k+1}) = T_{N'_{2k+1}} = 2k + 1$。
现在我们用 $n(N'_{2k+1}$表示一个关于 N'_{2k+1}的上界。由于 Tr $A > 2$，我们知道 $\lambda > 1$。此外，利用定理5， $N'_{2k+1} = \frac{\lambda^{k+1} + \lambda^k - \lambda^{-k-1} - \lambda^{-k}}{\lambda - \lambda^{-1}} \geq \lambda^k$。因此，$\log_\lambda N'_{2k+1} \geq k$，由此得到 2 $\log_\lambda(N'_{2k+1})$ $+ 1 \geq 2k + 1 = n(N'_{2k+1})$。记 N'_{2k+1}为 N_k，证毕。□

注意到，利用 N'_{2k} 为偶数这一事实，同样的证明思路也可以推广到偶数 N 序列。不过，由于奇数情形相对简单，我们的主定理针对奇数 N 序列证明。



(A) $N = 991$



(B) $N = 2911$

FIGURE 2. 最大 ℓ^∞-范数 ℓ^2归一化特征函数$M_{N,\ 0}$，其中 $M_{N,\ 0}$ 对应于 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$。具体而言，每个绘图点对应于特征函数的第 i 个坐标的绝对值，其中 $0 \le i \le N-1$。注意， $N = 2911$ 是推论 N_k 中的序列 6的一个元素，而 $N = 991$ 则不是。

为简化记号，再次令 $N_k := N'_{2k+1}$，设

$$t_k := n(N_k).$$

因此，若 u 是 $M_{N_k,\ 0}$的一个特征函数，特征值为 λ, $M^{t_k}_{N_k,\ 0}u = e^{i\varphi_k}u = \lambda^{t_k}u$。于是，$M_{N_k,\ 0}$ 的每个特征值都满足 $\lambda^{t_k} = e^{i\varphi_k}$，从而得到一个重数至少为 $\frac{N_k}{t_k}$ 的特征值。换言之，$M_{N_k,\ 0}$ 具有一个维数至少为 $\frac{N_k}{t_k}$. 的退化特征空间

3.2. 下界。现在我们可以用线性代数的术语来陈述下界。

Pro位置 7。设 V 是 $\mathbb{C}^N$ 的子空间，其维数至少为 $\frac{N}{t}$。 n,

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \le \max_{u \in V,\ \|u\|_{\ell^2}=1} \|u\|_{\ell^\infty}. \tag{16}$$

证明。定义 $\Pi\colon\ \mathbb{C}^N \to V$ 为到 V 上的正交投影，并令 e_j 表示第 j 个坐标向量。注意，

$$\sum_{j=1}^{N} \|\Pi e_j\|_{\ell^2}^2 = \operatorname{Tr}(\Pi^*\Pi) = \operatorname{Tr}\Pi = \dim V \geq \frac{N}{t}.$$

因此，存在一个 j 使得 $\|\Pi e_j\|_{\ell^2} \geq \frac{1}{\sqrt{t}}$。于是我们有

$$\sup_{\substack{u\in V\\ \|u\|_{\ell^2}=1}} \|u\|_{\ell^\infty} = \max_j \sup_{\substack{u\in\mathbb{C}^N\\ \|u\|_{\ell^2}=1}} |\langle \Pi u, e_j\rangle| = \max_j \sup_{\substack{u\in\mathbb{C}^N\\ \|u\|_{\ell^2}=1}} |\langle u, \Pi e_j\rangle| = \max_j \|\Pi e_j\|_{\ell^2} \geq \frac{1}{\sqrt{t}},$$

这就完成了证明。 □

我们声称，命题 7 蕴含定理 1。具体而言，取 V 为 M_{N_k}的退化特征空间，0 且维数至少为 $\frac{N_k}{t_k}$，并利用 $\mathbb{C}^{N_k} \simeq \mathcal{H}_{N_k}(0)$，命题 7可得

$$\frac{1}{\sqrt{2\log_\lambda N_k + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{t_k}} \leq \max_{u\in V,\ \|u\|_{\ell^2}=1} \|u\|_{\ell^\infty}. \tag{17}$$

关于此下界的具体演示，见图 2。

3.3. 命题 7中的特征函数。 我们进一步考察特征子空间 V，它达到了命题 7中的下界。回顾一下，我们定义 Π 为到 V的正交投影，并考察了如下形式的特征函数 $\Pi(\sum_{j=0}^{N-1}\alpha_j e_j^0)$。为求得这些特征函数更精确的公式，我们推导 Π的公式。

设 V对应于特征值 λ。我们知道，$M_{N_k,\ 0}$ 的谱包含于$\{z\colon\ z^{t_k} = e^{i\varphi_k}\}$。因此，对于某个 $s\in\mathbb{Z}$，λ具有形式 $e^{i\frac{\varphi_k+2\pi s}{t_k}}$。于是，在谱上，

$$\frac{1}{t_k}\left(1 + \frac{z}{\lambda} + \cdots + \frac{z^{t_k-1}}{\lambda^{t_k-1}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{if } z=\lambda \\ 0, & \text{else} \end{cases}.$$

由此可见

$$\Pi = \frac{1}{t_k}\left(I + e^{-i\frac{\varphi_k+2\pi s}{t_k}}M + \cdots + \left(e^{-i\frac{\varphi_k+2\pi s}{t_k}}M\right)^{t_k-1}\right).$$

因此，在证明下界时，我们实际上研究的是如下形式的特征函数

$$\frac{1}{t_k}\sum_{t=0}^{t_k-1} e^{-i\frac{\varphi_k+2\pi s}{t_k}t} M^t e_j^0. \tag{18}$$

类似的特征函数已在[6]中得到研究。具体而言，该论文考察了如下形式的特征函数

$$\frac{1}{t_k}\sum_{t=0}^{t_k-1} e^{-i\frac{\varphi_k+2\pi s}{t_k}t} M^t g(x), \tag{19}$$

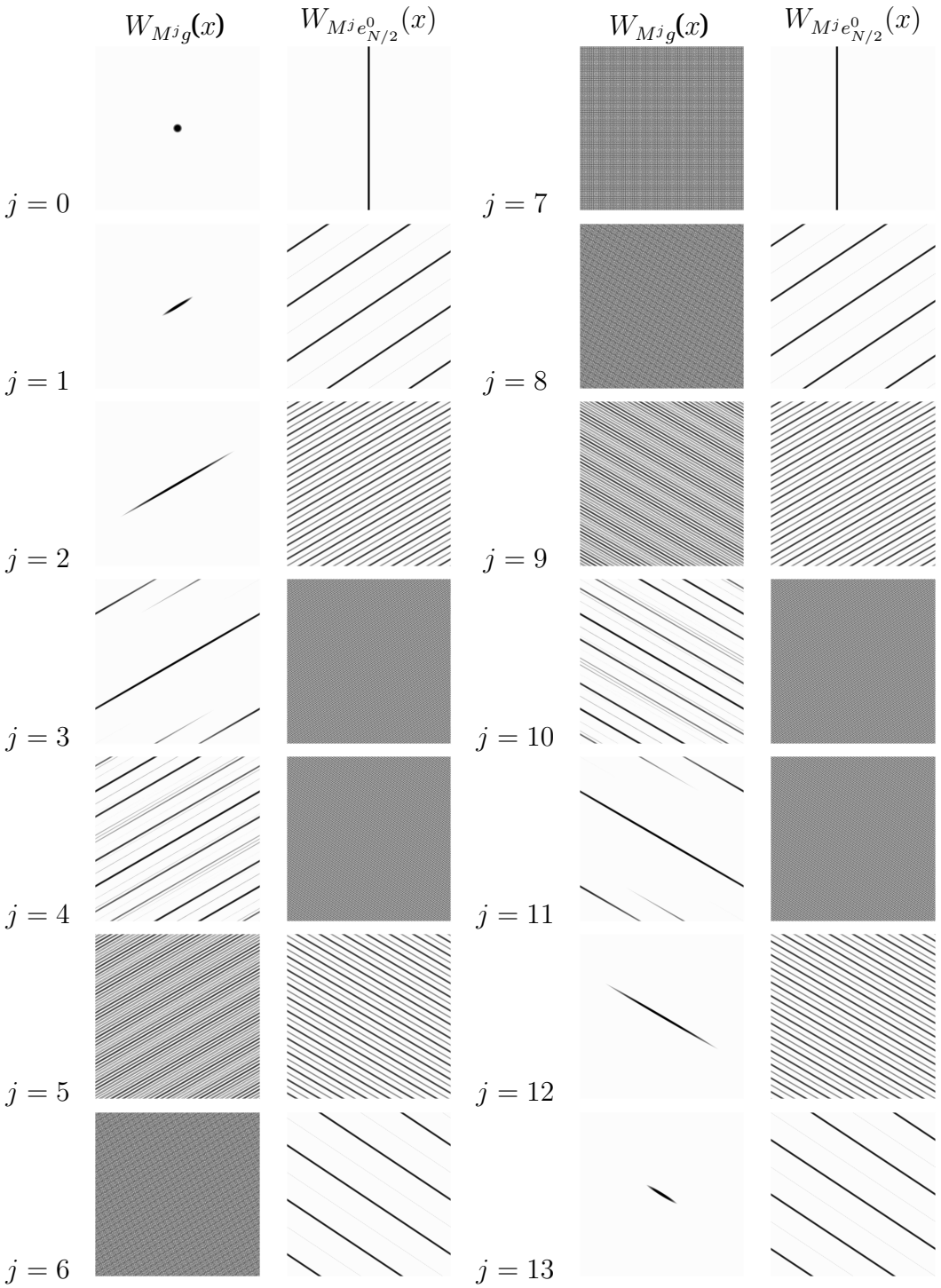


FIGURE 3. 在两列中，左侧图像显示了 $M^j g$ 的维格纳函数。这个特定的高斯函数以 $(1/2, 1/2)$ 为中心，该点是 A 的不动点。每列右侧的图像显示了 $M^j e^0_{N/2}$ 的维格纳函数。在周期进行到一半时，$W_{M^j e^0_{N/2}}(x)$ 变得不那么混沌，而 $W_{M^j g}(x)$ 则不会出现这种情况。

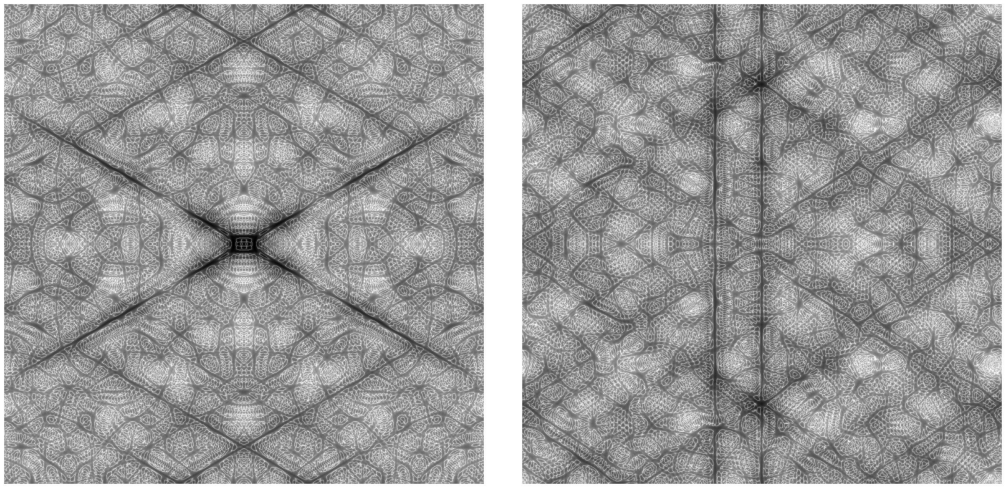


FIGURE 4. 左图展示了特征函数 (19) 的维格纳函数，其中高斯函数的中心位于 $(1/2,\ 1/2)$，这是一个不动点。右图展示了特征函数 (18) 的维格纳函数。请注意，左图显示了在 $(1/2,\ 1/2)$ 处的局域化，而右图没有。我们猜想，特征函数 (18) 的极限在半经典测度的意义下等分布。

其中 $g(x)$ 是一个高斯函数。这些特征函数的极限在半经典测度的意义下被证明是一半遍历、一半局域化。尽管 (18) 和 (19) 看起来非常相似，但它们实际上表现出不同的行为，如图 3和图 4所示。在这些图中，$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，$k = 14$，以及 $N_k = 5822$。

4. PROOF OF THEOREM 2

我们考察 $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 形式为（1）的情形。注意，对 A 的条件比第 3 节中的条件限制更少。设 N 为奇数。我们从以下色散估计开始。

命题 8. 对于 N为奇数且 $M_{N,\ 0}$: $\mathcal{H}_N(0) \to \mathcal{H}_N(0)$，有

$$\left|\left\langle M_{N,0} e_j^0, e_k^0 \right\rangle_{\mathcal{H}}\right| \leq \frac{\sqrt{|b|}}{\sqrt{N}}.$$

证明。我们有 通过计算 $M_{N,\ 0} e_j^0$。由引理 4，对于 $\Phi(x,\ y) = \frac{d}{2b}x^2 - \frac{xy}{b} + \frac{a}{2b}y^2$,

$$M_{N,0} e_j^0(x) = \frac{1}{\sqrt{|b|}} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i N \Phi(x,y)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(y - \frac{Nk+j}{N}\right) dy = \frac{1}{\sqrt{|b|}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i N \Phi\left(x, \frac{Nk+j}{N}\right)}.$$

因此，我们着重计算 $\Phi\left(x, \frac{Nk+j}{N}\right)$ 模 $N\mathbb{Z}$。在下文中，我们令 $k = mb + r$ for $0 \le r \le |b| - 1$。我们有

$$\Phi\left(x, \frac{Nk+j}{N}\right) = \frac{d}{2b}x^2 - xm - \frac{xr}{b} - \frac{xj}{Nb} + \frac{ar^2}{2b} + \frac{arj}{bN} + \frac{aj^2}{2bN^2} \mod N\mathbb{Z}.$$

因此，利用泊松求和公式以及 $\delta(x-x_0)f(x) = \delta(x-x_0)f(x_0)$ 这一事实，我们知道

$$\begin{aligned} M_{N,0}e_j^0(x) &= \frac{1}{\sqrt{|b|}} \sum_{r=0}^{|b|-1} e^{\frac{2\pi i}{b}\left(\frac{aNr^2}{2} + arj + \frac{aj^2}{2N}\right)} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{\frac{2\pi iN}{b}\left(\frac{d}{2}x^2 - xr - \frac{xj}{N}\right)} e^{-2\pi iNxm} \\ &= \frac{1}{N\sqrt{|b|}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{r=0}^{|b|-1} e^{\frac{2\pi i}{b}\left(\frac{dl^2}{2N} - lr - \frac{lj}{N} + \frac{ar^2N}{2} + arj + \frac{aj^2}{2N}\right)} \delta\left(x - \frac{l}{N}\right). \end{aligned}$$

现在令

$$c_l = \sum_{r=0}^{|b|-1} e^{\frac{2\pi i}{b}\left(\frac{dl^2}{2N} - lr - \frac{lj}{N} + \frac{ar^2N}{2} + arj + \frac{aj^2}{2N}\right)},$$

we w要证明 c_l的周期为 N，换句话说，即 $c_l = c_{l+N}$。我们知道 t

$$c_{l+N} = e^{\frac{2\pi i}{b}\left(\frac{dl^2}{2N} + dl + \frac{dN}{2} - \frac{lj}{N} - j + \frac{aj^2}{2N}\right)} \sum_{r=0}^{|b|-1} e^{\frac{2\pi i}{b}\left(-lr - Nr + \frac{ar^2N}{2} + arj\right)} = \alpha_{l+N} \sum_{r=0}^{|b|-1} \beta_{l+N,r}.$$

回顾第 2 节，为了使 , 0 下降到自身的 $\mathcal{H}_N(0)$，我们证明了 ab 必须为偶数。因此，

$$\beta_{l,r+b} = e^{\frac{2\pi i}{b}\left(-lr - lb + \frac{ar^2N}{2} + abrN + \frac{ab^2N}{2} + arj + abj\right)} = e^{\frac{2\pi i}{b}\left(-lr + \frac{ar^2N}{2} + arj\right)} = \beta_{l,r}.$$

因此， $c_{l+N} = \alpha_{l+N} \sum_{r=d}^{|b|-1+d} \beta_{l+N,\ r}$。由于 $ad - bc = 1$，我们知道 $ad = 1$ 模 b。于是，

$$c_{l+N} = \alpha_{l+N} \sum_{r=d}^{|b|-1+d} e^{\frac{2\pi i}{b}\left(-lr - Nr + \frac{ar^2N}{2} + arj\right)} = \alpha_{l+N} \sum_{r=0}^{|b|-1} e^{\frac{2\pi i}{b}\left(-lr - ld - Nd + \frac{ar^2N}{2} + \frac{dN}{2} + arj + j\right)} = c_l.$$

利用对于所有 $l \in \mathbb{Z}$ 都有 $c_k = c_{k+lN}$，且 $\{e_j^0\}$ 是一个标准正交基这一事实，我们得到

$$\begin{aligned} &\left\langle M_{N,0}e_j^0(x), e_k^0(x)\right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N|b|}} \left\langle \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{k+lN}\delta\left(x - \frac{Nl+k}{N}\right), \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \delta\left(x - \frac{Nl+k}{N}\right) \right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N|b|}} \sum_{r=0}^{|b|-1} e^{\frac{2\pi i}{b}\left(\frac{ar^2N}{2} + arj + \frac{aj^2}{2N} + \frac{dk^2}{2N} - kr - \frac{kj}{N}\right)}. \end{aligned}$$

根据三角不等式，我们得出$\left|\left\langle M_{N,0}e_j^0(x)\ e_k^0(x)\right\rangle_{\mathcal{H}}\right| \le \frac{\sqrt{|b|}}{\sqrt{N}}$。

□

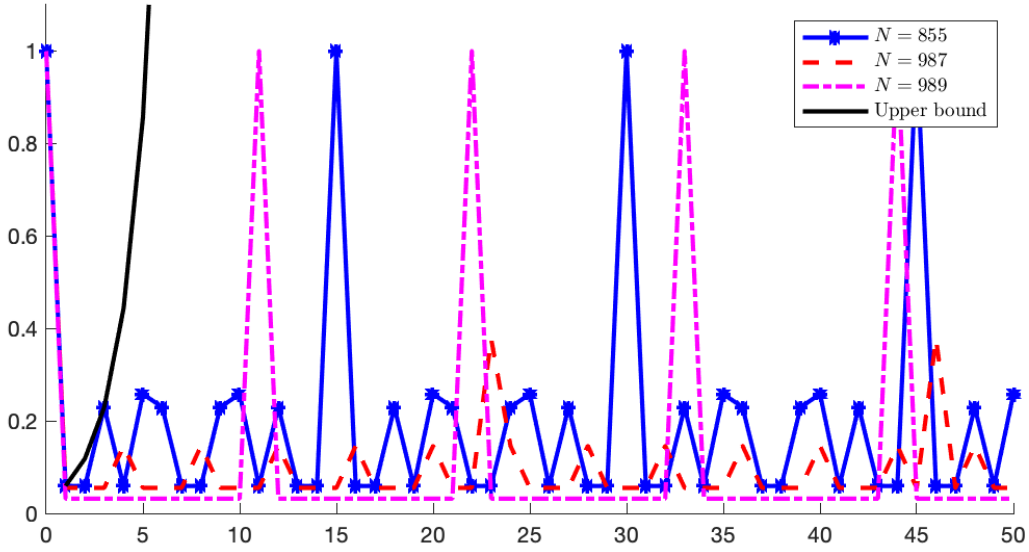


FIGURE 5. $\|M_{N,0}^j\|_{\ell^1\to\ell^\infty}$ 在 $0 \le j \le 50$ 以及 N 的若干取值下的图像。$M_{N,0}$ 对应于 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$。我们还绘出了 $\sqrt{|b|/N}$ 的上界（$N = 855$）。

对于 $j > 0$，我们使用记号 $A^j = \begin{bmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{bmatrix}$。作为命题8的直接推论，对于$j > 0$,

$$\left\|M_{N,0}^j\right\|_{\ell^1\to\ell^\infty} \le \frac{\sqrt{|b_j|}}{\sqrt{N}}.$$

图 5 将该上界与 $\|M_{N,0}^j\|_{\ell^1\to\ell^\infty}$ 的实际值进行了比较。现在，由于 $\mathbf{Tr}\ A > 2$，A具有特征值 λ、λ^{-1}，且满足 $\lambda > 1$。因此我们得到 $|b_j| \sim \lambda^j$，从而

$$\left\|M_{N,0}^j\right\|_{\ell^1\to\ell^\infty} \le \frac{C\lambda^{j/2}}{\sqrt{N}}.$$

设 u 是 $M_{N,0}$ 的一个特征函数，其特征值为 μ。由于 $M_{N,0}$ 是酉的，$|\mu| = 1$。我们有 $u = \mu^{-n} M_{N,0}^n u$，这给出 $u = \frac{1}{T}\left(\sum_{n=0}^{T-1} \mu^{-n} M_{N,0}^n\right) u$。

令 $B = \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{T-1} \mu^{-n} M_{N,0}^n$，我们得到 $u = Bu$。同样，由于 $M_{N,0}$是酉的，

$$B^*B = \frac{1}{T^2} \sum_{m,n=0}^{T-1} \mu^{m-n} M_{N,0}^{n-m}.$$

Then

$$\|B^*B\|_{\ell^1\to\ell^\infty} \le \frac{1}{T} + \frac{1}{T^2} \sum_{\substack{m\ne n \\ 0\le m,n\le T-1}} \|M_{N,0}^{n-m}\|_{\ell^1\to\ell^\infty}$$

$$\leq \frac{1}{T} + \frac{C}{T^2} \sum_{\substack{m \neq n \\ 0 \leq m,n \leq T-1}} \frac{\lambda^{\frac{n-m}{2}}}{\sqrt{N}}$$
$$\leq \frac{1}{T} + \frac{C}{\sqrt{N}} \lambda^{\frac{T}{2}}.$$

我们令 $T = (1-\varepsilon/2)\log_\lambda N$，得到

$$\|B^*B\|_{\ell^1 \to \ell^\infty} \leq \frac{1}{(1-\varepsilon/2)\log_\lambda N} + \frac{C}{\sqrt{\lambda N^\varepsilon}}.$$

最后，我们知道 $\|B\|^2_{\ell^2 \to \ell^\infty} = \|B^*B\|_{\ell^1 \to \ell^\infty}$。因此，对于 $0 < \varepsilon < 1$，存在一个N_0，使得对于奇数 $N \geq N_0$,

$$\|u\|_{\ell^\infty} \leq \|B\|_{\ell^2 \to \ell^\infty} \|u\|_{\ell^2} \leq \frac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon)\log_\lambda N}}.$$

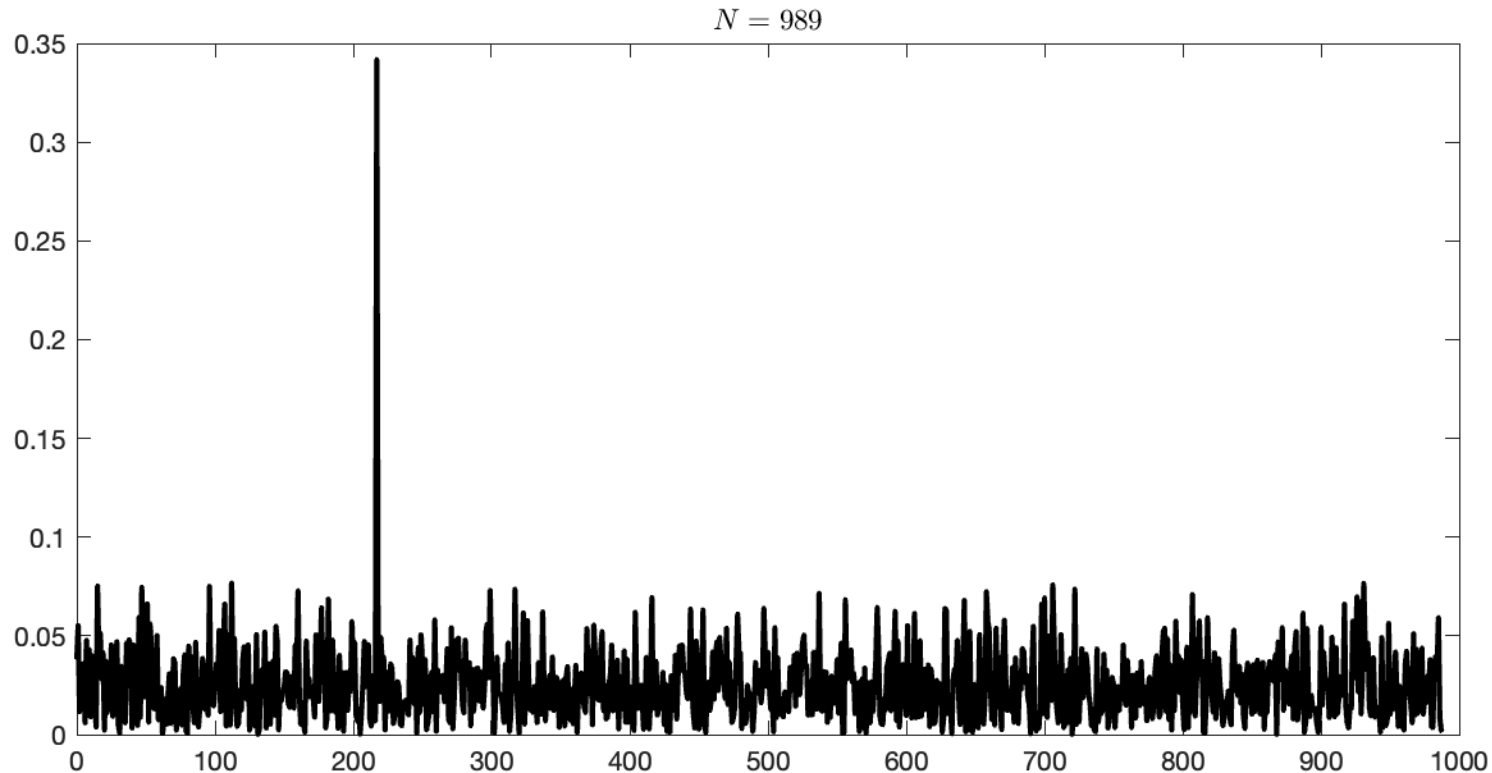
References

.[1]V. G. Avakumovic, 《闭黎曼流形上的特征函数》, 《数学杂志》65 (1956), 327-344.[2] P. B´erard, 《无共轭点紧黎曼流形上的波动方程》, 《数学杂志》155 (1977), 249-276.[3] M.V. Berry 和 J. H. Hannay, 《线性映射的量子化——周期光栅的菲涅耳衍射》267 (1980), no. 1.[4] F. Bonechi 和 S. De Bi`evre, 《环面上量子化双曲映射的指数混合与 |对数 $\hbar$| 时间尺度》, 《数学物理通讯》211 (2000), no. 3, 659–686.[5] A. Bouzouina 和 S. De Bi`evre, 《环面上量子化遍历映射特征函数的等分配》179 (1996), no. 1, 83–105.[6] S. De Bi`evre、S. Nonnenmacher 和 F. Faure, 《最小周期量子猫映射的疤痕特征态》, Commun. Math. Phys. 239 (2003), 449–492.[7] S. Dyatlov 和 M. J´ez´equel, 《高维量子猫映射的半经典测度》, Ann. Henri Poincar´e (2023).[8] L. H¨ormander, 《椭圆算子的谱函数》, Acta Math. 121 (1968), 193 - 218.[9] H. Iwaniec 和 P. Sarnak, L^∞ 《算术曲面上特征函数的范数》, Ann. Math. 141 (1995), no. 2, 301-320.[10] P. Kurlberg, 《量子猫映射的赫克特征函数上确界范数的界》, Ann. Henri Poincar´e 8 (2007), 75 - 89.[11] P. Kurlberg 和 Z. Rudnick, 《环面上线性映射量子化的赫克理论与等分布》, Duke Math. J. 103 (2000), no. 1, 47-77.[12] ———, 《去对称化量子映射特征函数的值分布》, International Mathematics Research Notices 2001 (2001), no. 18, 985-1002.[13] B. M. Levitan, 《二阶自伴微分方程谱函数的渐近行为及其特征函数展开》, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 19 (1955), no. 1, 33–58.[14] R. Olofsson, 《量子猫映射赫克特征函数的较大上确界范数与较小香农熵》, 《数学物理通讯》286 (2009), no. 3, 1051-1072.[15] ———, 《模素数幂的量子猫映射赫克特征函数》, Ann. Henri Poincar´e 1111 (2009), no. 10.[16] ———, 《重新探讨量子猫映射的大新形式》, Ann. Henri Poincar´e 11 (2010), 1285–1302.[17]Z. Rudnick 和 P. Sarnak, 《算术双曲流形本征态的行为》, Commun.Math. Phys. 161 (1994), 195–213.

[18] M. Zworski, 《半经典分析》，第138卷，美国数学会，2012年。

(ELENA KIM) Massachusetts Institute of Technology, Department of Mathematics, Cambridge, MA 02142, USA
电子邮件地址：elenakim@mit.edu

(ROBERT KOIRALA) University of California San Diego, Department of Mathematics, La Jolla, CA 92093, USA
电子邮件地址：rkoirala@ucsd.edu


$N = 989$
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000