arXiv:2302.08619v1 [math.LO] 16 Feb 2023

利用蔡廷不完备定理证明哥德尔不完备定理

David O. Zisselman

1 摘要

哥德尔第一不完备定理和第二不完备定理是现代数学的基石。本文针对 ZFC 和包含 ZFC的理论，利用蔡廷不完备定理和一种非常基础的数扩张，给出这些定理的一种新证明。

与通常的证明不同，这些证明不使用任何不动点定理，而只依赖集合结构。与原始证明不同，我们的方法能够证明不可证的命题远不止由公理集构造出的某一个特定命题。

我们的目标是让人们关注数扩张这一技巧。我们认为，这种技巧可用于证明更多关于不同自然数相关断言的可证性与不可证性的定理。

2 引言

柯尔莫哥洛夫复杂度是函数 $Kol(x)$（其中 $x \in \mathbb{N}$），表示满足以下条件的最小 y： y 是一个计算 x 的机器的编码。给定一个一致且有效的理论 T，蔡廷不完备定理（参见：3.1.2）指出，对于足够大的 L（取决于 T）， T 不证明 $Kol(x) \geq L$。将这一结论应用于 $T = ZFC$ 和一个固定的 x，可以构造一个 ZFC 模型，使得 $Kol(x) < L_{ZFC}$。由于不可能

$$\forall x \in \mathbb{N}\ Kol(x) < L_{ZFC}$$

对于该 L_{ZFC}，因此我们得出结论：必定存在一个 $x' \in \mathbb{N}$，使得 $Kol(x) \geq L_{ZFC}$ 在 $\mathbb{N}$ 中成立，但无法在 ZFC 中证明（而且存在无穷多个这样的 x'）。

此外，如果 ZFC 能证明 $con(ZFC)$，那么在 ZFC 的每个模型中，都可以继续这一构造，即构建一个模型序列 M_1、M_2、.....（均属于 ZFC），以及一个自然数序列 x_1、x_2、$\ldots \in \mathbb{N}$，使得

$$\forall i \forall j \leq i\ M_i \models Kol(x_j) < L_{ZFC}$$

这种构造本质上具有“压缩”性质：对于 $i = L_{ZFC} + 2$，我们得到 $L_{ZFC} + 2$**个不同的**数 $y_1, y_2, \ldots, y_{L+2}$，它们表示各个机器

这些机器计算 $x_1, x_2, \ldots, x_{L+2}$。由于每个 $y_i \mid 1 \leq i \leq L+2$ 都满足 $y_i < L_{ZFC}$，我们得到模型 M_{L+2} 有 $L_{ZFC}+2$ **个不同的**自然数，它们都小于 L_{ZFC}，这就构成了一个矛盾。

3 预备知识

由于证明中会用到一些已知定理和基本定义，我将列出稍后会使用的定理。

3.1 定义与符号

对于以下定义，我们假设有一台通用图灵机（即图灵机的一种编码方法），并以此来度量其他图灵机的长度

- 柯尔莫哥洛夫复杂度（单值）——自然数 x 的柯尔莫哥洛夫复杂度记作 $Kol(x)$。

记号：A 图灵机（TM）将指代一台RAM计算机。

定义： 集合论语言的一个**结构** 是一个集合 A 以及一个二元关系（$\in$） $\subset A^2$ 。

也就是说，一个元素集合 A 以及一个子集 $R \subset A^2$，我们将其记作$a \in b \Leftrightarrow aRb$

定义（ZF）： 集合论语言上的公理集合称为 ZF（策梅洛–弗兰克尔公理化集合论），具体如下：

1. 外延公理 $\forall x \forall y((\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y))$ 2. 正则公理 $\forall x(\exists a(a \in x) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg \exists z(z \in y \wedge z \in x)))$ 3. 概括公理模式 $\forall z \forall w_1 \forall w_2 ... \forall w_n \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge \phi(w_1, ..., w_n, x)))$ 4. 配对公理 $\forall x \forall y \exists z(x \in z \wedge y \in z)$ 5. 并集公理 $\forall F \exists A \forall Y \forall x((x \in Y \wedge Y \in F) \rightarrow x \in A)$ 6. 替换公理模式

$$\forall A \forall w_1 \forall w_2 ... \forall w_n \left[\forall x(x \in A \rightarrow \exists! y \phi(w_1, ..., w_n, x, y)) \rightarrow \exists B \forall x(x \in A \rightarrow \exists y(y \in B \wedge \phi(w_1, ..., w_n, x, y)))\right]$$

7. 无穷公理 $\exists X(\emptyset \in X \wedge \forall y(y \in X \rightarrow S(y) \in X))$

8. 幂集公理 $\forall x \exists y \forall z(z \subseteq x \rightarrow x \in y)$

- 定义：选择公理（AC）是以下陈述：

$$\forall X\left[\emptyset \notin X \Rightarrow \exists f: X \rightarrow \cup X \ \ \forall a \in X\left(f\left(a\right) \in a\right)\right]$$

- 定义：带有 AC 的公理集合 ZF 称为 ZFC 公理集合。
- 定义：不包含正则性公理的公理集合 ZF 记作 ZF^{-}
- 定义：可定义语言是形如 $\{x \in \mathbb{N} | \phi(x)\}$ 的集合，其中 ϕ 是集合论语言中的单自由变量公式。

除非另有说明，语言一词仅指可定义语言。

定义： ZF、 ZFC、 ZF^{-} 等的模型，是集合论语言中的一种结构，并满足 ZF、 ZFC、 ZF^{-} 等相应的公理。

的定义与记法在模型 M 中，构造模型内"自然数"的标准方法是定义 0 为 $\emptyset$，并将 $S(x)$ 定义为后继运算。因此， $1=\{\emptyset\}$、 $2=\{\{\emptyset\},\emptyset\}$，依此类推。包含 $\emptyset$ 且在 S 运算下封闭的最小集合称为 ω，它的存在性由无穷公理保证。然而，尽管我们将 ω 视为 $\mathbb{N}$，它们在某些模型中可能是截然不同的对象。

- $\omega(M)$的记法将比不精确的记法 $\mathbb{N}$更合适。

- 给定一个 ZF的模型 M，记 $\omega(M)$为模型 M的 ω。
- 给定一个 $n \in \omega(M)$，记

$$[n] \triangleq \{i \in \omega(M) | i \leq n\} = \{0,1,2,\ldots,n\}$$

- 除非另有特别说明， $\mathbb{N}$ 表示包含零的自然数集 $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,...\}$。严格来说，由于 $\mathbb{N}$ 无法定义，我不会使用记法 $\mathbb{N}$，除非用于表达直观概念。

定义（集合模型）： 给定一个 ZF 模型 $V_1, \in_{V_1}$，如果满足以下条件，则称 ZF 的模型 $V_2, \in_{V_2}$是 V_1 的**内部**（或是 V_1的一个集合）：

- V_2 是 V_1内的一个集合
- V_2 的所有集合也都是 V_1中的集合。
- $\in_{V_2}$ 是由二元组构成的集合（即作为 $(V_2)^2$ 的子集），是 V_1的集合

引理： 设 V_1 和 V_2 是 ZF 模型。若 V_2 是 V_1 的集合，且 a 是V_2 和 $b \in_{V_2} a$ 的集合，则 b 是 V_2 的集合，且 b 是 V_1的集合。

证明： 在上述条件下 $b \in_{V_2} a$。由于 $\in_{V_2}$ 是 $(V_2)^2$, 的子集，这意味着 b 是一个由 V_2 构成的集合。由于 V_2 包含在 V_1中，我们得出 b 也是一个由 V_1构成的集合。 ■

3.1.1 不可压缩引理

引理： 给定一个 ZF的模型 M以及 $x \in \omega(M)$，存在 $y \in \omega(M)$，使得

$$Kol(y) > x$$

证明： </style}读者不妨先考虑 $\omega(M) = \mathbb{N}$ 的情形。

将 y 映射到 z的函数，即打印 y 的图灵机的最小编码，是 ZF中的一个可定义函数。反设不存在 $y \in \omega(M)$，使得 $Kol(y) > x$。在这种情况下

$$M \vDash \forall y \; Kol(y) \leq x$$

在这种情况下，存在一个从 $[x] = \{0, 1, , \ldots, x\} \subset \omega(M)$ 到 $\omega(M)$ 的映射，它既是单射又是满射（因为对于每个 y，都存在 $z \in [x]$，它编码了一台计算 y的图灵机），并且可在 M 中定义。因此，在 M中，集合$\omega(M)$ 的基数为 $\leq x$ 且 $x < \aleph_0$，这就产生了矛盾。 ■

记号： 给定一个 ZF的模型 M，并给定 $x \in \omega(M)$，定义 $BB_M(x)$为满足 $M \vDash Kol(y) > x$的最小数 $y \in \omega(M)$。

3.1.2 柴廷不完备定理（1971年）

定理： 设 V 是 ZF的一个模型。设 T 是一个有效一致公理集。那么，存在 $L \in \omega(V)$（它取决于公理集），使得对于每个 $x \in \omega(V)$，语句 $L \leq Kol(x)$都不能从集合 T 中证明。

为使文章内容完整，我将在此补上该定理的证明:
读者不妨先考虑 $\omega(V) = \mathbb{N}$ 的情形。

证明： 在 V 中，关于命题 ϕ 的任何证明都是 $\omega(V)$ 中的一个数。记 $w \in \omega(V)$ 为 $\{L \leq Kol(x) \,|\, x \in \omega(V)\}$ 中某个命题的第一个证明，并令 $x' \in \omega(V)$ 为满足 $T \vdash L \leq Kol(x')$ 的数（证明 w 证明了 w，即 $L \leq Kol(x')$）。创建一台图灵机 M，让它按常规顺序遍历 $y \in \omega(V)$，并检查 y 是否是陈述 $L \leq Kol(x)$ 的证明; 如果是，则停机并输出 x。图灵机 M 的大小（因为图灵机也可以编码为自然数）是，对于固定的 $C \in \omega(V)$，$\log(L) + C$。由于 L 的十进制表示是 $\log(L)$，而 C 是表示理论 T 以及 M 的操作所需的额外大小。

图灵机 M 是一台输出 x' 的图灵机，其大小为 $\log(L)+C$；由于 $L \leq Kol(x')$，可知 $L \leq \log(L)+C$（正如我们刚刚证明的，一台大小为 $\log(L)+C$ 的图灵机）。不等式 $L \leq \log(L)+C$ 不可能对足够大的 L 成立。

记号： 给定一个有效一致公理集 T，定义 $\mathcal{L}(T)$ 为满足 $L > \log(L)+C$ 的最小数 L。

备注：

- 注意到 $\mathcal{L}(T) \leq 2C$。
- 记号 $\mathcal{L}(T)$ 没有提到 V，因为这个值在很大程度上不取决于 V（之后将对此进行陈述和证明）。

4 扩展

本节我将介绍数扩展的基本原理。

4.0.1 模型扩展定义

定义： 给定 V_1、V_2 的两个模型，我们称 V_2 数扩展V_1 通过映射 f：$\omega(V_1) \to \omega(V_2)$，如果 V_1、V_2 的算术运算，即

$$+_1, +_2, \cdot_1, \cdot_2 \wedge_1, \wedge_2$$

相应地由 f 保持。也就是说：

1. $\forall a, b \in \omega(V_1)\left(f(a +_1 b) = f(a) +_2 f(b)\right)$
2. $\forall a, b \in \omega(V_1)\left(f(a \cdot_1 b) = f(a) \cdot_2 f(b)\right)$
3. $\forall a, b \in \omega(V_1)\left(f\left(a^b\right) = f(a)^{f(b)}\right)$
4. $f(0_{V_1}) = 0_{V_2} \text{and } f(1_{V_1}) = 1_{V_2}$

我将其记作 $V_1 \xrightarrow{f} V_2$。

备注：

- 请注意，我们并未假设对 $\omega(V_1)$ 中元素的归纳论证会以某种方式“转移”到 $\omega(V_2) \cap f(\omega(V_1))$ 中。

- 函数 f 本身并未被假定为 V_1 或 V_2 的集合。

4.0.2 模型初始片段扩张定义

定义： 如果 $V_1 \xrightarrow{f} V_2$. 且扩展成立

$$\forall b \in \omega(V_1)\, \forall a \in \omega(V_2)\, \exists c \in \omega(V_1)\, (a < f(b) \to a = f(c))$$

该扩展称为**初始片段扩张**（i.s 扩展），记作 $V_1 \underset{I}{\xrightarrow{f}} V_2$ 。

请注意以下几点：

1. i.s 扩展的含义是，模型 V_2 比 V_1 拥有“更多的数字”，但数字 V_1 在 V_2 的“较低部分”上“表现相同”。 2. 函数 f 通常无法从模型本身定义出来。 3. 对于两个模型， $V_1 \xrightarrow{f} V_2$ 这一事实并不意味着这两个模型是初等等价的，也不意味着它们对 ω 所赋予的公式达成一致。

4.1 扩展的基本性质

引理： 给定 ZF 、 V_1、 V_2 的两个模型，使得

- V_2 是 V_1内的一个集合
- $\in_2$ 是 V_1内的一个（有序对）集合

则存在一个映射 $f \in V_1$, f : $\omega(V_1) \to \omega(V_2)$，使得 $V_1 \underset{I}{\xrightarrow{f}} V_2$。

证明： f 的构造通过归纳法进行:

- 基例：定义 $f(0_{v_1}) = 0_{V_2}$。
- 对于 $a = b + 1$ ，其中 a，定义 $b \in_{V_1} \omega(V_1)$ $f(a) = f(b +_1 1) = f(b) +_{V_2} 1$
- 由于每个自然数要么是 0，要么是另一个自然数的 $b + 1\, b$，因此定义了 f 。

回想一下， $+$、 $\times$、 $\wedge$ 的定义也都是归纳定义。对于 a， $c \in_{V_1} \omega$ （V_1）

- 如果 $c = 0_{V_1}$ ，那么根据定义：$-$
  $a + c = a + 0 = a-$ $a \cdot c = a \cdot 0 = 0-$
  $a^c = a^0 = 1$ ；如果 $a \neq 0$ ，那么 $c^a = 0^a = 0$

- 因此，如果 $c = 0$，则 f 满足 4.0.1 中的等式:

- $f\left(a+_1 c\right)=f\left(a+_1 0\right)=f\left(a\right)=f\left(a\right)+_2 0_{V_2}$.
- $f\left(a\cdot_1 c\right)=f\left(a\cdot_1 0_{V_1}\right)=f\left(0_{V_1}\right)=0_{V_2}=f\left(a\right)\cdot_2 0_{V_2}=f\left(a\right)\cdot_2 f\left(c\right)$
- $f\left(a^c\right)=f\left(a^0\right)=f\left(1_{V_1}\right)=1_{V_2}=f\left(a\right)^{0_{V_2}}=f\left(a\right)^{f(c)}$
- If $a\neq 0$ then $f\left(c^a\right)=f\left(0^a\right)=f\left(0_{V_1}\right)=0_{V_2}=f\left(c\right)^{f(a)}$

• 对于 $c\neq 0$，存在 $b\in_{V_1}\omega(V_1)$，使得 $c=b+1$，因此根据定义：

- $a+c=a+(b+1)=(a+1)+b$
- $a\cdot c=a\cdot(b+1)=(a\cdot b)+a$
- $a^c=a^{b+1}=a\cdot\left(a^b\right)$

• 因此，如果 $c\neq 0$，则 f 满足 4.0.1 中的等式：

- $f\left(a+_1 c\right)=f\left(\left(a+_1 1\right)+_1 b\right)=\left(f\left(a\right)+_2 1_{V_2}\right)+_2 f\left(b\right)$.
- $f\left(a\cdot_1 c\right)=f\left(\left(a\cdot_1 b\right)+_1 a\right)=f\left(a\cdot b\right)+_2 f\left(a\right)=f\left(a\right)\cdot_2 f\left(b\right)+_2 f\left(a\right)=f\left(a\right)\left(f\left(b\right)+_2 1_{V_2}\right)=f\left(a\right)f\left(b+_1 1\right)=f\left(a\right)\cdot_2 f\left(c\right)$
- $f\left(a^c\right)=f\left(a\cdot_1\left(a^b\right)\right)=f\left(a\right)\cdot_2 f\left(a^b\right)=f\left(a\right)\cdot_2 f\left(a\right)^{f(b)}=f\left(a\right)^{f(b)+1_{V_2}}=f\left(a\right)^{f(c)}$.

到目前为止，我们已经看到 $V_1\xrightarrow{f}V_2$。

T其 f 也具有扩展性质，ell:

由于 V_2 是一个 V_1 集合，因此在 V_1 中可以定义以下集合

$$S=\left\{b\in\omega\left(V_1\right)\mid\exists a\in\omega\left(V_2\right)\forall c\in\omega\left(V_1\right)\left(\left(a<_2 f\left(b\right)\right)\wedge\left(a\neq f\left(c\right)\right)\right)\right\}$$

如果 S 非空，并且由于 S 是 ω中的自然数集（V_1），它有一个最小值。记为

$$s=\min S$$

注意，$s\neq 0$，因为 $f\left(0_{V_1}\right)=0_{V_2}$，且 $\neg\exists a\in\omega\left(V_2\right)\left(a<0_{V_2}=f\left(0_{V_1}\right)\right)$。因此 $s>0$，所以对于某个 $m\in_{V_1}\omega\left(V_1\right)$，有 $s=m+1$。因此，$f\left(s\right)=f\left(m\right)+_2 1_{V_2}$。由于 s 是最小的，因此有 $m\notin_{V_1}S$。于是，对于 m

$$\forall a\in\omega\left(V_2\right)\exists c\in\omega\left(V_1\right)\left(a<f\left(m\right)\rightarrow a=f\left(c\right)\right)\tag{1}$$

正如我们所知

$$\exists a\in\omega\left(V_2\right)\forall c\in\omega\left(V_1\right)\left(\left(a<_2 f\left(s\right)\right)\wedge\left(a\neq f\left(c\right)\right)\right)$$

令 $\exists a\in\omega(V_2)$ 为常数并接收

$$\forall c\in\omega\left(V_1\right)\left(\left(a<_2 f\left(s\right)\right)\wedge\left(a\neq f\left(c\right)\right)\right)\tag{2}$$

如果 $a<_2 f(m)$，那么根据 (1)，我们知道 $\exists c\in\omega(V_1)$，这违背了 (2)。否则，如果 $a=_2 f(m)$，条件 (2) 就被 $c=m$ 违反了。最后，如果 $a>_2 f(m)$，则有 $a\geq_2 f(m)+1_{V_2}=f(s)$，这与 (2) 中的 $a<_2 f(s)$ 相矛盾。既然我们得到了矛盾，那么 S above 必定为空。因此

$$\forall b\in\omega\left(V_1\right)\forall a\in\omega\left(V_2\right)\exists c\in\omega\left(V_1\right)\left(a<f\left(b\right)\rightarrow a=f\left(c\right)\right)$$

■

备注： 请注意，条件 V_2 是一个集合 V_1，它给出了 $V_1 \xrightarrow[I]{f} V_2$，但实际上这是一个强得多的断言。在这种情况下，$f$ 也属于 V_1。

具体来说，可以利用这一事实在 $[a]$ 上对 $a \in \omega(V_2) \cap Im(f)$进行归纳，并通过 f^{-1}将论证回拉，从而对 $\omega(V_1)$进行归纳。此外，也可以利用这一事实，对上文所示的 $Im(f)$进行归纳论证。

4.1.1 子模型中图灵机的绝对性

定理： 设 V_1, V_2 是 ZF 的两个模型，使得 V_2 是 V_1 ,$V_1 \xrightarrow[I]{f} V_2$ 的一个集合，并令 $T_1 \in \omega(V_1)$表示一台图灵机的编码。设 $z \in \omega(V_1)$是任意一个数。

记 $R(T_1, z) \in \omega(V_1)$为机器 T_1 在经过 z步后（在 V_1中）的编码状态，并记 $R(f(T_1)\ f(z))$为机器 $f(T_1)$在经过$f(z)$步后（在 V_1中）的编码状态。

Then

$$f(R(T_1, z)) = R(f(T_1), f(z))$$

证明（概要）： 记 J 为在特定状态下将机器再运行一步的操作，即函数

$$J(R(T, z)) = R(T, z+1)$$

对于任意图灵机 $T \in \omega(V_1)$ 和任意数 $z \in \omega(V_1)$。函数 J 可以用算术运算表示。通过对 $\omega(V_1)$ 进行归纳法即可完成证明：

基例是 $R(T_1, 0_V)$，因为 T_1 是一台通过文本到整数的编码进行编码的机器，所以 $f(T_1)$ 是 $\omega(V_2)$ 中同一台机器的文本到整数编码。因此我们得到

$$f(R(T_1, 0_{V_1})) = R(f(T_1), f(0_{V_1})) = R(f(T_1), 0_{V_2})$$

对于 $z+1$，我们回顾一下，J 是一个算术函数，因此，对于任意 $x \in \omega(V_1)$，$f(J(x)) = J(f(x))$，于是

$$\begin{aligned} f(R(T, z+1)) &= f(J(R(T_1, z))) \\ = f(J(R(T_1, z))) &= J(f(R(T_1, z))) \\ = J(R(f(T_1), f(z))) &= R(f(T_1), f(z)+1) \\ &= R(f(T_1), f(z+1)) \end{aligned}$$

现在进行归纳，记集合

$$S = \{z \in \omega(V_1) \mid f(R(T_1, z)) \neq R(f(T_1), f(z))\}$$

集合 S 是 V_1 中可定义的自然数子集（因为 V_2 是由 V_1构成的集合）。如果 S 非空，它必定有一个最小值，令 z' 为这个最小值。$z' \neq 0_{V_1}$，正如我们已经证明的，

$$f(R(T_1, 0_{V_1})) = R(f(T_1), 0_{V_2})$$

如果 $z' = z'' + 1$，那么 $z'' \notin S$，因此

$$f\left(R\left(T_1, z''\right)\right) = R\left(f\left(T_1\right), f\left(z''\right)\right)$$

因此，我们得到 $z' = z'' + 1 \notin S$ 如下

$$f\left(R\left(T_1, z'' + 1\right)\right) = R\left(f\left(T_1\right), f\left(z'' + 1\right)\right)$$

因此， S 上方必定为空，从而

$$f\left(R\left(T_1, z\right)\right) = R\left(f\left(T_1\right), f\left(z\right)\right)$$

对于每个 $z \in \omega$（V_1）。■

备注：

1. 请注意， V_2 可能还包含更多不在 Im（f）中的数。在这种情况下，对于某台图灵机 T_1， T_1 可能不会在 V_1 中停机，但会在 V_2 中停机。然而，对于 Im（f）中的任何一步， V_1 和 V_2 中的运行过程将是一致的。2. 此证明中的“概略”部分在于， R 的编码和 J 操作并未被完整定义。鉴于我相信读者熟悉此类构造，我认为没有必要详加阐述。3. 请注意该假设的重要性： V_2 是一个由 V_1 构成的集合。仅有事实 $V_1 \xrightarrow[I]{f} V_2$ 并不足以完成此证明（因为我们需要对 ω（V_1）使用归纳法）。

4.1.2 $\mathcal{L}$（T）的绝对性

定理： 设 V_1、V_2 是 ZF 的两个模型，使得 V_2 是 V_1的一个集合，且 $V_1 \xrightarrow[I]{f} V_2$ 为一个图灵机的编码，该图灵机识别 T（一个有效一致公理集）。我们假设，根据 $\omega(V_1)$和$\omega($ $V_2)$， T 均是一致的。令 $\mathcal{L}_1(T_1)$和 $\mathcal{L}_2(f(T_1))$分别为在 V_1和 V_2 中计算出的 $\mathcal{L}(T)$。

$$^{\text{en}}\, f\left(\mathcal{L}(T)\right)^1 \quad = \mathcal{L}(f\left(T\right))^1 \quad .$$

直观上： 回顾 3.1.2 中给出的 $\mathcal{L}(T)$的定义： $\mathcal{L}(T)$是满足 $L > \log(L) + C$的最小数。因此，只要 C在两个模型中的解释相同， $\mathcal{L}(T)$也会相同。

此外， C 包含：

1. 计算 T 的图灵机表示（假设它们相同）。2. 机器 M 的表示，它会遍历来自 T 的证明，并找出关于 $\{L \leq Kol(x) \,|x \in \omega(V)\}$ 的主张的第一个证明（对于给定的固定 L）。

由于这两者在子模型中都是绝对的（如 4.1.1 所示）， C 必须以相同的方式解释。

证明（概要）： 读者可以先考虑 $\omega(V_1) = \mathbb{N}$ 这种情况。这个证明的思路是，3.1.2 中的构造都可以在一个有界集合 $\omega(V_1)$ 中完成，而 $\omega(V_2)$ 在这样的子集（较低部分）中表现得“相同”。详情如下：

回顾 3.1.2 的证明，该证明构造了一台图灵机 M，它遍历 $\omega(V_1)$ 的所有元素，直到找到第一个 w，该元素证明了集合 $\{L \leq Kol(x) | x \in \omega(V)\}$ 中的一个断言。

- 证明是一系列一阶逻辑中的陈述，每个陈述要么是公理，要么是由前面的陈述推导而来。
- 这样的证明可以通过文本到整数的编码编码为一个整数。这种编码只需要加法、乘法和幂运算。
- 图灵机可以验证该证明；根据 4.1.1，它在 V_1 和 V_2 中的运行方式相同。
- 因此，该证明在 V_1 和 V_2 中的解释相同。– 也就是说，如果 $T \vDash_p \phi$ 在 V_1 中，那么 $f(T) \vDash_{f(p)} f(\phi)$ 在 V_2 中。其中 T、p、ϕ 分别是一个理论、一个证明和一个陈述的编码。
- 令 $w \in \omega(V_1)$ 为 $\{L \leq Kol(x) | x \in \omega(V_1)\}$中关于某个命题的第一个证明。证明 $f(w)$ 也是 $\{L \leq Kol(x) | x \in \omega(V_2)\}$
  在 V_2 中，由于 f 与 $f(w)$ 一一对应，后者也必定是 $\omega(V_2)$ 中此类证明里的第一个。
- 因此，机器 M 的运算将以“相同”的方式工作，并在 V_1 中返回 x，在 V_2中返回 $f(x)$。
- 对于 $L_1 \in \omega(V_1)$，$L_2 \in \omega(V_2)$，我们分别在 V_1中构造了图灵机 M_1，并在 V_2 中构造了图灵机 $f(M_1)$，它们分别计算 x'、$f(x')$，V_1、V_2。因此，在 V_1和 V_2 中，这两个不等式都必须成立：

$$L_1 \leq \log(L_1) + C$$

$$L_2 \leq \log(L_2) + f(C)$$

而违反它们的最小数必须是“相同的”，即

$$f(\mathcal{L}_1(T_1)) = \mathcal{L}_2(f(T_1))$$

5 哥德尔不完备定理

5.1 第一定理

定理（哥德尔第一不完备性定理）： 令 T 为包含 ZF 的有效一致公理集，则存在一个 ω 所归属的命题 ϕ，它独立于 T（无法被证明，也无法被否证）

证明： 由于 T 是一致的，令 M 为 T的一个模型。在 M中记为

$$x = BB_M\left(\mathcal{L}\left(T\right)\right)$$

并将命题 ϕ 记为

$$\mathcal{L}\left(T\right) < Kol\left(x\right)$$

根据蔡廷定理 3.1.2，命题

$$\mathcal{L}\left(T\right) < Kol\left(x\right)$$

不能从 T 中证明。然而，在 M 中，根据定义 BB_M和非压缩引理 3.1.1，可知

$$M \models \mathcal{L}\left(T\right) < Kol\left(x\right)$$

因此，命题 ϕ 也不能被证伪，因为 T 有一个模型使其为真。 ■

5.2 第二定理

定理（哥德尔第二不完备性定理）： 设 T 是一个包含 ZF的有效一致公理集合，那么命题 $con(T)$（即不存在从 T出发的矛盾证明）不能从 T中证明。

证明： 假设（通过反证法）命题 $con(T)$ 可以从T中得到证明。由于 T 是一致的，令 M_0 为 T的一个模型。按以下方式构造模型序列 $(M_i)_{i\in\omega(M_0)}$：给定 M_i 记作

$$x_i = BB_{M_i}\left(\mathcal{L}\left(T\right)\right)$$

在 M_i 中。根据 M_i 中的定义 BB_{M_i} 以及非压缩引理 3.1.1，有

$$M_i \models \mathcal{L}\left(T\right) < Kol\left(x_i\right)$$

由于 M_i 证明了 T是一致的（这里使用了我们的假设，即 $con(T)$ 可以从 T中得到证明），根据蔡廷定理 3.1.2，命题

$$\mathcal{L}\left(T\right) < Kol\left(x_i\right)$$

无法从 T中得到证明。因此存在一个模型 M_{i+1} （在 M_i 中），使得

$$M_{i+1} \models \mathcal{L}\left(T\right) \geq Kol\left(x_i\right)$$

将 $y_i \in_{M_{i+1}} \omega(M_{i+1})$ 记作计算 x_i 在 M_{i+1}中的值的图灵机的编码。

由于 $\mathcal{L}(T)$ 是绝对的（根据 4.1.2），我们知道在所有模型中，M_i 都相同。由于 M_{i+1} 是由 M_i 构成的集合，根据 4.1 我们知道 $M_i \xrightarrow[I]{f_i} M_{i+1}$。

如果 $i > 1$，那么对于每个 $0 < j < i$， y_j 计算 x_j 这一事实在子模型中也是绝对的（根据 4.1.1），因此在 M_{i+1} 中，每个 $f_i(f_{i-1}(\cdots(f_j(y_j))))$ 都会计算出 $f_i(f_{i-1}(\cdots(f_j(x_j))))$，对于每个 $0 < j < i$ 都如此。由于 $y_j < \mathcal{L}(T)$（且 $\mathcal{L}(T)$ 是绝对的），在 M_{j+1} 中我们知道

$$f_i\left(f_{i-1}\left(\cdots\left(f_j\left(y_j\right)\right)\right)\right) < f_i\left(f_{i-1}\left(\cdots\left(f_0\left(\mathcal{L}\left(T\right)\right)\right)\right)\right)$$

现在固定 $i = \mathcal{L}(T) + 2$。在 M_{i+1} 中，这样的 i 存在

$$y_0, y_1, \ldots, y_i$$

它们中的每一个都小于 $\mathcal{L}(T)$，且每个 y_j都计算出 x_j。由于所有

$$x_0, x_1, \ldots, x_i$$

都各不相同，因此我们得到

$$y_0, y_1, \ldots, y_i$$

都各不相同。因此，模型 M_{i+1}有 $i = \mathcal{L}(T)$ 个 $+2$ 互不相同的数，且都小于 $\mathcal{L}(T)$，这就构成了一个矛盾。因此，我们关于命题 $con(T)$ 可以从 T证明的假设是错误的 ■

参考文献

[1] 《集合论》，作者 Kenneth Kunen，ISBN：0 444 86839 9。Elsevier Science Publishers（1980）。

[2] 《逻辑与集合论笔记》，P. T. Johnstone 著，Cambridge university press，1987，ISBN：0521336929[3] 《集合论》，Thomas Jech 著，第 3 千年版，Springer（2002），ISBN 3-540-44085-2。[4] 《模型与超积：导论》（1974 年版重印），Bell, John Lane；Slomson, Alan B. 著（2006） [1969]（ISBN 0-486-44979-3）[5]《高阶无穷》，Akihiro Kanamori 著，ISBN：978-3-540-88866-6。Springer-Verlag Berlin Heidelberg（2009）[6] Richard Kaye 著《皮亚诺算术的模型》。Clarendon Press Oxford。1991（ISBN 0-19-853213）