通过光学磁力学使亚铁磁磁振子与原子系综纠缠

Zhi-Yuan Fan, [1] Hang Qian, [1] Xuan Zuo, [1] 和 Jie Li[1], *[1]量子信息交叉研究中心、现代光学仪器国家重点实验室、浙江省量子技术与器件重点实验室，浙江大学物理学院，中国杭州 *310027*(日期：2023年6月9日)

我们展示了如何在原子系综与钇铁石榴石晶体中的大量磁振子之间制备宏观纠缠。具体而言，我们采用一种光学磁力学构型，其中磁致伸缩引起的磁振子力学位移通过辐射压力与光学腔耦合，而光学腔进一步与置于腔内的二能级原子系综耦合。我们表明，通过适当驱动腔模和磁振子模，可以产生光机械纠缠，并将其进一步分配至原子和磁振子系统，从而实现原子与磁振子之间的稳态纠缠。原子-磁振子纠缠是光力学与磁力学冷却以及光机械参量下转换相互作用共同作用的结果。我们揭示了两种机械冷却通道之间的竞争机制。我们还表明，在同一系统中也可以实现由三个大质量子系统——原子、磁振子和声子——构成的真正三体纠缠。我们的结果表明，混合光学磁力学系统有望成为制备涉及磁振子、光子、声子和原子的宏观量子态的理想平台。

arXiv:2302.08684v2 [quant-ph] 8 Jun 2023

腔光力学（COM）研究电磁场与机械运动通过辐射压力发生的相互作用 [1]。过去十年间，腔光力学领域取得了显著进展，实验上制备出了大质量机械振子的宏观量子态，包括实现机械振子与电磁场之间的纠缠 [2], 、两个机械振子之间的纠缠 [3–5], , 以及机械运动的量子压缩 [6],等。

与腔光力学类似，腔磁振子力学（CMM） [7–10]近来日益受到关注，因为它有望制备更大尺度的量子态 [8, 11–22], , 并且在量子信息科学和量子技术领域具有多种重要应用前景 [23–34]。它研究微波腔光子、磁振子（自旋波的量子）与磁致伸缩引起的振动声子之间的相互作用，这些振动声子存在于磁有序材料中，例如钇铁石榴石（YIG） [7–10]。通过辐射压力将磁振子机械位移耦合到光学腔，实现腔光力学与腔磁振子力学的结合，由此形成了光学磁力学（OMM）这一新系统 [32, 35, 36]。这种混合系统能够以光学方式读出磁振子占据数 [32] 以及固体中的任意磁振子量子态 [35], , 并制备光磁纠缠 [35] 和微波-光学纠缠 [36] 。因此，该系统在量子信息处理和量子网络领域具有广阔的应用前景。

本文展示了如何利用这种新型光学磁力学系统，在亚铁磁磁振子与原子系综之间制备宏观纠缠。具体而言，我们进一步将光学微机械系统的光学腔与一组最初处于基态的二能级原子耦合。在保持原子和磁振子处于低激发极限的条件下，原子极化可被玻色化以及集体自旋，系统便成为一个四模玻色系统。通过用红失谐激光强力驱动腔，机械运动会将驱动光子散射到两个边带上。当腔共振和原子频率分别与反斯托克斯边带和斯托克斯边带匹配时，便可产生原子与振动声子之间的纠缠态。进一步用相对较弱的红失谐微波场驱动磁振子，激活磁振子-声子态交换相互作用后，原子-声子纠缠便会部分分配到磁振子上，从而形成磁振子与原子之间的宏观纠缠态。该纠缠态是稳态，并且能够抵抗

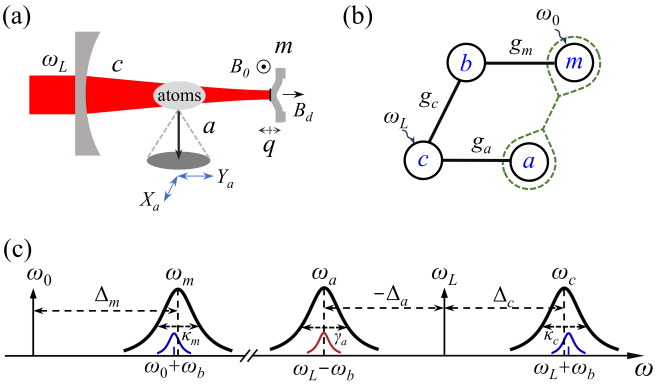


图 1: （a）—（b）原子—光学微机械系统示意图。由频率为 ω_L 的激光驱动的光学腔模（c），通过磁致伸缩诱导的机械振动模（b），与一组二能级原子（a）以及钇铁石榴石晶体中的磁振子模（m）耦合。（c）方案中采用的模式频率和线宽。在边带分辨极限（$\omega_b \gg \kappa_{c,m}$）下，当腔频率和原子频率分别与激光驱动场的 $\omega_L + \omega_b$ 处反斯托克斯边带和 $\omega_L - \omega_b$ 处斯托克斯边带匹配，并且磁振子模进一步与微波驱动场的 $\omega_0 + \omega_b$ 处反斯托克斯边带共振时，原子与磁振子之间便形成稳态纠缠。

*jieli007@zju.edu.cn

浴温。本文提出了一种检测这种纠缠的策略。

我们考虑的系统如图 1(a) 所示，由光学腔光子、钇铁石榴石晶体中的磁振子、磁致伸缩引起的振动声子以及一组二能级原子组成。磁振子机械位移通过辐射压力（色散相互作用）与光学腔耦合，例如，可将一块小型高反射镜面垫片贴在钇铁石榴石微桥表面 [35–37]。钇铁石榴石桥尺寸为微米级，能够支持寿命较长、频率处于吉赫兹范围的自旋波激发，以及频率在几十至数百兆赫范围内的机械振动声子 [37]。磁振子与机械模之间较大的频率失配，使得磁振子-声子的色散耦合占主导地位 [35]。请注意，所附镜面垫片的尺寸应远小于钇铁石榴石桥，以确保弯曲位移（相对运动）可以忽略，并使钇铁石榴石桥与所附镜面紧密贴合，从而以近似相同的频率振荡。另一种方案是采用“中间膜”结构 [38]，将钇铁石榴石桥置于光学腔中央，同样可以实现磁振子机械位移与光学腔之间的色散耦合。

系统的哈密顿量表示为

$$\begin{aligned} H/\hbar = {} & \omega_c c^\dagger c + \omega_m m^\dagger m + \frac{\omega_a}{2} S_z + \frac{\omega_b}{2}\left(q^2+p^2\right) \\ & + g_a\left(S_+ c + S_- c^\dagger\right) - g_c c^\dagger c q + g_m m^\dagger m q + H_{\rm dri}/\hbar, \end{aligned} \tag{1}$$

其中，c（$c^\dagger$）和 m（$m^\dagger$）分别是腔模和磁振子模的湮灭（产生）算符，满足 $[k, k^\dagger] = 1$（k = c，m）。q 和 p（[q，p] = i）是机械模的无量纲位置和动量。具有固有频率 ω_a 的 N_a 个二能级原子组成的系综的集体自旋算符为 $S_{\pm}$，$_z = \Sigma^{N_a}_{i=1}\sigma^{(i)}_{\pm}$，z，其中 $\sigma_{\pm}$，$_z$为泡利矩阵，并满足对易关系 $[S_+, S_-] = S_z$ 和 $[S_z, S_\pm] = \pm 2S_\pm$。$\omega_c$、$\omega_m$和$\omega_b$ 分别是腔、磁振子和机械模的共振频率，并且通过改变偏置磁场 B_0的强度，可以在很大范围内调节磁振子频率。原子-腔耦合强度为 $g_a = \mu\sqrt{\omega_c/2\hbar\epsilon_0 V_c}$，其中 μ 为~~原子偶极~~矩，$V_c$ 为腔模体积，ϵ_0 为真空介电常数。g_c（g_m）表示裸光机械（磁机械）耦合强度，通过强驱动腔模（磁振子模）可以将其显著增强。最后一项是驱动哈密顿量，$H_{\rm dri} = i\hbar E(c^\dagger e^{-i\omega_L t} - H.c.) + i\hbar\Omega_d(m^\dagger e^{-i\omega_0 t} - H.c.)$，其中 $E = \sqrt{2\kappa_c P_L/\hbar\omega_L}$ 表示腔与激光驱动场之间的耦合强度，P_L（ω_L）分别为激光的功率（频率），κ_c 为腔衰减率。拉比频率 $\Omega_d = \frac{\sqrt{5}}{4}\gamma\sqrt{N}B_d$ [8] 表示磁振子模与驱动磁场之间的耦合，其中驱动磁场的振幅为 B_d、频率为 ω_0，γ 为旋磁比，N 为钇铁石榴石晶体中的自旋数。注意，假设磁振子处于低激发极限下，即 $\langle m^\dagger m\rangle \ll 2Ns$，其中 $s = \frac{5}{2}$ 是钇铁石榴石中基态 Fe^{3+} 离子的自旋数 [8]。这验证了 _ 自旋的玻色描述，此时系统可以用谐振子 [23]很好地描述。

由哈密顿量 (1) 控制的系统动力学通常较为复杂。不过，假设原子处于低激发极限，即单个原子的激发概率很小 [39]，便可简化这一问题。我们假设原子初始制备于基态，因此 $S_z \simeq \langle S_z\rangle \simeq -N_a$，并与光学腔发生$o$非共振耦合 。在这种情况下，原子极化的动力学可用玻色算符描述。具体而言，原子湮灭算符可定义为 $a = S_-/\sqrt{|\langle S_z\rangle|}$，并满足玻色对易关系 $[a, a^\dagger] = 1$。因此，我们得到完全玻色化的哈密顿量，其形式为

$$\begin{aligned} H/\hbar = {} & \sum_{j=a,c,m}\omega_j j^\dagger j + \frac{\omega_b}{2}\left(q^2+p^2\right) + H_{\rm dri}/\hbar \\ & + g_N\left(a^\dagger c + a c^\dagger\right) - g_c c^\dagger c q + g_m m^\dagger m q, \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $g_N = g_a\sqrt{N_a}$ 是有效原子-腔耦合强度。

考虑每个模式的耗散和输入噪声，并在相对于 $\hbar\omega_L(a^\dagger a + c^\dagger c) + \hbar\omega_0 m^\dagger m$ 的相互作用绘景中进行处理，我们得到系统的以下量子朗之万方程（QLE）：

$$\begin{aligned} \dot a &= -i\Delta_a a - \gamma_a a - i g_N c + \sqrt{2\gamma_a}a_{\rm in}, \\ \dot c &= -i\Delta_c c - \kappa_c c + i g_c c q - i g_N a + E + \sqrt{2\kappa_c}c_{\rm in}, \\ \dot m &= -i\Delta_m m - \kappa_m m - i g_m m q + \Omega_d + \sqrt{2\kappa_m}m_{\rm in}, \\ \dot q &= \omega_b p, \quad \dot p = -\omega_b q - \gamma_b p + g_c c^\dagger c - g_m m^\dagger m + \xi, \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $\Delta_{a(c)} = \omega_{a(c)} - \omega_L$ 和 $\Delta_m = \omega_m - \omega_0$。$\gamma_a$ 为原子激发能级的衰减率，γ_b（κ_m）为机械模式（磁振子模式）的耗散率。$j_{\rm in}(t)$（j = a、c、m）表示均值为零的输入噪声算符，其满足以下关联函数：$\langle j^\dagger{\rm in}(t)\, j_{\rm in}(t')\rangle = N_j(\omega_j)\delta(t-t')$，以及$\langle j_{\rm in}(t)\, j^\dagger{\rm in}(t')\rangle = [N_j(\omega_j)+1]\delta(t-t')$。$\xi(t)$ 是作用于机械振子的厄米布朗噪声算符，其本质上是非马尔可夫的；但当机械品质因数 $Q_b = \omega_b/\gamma_b \gg 1$ [40] 较大时，可以采用马尔可夫近似。在这种情况下，$\xi(t)$ 具有 δ自相关函数：$\langle\xi(t)\xi(t') + \xi(t')\xi(t)\rangle/2 \simeq \gamma_b[2N_b(\omega_b)+1]\delta(t-t')$。这里，$N_k(\omega_k) = [\exp(\hbar\omega_k/k_B T)-1]^{-1}$（k = a、c、m、b）表示浴温 T 下各模式的平均热激发数，其中 k_B 为玻尔兹曼常数。

要在系统中产生强量子关联（例如纠缠），需要足够强的光机械与磁振子机械相互作用。为此，我们用强激光（微波）场驱动腔（磁振子）模式，从而获得较大的稳态振幅 $|\langle c\rangle|, |\langle m\rangle| \gg 1$。这使我们能够围绕稳态对非线性光机械与磁振子机械动力学进行线性化。具体做法是将每个模式算符写成其经典平均值与量子涨落算符之和，即$k = \langle k\rangle + \delta k$，并忽略较小的二阶涨落项。我们旨在研究以下各者之间的量子关联

宏观子系统，因此我们关注量子涨落（围绕稳态平均值）的动力学。描述量子涨落（$\delta x_a, \delta y_a, \delta x_c, \delta y_c, \delta q, \delta p, \delta x_m, \delta y_m$）的线性化量子朗之维方程，其中 $\delta x_j = (\delta j + \delta j^\dagger)/\sqrt{2}$ 和 $\delta y_j = i(\delta j^\dagger - \delta j)/\sqrt{2}$（$j = a, c, m$）分别表示相应模式振幅和相位正交分量的涨落，可写成如下矩阵形式

$$\dot{u}(t) = Au(t) + n(t), \tag{4}$$

其中 $u = (\delta x_a, \delta y_a, \delta x_c, \delta y_c, \delta q, \delta p, \delta x_m, \delta y_m)^{\mathrm{T}}$ 和 $n = (\sqrt{2\gamma_a}x_a^{\mathrm{in}}, \sqrt{2\gamma_a}y_a^{\mathrm{in}}, \sqrt{2\kappa_c}x_c^{\mathrm{in}}, \sqrt{2\kappa_c}y_c^{\mathrm{in}}, 0, \xi, \sqrt{2\kappa_m}x_m^{\mathrm{in}}, \sqrt{2\kappa_m}y_m^{\mathrm{in}})^{\mathrm{T}}$，漂移矩阵 A 为

$$A = \begin{pmatrix} -\gamma_a & \Delta_a & 0 & g_N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta_a & -\gamma_a & -g_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_N & -\kappa_c & \tilde{\Delta}_c & G_c & 0 & 0 & 0 \\ -g_N & 0 & -\tilde{\Delta}_c & -\kappa_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_c & -\omega_b & -\gamma_b & 0 & G_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -G_m & 0 & -\kappa_m & \tilde{\Delta}_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{\Delta}_m & -\kappa_m \end{pmatrix}, \tag{5}$$

其中，有效失谐 $\tilde{\Delta}_c = \Delta_c - g_c\langle q\rangle$ 和 $\tilde{\Delta}_m = \Delta_m + g_m\langle q\rangle$包含由机械位移 $\langle q\rangle = (g_c|\langle c\rangle|^2 - g_m|\langle m\rangle|^2)/\omega_b$引起的频移，这些频移由光机械与磁振子机械相互作用共同造成。有效光学与磁振子机械耦合强度为$G_c = i\sqrt{2}g_c\langle c\rangle$ 和 $G_m = i\sqrt{2}g_m\langle m\rangle$，腔模和磁振子模的大振幅使其显著增强：

$$\langle m\rangle = \frac{\Omega_d}{\kappa_m + i\tilde{\Delta}_m}, \quad \langle c\rangle = \frac{E(\gamma_a + i\Delta_a)}{g_N^2 + (\gamma_a + i\Delta_a)(\kappa_c + i\tilde{\Delta}_c)}. \tag{6}$$

原子模的振幅可通过 $\langle a\rangle = -ig_N\langle c\rangle/(\gamma_a + i\Delta_a)$求得。需要注意的是，式（5）中的漂移矩阵 $\tilde{A}$ 是在条件 $|\Delta_a|, |\Delta_c|, |\Delta_m| \gg \gamma_a, \kappa_c, \kappa_m$下推导得到的。这给出了更简单的近似表达式 $\langle m\rangle \simeq -i\Omega_d/\tilde{\Delta}_m$ 和 $\langle c\rangle \simeq iE\Delta_d/(g_N^2 - \Delta_a\tilde{\Delta}_c)$，它们是纯虚数，因此产生近似为实数的耦合 G_m 和 G_c。事实上，正如后文将要展示的，条件 $|\Delta_a|, |\Delta_c|, |\Delta_m| \simeq \omega_b \gg \gamma_a, \kappa_c, \kappa_m$（参见图 1(c)）对应于边带分辨极限，并且最有利于在系统 [8, 12, 27, 35]中产生纠缠。

由于系统的动力学已被完全线性化，且输入噪声为高斯噪声，因此系统在任意给定时刻的状态都是高斯态，可由一个 8×8协方差矩阵（CM） $\mathcal{V}$表征，其元素定义为 $\mathcal{V}_{ij} = \langle u_i(t)u_j(t') + u_j(t')u_i(t)\rangle/2$ $(i, j = 1, 2, \ldots, 8)$。要获得稳态协方差矩阵 $\mathcal{V}$，可以直接求解李雅普诺夫方程

$$A\mathcal{V} + \mathcal{V}A^T = -D, \tag{7}$$

其中，扩散矩阵 $D = \mathrm{diag}[\gamma_a, \gamma_a, \kappa_c, \kappa_c, 0, \gamma_b(2N_b + 1), \kappa_m(2N_m + 1), \kappa_m(2N_m + 1)]$，由 $D_{ij}\delta(t - t') = \langle n_i(t)n_j(t') + n_j(t')n_i(t)\rangle/2$ 定义。计算 D 时，考虑到它们的模频率较高，我们取 $N_{a(c)} \simeq 0$。当获得协方差矩阵 $\mathcal{V}$ 后，便可量化任意

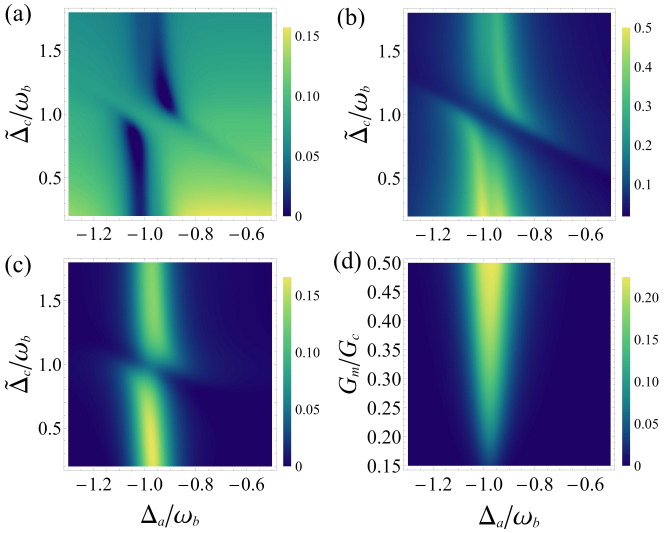


图2：稳态（a）光子-声子纠缠E_{cb}、（b）原子-声子纠缠E_{ab}和（c）原子-磁振子纠缠E_{am} 随失谐 Δ_a 和 $\tilde{\Delta}_c$ 的密度图（以 ω_b为单位）。（d）原子-磁振子纠缠E_{am} 随 Δ_a 和磁力机械耦合强度G_m 的变化（以G_c为单位）。在所有图中取$G_c/2\pi = 8$ 兆赫和$\tilde{\Delta}_m = \omega_b$，在（d）中取 $\tilde{\Delta}_c = 0$，在（a）—（c）中取$G_m/2\pi = 2.5$兆赫。其他参数见正文。

两个子系统之间的纠缠，使用对数负性 E_N [41]，其定义为

$$E_N = \max[0, -\ln(2\eta^-)], \tag{8}$$

其中 $\eta^- \equiv 2^{-1/2}[\Sigma - (\Sigma^2 - 4\det\mathcal{V}_4)^{1/2}]^{1/2}$，且 $\mathcal{V}_4 = [\mathcal{V}_e, \mathcal{V}_{ef}; \mathcal{V}_{ef}^{\mathrm{T}}, \mathcal{V}_f]$是由模式 e和f（e、f $= a$、c、m、b）构成的双部系统的 4×4协方差矩阵，其中 $\mathcal{V}_e, \mathcal{V}_f$和$\mathcal{V}_{ef}$是 $\mathcal{V}_4$的 2×2块，且 $\Sigma \equiv \det\mathcal{V}_e + \det\mathcal{V}_f - 2\det\mathcal{V}_{ef}$。在我们高度混合的系统中，也可能存在三体纠缠。我们采用最小残余纠缠角$R_\tau^{\min}$来量化三体纠缠，其定义为 [42]

$$R_\tau^{\min} \equiv \min[R_\tau^{\alpha|\beta\gamma}, R_\tau^{\beta|\alpha\gamma}, R_\tau^{\gamma|\alpha\beta}], \tag{9}$$

其中 α, β, γ 表示系统中的任意三个模式，而$R_\tau^{\alpha|\beta\gamma} \equiv C^{\alpha|\beta\gamma} - C^{\alpha|\beta} - C_{\alpha|\gamma} \geq 0$ 是残余纠缠角，其中$C^{u|v}$（v 包含一个或两个模式）是u 和v 子系统的纠缠角，定义为对数负性平方 [8]。非零的$R_\tau^{\min} > 0$ 表明相应三个模式之间存在真正三体纠缠。

机械模的共振频率是系统中最低的，通常处于兆赫范围 [7–10, 37]，，即使在低温下也具有很高的热占据数。因此，要在系统中制备量子态，必须将机械模冷却至接近基态 [8]。为此，我们用红失谐激光驱动腔，从而激活光机械反斯托克斯散射；在边带分辨极限下，这种散射能够显著冷却机械模 $\omega_b \gg \kappa_c$ [1]。我们使用相对较高的激光

功率，从而产生强光机械耦合G_c，并打破$G_c \ll \omega_b$ 弱耦合条件，使得无法采用旋波近似来获得最佳的分束器相互作用 $\propto c^\dagger b + cb^\dagger$ ($b = q+ip\sqrt{2}$)以实现冷却。此时，对应于参量下转换相互作用的反旋波项 $\propto c^\dagger b^\dagger + cb$开始发挥作用，并产生光机械纠缠 [43], ，如图2(a)所示。图中~$\Delta_c = \omega_b$ 附近的反交叉是强耦合的标志。当原子频率与斯托克斯边带匹配时，即$\Delta_a = -\omega_b$ [39] （参见图1(c)），纠缠可转移至原子系统，从而产生原子-声子纠缠，这一点已由图2(b)证实。在腔磁力学系统中，也采用过类似机制来制备纠缠态 [8, 12, 27]。进一步用~红失谐微波场驱动磁振子模，且失谐量为 $\Delta_m = \omega_b$时，会激活磁机械反斯托克斯散射，从而实现磁振子-声子态交换操作。由此，原子-声子纠缠进一步转移至磁振子系统，产生稳态原子-磁振子纠缠，如图2(c)所示。只有在磁机械耦合足够强时，这种纠缠转移才会变得高效。图2(d)清楚地表明，原子-磁振子纠缠E_{am} 随耦合G_m增强而增加，从而提高了磁振子-声子态交换效率。

从整个过程来看，若将纠缠视为一种有限的量子资源，它最初在光机械系统中产生，随后通过腔-原子线性耦合分配至原子-声子系统，再通过声子-磁振子态交换相互作用进一步传递至原子-磁振子系统。图2(a)、图2(b)和图2(c)中纠缠的互补分布，清楚地表明了这一纠缠转移过程。在其他多体系统中也观察到了这一特征 [8, 36]。

绘制图2时，我们采用了可行参数 [7–10, 35, 37]: $\omega_m/2\pi = 10$GHz、 $\omega_b/2\pi = 40$兆赫、 $\lambda_L = 852$nm（光学波长）、$\kappa_m/2\pi = 1$兆赫、 $\gamma_a = \kappa_m$, $\kappa_c = 2\kappa_m$,$\gamma_b/2\pi = 10^2$ Hz、$G_c/2\pi = 8$兆赫、$g_N/2\pi = 8$ 兆赫、~$G_m/2\pi = 2.5$ 兆赫、 $\Delta_m = \omega_b$ 以及 T = 10mK。通过激光功率 $P_L \simeq 5.5$ mW，在失谐~$\Delta_c \simeq 0.5\omega_b$ 和 $\Delta_a = -\omega_b$时，对于 $g_c/2\pi = 1$ kHz，可实现强光机械耦合 $G_c/2\pi = 8$ 兆赫。对于一座尺寸为 $5\times2\times1$ μm的钇铁石榴石桥（近似为长方体），磁机械耦合 $G_m/2\pi = 2.5$ 兆赫对应的微波驱动功率为 $P_0 \simeq 1.44$ mW，其中 $g_m/2\pi = 20$ Hz [35]。

在我们的系统中，由于腔模和磁振子模同时受到红失谐激光和微波场驱动（图 1(c)），系统中同时存在光机械和磁机械反斯托克斯散射；当驱动场足够强时，这两种机械冷却通道可能相互竞争。图 3(a) 展示了这种竞争效应，其中我们绘制了原子-磁振子纠缠E_{am} 以及相应的最优腔-激光失谐 $\tilde{\Delta}_c^{\rm opt}$随磁机械耦合$G_m$的变化。当$G_m$ 较小时，光机械冷却通道占主导，因此（针对纠缠的）最优失谐 $\tilde{\Delta}_c^{\rm opt}$约为 ω_b，此时冷却效率达到最大值 [1]。随着G_m 增大，

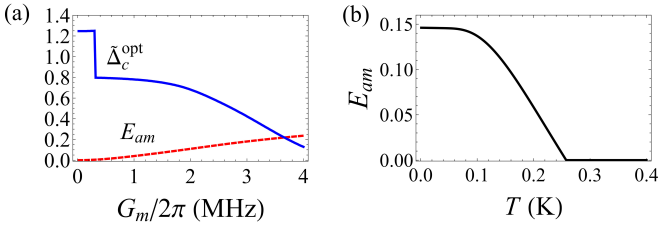


图3：(a) 稳态原子-磁振子纠缠E_{am} （虚线）及其对应的最佳腔失谐 $\tilde{\Delta}_c^{\rm opt}$（实线，单位为 ω_b ）随G_m 的变化。两幅图中均取 $\tilde{\Delta}_m = -\Delta_a = \omega_b$，且 $\tilde{\Delta}_c = 0.5\omega_b$。以及(b)中的$G_m/2\pi = 2.5$ 兆赫。其他参数与图2(c)相同。

磁振子-声子态交换效率提高，使E_{am} 增大（虚线）。此外，磁机械反斯托克斯散射对机械冷却的贡献也随之增加，从而使最优失谐$\tilde{\Delta}_c^{\rm opt}$减小（实线）。最优失谐的这种变化意味着光机械分束器相互作用的强度减弱（其在机械冷却中的作用逐渐被磁机械分束器相互作用取代），而光机械参量下转换相互作用的强度则增大。最优失谐 $\tilde{\Delta}_c^{\rm opt}$是磁机械冷却、光机械冷却和参量下转换之间权衡的结果。值得注意的是，图 3(a) 中G_m 增大时 $\tilde{\Delta}_c^{\rm opt}$急剧下降，这是由强耦合相关的反交叉（参见图2）所致，对应于反交叉附近$\tilde{\Delta}_c^{\rm opt}$在两个分支之间发生突变。图 3(b) 显示，生成的稳态宏观原子-磁振子纠缠在浴温高达数百毫开尔文时仍能存在；此时耦合强度适中$G_m/2\pi = 2.5$ 兆赫。

现在我们研究各个模式的耗散对纠缠的影响。在图 4 中，我们绘出了稳态原子—磁振子纠缠随系统四种耗散率的变化。显然，纠缠对所有耗散率都具有鲁棒性，并且在很宽的耗散率范围内均存在。不过，纠缠对原子和磁振子的衰减率 γ_a 和 κ_m更为敏感，只有当γ_a, $\kappa_m < 2\pi\times10$ 兆赫时才存在。相比之下，它对腔衰减率 κ_c 和机械阻尼

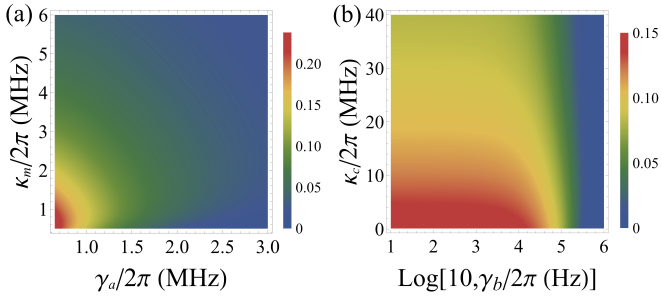


图4：稳态原子-磁振子纠缠E_{am} 随耗散率的变化：(a) γ_a 和 κ_m；(b) γ_b 和 κ_c。取浴温T = 10毫开，其他参数与图 3(b)相同。

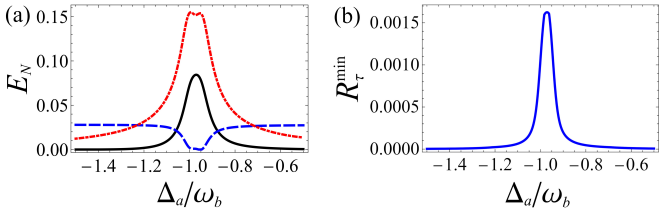


图5：(a) 二分纠缠 E_{ab} （点划线）、E_{bm} （虚线）和 E_{am} （实线）随 Δ_a 的变化。(b) 以最小残余纠缠角 $R_\tau^{\min}$ 表示的原子-磁振子-声子三体纠缠随 Δ_a 的变化。取 $G_c/2\pi = 2.3$ 兆赫，$T = 10$ 毫开尔文。其他参数与图 3(b) 中相同。

率 γ_b的鲁棒性要强得多。当 κ_c 在解析边带极限 $\kappa_c < \omega_b$内达到数十兆赫，且 γ_b 高达 $\sim 2\pi \times 4 \times 10^5$ 赫兹（对应的品质因数为 $Q_b \sim 100$）时，纠缠仍然存在。请注意，图 4 是使用式（4）中的精确漂移矩阵 A 绘制的，未假设耦合G_m和G_c为实数。一般复耦合G_m 和G_c 对应的精确漂移矩阵 A 形式见参考文献 [44]。

除了系统中存在许多二分纠缠（如图2所示）之外，这个复杂的四分系统还可能表现出多分纠缠。尽管原子-腔-声子纠缠已在一种更简单的构型中得到研究 [39], ，但我们在此揭示，如图5所示，三个大质量子系统（即原子、磁振子和声子）之间共享着相当显著的三体纠缠。原子-磁振子-声子系统中所有二分纠缠 E_{ab}、E_{bm} 和 E_{am} 与真正三体纠缠 $R_\tau^{\min} > 0$ 同时存在，这清楚地表明三个宏观系统之间共享着强量子关联。系统中还存在其他形式的三体纠缠，但其纠缠程度较小。因此，这些结果不在此处展示。

最后，我们讨论模型的有效性，并提出一种检测和验证纠缠的策略。自旋系统的玻色描述在低激发极限下成立，即 $\langle m^\dagger m\rangle \ll 2Ns$ 且 $\langle a^\dagger a\rangle \ll N_a$。在参数条件取自图 3(b)时，我们得到 $\langle m^\dagger m\rangle = 7.7 \times 10^9 \ll 2Ns = 2.1 \times 10^{11}$ 以及 $\langle a^\dagger a\rangle = 1.3 \times 10^6 \ll N_a = 6.4 \times 10^7$。估算$N_a$时，我们取$g_a/2\pi = 10^3$ Hz [39]。显然，低激发条件得到了充分满足。为检测纠缠，可以将磁振子态耦合到由弱探测场驱动的微波腔，从而对其进行访问。由于磁振子-腔分束器耦合 [45, 46], ，磁振子态可以通过腔输出场读出。通过对微波输出场进行零差探测，可以测量磁振子模的两个正交分量。类似地，将原子极化耦合到由弱激光场驱动的附加光学腔，即可测量原子极化正交分量。测得磁振子和原子的正交分量后，便可构建协方差矩阵（CM），并据此计算原子-磁振子纠缠 [2, 5, 43]。

总之，我们提出了一种在光力-磁力学系统中制备两个宏观系统——原子系综和亚铁磁磁振子——的稳态纠缠态的方案。原子-磁振子纠缠源于光力学与磁力学冷却、光力学参量下转换相互作用以及不同子系统之间纠缠分布的共同作用。我们揭示了两种光力学与磁力学冷却通道之间的竞争机制。我们进一步确认了原子-磁振子-声子系统中存在真正三体纠缠，其中三个子系统均为具有质量的系统。鉴于两个原子系综 [47] 以及原子系综与机械振子之间的宏观纠缠态均已成功生成，该方案有望应用于宏观量子态的制备。通过将原子（磁振子）耦合到光学（微波）场，原子-磁振子纠缠还可用于制备微波-光学纠缠，这对于构建混合量子网络尤为重要 [49]。

本研究获得了中国国家重点研发计划（项目编号：2022YFA1405200）和国家自然科学基金（项目编号：92265202）的资助。

[1] M. Aspelmeyer、T. J. Kippenberg 和 F. Marquardt, 《现代物理评论》**86**, 1391（2014年）。[2] T. A. Palomaki、J. D. Teufel、R. W. Simmonds 和 K. W. Lehn- ert, 《科学》**342**, 710（2013年）。[3] R. Riedinger 等, 《自然》**556**, 473（2018年）。[4] C. F. Ockeloen-Korppi 等, 《自然》**556**, 478（2018年）。[5] S. Kotler 等, 《科学》**372**, 622（2021年）[6] E. E. Wollman 等, 《科学》**349**, 952（2015年）。[7] X. Zhang、C.-L. Zou、L. Jiang 和 H. X. Tang, 《科学进展》**2**, e1501286（2016年）。[8] J. Li、S.-Y. Zhu 和 G. S. Agarwal, 《物理评论快报》**121**, 203601 2018（）。[9] C. A. Potts、E. Varga、V. Bittencourt、S. V. Kusminskiy 和 J. P. Davis, 《物理评论X》**11**, 031053（2021年）。[10] R.-C. Shen、J. Li、Z.-Y. Fan、Y.-P. Wang 和 J. Q. You, 《物理评论快报》**129**, 123601（2022年）。[11] J. Li、S.-Y. Zhu 和 G. S. Agarwal, 《物理评论A》**99**, 021801(R)

(2019年). [12] J. Li and S.-Y. Zhu, 《新物理学杂志》**21**, 085001 (2019年). [13] H. Tan, 《物理评论研究》**1**, 033161 (2019年). [14] M.-S. Ding, L. Zheng, and C. Li, 《美国光学学会杂志B辑》**37**, 627 (2020年). [15] J. Li and S. Gr¨oblacher, 《量子科学与技术》**6**, 024005 (2021年). [16] W. Zhang, D.-Y. Wang, C.-H. Bai, T. Wang, S. Zhang, and H.-F. Wang, 《光学快报》**29**, 11773 (2021年). [17] Y.-T. Chen, L. Du, Y. Zhang, and J.-H. Wu, 《物理评论A》**103**, 053712 2021( ). [18] J. Li, Y.-P. Wang, J. Q. You, and S.-Y. Zhu, 《国家科学评论》, nwac247 (2022年). [19] B. Hussain, S. Qamar, and M. Irfan, 《物理评论A》**105**, 063704 (2022年). [20] W. Qiu, X. Cheng, A. Chen, Y. Lan, and W. Nie, 《物理评论A》**105**, 063718 (2022年).

[21] H. Qian, Z.-Y. Fan, J. Li. 《量子科学与技术》**8**, 015022 (2023年). [22] M. Asjad, J. Li, S.-Y. Zhu, and J. Q. You. 《基础研究》**3**, 3 (2023年). [23] D. Lachance-Quirion, Y. Tabuchi, A. Gloppe, K. Usami, and Y. Nakamura, 《应用物理快报》**12**, 070101 (2019年). [24] H. Y. Yuan, Y. Cao, A. Kamra, R. A. Duine, and P. Yan, 《物理学报告》**965**, 1 (2022年). [25] C. Kong, B. Wang, Z.-X. Liu, H. Xiong, and Y. Wu, 《光学快报》**27**, 5544 (2019年). [26] M.-S. Ding, L. Zheng, and C. Li, 《科学报告》**9**, 15723 (2019年). [27] M. Yu, H. Shen, and J. Li, 《物理评论快报》**124**, 213604 (2020年). [28] C. A. Potts, V. A. S. V. Bittencourt, S. V. Kusminskiy, and J. P. Davis, 《物理评论应用》**13**, 064001 (2020年). [29] S.-F. Qi and J. Jing, 《物理评论A》**103**, 043704 (2021年). [30] B. Sarma, T. Busch, and J. Twamley, 《新物理学杂志》**23**, 043041 (2021年). [31] T.-X. Lu, H. Zhang, Q. Zhang, and H. Jing, 《物理评论A》**103**, 063708 2021( ). [32] Z.-Y. Fan, R.-C. Shen, Y.-P. Wang, J. Li, and J. Q. You, 《物理评论A》**105**, 033507 (2022年). [33] D. Hatanaka, M. Asano, H. Okamoto, Y. Kunihashi, H. Sanada, and H. Yamaguchi, Phys. Rev. Appl. **17**, 034024 (2022年). [34] H. Xiong, 《基础研究》**3**, 8 (2023年). [35] Z. Fan, H. Qian and J. Li, 《量子科学与技术》**8**, 015014 (2023年). [36] Z.-Y. Fan, L. Qiu, S. Gr¨oblacher, J. Li. arXiv:2208.10703. [37] F. Heyroth *et al.*, 《物理评论应用》**12**, 054031 (2019年). [38] J. D. Thompson *et al.*, 《自然》**452**, 72 (2008). [39] C. Genes, D. Vitali, and P. Tombesi, 《物理评论A》**77**, 050307 2008(R) ( ).

[40] V. Giovannetti 和 D.Vitali, 《物理评论A》**63**, 023812 (2001年)。[41] G. Adesso、A. Serafini 和 F. Illuminati, 《物理评论A》**70**, 022318 2004( )。[42] G. Adesso 和 F. Illuminati, 《物理学杂志A》**40**, 7821 (2007); G. Adesso 和 F. Illuminati, 《新物理学杂志》**8**, 15 (2006)。[43] D. Vitali 等, 《物理评论快报》**98**, 030405 (2007)。[44] 漂移矩阵A的精确形式为

$$A=\begin{pmatrix} -\gamma_a & \Delta_a & 0 & g_N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta_a & -\gamma_a & -g_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_N & -\kappa_c & \tilde{\Delta}_c & -\text{图像}G_c & 0 & 0 & 0 \\ -g_N & 0 & -\tilde{\Delta}_c & -\kappa_c & \mathrm{Re}G_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_b & 0 & -\text{虚}G_m \\ 0 & 0 & \mathrm{Re}G_c & \mathrm{Im}G_c & -\omega_b & -\gamma_b & -\mathrm{Re}G_m & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Im}G_m & 0 & -\kappa_m & \tilde{\Delta}_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Re}G_m & 0 & -\tilde{\Delta}_m & -\kappa_m \end{pmatrix},$$

其中，光学与磁振子机械耦合强度重新定义为$G_c = \sqrt{2}g_c\langle c\rangle$和$G_m = \sqrt{2}g_m\langle m\rangle$，这是由于式（6）中给出的复数平均值$\langle c\rangle$和$\langle m\rangle$。图4绘制时，耦合强度固定为$|G_c|/2\pi = 8$兆赫和$|G_m|/5$兆赫。[45] Y. Tabuchi、S. Ishino、T. Ishikawa、R. Yamazaki、K. Usami 和 Y. Nakamura, 《物理评论快报》**113**, 083603（2014年）。[46] X. Zhang、C. L. Zou、L. Jiang 和 H. X. Tang, 《物理评论快报》**113**, 156401（2014年）。[47] B. Julsgaard、A. Kozhekin 和 E. S. Polzik, 《自然》**413**, 400（2001年）。[48] R. A. Thomas 等, 《自然物理》**17**, 228（2021年）。[49] R. Sahu、L. Qiu、W. Hease、G. Arnold、Y. Minoguchi、P. Rabl、J. M. Fink, 《科学》**380**, 718（2023年）。