arXiv:2302.08699v1 [math.CO] 17 Feb 2023

彩色圆的测度

ANDREW SNOWDEN

ABSTRACT. 在近期与 Harman 的合作研究中，我们为寡轨道群引入了测度这一新概念，并展示了如何利用它们构造有趣的张量范畴。确定一个寡轨道群的测度，在我们看来是一个重要且困难的组合问题，而目前仅有少数几种情形得到了求解。本文旨在解决某个无限寡轨道群族的这一问题，即 n 彩色圆的自同构群（对每个 $n \geq 1$）。

CONTENTS

1. 引言 1
2. 二分结构 4
3. 寡轨道群与测度 7
4. 彩色圆及其对称性 11
5. 测度的分类 13
6. 直线的情形 22
参考文献 23

1. INTRODUCTION

1.1. 背景。设 G 是域 k 上的代数群（或超群）。于是可以考虑有限维代数表示的范畴 Rep(G)，其中带有张量积。该范畴满足以下条件：

(a) 它是阿贝尔范畴，且每个对象都有有限长度（即有限合成列）。(b) 两个对象之间的映射空间是有限维 k-向量空间。(c) 每个对象都有对偶（即该范畴是刚性的）。(d) 若 1 表示张量积的单位对象（即平凡表示），则 End(1) $= k$。

一个预坦纳卡范畴是 k-线性对称张量范畴，满足以下公理（详见[CO2，§2.1]）。张量范畴领域中的一个重要问题，是理解预坦纳范畴在何种程度上超越了经典表示范畴。

Deligne [Del] 给出了首批并非形如 Rep(G) 的预坦纳范畴实例：他通过对称群的表示范畴 Rep($\mathfrak{S}_n$) 进行“插值”，构造了一个预坦纳范畴的一参数族 Rep($\mathfrak{S}_t$)。Knop [Kno1、Kno2] 推广了 Deligne 的构造，并对其他有限群族（例如有限线性群）进行了插值。此后，这一方向涌现了大量研究，例如 [CO1、CO2、CW、EAH、Har、Har2]。

日期：2023年2月16日。

最近，在与 Harman 合作的工作中 [HS1], 我们给出了预坦纳范畴的一种新构造。回顾一下，寡轨道群是一个置换群（G，Ω），满足G 对于所有^n ，在 Ω 上有有限多个轨道 $n \geq 0$。我们为寡轨道群引入了测度的概念（见下文§3 ）。给定一个针对 k的取值于 的测度 μ ，我们构造了一个 G 的线性刚性张量范畴 Perm(k“置换模”范畴 G； μ)。在某些假设下，我们证明该范畴具有一个阿贝尔包络 $\mathrm{Rep}(G;\ \mu)$，它是预坦纳范畴。

寡轨道群最简单的例子是无限对称群 $\mathfrak{S}$。在这种情况下，我们在 [HS1] 中证明，存在一个测度的一参数族 μ_t，由此得到的范畴 $\mathrm{Rep}(\mathfrak{S};\mu_t)$ 与 Deligne 的插值范畴 $\mathrm{Rep}(\mathfrak{S}_t)$ 一致。更一般地，在所有已知的插值情形中（例如 Knop 研究的情形），有限群序列都有一个寡轨道极限，而我们的理论则给出了此前构造的插值范畴。

在 [HS1], 中，我们还研究了少数几个并非有限群极限的寡轨道群。例如，我们分析了实数直线上保序自双射构成的群 Aut(R $<$)。我们证明，这个群本质上有四种测度，其中一种测度导出一个预坦纳卡范畴。我们在 [HSS], 中详细研究了这个范畴，并将其命名为 Delannoy范畴；我们发现它具有若干显著性质（例如，亚当斯运算在其格罗滕迪克群上是平凡的）。相关情形将在即将发表的论文 [HSS2] 中讨论。

本文旨在为[HS1]中的示例列表增添新例：我们确定了某个无限族寡轨道群的测度（这些群无法实现为有限群的极限）。由此产生了大量新的刚性张量范畴。我们不知道这些范畴是否具有阿贝尔包络。

注 1.1。 如果 $\mathcal{C}$ 是有限关系结构的一个类（例如图、全序等），有时可以构造其$Fra\ddot{}\imath ss\acute{}$ é 极限 Ω，其中 $\mathcal{C}\Omega$ 是一个可数结构，具有重要的齐次性性质。Ω 的自同构群 G通常是寡轨道的，而这种构造是寡轨道群的主要来源。我们在 [HS1] 中证明， G 的测度（本质上）是一条规则，它为 $\mathcal{C}$ 的每个成员赋予 k 中的一个值，并满足某些恒等式。因此，理解测度实际上是一个组合问题；事实上，本文的大部分工作都具有组合性质。□

1.2. 结果陈述。设 S 是一个赋有处处稠密循环序的可数集；例如，可以取 S 为复单位圆中的单位根。设 Σ 是一个非空有限集，并设 σ: S $\to \Sigma$ 是一个函数，使得对每个 $a \in \Sigma$, $\sigma^{-1}(a)$ 都是稠密的。我们将 σ 视为 S 的一种着色。事实证明，S 是由赋有循环序和 Σ-着色的有限集所组成类的 Fra¨ıss´ 极限（见命题 4.1）；特别地，在同构意义下，S 与着色 σ 的选择无关。由此还可得出，S 的自同构群 G 是寡轨道的。

本文的目标是分类 G 的测度。容易看出，存在一个取值于某个环 $\Theta(G)$ 的泛测度，而分类 G 的测度这一问题归结为计算环 $\Theta(G)$。这正是我们的主定理所完成的工作：

定理 1.2. 给定一棵边以 Σ 标记的有向树 T，存在一个与之对应的 Z 值测度 μ_T，其定义在 G 上。这些测度的积（遍历树的同构类）定义了一个环同构 $\Theta(G) \to \prod_T \mathbf{Z}$。特别地，$\Theta(G) \cong \mathbf{Z}^N$，其中 $N = 2^n \cdot (n+1)^{n-2}$，且 $n = \#\Sigma$。

这里，“树”指无环的连通简单图，“有向”表示每条边都赋予了一个定向，而“标记”表示边集与 Σ之间存在给定的双射。一个例子见 §5.6。

固定一点 $\infty \in \mathbf{S}$，并令 $\mathbf{L} = \mathbf{S} \setminus \{\infty\}$。集合 $\mathbf{L}$ 是全序的且带有 Σ种颜色，其自同构群 H 是寡轨道的。我们还对 H 的测度进行了分类（见 §6）。（注意，群 H 出现于[Aga，§5。2] 以及 [LNVTS]。）

1.3. 证明概要。证明主要分为四个步骤：

（a）利用 H 的开子群分类（命题 4.2），我们首先证明， G 的测度等价于 Σ-测度。Σ-测度是一条规则 ν，它向每个 a、$b \in \Sigma$ 以及词 $w \in \Sigma^\star$ 赋予一个量 $\nu_{a,\,b}(w)$，使得某些关系成立（见定义 5.1）。这是一个重要的化简，因为 Σ-测度是纯粹的组合对象。（b）接下来，我们证明 Σ-测度由其在长度为一的词上的取值所决定，并且定义关系由那些涉及长度至多为二的词的关系生成。我们将这一结果表述为 Σ-测度与另一种称为 Σ-符号的概念之间的等价性（见定义 5.8）。这又是一个重要的化简，因为 Σ-符号比 Σ-测度简单得多。（c）接下来，我们基本上解出了 Σ-符号的定义方程。假设系- 数环是连通的， Σ-符号对应于满足一个相对简单条件的函数 $S\colon \Sigma^2 \to \{0,1\}$，即 §2.3 中的条件（$*$）。（d）上述出现的函数 S 在 §2 中得到研究，在那里它们被称为“定向二分结构”。我们证明，这些函数自然对应于边标记为 Σ 的有向树。

1.4. 张量范畴。 设 k 是一个域。给定一棵如下定理 1.2中所述的树 T，[HS1] 的理论工具构造出一个 k-线性刚性张量范畴 Perm(G； μ_T)（它不是阿贝尔范畴）。这是一个可能非常有趣的例子，尤其是考虑到 [HSS、HSS2] 在 #$\Sigma = 1$情形下的结果。一个重要问题是确定该范畴是否具有阿贝尔包络，因为这将产生一个新的预坦纳卡范畴。我们尚未发现任何障碍，但当 #$\Sigma > 1$ 时，[HS1] 关于阿贝尔包络的结果并不适用（测度 μ_T 不是准正则的）。

1.5. 概述。 在 §2中，我们引入二分结构的概念，并证明它们与树等价。在 §3中，我们回顾寡轨道群以及一般的测度。在§4中，我们介绍主要研究的群，并确定它们的一些群论性质。在 §5中，我们证明定理 1.2。最后，在 §6中，我们讨论群 H。

1.6. 记号。以下是最重要的记号：

k： 系数环Σ： 有限颜色集$\Sigma^\star$： 字母表 Σ 中的词集S：圆 L：直线，定义为 S $\setminus \{\infty\}\sigma$： S 的着色$G$： S 的自同构群（第 3 节除外）$H$： L 的自同构群$G(A)$： G 的子群，其中每个元素都固定 A

$w[i,j]$：词 w（参见 §5.1）

致谢 稿件。感谢 Nate Harman 和 Steven Sam 提供有益的讨论 .

2. Bisection structures

2.1. 定义。设 x 是一个实数。从实数直线上删去 x，会将其分成两部分。因此，我们在 $\mathbf{R} \setminus \{x\}$ 上定义一个等价关系 R_x：令 $R_x(y,z)$ 表示“y和 z 属于同一个连通分支”。如果 x、y和 z 是互不相同的实数，那么 $R_x(y,z)$、$R_y(x,z)$ 和 $R_z(x,y)$ 中恰有一个不成立。下面的定义将这一情形公理化，同时也允许更大的灵活性。

定义 2.1。设 X 是一个集合。在 X 上定义一个二分结构，即一种规则 R，它为每个$x \in X$ 指定一个定义在 $X \setminus \{x\}$ 上的等价关系 R_x，并满足以下条件：

(a) 等价关系 R_x 至多有两个等价类。(b) 若 x、y、$z \in X$ 两两不同，则 $R_x(y,z)$、$R_y(x,z)$和 $R_z(x,y)$中至多有一个不成立。□

树也能导出二分结构。在本文中，树是连通且无环的有限简单图，而 X标记树是指带有一个从 X 到边集的给定双射的树（即边由 X标记）。设 T 是一个 X标记树，且 x 是 T的一条边。从 T 中删去 x（但不删去 x中的顶点），得到一个至多有两个连通分支的森林 T_x。令 $R_x(y,z)$表示“y 和 z 属于 T_x的同一个连通分支”。等价地，$R_x(y,z)$表示连接 y 和 z 的测地线在T 中不包含边 x。容易验证，R_x定义了 X上的一个二分结构。我们将这个二分结构记作 R^T。

注 2.2. 二分结构与介于关系的概念密切相关。事实上，如果 R 是实数直线上的二分结构，那么 $\neg R_x(y,z)$恰好表示 x 介于 y与 z之间；与树相关联的二分结构也有类似的情形。Bankston[Ban] 提出了介于关系的一般概念，并讨论了许多例子。树的顶点上的介于关系在文献中经常出现；然而，这通常并不能导出二分结构。□

2.2. 主要结果。以下是我们关于二分结构所需的主要结果：

定理 2.3. 设 R 是有限集 X上的二分结构。那么存在一棵 X标记的树 T，使得 $R = R^T$，且 T 在同构意义下唯一。

证明将分为若干个引理。称集合 X中的不同元素 x 和 y 相邻，若对所有 $z \in X \setminus \{x,y\}$，都有 $R_z(x,y)$。对于每个 $x \in X$，令 E_x^+和 E_x^-为 R_x的两个等价类，并任意标记；若等价类少于˜两个，则令其中一个或两个集合为空。令 $V = X \times \{\pm\}$。我们在 $\tilde{V}$上定义关系 $\sim$：若 $(x,a) = (y,b)$，或者 $x \neq y$ 相邻且 $x \in E_y^b$和 $y \in E_x^a$，则 $(x,a) \sim (y,b)$。

˜引理 2.4. $\sim$ 是 V上的等价关系。

证明。我们只需验证传递性。因此，设 $(x,a) \sim (y,b)$ 且 $(y,b) \sim (z,c)$。我们证明 $(x,a) \sim (z,c)$。

我们首先断言，x和 z相邻。设给定 $w \in X \setminus \{x,z\}$。如果 $w = y$，那么由于x 和 z 都属于等价类 E_y^b，关系 $R_w(x,z)$成立。如果 $w \neq y$，那么

$R_w(x,y)$和 $R_w(y,z)$成立，因为(x,y)和(y,z)是相邻对，因此 $R_w(x,z)$成立，因为 R_w 是一个等价关系。这证明了该断言。

现在，由于 x 和 y 相邻，关系 $R_z(x,y)$成立。由于 y 属于 E_z^c，因此 x 也属于该集合。类似地， z 属于 E_x^a。因此，$(x,a) \sim (z,c)$，证毕。□

~令 V为商集 $V/\sim$。我们定义一个图 $T = T(R)$，其顶点集为 V，边集为 X。对于 $x \in X$，边 x 的两个顶点分别是 $x,+$和 $x,-$在V中的等价类；根据等价关系的定义，这两个顶点不同，因此 T 没有自环。下面的引理表明不存在二元环，即平行边。因此，T 是一个简单图。注意，若 x 和 y 是 X 中的不同元素，那么它们相邻（按上述意义）当且仅当它们在 T中共享一个顶点。

引理 2.5. T 没有环，也就是说，它是一个森林。

证明. 反设存在一个圈。设 $x_1, \ldots, x_n$ 是其中涉及的边，于是对于所有 $i \in \mathbf{Z}/n$， x_i 都与 x_{i+1} 相邻。由于等价类的标记是任意的，我们不妨假设对于所有 $i \in \mathbf{Z}/n$，$(x_i,+) \sim (x_{i+1},-)$。因此，我们有 $x_2 \in E_{x_1}^+$。现在， $x_1 \in E_{x_2}^-$和 $x_3 \in E_{x_2}^+$，所以$\neg R_{x_2}(x_1,x_3)$成立；由定义 2.1(b)，可得 $R_{x_1}(x_2,x_3)$，于是 $x_3 \in E_{x_1}^+$。如此继续下去，我们发现对于所有 $2 \le i \le n$，都有 $x_i \in E_{x_1}^+$。然而，由于$(x_n,+) \sim (x_1,-)$，我们有 $x_n \in E_{x_1}^-$，矛盾。□

设 $x \neq z$是 X的元素。若 $\neg R_y(x,z)$ 成立，则称 $y \in X \setminus \{x,z\}$ 位于 x和 z之间。记 $P(x,z)$ 为所有这样的元素 y所构成的集合。

引理 2.6。 T是连通的，因而是一棵树。事实上，对于 $x \neq z$，集合 $P(x,z)$ 是连接 x 和 z的最短路径中的边的集合。

证明。我们对 $\#P(x,z)$ 作归纳法。若 $P(x,z)$ 为空，则 x和 z相邻，结论显然。现设 $\#P(x,z) > 0$，并令 y为该集合中的一个元素。我们断言

$$P(x,z) = P(x,y) \cup \{y\} \cup P(y,z).$$

事实上，设 $w \in P(x,y)$，即 $\neg R_w(x,y)$ 成立。我们有如下蕴含关系

$$\neg R_w(x,y) \implies R_y(w,x) \implies \neg R_y(w,z) \implies R_w(y,z) \implies \neg R_w(x,z).$$

第一个蕴含来自定义 2.1(b)；第二个蕴含成立是因为 $\neg R_y(x,z)$ 成立且 R_y 是一个等价关系；第三个蕴含来自定义 2.1(b)；第四个蕴含成立是因为 $\neg R_w(x,y)$ 成立且 R_w 是一个等价关系。因此 $w \in (x,z)$。由此我们已经证明 $P(x,y) \subset P(x,z)$，并且由对称性，同样有 $P(y,z) \subset P(x,z)$。这证明了上面的一个包含关系。

现在我们证明反向包含。因此，设 $w \in P(x,z)$ 且 $w \neq y$。我们必须证明 w属于 $P(x,y)$ 或 $P(y,z)$。假设它不属于 $P(x,y)$。那么 $\neg R_w(x,z)$ 成立，因为 $w \in P(x,z)$；并且 $R_w(x,y)$ 成立，因为 $w \notin P(x,y)$。由于 R_w 是一个等价关系，因此 $\neg R_w(y,z)$ 成立，从而 $w \in P(y,z)$，证毕。

现在， $P(x,y)$ 和 $P(y,z)$ 不包含 y，因此是 $P(x,y)$ 的真子集。由归纳假设可知， $P(x,y)$ 是一条从 x 到 y 的路径，而 $P(y,z)$ 是一条从 y 到 z 的路径。因此， $P(x,z)$ 是一条从 x 到 z 的路径。至于 $P(x,z)$ 的极小性，选取一个与 x 相邻的 $y \in P(x,z)$（它必定存在）。那么 $P(x,z) = \{y\} \sqcup P(y,z)$。由于 $P(y,z)$ 是 y 与 z 之间的一条极小路径（由归纳法得出），且 $x \notin P(y,z)$，因此 $P(x,z)$ 是 x 与 z 之间的一条极小路径。□

引理 2.7。我们有 $R = R^T$。

证明。我们已经看到，$P(y,z)$ 是从 y 到 z 的 T 中最短路径，因此 $R_x^T(y,z)$ 成立，当且仅当 $x \notin P(y,z)$ 成立。然而，根据定义，$x \notin P(y,z)$ 等价于 $R_x(y,z)$。□

定理 2.3 的证明。令 $\mathscr{T}$ 为 X 标记树的同构类集合，令$\mathscr{B}$为 X 上二分结构的集合。我们有一个映射 $\Phi\colon \mathscr{T} \to \mathscr{B}$，由 $\Phi(T) = R^T$ 给出。上面的构造 $R \mapsto T(R)$ 给出了一个函数 $\Psi\colon \mathscr{B} \to \mathscr{T}$。引理 2.7 表明，$\Phi \circ \Psi$ 是单位元。很容易直接看出，$\Psi \circ \Phi$ 也是单位元；也就是说，若从一棵树 T 出发，那么 $T(R^T)$ 与 T 同构。□

2.3. 定向。现在我们来讨论上述思想的一种变体。定向二分结构是一个函数

$$S\colon (X \times X) \setminus \Delta \to \{\pm\},$$

其中 Δ 表示对角线，并且将 $R_x(y,z)$ 定义为由 $S(x,y) = S(x,z)$ 所定义的关系后，集合 $R = \{R_x\}$ 便是 X上的二分结构。该 R 自动满足定义 2.1(a)，所以只需考虑定义 2.1(b)。用 S来表述，这相当于以下条件：

(∗) 给定互不相同的 x、y、$z \in X$，以下等式中至多有一个

$$S(x,y) = S(x,z), \qquad S(y,x) = S(y,z), \qquad S(z,x) = S(z,y)$$

不成立。

更直观地说，定向二分结构就是一种二分结构 R，其中对每个 x，我们都将 R_x 的等价类标记为 $+$ 和 $-$。我们在定理 2.3的证明中，恰好用到了这种结构。

将有向树定义为每条边都指定了方向的树。如果 T 是一个以X为标记的有向树，那么它会在 X上诱导出一个定向二分结构 S^T，如下所述。若从 T中删除边 x，会得到（至多）两个连通分支；边 x 指向其中一个连通分支，并背离另一个。若 x 指向 y所属的连通分支，则令 $S^T(x,y) = +$；否则令 $S^T(x,y) = -$。容易验证，S^T是一个定向二分结构，并且定理 2.3 的类似结论在此情形下也成立。我们在 §5.6 中给出一个例子。

2.4. 计数。下面的命题对我们所考虑的结构进行计数。

命题 2.8。设 X 是一个含有 n 个元素的有限集。令

$$N_1 = \textit{the number of bisection structures on } X$$
$$N_2 = \textit{the number of } X\textit{-labeled trees up to isomorphism}$$
$$N_3 = \textit{the number of oriented bisection structures on } X$$
$$N_4 = \textit{the number of directed } X\textit{-labeled trees up to isomorphism}$$

Then

$$N_1 = N_2 = (n+1)^{n-2}, \qquad N_3 = N_4 = 2^n(n+1)^{n-2}.$$

第一个公式适用于 $n \geq 2$，而第二个公式适用于 $n \geq 1$.

证明。 等式 $N_1 = N_2$ 由定理 2.3 得出。关于 N_2 的显式公式由树的凯莱定理得出；参见 [Cam2，命题 2。1]。等式 $N_3 = N_4$ 由定理 2.3的定向类比得出。若 $n \geq 2$ 则不存在无标记自同构群X-标记树的自同构 T，因为无标记自同构群忠实地作用于边

（参见 [Cam2，命题 2 的证明。1]）。因此，若以两种不同的方式为 T 的边定向，所得的有向 X-标记树不同构。因此 $N_4 = 2^n \cdot N_3$。当 N_4 时，关于 $n = 1$ 的公式很容易直接验证。（注意，若 T 是一个只有一条边的 X-标记树，则为这条边定向的两种方式会得到同构的有向 X-标记树。）□

注 2.9。由公式 $2^n \cdot (n+1)^{n-2}$ 定义的整数序列在[OEIS]中有所讨论。我们提及另外两个它出现的地方。

- 令 $S_n = \mathbf{Q}[x_i, y_i, z_i]_{1 \le i \le n}$，并令 R_n 为 S_n 关于由正次数齐次 $\mathfrak{S}_n$-不变量生成的理想的商集。这里，对称群 $\mathfrak{S}_n$ 通过以显然的方式置换S_n 中的每一组变量而作用于S_n [Haiman Hai，事实 2.8。1]观察到，作为一个 $\mathbf{Q}$-向量空间，$2^n (n+1)^{n-2}$ 在 $1 \le n \le 5$ 时的维数为 n，并猜测这对所有 n都成立；据我们所知，这一问题仍然悬而未决。
- 令 $B_n(x)$ 为第 n 个 Morgan–Voyce 多项式。它由递推关系 $B_0 = B_1 = 1$ 以及 $B_n = (x+2)B_{n-1} - B_{n-2}$定义。$B_{n+1}$的判别式为 $2^n (n+1)^{n-2}$ [FHR，表 5]。□

3. Oligomorphic groups and measures

3.1. 寡轨道群。寡轨道群是 寡轨道群 置换群 (G, Ω)，满足 G 在 Ω 上只有有限多个轨道^n 对所有 $n \ge 1$均成立。关于这些群的一般背景，请参阅 Cameron 的著作 [Cam1]。

设我们有一个寡轨道群 (G, Ω)。对于有限子集 $A \subset \Omega$，令 $G(A)$ 表示 G 固定 A中每个元素的子群。这些子群构成拓扑中单位元的邻域基，该拓扑定义在 G上。此拓扑具有三个重要性质：它是豪斯多夫的；它是非阿基米德的（开子群构成单位元的邻域基）；并且它是 Roelcke 预紧的（如果 U 和 V 是开子群，那么 $U\backslash G/V$ 是有限的）；参见 [HS1，§2。2] 我们称拓扑群 为容许的，如果它满足这三个性质。

尽管我们最终最关心的是寡形群，但我们的构造只依赖于拓扑，而不依赖于具体的置换作用，因此我们倾向于使用可容许拓扑群。

3.2. 作用。设 G 为一个可容许拓扑群。我们称 G 在集合 X 上的一个作用是光滑的，如果每个点都有开稳定子。我们用术语“G-集合”来表示“配备了 G的一个光滑作用的集合”。若一个 G-集合具有有限多个轨道，则称其为有限轨道的。两个有限轨道的 G-集合的积仍是一个有限轨道的 G-集合。详见[HS1，§2。3]

一个^ G-集合是指对于 U的某个开子群 U 而言的一个 G-集合；该开子群称为一个定义群；缩小^^U 并不改变这个 G-集合。若一个 G-集合相对于某个定义群是有限轨道的，则称其为有限轨道的；这不依赖于定义群。若 $f\colon X \to Y$ 是^ G-集合之间的一个映射，那么任一点上的纤维都是一个 G-集合；这正是这一概念有用的一个原因。^符号 G 本身并没有严格的含义，但我们将其视为单位元的一个无穷小邻域。详见[HS1，§2。]

3.3. 测度。设 G 是一个可容许群。以下定义由[HS1], 引入，并将是本文研究的主要概念：

定义 3.1。取值于交换环 k 的 G 测度，是一条规则 μ，它为每个有限型 G-集合 X ^ 指定一个属于 k 的量 $\mu(X)$，并满足以下公理（其中 X^ 和 Y 表示有限型 G- 集合）：

(a) 同构不变性：若 $X \cong Y$，则 $\mu(X) = \mu(Y)$。ˆ (b) 归一化：$\mu(1) = 1$，其中 1 是单点 G-集合。ˆ (c) 共轭不变性：$\mu(X^g) = \mu(X)$，其中 X^g 是 $g \in G$ 对 G-集合 X 的共轭。(d) 可加性：$\mu(X \amalg Y) = \mu(X) + \mu(Y)$。(e) 纤维化中的乘法性：若 $X \to Y$ 是传递的 U-集合之间的映射，对某个开子群 U，且纤维为 F（在某个点上），则 $\mu(X) = \mu(F) \cdot \mu(Y)$。

我们用 $\mathcal{M}_G(k)$ 表示 G 的 k 值测度集合。 □

给定一个测度，就可以为 G-集合上的函数建立积分理论；参见 [HS1，§3]。[HS1] 中的张量范畴构造建立在这一积分理论之上。不过，就本文而言，我们不需要积分。

还有一些与上述测度概念等价的概念，我们在此提及，只为让读者获得更直观的理解：

ˆ (a) 若 $X \to Y$ 是 G 集合之间的映射，则任意一点上方的纤维都是一个 G 集合，并且每个 ˆG 集合都可以通过这种方式得到。我们可以据此将测度概念重新表述为一条规则：对每个这样的映射 $X \to Y$（其中 Y 传递且 X 有限），赋予一个 k 中的量，并满足某些条件；参见 [HS1, §4.5]。这种表述的优点在于，它仅依赖于 G 集合范畴。(b) 广义指标是一条规则，它对每个开子群的包含关系 $U \subset V$ 赋予一个量 $[\![U : V]\!]$（取值于 k），并满足与通常指标类似的性质；参见 [HS1, §3.6]。这一概念等价于测度，其中 μ 对应于 $[\![- : -]\!]$，若对所有 $V \subset U$，$[\![U : V]\!] = \mu(U/V)$。(c) 假设 $\mathcal{C}$ 是一个以极限 Ω 为极限对象的 Fra¨ıss´e 类，且 G =Aut(Ω) 是寡轨道的。此时，G 的测度等价于一条规则：对 $\mathcal{C}$ 中的每个包含关系 $X \subset Y$ 赋予一个 k 中的值，并满足某些条件；参见 [HS1, §6]。（实际上，这只能给出相对于某个稳定子类的 G 测度。）这表明，测度本质上具有组合性质。

本文不会采用上述任何一种视角。不过，我们将为我们的测度给出一种组合学解释，其精神与 (c) 类似。

还有一个与测度相关的概念我们也会用到。定义环 $\Theta(G)$ 如下：从以变量 $[X]$ 为变量的多项式环开始，其中 X 遍历有限 G-集合的同构类，并施加对应于定义 3.1(b,c,d,e) 的关系。存在一个取值于 $\Theta(G)$ 的测度 μ_{univ}，定义为 $\mu_{\mathrm{univ}}(X) = [X]$。这个测度具有普适性，也就是说，若 μ 是一个取值于某个环 k 的测度，则存在唯一的环同态φ: $\Theta(G) \to k$，使得 $\mu(X) = \varphi(\mu_{\mathrm{univ}}(X))$。要完整理解 G 的测度，本质上等同于计算环 $\Theta(G)$。

例 3.2。设 $\mathfrak{S}$ 为无限对称群，且令 $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$ 为其定义域。给定一个复数 t，存在唯一的 C值测度 μ_t，对于 $\mathfrak{S}$ 满足$\mu_t(\Omega) = t$。该测度满足 $\mu_t(\Omega^{(n)}) = \binom{t}{n}$，其中 $\Omega^{(n)}$ 表示 Ω 的 n元子集的集合。环 $\Theta(\mathfrak{S})$ 是单变量整值多项式环。这些陈述已在 [HS1，§15] 中证明。 □

3.4. 极小映射。设 G 为一个可容许群，并设 $\varphi\colon X \to Y$ 为传递的G-集合之间的映射。若 φ 不是同构且不能进行非平凡分解，即对于给定的 $\varphi = \beta \circ \alpha$，其中 β 和 α 是传递的 G-集合之间的映射，α 或 β 为同构，则称其为极小映射。下面的两个结果说明了这一概念的重要性。

命题 3.3。给定 G 的开子群 V，包含 V 的 G 的子群 U 只有有限多个。

证明。若 U 包含 V，则 U 是 V 的双陪集的并。由于 $V\backslash G/V$ 是有限的，因此 U 只有有限种可能。□

命题 3.4。任意非同构的传递 G-集合之间的映射，都可以分解为一列极小映射。

证明。只需证明，若 $V \subset U$ 是开子群的真包含关系，则自然映射 $G/V \to G/U$ 可以作这样的分解。取一条开子群的严格链

$$V = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_n = U$$

其中 W_i 在 W_{i-1}之上是极小的；根据命题 3.3，这样的链存在。映射 $G/V \to G/U$ 分解为极小映射 $G/W_{i-1} \to G/W_i$的复合，证明完毕。□

3.5. 关于测度的另一种观点。现在我们对测度的定义稍作改写，这在我们的具体情形中会更方便。对于可容许群 G，令 $\Omega(G)$ 为其伯恩赛德环。这是由传递 G-集合的同构类构成的自由 Z-模。对于传递 G-集合 X，我们用 $[\![X]\!]$ 表示它在 $\Omega(G)$ 中的类。对于一般的有限型 G-集合 X，我们定义 $[\![X]\!] = \sum_{i=1}^{n} [\![Y_i]\!]$，其中 Y_1，……，Y_n 是 X 上的 G-轨道。顾名思义，$\Omega(G)$ 在 $[\![X]\!] \cdot [\![Y]\!] = [\![X \times Y]\!]$ 下构成一个环。

令 $\mathscr{E}$ 为 G 的开子群集，该集合在共轭下稳定，并且每个开子群都包含 $\mathscr{E}$ 的某个成员。我们引入以下概念:

定义 3.5. 取值于环 k 的 $\mathscr{E}$-测度，是一种规则 $\mu_\bullet$，它为每个 $U \in \mathscr{E}$ 指定一个加性映射 $\mu_U\colon \Omega(U) \to k$，并满足以下公理:

(a) 对任意 $U \in \mathscr{E}$，我们有 $\mu_U(1) = 1$。(b) 给定 $\mathscr{E}$中的子群 $V \subset U$以及有限支撑的 U-集合 X，我们有 $\mu_U(X) = \mu_V(X)$。(c) 给定 $U \in \mathscr{E}$、有限支撑的 U-集合 X以及 $g \in G$，我们有 $\mu_U(X) = \mu_{U^g}(X^g)$，其中上标表示共轭。(d) 给定 $U \in \mathscr{E}$以及传递的 U-集合间的映射 $\pi\colon X \to Y$，我们有 $\mu_U(X) = \mu_U(Y)\mu_V(F)$

其中 $F = \pi^{-1}(y)$，对于某个 $y \in Y$，且 $V \in \mathscr{E}$稳定 y。

上文中，我们用 $\mu_U(X)$ 代替了 $\mu_U([\![X]\!])$。令 $\mathcal{M}_G^{\mathscr{E}}(k)$ 表示取值于 k 的 G 上的 $\mathscr{E}$-测度集合。□

以下是我们在这一概念上所需的主要结果。

命题 3.6. 我们有一个自然同构 $\mathcal{M}_G(k) \to \mathcal{M}_G^{\mathscr{E}}$({v4)。

证明。假设 μ 是 G 的一个测度。对于一个开子群 U，定义 $\mu_U\colon \Omega(U) \to k$，使得 $\mu_U(X) = \mu($ $X)$。显然，$\mu_\bullet$ 是一个 $\mathscr{E}$-测度，并且可以从 $\mu_\bullet$ 恢复 μ。因此我们有一个单射 $\Phi\colon \mathcal{M}_G(k) \to \mathcal{M}_G^{\mathscr{E}}(k)$。

现在我们证明 Φ 是满射，这就完成了证明。设 $\mu_\bullet$ 是给定的 $\mathscr{E}$-^ 测度。我们如下定义测度 μ。设 X 是一个有限型 G-集合。取一个群

定义 U，它属于 $\mathscr{E}$，且对应于 X，并令 $\mu(X) = \mu_U(X)$。这与 U的选取无关。事实上，假设 U'是另一个属于 $\mathscr{E}$的定义群。那么$U \cap U'$ 是 G的一个开子群，因此根据假设，它包含某个 $V \in \mathscr{E}$。于是，由于 $\mu_\bullet$与限制相容，我们有 $\mu_U(X) = \mu_V(X) = \mu_{U'}(X)$。显然，只要 μ 是一个测度，就有 $\mu_\bullet = \Phi(\mu)$，因此只需证明这一点。容易看出，μ 满足定义 3.1 的公理 (a)–(d)。

现在验证公理 (e)。因此，设 $\pi\colon X \to Y$ 是传递的 U-集合，其中 U 是某个开子群，并设 $F = \pi^{-1}(y)$，其中 $y \in Y$ 是某个点。设 $V \subset U$ 是包含于 $\mathscr{E}$ 中的开子群。设 $Y = \bigsqcup_{i=1}^n Y_i$ 是 Y 按 V 的轨道分解，并设 $X_i = \pi^{-1}(Y_i)$。任取一个点 $y_i \in Y_i$，设 $F_i = \pi^{-1}(y_i)$ 是它上方的纤维。设 $W \subset V$ 是 $\mathscr{E}$ 中逐个固定每个 y_i 的开子群。我们有

$$\mu(X_i) = \mu_V(X_i) = \mu_V(Y_i)\mu_W(F_i) = \mu(Y_i)\mu(F_i) = \mu(Y_i)\mu(F).$$

第一步中，我们使用了 μ 的定义；第二步中，我们使用了定义 3.5(d)；第三步中，我们再次使用了 μ 的定义；最后一步中，我们使用了 F_i 与 F 在 U 下共轭（因为 U 在 Y 上传递作用），并且 μ 是共轭不变的。将上式对 i 求和，得到 $\mu(X) = \mu(Y)\mu(F)$，证毕。□

注意，由于测度具有乘法性，即 $\mu(X \times Y) = \mu(X) \cdot \mu(Y)$, 上述命题表明，如果 $\mu_\bullet$是一个 $\mathscr{E}$-测度，那么每个映射 $\mu_U\colon \Omega(U) \to k$ 都是环同态。接下来的结果可以简化验证定义 3.5(d) 的工作。

命题 3.7. 设 $\mathscr{E}$是向下封闭的，这意味着若 $U \in \mathscr{E}$ 且 $V \subset U$是一个开子群，则 $V \in \mathscr{E}$。对于每个 $U \in \mathscr{E}$，令 $\mu_U\colon \Omega(U) \to k$为一个加性映射。设 $\mu_\bullet$ 满足定义 3.5(a,b,c)，并满足以下条件：

(d') 给定 $U \in \mathscr{E}$ 和一个极小映射 $\pi\colon X \to Y$（其中 U 是传递的集合），有 $\mu_U(X) = \mu_U(Y)\mu_V(F)$，其中 $F = \pi^{-1}(y)$，对某个 $y \in Y$，且 $V \in \mathscr{E}$ 稳定 y。

那么 $\mu_\bullet$ 也满足定义 3.5（d），因此是一个 $\mathscr{E}$-测度。

证明。给定 $V \subset U$ 的开子群 G，定义 $\delta(V \subset U)$为存在一条 n 子群链时的最大 $V = W_0 \subsetneq \cdots \subsetneq W_n = U$。由命题 3.3可知，该定义是成立的。注意，$\delta(V \subset U) = 0$ 当且仅当 $V = U$，而 $\delta(V \subset U) = 1$ 当且仅当 $V \neq U$，但 V与 U之间不存在严格包含于两者之间的子群。

要证明定义3.5（d），只需证明

$$\mu_U(U/W) = \mu_U(U/V)\mu_V(V/W)$$

只要 $W \subset V \subset U$ 是 $\mathscr{E}$ 中的子群即可。我们对 $\delta(W \subset V)$ 进行归纳法。若$\delta(W \subset V) = 0$，结论显然成立。现在假设 $\delta(W \subset V)$ 为正，并令 W' 是包含于 V 且位于 W 之上的一个极小子群，从而 $\delta(W' \subset V) < \delta(W \subset V)$。注意，$U/W \to U/W'$ 是传递的 U-集合之间的极小映射，而 $V/W \to V/W'$ 是传递的 V-集合之间的极小映射。我们有

$$\begin{aligned}\mu_U(U/W) &= \mu_U(U/W')\mu_{W'}(W'/W)\\ &= \mu_U(U/V)\mu_V(V/W')\mu_{W'}(W'/W)\\ &= \mu_U(U/V)\mu_V(V/W)\end{aligned}$$

其中第一步使用了 (d')，第二步使用了归纳假设，第三步又使用了 (d')。结论得证。□

4. The colored circle and its symmetries

4.1. 圆。取一个带有处处稠密的循环序的可数集 S；例如，可以取复单位圆上的单位根。设 Σ 是一个非空有限集，并设 $\sigma\colon S \to \Sigma$ 是一个函数，使得对每个 $a \in \Sigma$，$\sigma^{-1}(a)$ 都是稠密的。我们将 σ 视为 S 的一种着色。设 G 是 S 的自同构群，即所有保持循环序和着色的自双射所成的群。

命题 4.1. 我们有如下结论：

(a) S 是一个齐次结构：若 X 和 Y 是 S 的有限子集，且 $i\colon X \to Y$ 是一个同构（即保持诱导循环序和着色的双射），那么存在 $g \in G$ 使得 $i = g|_X$。(b) S 是由赋有循环序和 Σ-着色的有限集构成的类的 Fra¨ıss´e 极限；特别地，除同构意义外，S 不依赖于 σ的选择。(c) 群 G 是寡轨道的（相对于其在 S 上的作用）。

证明。(a) 在此证明中，“结构”指赋有循环序和 Σ-着色的集合。假设 $X \to Y$ 是有限结构之间的嵌入，并且我们有一个嵌入 $\alpha\colon X \to S$。我们断言，α 可扩张为一个嵌入 $\beta\colon Y \to S$。根据归纳论证，只需处理 Y 比 X多一个元素的情形。因此，假设 $Y = X \sqcup \{y\}$。若 $\#X \leq 1$，结论显然成立，因此假设 $\#X \geq 2$。记作$X = \{x_1, \dots, x_n\}$，其中 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_1$，并令 i满足 $x_i < y < x_{i+1}$（其中 $i+1$ 以 n为模）。选取一点 $z \in S$，使其位于 $\alpha(x_i)$ 与 $\alpha(x_{i+1})$ 之间，且在 y处具有相同的颜色。现在只需定义 $\beta(x_j) = \alpha(x_j)$ 对所有 j均成立，并令 $\beta(y) = z$。那么 β就是一个扩张了 α的 Y 的嵌入。

现在，由一个标准的往返论证可知，S 是齐次的。更确切地说，上一段表明，按照[HS2，§A.4]中的术语，[HS2，命题 A.7]，，任何 f-单射对象都是齐次的。

（b）由于 S 是一个可数齐次结构，且每个有限结构都嵌入其中，因此它是有限结构类的 Fra¨ıss´e 极限。（要看出每个结构都嵌入其中，只需注意空结构可以嵌入，于是一般情形由 f-单射性即可推出。）Fra¨ıss´e 极限在同构意义下唯一，这就得到了唯一性结论。

（c）令 $S^{(n)}$ 表示 S 的 n-元素子集所成的集合。若 x 和 y 是 $S^{(n)}$中的两个点，并且它们（连同其诱导结构）同构，那么 S 的齐次性表明它们属于同一个 G-轨道。由于基数为 n的结构只有有限多个，因此 G 在 $S^{(n)}$上只有有限多个轨道。由于这对所有 n都成立，因此G是寡轨道的。□

4.2. 直线。固定一点 $\infty \in S$，并令 $L = S \setminus \{\infty\}$。则 L 带有一个全序和一个 Σ-着色。作为一个全序集合，L 与带有其标准序的有理数集合同构。与上述类似的论证表明，L 是齐性的，并且是配备全序和 Σ-着色的有限集类的 Fra¨ıss´e 极限。我们令H 为 L 的自同构群，它也是寡轨道的。注意，H 恰好是 G 中 ∞ 的稳定子；并且对于 L 的一个有限子集 A，有 $H(A) = G(A \cup \{\infty\})$。（这里，$H(A)$表示 H 中固定 A的每个元素的子群。）

4.3. 区间。给定 $x \neq y$ in S，考虑由所有满足$x < z < y$的点 $z \in S$ 构成的集合 $I = (x, y)$。我们将形如 (x, y) 的集合称为真区间。我们将 x 和 y 称为 I的左端点和右端点。如果 $J = (x', y')$ 是第二个真区间，则 $J = gI$ 对于某个

$g \in G$ 当且仅当 $\sigma(x) = \sigma(x')$ 且 $\sigma(y) = \sigma(y')$。非真区间是形如 $\mathbf{S} \setminus \{x\}$ 的区间，其中 $x \in \mathbf{S}$。

设 I 为一个区间（真区间或非真区间）。则 I 带有一个全序和一个 Σ-着色，并且很容易看出，它是由带有全序和 Σ-着色的有限集组成的类的 Fra¨ıss´e 极限。因此， I 与 $\mathbf{L}$ 抽象同构。我们令 H_I 为I的自同构群。对 (H_I, I) 与 $(H, \mathbf{L})$ 同构；特别地， H_I 是寡轨道的。

设 A 是 $\mathbf{S}$ 的一个有限非空子集，并写作 $\mathbf{S} \setminus A = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_r$，其中$I_1$、.....、$I_r$ 是区间。每当我们写出这样的分解时，都假设这些区间的编号与它们的自然循环序一致，即 I_i 位于 I_{i-1} 和 I_{i+1} 之间（其中下标按 n 取模）。 $G(A)$ 的一个元素保持每个 I_i 不变，因此存在一个自然映射

$$G(A) \to H_{I_1} \times \cdots H_{I_r}.$$

很容易看出，这个映射是一个同构。

4.4. 开子群。现在我们对 H的开子群进行分类。

命题 4.2。 H 的每个开子群都具有如下形式：对于某个有限子集$A \subset \mathbf{L}$， $H(A)$。

证明。 这已在 $\#\Sigma = 1$ 的 [HS1命题 17 中得到证明。1]一般情形可通过类似的论证得出。 □

推论 4.3。设 A 是 $\mathbf{S}$ 的一个非空有限子集。那么， $G(A)$的每个开子群都具有如下形式：对于某个包含 A的 $\mathbf{S}$ 的有限子集 B， $G(B)$。

证明。由于 ∞ 的选取是任意的，我们不妨假设它属于 A。于是$G(A) \subset H$，结论现在由命题得出。□

注记 4.4。 $G(A)$ 并未涵盖 G 的所有开子群。令 $G[A]$ 表示 G 中将 A 映到自身（作为一个集合）的子群。它可能大于 $G(A)$；例如，如果 A 中的每个点颜色都相同，那么 A 中的点可以循环置换，并且 $G[A] = \mathbf{Z}/n \ltimes G(A)$，其中 $n = \#A$。可以证明， $G[A]$ 是 $G(A)$ 的正规化子，而 $G[A]/G(A)$ 是一个有限循环群。还可以证明，对于某个 A，{21} 的每个开子群都介于 $G(A)$ 与 $G[A]$ 之间。不过，我们不需要这个结果。□

4.5. 作用。令 $\Sigma^\star$ 表示字母表 Σ 中所有词构成的集合。给定 $\Sigma^\star$ 中的一个词 $w = w_1 \cdots w_n$ 和一个区间 I，我们令 I^w 表示 I^n 的子集，该子集由满足 $x_1 < \cdots < x_n$ 且 $\sigma(x_i) = w_i$ 的那些元组 $(x_1, \ldots, x_n)$ 构成。群 H_I 显然作用于 I^w，并且根据 I 的齐次性，这个作用是传递的。

命题 4.5. 设 A 是 $\mathbf{S}$ 的一个非空有限子集，并记 $\mathbf{S} \setminus A = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_r$。那么，每个传递的 $G(A)$-集合都同构于某个 $w_1, \ldots, w_r \in \Sigma^\star$ 的 $I_1^{w_1} \times \cdots \times I_r^{w_r}$。

证明. 设 X 是一个传递的 $G(A)$-集合。那么，对于某个开子群 U， X 同构于 $G(A)/U$。由推论 4.3 可知，对于某个包含 A 的 $\mathbf{S}$ 的有限子集 B，有 $U = G(B)$。令 $B_i = B \cap I_i$。记 $B_i = \{x_{i,1} < \cdots < x_{i,n(i)}\}$，令 $w_i = \sigma(x_i,1) \cdots \sigma(x_{i,n(i)})$。在同构 $G(A) = H_{I_1} \times \cdots \times H_{I_r}$ 下，有 $G(B) = H_{I_1}(B_1) \times \cdots \times H_{I_r}(B_r)$。由于 H_{I_i} 在 $I_i^{w_i}$ 上传递作用，且稳定子为 $H_{I_i}(B_i)$，可知 $H_{I_i}/H_{I_i}(B_i) \cong I_i^{w_i}$。因此， $X \cong I_1^{w_1} \times \cdots \times I_r^{w_r}$， 证毕。□

命题 4.6 。令 A 为 $\mathbf{S}$ 的非空有限子集，并记 $\mathbf{S} \setminus A = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_r$.

(a) 令 w、w'、w_2、.....、$w_r \in \Sigma^\star$，并令 $c \in \Sigma$。令 $\pi_1\colon I_1^{wcw'} \to I_1^{ww'}$ 为去掉 c 坐标的映射，并令

$$\pi\colon I_1^{wcw'} \times I_2^{w_2} \times \cdots \times I_r^{w_r} \to I_1^{ww'} \times I_2^{w_2} \times \cdots \times I_r^{w_r}$$

是在第一个因子上为 π_1 、在其他因子上为单位元的映射。于是 π 是传递的 $G(A)$-集合的极小映射。

(b) π 在任意点上的纤维都同构于 J^c，其中 J 是 I_1 的一个子区间，定义如下。如果 w 非空，则令 y 为 I_1 中的一个点，其颜色是w的最后一个字母；否则，令 y 为 I_1的左端点。如果 w' 非空，则令 $y < y'$ 为 I_1 中的一个点，其颜色是 w'的第一个字母；否则，令 y' 为 I_1的右端点。于是 $J = (y, y')$。(c) 传递的 $G(A)$-集合的任意极小映射，在对区间重新编号后，都同构于(a)中的一个映射。

证明。令 $A \subset B \subset C$ 为 S 的有限子集，且 $\#C = \#B + 1$。则 $G(B)$ 是 $G(C)$上的极小子群，因此自然映射 $G(A)/G(C) \to G(A)/G(B)$ 是传递的 $G(A)$-集合的极小映射。考察命题 4.5 的证明中的对应关系，我们看到，该映射具有(a)中所述的形式。根据 $G(A)$的开子群分类，每个极小映射都具有这种形式。

现在我们解释命题 (b)。首先注意，π 的纤维与 π_1的纤维同构，因此我们只需考虑这个情形。设 $\ell(w) = n$ 且 $\ell(w') = m$。令 $p = (x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m)$为$I_1^{ww'}$ 中的一个点。令 J 为区间 (x_n, z_1)，其中若 w 为空，则将 x_n 取为 I_1 的左端点；若 w' 为空，则将 z_1 取为 I_1 的右端点。于是$\pi_1^{-1}(p) = J^c$，因此 (b) 得证。□

5. 测度的分类

5.1. 测度的组合重述。 在§5中，我们按照1.2节§1.3中的思路证明定理 Σ-测度，并将其与测度联系起来。对于一个词 $w = w_1 \cdots w_n$属于 $\Sigma^\star$，我们用 $w[i, j]$ 表示子词 $w_i \cdots w_j$。我们使用圆括号省略端点，例如 $w[i, j) = w_i \cdots w_{j-1}$。

定义 5.1. 取值于 k 的 Σ测度是一条规则 ν，它为每个 a、$b \in \Sigma$ 和 $w \in \Sigma^\star$ 指定一个量 $\nu_{a,b}(w)$，其值属于 k，并满足以下公理：

(a) $\nu_{a,b}(w) = 1$，当 w 是空词时。(b) 设 w 和 w' 为词，令 $r = \ell(w)$，并令 a、b、$c \in \Sigma$。则

$$\nu_{a,b}(wcw') = \nu_{a,b}(ww')\nu_{w_r,w'_1}(c).$$

这里，我们采用以下约定：当 w 为空时为 $w_r = a$，当 w' 为空时为 $w'_1 = b$。

(c) 设 w 的长度为 n，并令 a、b、$c \in \Sigma$。则

$$\nu_{a,b}(w) = \sum_{i=0}^{n} \nu_{a,c}(w[1,i])\nu_{c,b}(w(i,n]) + \sum_{w_i=c} \nu_{a,c}(w[1,i))\nu_{c,b}(w(i,n]).$$

我们用 $\mathcal{M}_\Sigma(k)$ 表示这类测度的集合。 □

命题 5.2。我们有一个自然双射 $\mathcal{M}_G(k) \cong \mathcal{M}_\Sigma(k)$。在此双射下，$G$ 的测度 μ 对应于一个 Σ-测度 ν，当且仅当对于端点颜色分别为 a 和 b 的任意真区间 I，$\mu(I^w) = \nu_{a,b}(w)$，并且 $w \in \Sigma^\star$。

该命题的证明将占据 §5.1 的剩余部分。定义 为由符号 、$_b(w)$ 生成的交换环，其中 a、$b \in \Sigma$ 和 $w \in \Sigma^\star$，并对以下关系取商：

(a) $x_{a,\ b}(w) = 1$ 当 w 为空时。(b) 设 w 和 w' 为词，令 $r = \ell(w)$，并设 a、b、$c \in \Sigma$。那么

$$x_{a,b}(wcw') = x_{a,b}(ww')x_{w_r,w'_1}(c),$$

其中采用定义 5.1中的约定。

(c) 设 w 的长度为 n，设 a、b、$c \in \Sigma$。那么

$$x_{a,b}(w) = \sum_{i=0}^{n} x_{a,c}(w[1,i])x_{c,b}(w(i,n]) + \sum_{w_i=c} x_{a,c}(w[1,i))x_{c,b}(w(i,n]).$$

因此， Σ-测度是一个同态 $R \to k$。用这种语言，我们可以将命题 5.2重新表述如下：

命题 5.3。存在一个环同构 $\varphi\colon \Theta(G) \to R$，满足 $\varphi([I^w]) = x_{a,\ b}(w)$，其中 I 是任意一个真区间，而 a 和 b 分别是 I左右端点的颜色。

我们注意到，类 $[I^w]$ 生成 $\Theta(G)$，根据命题 4.5，因此至多存在一个如命题中所述的环同构。

令 $\mathscr{E}$ 为 G 中形如 $G(A)$ 的子群集合，其中 $\#A \geq 2$。这满足 §3.5 的条件。我们构造一个取值于 R 的 $\mathscr{E}$-测度 $\varphi_\bullet$，定义在 G 上。令 A 为 S 的一个基数至少为 2 的有限子集，并记 $\mathsf{S} \setminus A = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_r$。回顾一下，每个传递的 $G(A)$ 集合同构于形如 $I_1^{w_1} \times \cdots \times I_r^{w_r}$的集合，其中 w_1，……，$w_r \in \Sigma^\star$（命题 4.5）。我们定义

$$\varphi_{G(A)}\colon \Omega(G(A)) \to R$$

为满足以下条件的唯一加性映射

$$\varphi(I_1^{w_1} \times \cdots \times I_r^{w_r}) = x_{a_1,b_1}(w_1) \cdots x_{a_r,b_r}(w_r),$$

其中 a_i 和 b_i 分别是 I_i左右端点的颜色。现在我们验证系统 $\varphi_\bullet$ 确实是一个 $\mathscr{E}$-测度。定义 3.5 中的条件 (a) 和 (c) 显然成立。

引理 5.4. 设 I 是一个区间，并设 $z \in I$。将 $I = J \sqcup \{z\} \sqcup K$ 写作区间 J 和 K，并令 $c = \sigma(z)$。那么对于长度为 n 的词 $w \in \Sigma^\star$，我们有一个自然双射

$$I^w = \Big(\coprod_{i=0}^{n} J^{w[1,i]} \times K^{w(i,n]}\Big) \amalg \Big(\coprod_{w_i=c} J^{w[1,i)} \times K^{w(i,n]}\Big)$$

该双射对于 $H_I(b) = H_J \times H_K$ 的作用是等变的。

证明。回忆一下， I^w 由 I^n 中满足 $\sigma(x_i) = w_i$ 的元组 $x = (x_1 < \cdots < x_n)$ 组成。令 X 为 I^w 的子集，它由满足没有 x_i 等于 z 的点 x 组成，并令 Y 为其补集。我们有分解 $X = X_0 \sqcup \cdots \sqcup X_n$，其中 X_i 是 X 的子集，由满足 $x_i < z < x_{i+1}$ 的点 x 组成（并且忽略涉及 x_0 或 x_{n+1} 的条件），以及一个同构 $X_i \cong J^{w[1,i]} \times K^{w(i,n]}$。我们还有分解 $Y = \bigsqcup_{w_i=c} Y_i$，其中 Y_i 由满足 $x_i = z$ 的点 x 组成，以及一个同构 $Y_i \cong J^{w[1,i)} \times K^{w(i,n]}$。证明完毕。□

引理 5.5。 系统 $\varphi_\bullet$ 满足定义 3.5(b)。

证明。只需讨论 V 是 U 的极大子群的情形。因此我们可以假设 $V = G(B)$ 且 $U = G(A)$，其中 $B = A \cup \{z\}$，而 z 是 $\mathbf{S} \setminus A$ 的某个元素；令 $c = \sigma(z)$ 为 z 的颜色。将 $\mathbf{S} \setminus A = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_r$ 如上所述地写出；必要时循环置换这些标签，我们假设 $z \in I_1$。写作 $I_1 = J \sqcup \{z\} \sqcup K$。令 $X = I_1^{w_1} \times \cdots \times I_r^{w_r}$ 为一个传递的 $G(A)$-集合。根据引理 5.4 将 $I_1^{w_1}$ 分解后，我们发现 $\varphi_V(X)$ 等于

$$\Big(\sum_{i=0}^{n} x_{a_1,c}(w[1,i])x_{c,b_1}(w(i,n]) + \sum_{w_i=c} x_{a_1,c}(w[1,i))x_{c,b_1}(w(i,n])\Big) \times x_{a_2,b_2}(w_2)\cdots x_{a_r,b_r}(w_r)$$

根据 R 的定义，第一个因子等于 $x_{a_1,\ b_1}(w_1)$，因此整个表达式等于 $\varphi_U(X)$。于是 $\varphi_V(X) = \varphi_U(X)$，如所要求。□

引理 5.6。 系统 $\varphi_\bullet$ 满足定义 *3.5*（d）。

证明。由 H 的开子群分类（命题 4.2）可知， $\mathscr{E}$满足命题 3.7的条件。因此，根据该命题，只需验证命题 3.7（d'）。设 A 是 $\mathbf{S}$ 的一个基数至少为 2 的有限子集，并记 $\mathbf{S} \setminus A = I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_r$。设 a_i 和 b_i 分别是 I_i的端点的颜色。设 $\pi\colon\ X \to Y$是传递的 G（A）-集合之间的一个极小映射，其纤维为 F。根据命题 4.6，在必要时重新编号后， π 同构于

$$\pi_1 \times \mathrm{id} \times \cdots \times \mathrm{id}\colon I_1^{wcw'} \times I_2^{w_2} \times \cdots \times I_r^{w_r} \to I_1^{ww'} \times I_2^{w_2} \times \cdots \times I_r^{w_r},$$

其中 π_1 将 c 坐标投影掉。此外， F 与 J^c同构，其中 J是一个端点颜色分别为 w_r 和 w_1'的区间，且 $r = \ell(w)$；这里我们采用如下约定：若 $w = \varnothing$，则 $w_r = a_1$；若 $w' = \varnothing$，则 $w_1' = b_1$。因此，方程 $\varphi(X) = \varphi(Y)\varphi(F)$ 变为

$$x_{a_1,b_1}(wcw')x_{a_2,b_2}(w_2)\cdots x_{a_r,b_r}(w_r) = x_{a_1,b_1}(ww')x_{w_r,w_1'}(c)x_{a_2,b_2}(w_2)\cdots x_{a_r,b_r}(w_r),$$

这确实在 R中成立：这只是将 R的定义关系 (b) 两边乘以同一个量。□

由此我们验证了系统 $\varphi_\bullet$ 是一个 $\mathscr{E}$-测度。根据命题 3.6， $\varphi_\bullet$ 对应于一个取值于 R 的 G 测度，即一个环同态 $\varphi\colon\ \Theta(G) \to R$。这个同态显然满足 $\varphi([I^w]) = x_{a,\ b}(w)$，其中 a 和 b 是 I端点的颜色。下面的引理将完成该命题的证明。

引理 5.7. 映射 $\varphi\colon\ \Theta(G) \to R$ 是一个同构。

证明。令 R 为以符号 $x_{a,b}(w)$ 为变量的多项式环。定义环同态 $\psi\colon\ R \to \Theta(G)$，使得 $\psi(x_{a,b}(w)) = [I^w]$，其中 I 是任意一个端点颜色为a 和 b的真区间。此映射定义良好，因为若 J 是另一个这样的区间，则 I 和 J 在 G中共轭，因此 $[I^w] = [J^w]$ 属于 $\Theta(G)$。通过类似于上文所进行的计算，我们发现 ψ 消去了 R的定义关系，因此诱导出一个环同态 $\psi\colon\ R \to \Theta(G)$。这显然是 φ的逆映射，故证明完成。□

5.2. 测度与符号。我们刚刚证明， G 的测度等价于 Σ-测度。这是一个重要的进展，因为 Σ- 测度是纯粹的组合对象。然而，它们仍然相当复杂： Σ- 测度具有无限多个参数和定义方程。现在我们引入 Σ-符号，它们只有有限多个参数和定义方程，并将其与 Σ-测度联系起来。

定义 5.8. 一个取值于 k 的 Σ-符号是一个函数

$$\eta\colon \Sigma^3 \to k, \qquad (a,b,c) \mapsto \eta_{a,b}(c)$$

对所有 a、b、c、$d \in \Sigma$，满足以下两个条件：

$$\eta_{a,b}(c)\eta_{c,b}(d) = \eta_{a,b}(d)\eta_{a,d}(c) \tag{5.9a}$$

$$\eta_{a,b}(c) = \eta_{a,d}(c) + \eta_{d,b}(c) + \delta_{c,d} \tag{5.9b}$$

我们用 $\mathcal{S}_\Sigma(k)$ 表示所有 Σ-符号构成的集合。 □

命题 5.10. 通过将测度限制到长度为 1 的词上，我们得到一个自然双射 $\mathcal{M}_\Sigma(k) \to \mathcal{S}_\Sigma(k)$。换言之，若 ν 是一个 Σ-测度，则 $(a,b,c) \mapsto \nu_{a,\,b}(c)$ 是一个Σ-符号，并且此构造是双射。

我们将证明分成几个引理。

引理 5.11. 设 ν 是一个 Σ-测度，并定义 $\eta\colon \Sigma^3 \to k$ by $\eta_{a,\,b}(c) = \nu_{a,\,b}(c)$。则 η 是一个Σ-符号，并且可以从 η恢复 ν。

证明。 进行代换 $(w,\ c,\ w') \to (c,\ d,\ \varnothing)$ 于定义5.1 (b) 中，我们得到

$$\nu_{a,b}(cd) = \nu_{a,b}(c)\nu_{c,b}(d).$$

在同一公理中进行代换 $(w,\ c,\ w') \to (\varnothing,\ c,\ d)$，我们得到

$$\nu_{a,b}(cd) = \nu_{a,b}(d)\nu_{a,b}(c).$$

这给出 (5.9a)。在定义$(w,\ c) \to (c,\ d)$ 中进行代换5.1 (c) 给出 (5.9b)。因此 η 是一个 Σ-符号。反复应用定义5.1 (b)，我们看到 ν 由其在长度为 1 的词上的取值决定。这些取值由 η记录，因此 ν 可以由 η恢复。 □

上述引理为我们提供了一个单射 $\Phi\colon\ \mathcal{M}_\Sigma(k) \to \mathcal{S}_\Sigma(k)$。为完成命题的证明，我们必须证明 Φ 是满射。设给定一个 Σ-符号 η。我们递归地定义 ν，令 $\nu_{a,\,b}(\varnothing) = 1$ 以及

$$\nu_{a,b}(w_1 \cdots w_n) = \eta_{a,b}(w_n)\nu_{a,w_n}(w_1 \cdots w_{n-1})$$

对于 $n \geq 1$。显然，只要 ν 是一个 Σ-测度，我们就有 $\Phi(\nu) = \eta$。因此，只需证明这一点，我们将在接下来的两个引理中完成证明。

引理 5.12。 ν 满足定义5.1(b)。

证明。我们必须证明

$$\nu_{a,b}(wcw') = \nu_{a,b}(ww')\nu_{w_r,w'_1}(c)$$

对所有 a，b，$c \in \Sigma$ 和 w，$w' \in \Sigma^\star$，其中 $r = \ell(w)$；回忆一下约定：若 $w_r = a$，则 $w = \varnothing$；若 $w'_1 = b$，则 $w' = \varnothing$。我们对词 n 的长度 wcw'进行归纳。基例 ($n = 1$) 显然成立，而 $n = 2$ 情形可直接由 (5.9a) 推出。现在假设$n \geq 3$，且单位元等式在长度为 $n-1$时成立。

首先，假设 w' 非空，并令 $s = \ell(w')$。我们有

$$\begin{aligned}\nu_{a,b}(wcw') &= \eta_{a,b}(w'_s)\nu_{a,w'_s}(wcw'_1 \cdots w'_{s-1}) \\ &= \eta_{a,b}(w'_s)\nu_{a,w'_s}(ww'_1 \cdots w'_{s-1})\nu_{w_r,w'_1}(c) \\ &= \nu_{a,b}(ww')\nu_{w_r,w'_1}(c).\end{aligned}$$

在第一步和第三步中，我们使用了 μ的定义；在第二步中，我们使用了归纳假设。

现在假设 w' 为空。由于 $n \geq 3$，我们有 $r \geq 2$。我们有

$$\begin{aligned}\nu_{a,b}(wc) &= \nu_{a,b}(w_2 \cdots w_r c)\nu_{a,w_2}(w_1)\\ &= \nu_{a,b}(w_2 \cdots w_r)\nu_{w_r,b}(c)\nu_{a,w_2}(w_1)\\ &= \nu_{a,b}(w)\nu_{w_r,b}(c).\end{aligned}$$

第一步中，我们将上一段应用于 $(w,\ \rho,\ w')$ 为 $(\varnothing,\ w_1,\ w_2 \cdots w_r c)$ 的情形。在最后两步中，我们使用了归纳假设。证明至此完成。□

引理 5.13。 ν 满足定义5.1（c）。

证明。对于 a、b、$c \in \Sigma$ 和 $w \in \Sigma^\star$，令 $n = \ell(w)$ 为

$$X^c_{a,b}(w) = \sum_{i=0}^{n} \nu_{a,c}(w[1,i])\nu_{c,b}(w(i,n]) + \sum_{w_i=c} \nu_{a,c}(w[1,i))\nu_{c,b}(w(i,n]).$$

我们必须证明 $X^c_{a,\ b}(w) = \nu_{a,\ b}(w)$。我们对 n 使用归纳法。$n = 0$ 的情形显然。因此，假设 $n \geq 1$，且该单位元等式对更小的 n 成立。

在 $X^c_{a,b}(w)$ 的定义中，从每个求和中分离出 $i = n$ 项，然后将递归定义应用于求和中的第二个因子 ν。由此得到

$$\begin{aligned}X^c_{a,b}(w) =& \nu_{a,c}(w) + \eta_{c,b}(w_n)\sum_{i=0}^{n-1} \nu_{a,c}(w[1,i])\nu_{c,w_n}(w[i,n))\\ &+ \delta_{w_n,c}\nu_{a,c}(w[1,n)) + \eta_{c,b}(w_n)\sum_{1\leq i\leq n-1, w_i=c} \nu_{a,c}(w[1,i))\nu_{c,w_n}(w(i,n)),\end{aligned}$$

因此

$$X^c_{a,b}(w) = \nu_{a,c}(w) + \delta_{w_n,c}\nu_{a,c}(w[1,n)) + \eta_{c,b}(w_n)X^c_{a,w_n}(w[1,n))$$

右侧最后的因子 X 根据归纳假设等于 $\nu_{a,w_n}(w[1,n))$。将 ν 的定义应用于上面的第一项，并在第二项中用 w_n 替换 c（这得益于克罗内克δ，是合法的），于是得到

$$\begin{aligned}X^c_{a,b}(w) &= \eta_{a,c}(w_n)\nu_{a,w_n}(w[1,n)) + \delta_{w_n,c}\nu_{a,w_n}(w[1,n)) + \eta_{c,b}(w_n)\nu_{a,w_n}(w[1,n))\\ &= (\eta_{a,c}(w_n) + \delta_{w_n,c} + \eta_{c,b}(w_n))\nu_{a,w_n}(w[1,n))\\ &= \eta_{a,b}(w_n)\nu_{a,w_n}(w[1,n)) = \nu_{a,b}(w_n).\end{aligned}$$

在倒数第二步中，我们应用了（5.9b），最后一步则应用了 ν 的定义。至此，证明完成。□

5.3. 符号与二分结构。现在我们将 Σ-符号与 §2.3 中引入的定向二分结构联系起来。不过，这里的约定略有不同。我们将结构取值于 $\{0,1\}$，而不是 $\{\pm\}$。我们还将其扩展为在对角线上取零。因此，定向二分结构是一个函数

$$S\colon \Sigma \times \Sigma \to \{0,1\}$$

满足 §2.3 的条件（$*$），并且 $S_{a,a} = 0$ 对所有 $a \in \Sigma$ 都成立；此处及下文中，我们将 S 在 (a,b) 处的值记为 $S_{a,b}$。

命题 5.14. 设 S 是 Σ 上的定向二分结构。定义 $\eta^S\colon \Sigma^3 \to k$ b y

$$\eta^S_{a,b}(c) = S_{c,a} - S_{c,b} - \delta_{b,c}$$

那么 η^S 是一个 Σ-符号。如果环 k 是连通的，那么每个 Σ-符号 η 都可表示为 η^S，且对应唯一的 S。

回忆一下，k 连通是指它恰有两个幂等元，即 0 和 1；特别地，这意味着 $1 \neq 0$ 属于 k。我们将证明分成几个引理。在前两个引理中，S 表示 Σ 上的一个定向二分结构。

引理 5.15. η^S 满足 (5.9a)。

证明。设 a、b、c、$d \in \Sigma$。我们证明

$$\eta^S_{a,b}(c)\eta^S_{c,b}(d) = \eta^S_{a,b}(d)\eta^S_{a,d}(c)$$

上式中出现了三个克罗内克 δ，分别是 $\delta_{c,\ d}$，$\delta_{c,\ b}$ 和 $\delta_{d,\ b}$。我们将分情况讨论它们可能取的值。

情形 1：b、c 和 d 互不相同。单位元为

$$(S_{c,a} - S_{c,b})(S_{d,c} - S_{d,b}) = (S_{d,a} - S_{d,b})(S_{c,a} - S_{c,d}).$$

根据 $(*)$，我们有 $(S_{c,\ d} - S_{c,\ b})(S_{d,\ c} - S_{d,\ b}) = 0$，因此

$$(S_{c,a} - S_{c,b})(S_{d,c} - S_{d,b}) = (S_{c,a} - S_{c,b})(S_{d,c} - S_{d,b})$$

同理，我们有

$$(S_{d,a} - S_{d,b})(S_{c,a} - S_{c,d}) = (S_{d,c} - S_{d,b})(S_{c,a} - S_{c,d}).$$

由此我们确立了该单位元。

情形 2：$c = d = b$。单位元变为

$$(-1)(S_{c,a} - 1) = (S_{c,a} - 1)^2,$$

由于 $S_{c,\ a} - 1$ 要么为 0，要么为 -1，所以这是成立的。

情形 3：$c = d$ 和 $c \neq b$。单位元变为

$$(S_{c,a} - S_{c,b})(-S_{c,b}) = (S_{c,a} - S_{c,b})(S_{c,a} - 1)$$

这等价于

$$(S_{c,a} - S_{c,b})(S_{c,a} + S_{c,b} - 1) = 0.$$

如果 $S_{c,\ a}$ 和 $S_{c,\ b}$ 重合，那么第一个因子为零；否则，一个为 0，另一个为 1，因此它们的和为 1，第二个因子为零。

情形 4：$c = b$ 和 $c \neq d$。于是 $\eta^S_{c,\ b}(d) = 0$，单位元变为

$$(S_{d,a} - S_{d,c})(S_{c,a} - S_{c,d}) = 0.$$

这由（$*$）可得。

情形 5：$d = b$ 和 $c \neq d$。单位元变为

$$(S_{c,a} - S_{c,d})(S_{d,c} - 1) = (S_{d,a} - 1)(S_{c,a} - S_{c,d}),$$

这等价于

$$(S_{c,a} - S_{c,d})(S_{d,c} - S_{d,a}) = 0.$$

这由（$*$）得出。 □

引理 5.16. η^S 满足 (5.9b)。

证明。设 $a, b, c, d \in \Sigma$。我们有

$$\begin{aligned}&\eta^S_{a,d}(c) + \eta^S_{d,b}(c) + \delta_{c,d}\\ =&(S_{c,a} - S_{c,d} - \delta_{c,d}) + (S_{c,d} - S_{c,b} - \delta_{c,b}) + \delta_{c,d}\\ =&S_{c,a} - S_{c,b} - \delta_{c,b} = \eta^S_{a,b}(c).\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

引理 5.17. 设 η 是一个 Σ-符号，并且设 $a, b, c \in \Sigma$。

(a) 我们有 $\eta_{a,a}(c) = -\delta_{a,c}$。(b) 我们有 $\eta_{a,b}(c) = \eta_{c,b}(c) - \eta_{c,a}(c) - \delta_{c,a}$。(c) 若 $a \neq b$，则 $\eta_{a,b}(a)^2 = -\eta_{a,b}(a)$。(d) 若 $a \neq b$，则 $\eta_{c,b}(a)\eta_{c,a}(b) = 0$。

证明。(a) 根据（5.9b），我们有 $\eta_{a,\,a}(c) = 2\eta_{a,\,a}(c) + \delta_{a,\,c}$。(b) 根据（5.9b），我们有 $\eta_{c,b}(c) = \eta_{c,a}(c) + \eta_{a,b}(c) + \delta_{a,c}$。(c) 根据（5.9a），我们有 $\eta_{a,b}(a) = \eta_{a,b}(a)\eta_{a,a}(a)$，并且由 (a) 得 $\eta_{a,a}(a) = -1$。(d) 根据（5.9a），所讨论的积为 $\eta_{c,b}(b)\eta_{b,b}(a)$，由 (a) 可知其为零。 □

引理 5.18。设 η 是取值于连通环 k 的 Σ符号。则存在唯一的定向二分结构 S，使得 $\eta = \eta^S$。

证明。设 $a \neq b$ 是 Σ的元素。由引理 5.17(c)，我们看到 $-\eta_{a,\,b}(a)$ 是 k的幂等元。由于 k 是连通的，因此它必为 0 或 1。定义 S 为 $S_{a,\,b} = -\eta_{a,\,b}(a)$，其中 $a \neq b$，并令 $S_{a,\,a} = 0$。由于根据引理 5.17(a)，$-\eta_{a,\,a}(a) = 1$，我们看到对于所有 a、$b \in \Sigma$，$S_{a,\,b} = -\eta_{a,\,b}(a) - \delta_{a,\,b}$均成立。

现在我们验证 S 满足条件 (∗)。设 a、b 和 c 是 Σ 的互异元素。我们必须证明

$$(S_{a,b} - S_{a,c})(S_{b,a} - S_{b,c}) = 0.$$

除符号外，第一个因子是 $\eta_{c,\,b}(a)$，第二个因子是 $\eta_{c,\,a}(b)$。根据引理 5.17(d)，这两个因子的积为零，因此结论成立。由引理 5.17(b)可知 $\eta = \eta^S$。由于 S 可以由 η^S（因为 $1 \neq 0$ 在 k中）恢复，因此 S 的唯一性得证。□

5.4. 定理 1.2 的证明。令 T 为一个带有定向 Σ标记的树。这在 Σ (§2.1)上诱导出一个定向二分结构，因此，根据上述结果，可得到一个取值于 $\mathbf{Z}$ 的测度，其定义域为 G；也就是说，这是一个环同态 $\mu_T\colon \Theta(G) \to \mathbf{Z}$。考虑这些测度的积

$$\varphi\colon \Theta(G) \to \prod_T \mathbf{Z}.$$

我们必须证明 φ是一个同构。对于任意环 k，都有一个诱导映射

$$\varphi^*\colon \operatorname{Hom}(\prod_T \mathbf{Z}, k) \to \operatorname{Hom}(\Theta(G), k),$$

其中 Hom 均取自环范畴。根据本节的结果（以及定理 2.3），φ^* 当且仅当 k 是一个连通环时才是双射。由此可知，φ^* 当 k是连通环的有限直积时也为双射。因此，只需证明 $\Theta(G)$ 是这样的一个积；这样，米田引理便表明 φ 是一个同构。

现在证明 $\Theta(G)$ 是连通环的有限直积。这等价于证明 $\Theta(G)$ 只有有限多个幂等元；为此，只需证明 $\Theta(G)$ 只有有限多个极小素理想。设 $\mathfrak{p}$ 是一个极小素理想。由于 $\Theta(G)/\mathfrak{p}$ 是一个连通

环，商映射 $\Theta(G) \to \Theta(G)/\mathfrak{p}$ 经过某个 μ_T 分解。因此我们得到 $\ker(\mu_T) \subset \mathfrak{p}$，于是由 $\mathfrak{p}$ 的极小性可知 $\mathfrak{p} = \ker(\mu_T)$。所以 $\Theta(G)$ 只有有限多个极小素理想。

5.5. 测度的描述。设 T 是一个有向的 Σ 标记树，ν 是相应的取值于 $\mathbf{Z}$ 的 Σ 测度。现在说明如何根据 T 直接计算 ν。设 S 是与 T 相关联的定向二分结构；我们采用如下约定：当 a 指向 b 时，$S_{a,b}$ 为 1；当 a 背离 b 时，则为 0。设 $\eta = \eta^S$ 是与 S 相关联的符号。

设 a、$b \in \Sigma$，并设 $w \in \Sigma^\star$ 的长度为 n。令 $w_0 = a$ 和 $w_{n+1} = b$。若对于所有满足 w_i 的 $0 \le i < j < l \le n+1$，只要 w_j 和 w_ℓ 彼此不同，就有 w_j 属于连接 w_i 与 w_l 的最短路径，则称 (a, b, w) 是单调的。这意味着每个 w_i（含端点）都位于 a 与 b 之间的最短路径上；并且当我们从 w_i 移动到 w_{i+1} 时，要么停留在同一条边上，要么沿着这条路径向 b 靠近。

如果一条边沿着从 a 到 b 的路径，并且它从 a 指向外侧、朝向 b，我们就称其为正向定向；否则称其为负向定向。我们也将这一术语用于 a 和 b 本身：如果 a 指向 b，则称其为正向定向；如果 b 背离 a，则称其为正向定向。（如果 $a = b$，则认为 a 是正向定向的。）

如果(a, b, w)是单调的，并且当 w_i在 $w_0 \cdots w_{n+1}$中出现多次时，w_i 总是正向定向，我们就称(a, b, w)是良好的。假设(a, b, w)是良好的，我们令$\epsilon_{a,\ b}(w) = (-1)^m$，其中，对于 $1 \le i \le n$，m 是正向定向的 w_i的数量。以下是我们的主要结果：

命题 5.19。如果(a, b, w)是良好的，那么$\nu_{a,\ b}(w) = \epsilon_{a,\ b}(w)$；否则$\nu_{a,\ b}(w) = 0$。

在给出证明之前，我们需要几个引理。

引理 5.20。对于 a、b、c、$d \in \Sigma$，我们有

$$\eta_{a,c}(b)\eta_{a,d}(c) = \eta_{a,c}(b)\eta_{b,d}(c).$$

证明。所述等式等价于

$$\eta_{a,c}(b)(\eta_{a,d}(c) - \eta_{b,d}(c)) = 0.$$

我们有

$$\eta_{a,d}(c) - \eta_{b,d}(c) = \eta_{a,b}(c) + \delta_{b,c},$$

因此我们必须证明

$$\eta_{a,c}(b)(\eta_{a,b}(c) + \delta_{b,c}) = 0.$$

If $b \ne c$ 这由（$*$）得出；而若 $b = c$，则由于 $\eta_{a,\ b}(b) \in \{-1, 0\}$，结论成立。 □

引理 5.21. 对于长度为 n 的 a、$b \in \sigma$ 和 $w \in \Sigma^\star$，我们有

$$\nu_{a,b}(w) = \prod_{i=1}^{n} \eta_{w_{i-1},w_{i+1}}(w_i),$$

其中我们令 $w_0 = a$ 和 $w_{n+1} = b$。

证明。将上面的右侧记作 $\nu'_{a,b}(w)$。我们通过对 w 的长度 n 作归纳法，证明 $\nu_{a,b}(w) = \nu'_{a,b}(w)$。若 $n \le 1$，则结论显然。现在假设 $n \ge 2$。我们有

$$\begin{aligned}\nu_{a,b}(w) &= \eta_{a,w_2}(w_1)\nu_{a,b}(w_2 \cdots w_n) \\ &= \eta_{a,w_2}(w_1)\eta_{a,w_3}(w_2)\eta_{w_2,w_4}(w_3)\cdots \\ &= \eta_{a,w_2}(w_1)\eta_{w_1,w_3}(w_2)\eta_{w_2,w_4}(w_3)\cdots = \nu'_{a,b}(w).\end{aligned}$$

第一步中，我们对 $(w, c, w') \to (\varnothing, w_1, w[2, n])$ 使用了定义 5.1(b)；第二步中，我们使用了归纳假设；第三步中，我们将引理 5.20应用于前两个因子，其中 $(a, b, c, d) \to (a, w_1, w_2, w_3)$。因此结论成立。□

引理 5.22. 设 $a, b \in \Sigma$ 互不相同。则

$$\eta_{a,b}(a) = \begin{cases} -1 & \textit{if } a \textit{ points towards } b \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases} \qquad \eta_{a,b}(b) = \begin{cases} -1 & \textit{if } b \textit{ points away from } a \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

设 $a, b, c \in \Sigma$ 互不相同。则

$$\eta_{a,b}(c) = \begin{cases} -1 & \textit{if } c \textit{ is between } a \textit{ and } b, \textit{ and points towards } b \\ 1 & \textit{if } c \textit{ is between } a \textit{ and } b, \textit{ and points towards } a \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

证明。它 们可由直接计算得出。下面说明最后一个公式。我们有 e

$$\eta_{a,b}(c) = S_{c,a} - S_{c,b}$$

因为根据假设，$\delta_{b,c} = 0$。边 c 位于 a 和 b之间，也就是说，位于连接a 和 b的最短路径上，当且仅当 $S_{c,a} \neq S_{c,b}$。因此，除非 $a \leq c \leq b$，$\eta_{a,b}(c) = 0$。假设 $a \leq c \leq b$。如果 c 指向 a，那么 $S_{c,a} = 1$ 且 $S_{c,b} = 0$；因此在这种情况下，$\eta_{a,b}(c) = 1$。类似地，如果 c指向 b，那么 $\eta_{a,b}(c) = -1$。□

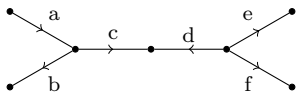
引理 5.23。设 $a, b \in \Sigma$ 且 $w \in \Sigma^\star$ 的长度为 n。那么对于 $0 \leq i < j < l \leq n + 1$，有 $\eta_{w_i,w_l}(w_j)$ 整除 $\nu_{a,b}(w)$。这里令 $w_0 = a$ 且 $w_{n+1} = b$。

证明。如果 $j = i + 1$ 且 $l = i + 2$，则由定义 5.1(b) 可知这一点，其中 $(w, c, w') \to (w[1, i)\ w_i,\ w(i, n])$。现在假设 $j > i + 1$。那么由定义 5.1，其中 $(w, c, w') \to (w[1, i], w_{i+1}, w[i + 2, n])$，可知 $\nu_{a,b}(w[1, i]w[i + 2, n])$ 整除 $\nu_{a,b}(w)$。根据归纳法，前者可被 $\eta_{w_i,w_l}(w_j)$ 整除，从而证明得证。□

命题 5.19 的证明。假设（a，b，w）不是良好的；我们证明 $\nu_{a,\ b}(w) = 0$。首先假设（a，b，w）不是单调的。那么存在 $0 \leq i < j < l \leq n+1$，满足 w_i、w_j，且 w_l 两两不同，使得 w_j 不位于 w_i 与 w_l 之间。由引理 5.22，得 $\eta_{w_i,\ w_l}(w_j) = 0$。由引理 5.23，这个符号整除 $\nu_{a,\ b}(w)$，因此 $\nu_{a,\ b}(w) = 0$。接下来假设存在一个字母 c，它在 $w_0 \cdots w_{n+1}$ 中出现不止一次，且是负向定向的。令 $i < j$ 满足 $w_i = w_j = c$。如果 $c \neq a$，那么引理 5.22 表明 $\eta_{a,\ w_j}(w_i) = 0$；而如果 $c \neq b$，则同一结果表明 $\eta_{w_i,\ b}(w_j) = 0$。由引理 5.23，这些符号整除 $\nu_{a,\ b}(w)$，因此该式也为零。

现在假设（a、b、w）是良好的。令 $1 \leq i \leq n$。如果 $w_{i-1} = w_i = w_{i+1}$那么$\eta_{w_{i-1},\ w_{i+1}}(w_i) = -1$。否则，引理5.22 表明$\eta_{w_{i-1},\ w_{i+1}}(w_i)$ 在 -1 为正向定向时是 w_i，而在其他情况下 $+1$。因此，结论由引理5.21得出。□

5.6. 一个例子。令 $\Sigma = \{\mathsf{a} \ldots, \mathsf{f}\}$ 为一个六元素集合。考虑下面这个带有有向Σ标记的树 T:



定向二分结构 S 由下表指定:

	a	b	c	d	e	f
a	0	1	1	1	1	1
b	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	1	1	1
d	1	1	1	0	0	0
e	0	0	0	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0

这里，标记为“a”的行指定了 $S_{\mathrm{a},\ -}$ 的值。

考虑 $\nu_{\mathrm{b},\ \mathrm{f}}(w)$。要使 $(\mathrm{b}, \mathrm{f}\ w)$ 良好，w 只能使用连接 b 和 f（包括两者）的边，即 b、c、d 和 f，并且它们必须按此顺序出现。事实上，b 不能出现在 w 中，因为它是负向定向的，且是端点之一；而 d 只能出现一次。因此，此情形下良好的 w 具有如下形式：$\mathrm{c}^i\mathrm{d}^j\mathrm{f}^l$，其中 i、$l \in \mathbf{N}$ 且 $j \in \{0,1\}$。此外，对于这样的 i、j 和 l，我们有

$$\nu_{\mathrm{b,f}}(\mathrm{c}^i\mathrm{d}^j\mathrm{f}^l) = (-1)^{i+l}.$$

6. The case of the line

回顾一下，$\mathbf{L} = \mathbf{S} \setminus \{\infty\}$ 是一个带有全序和 Σ 着色的齐次结构，其自同构群 H 是寡轨道的。下面的定理描述了 H 的测度。

定理 6.1. 给定一棵有向 Σ 标记树 T 以及 T 中两个（可以相同的）顶点 x 和 y，存在一个与之关联的 $\mathbf{Z}$ 值测度 $\mu_{T,\ x,\ y}$，对应于 H。这些测度的积定义了环同构 $\Theta(H) \to \prod_{T,\ x,\ y} \mathbf{Z}$。特别地，$\Theta(H) \cong \mathbf{Z}^M$，其中 $M = (2n+2)^n$ 且 $n = \#\Sigma$。

证明。我们只简要说明证明的主要思路。令 $\overline{\Sigma} = \Sigma \cup \{\pm\infty\}$。一个 $\overline{\Sigma}$-测度是一种规则，它给 $a \in \Sigma \cup \{-\infty\}$, $b \in \Sigma \cup \{+\infty\}$ 和 $w \in \Sigma^\star$ 赋予一个值 $\nu_{a,b}(w)$，该值属于 k 并满足与定义 5.1中的公理类似的公理。首先证明，关于 H 的测度等价于 $\overline{\Sigma}$-测度：给定关于 H的测度 μ，相应的 $\overline{\Sigma}$-测度定义为 $\nu_{a,b}(w) = \mu(I^w)$，其中 I 是 $\mathbf{L}$ 中一个区间，其端点属于 a 和 b这两类。

接下来，一个 $\overline{\Sigma}$-符号 是一种规则，它给 $a \in \Sigma \cup \{-\infty\}, b \in \Sigma \cup \{+\infty\}$ 和 $c \in \Sigma$ 赋予一个值$\eta_{a,b}(c)$，该值属于 k，并满足与定义 5.8中的公理类似的公理。可以证明，$\overline{\Sigma}$-测度与 $\overline{\Sigma}$-符号之间存在双射对应关系。

设 η 是一个取值于连通环 k 的 $\overline{\Sigma}$-符号。定义

$$S\colon \Sigma \times \overline{\Sigma} \to \{0,1\}$$

如下。对于 a、$b \in \Sigma$，我们像之前一样定义 $S_{a,b}$。令 $S_{a,\infty} = -\eta_{a,\infty}(a)$ 以及 $S_{a,-\infty}(a) = \eta_{-\infty,a}(a) + 1$。利用与之前类似的论证可以证明，这些值确实属于 $\{0,1\}$，并且可以由 S 恢复出 η。此外，S 满足以下条件：给定 a、$b \in \Sigma$ 和 $c \in \overline{\Sigma}$，等式 $S_{a,\ b} = S_{a,c}$ 或 $S_{b,a} = S_{b,c}$ 至少有一个成立。

将 S 限制到 $\Sigma \times \Sigma$ 上，会得到一个定向二分结构，因此得到一棵有向的 Σ标记树 T。接着可以证明，在 T 中存在唯一的顶点 x，使得 $S_{a,\ \infty}$ 当 a 指向x时为 1，否则为 0；类似地，可以得到与 $-\infty$相关联的顶点 y。从这一描述中也可以清楚地看出，如何从 (T, x, y) 出发，接着定义 S, η, ν，最后定义 μ。这就是如何得到所述的 $\Theta(H)$ 描述。

最后，我们说明计数方法。如果 T是一棵有 n条边的树，那么 T有 $n+1$个顶点，因此有 $(n+1)^2$种 (x,y)的选择。因此 $M=(n+1)^2\cdot N$，其中 N是 T的选择数量。（注意，有向的 Σ标记树没有非平凡的自同构。）我们已经在命题 2.8 中看到 $N=2^n\cdot(n+1)^{n-2}$。 □

References

[Aga] Lovkush Agarwal. $\aleph_0$分类结构的约化。博士论文，利兹大学，2016年。可访问：http://www.lovkush.com/maths/thesis.pdf[Ban] Paul Bankston. 道路系统与介于关系。《数学学会通报》3（2013），第389–408页。DOI:10.1007/s13373-013-0040-4[Cam1] Peter J. Cameron. 寡形置换群。伦敦数学会讲义系列，第152卷，剑桥大学出版社，剑桥，1990年。[Cam2] Peter J. Cameron. 与树相关的二图计数。《电子组合学杂志》2（1995）。DOI:10.37236/1198[CO1] Jonathan Comes, Victor Ostrik. 关于 Deligne 范畴 RepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRep(S_t) 的块。《数学进展》226（2011），第2期，第1331–1377页。 DOI:10.1016/j.aim.2010.08.010 arXiv:0910.5695[CO2] Jonathan Comes, Victor Ostrik. 关于 Deligne 范畴 RepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRepRep^{ab}(S_d)。《代数与数论》8（2014），第473–496页。 DOI:10.2140/ant.2014.8.473 arXiv:1304.3491[CW] Jonathan Comes, Benjamin Wilson. Deligne 范畴 Rep(GL_δ) 与一般线性超群的表示。《表示论》16（2012），第568–609页。 DOI:10.1090/S1088-4165-2012-00425-3arXiv:1108.0652[Del] P. Deligne. 当 S_t 不是自然数时，对称群 t 的表示范畴。载于：《代数群与齐性空间》，收入《塔塔基础研究所数学研究》，塔塔基础研究所，孟买，2007年，第209–273页。可访问： https://www.math.ias.edu/files/deligne/Symetrique.pdf[EAH] Inna Entova-Aizenbud, Thorsten Heidersdorf. 有限一般线性群的 Deligne 范畴，第一部分：泛性质。 arXiv:2208.00241[FHR] Rigoberto Fl´orez, Robinson Higuita, Alexander Ram´ırez. 广义斐波那契多项式的结式、判别式与导数。《整数序列杂志》22（2019），第4期。 arXiv:1808.01264[Hai] Mark D. Haiman. 关于对角不变量商环的猜想。《代数组合学杂志》3（1994），第17–76页。 DOI:10.1023/A:1022450120589可访问： https://math.berkeley.edu/~mhaiman/ftp/diagonal/diagonal.pdf[Har] Nate Harman. 对称群模表示论中的稳定性与周期性。arXiv:1509.06414v3[Har2] Nate Harman. Deligne 范畴作为秩与特征的极限。 arXiv:1601.03426[HS1] Nate Harman, Andrew Snowden. 寡形群与张量范畴。 arXiv:2204.04526[HS2] Nate Harman, Andrew Snowden. 超齐次张量空间。 arXiv:2207.09626[HSS] Nate Harman, Andrew Snowden, Noah Snyder. Delannoy范畴。 arXiv:2211.15392[HSS2] Nate Harman, Andrew Snowden, Noah Snyder. 圆形德洛内范畴。准备中。[Kno1] Friedrich Knop. 半单张量范畴的一种构造。《巴黎科学院数学报告》C辑343（2006），第1期，第15–18页。 DOI:10.1016/j.crma.2006.05.009 arXiv:math/0605126[Kno2] Friedrich Knop. 正则范畴的张量包络。《数学进展》214（2007），第571–617页。DOI:10.1016/j.aim.2007.03.001 arXiv:math/0610552[LNVTS] C. Laflamme, L. Nguyen Van Th´e, N. W. Sauer. 稠密局部序的分割性质及米利肯定理的彩色版本。《组合学》30（2010），第83–104页。DOI:10.1007/s00493-010-2445-y arXiv:0710.2885[OEIS] OEIS 基金会。在线整数数列百科全书，数列 A001850。https://oeis.org/A127670

Department of Mathematics, University of Michigan, Ann Arbor, MI电子邮件地址：asnowden@umich.edu网址：http://www-personal.umich.edu/~asnowden/