arXiv:2302.08700v1 [math.RT] 17 Feb 2023

t-尖点模的量子化 Cartan 矩阵与 R-矩阵

MASAKI KASHIWARA 和 SE-JIN OH

Abstract. 由于箭图 Hecke 代数的每个单模都是定义在某些尖点模的卷积积上的 R-矩阵之像，因此，了解尖点模之间 R-矩阵的$\mathbb{Z}$-不变量意义重大。本文证明，任意有限型在 $q = 1$ 处特化的(q,t)-Cartan 矩阵（称为t-量子化 Cartan 矩阵）能够揭示 R-矩阵的不变量。为此，我们将 Dynkin 箭图所关联的组合 AR-箭图及其性质作为关键工具。

Contents

1. 引言 1 2. 背景 7 3. t-量子化 Cartan 矩阵 13 4. Auslander-Reiten（AR）箭图 17 5. BCFG 型 AR 箭图的标记 28 6. 次数多项式 38 7. 箭图 Hecke 代数与 R-矩阵 45 8. 尖点模与 t-量子化 Cartan 矩阵 53 附录 A. $\mathfrak{d}_{i,j}(t)$ 关于 E_7 和 参考文献 69

1. Introduction

设 $\mathfrak{g}$ 为有限维单李代数，$\triangle$ 为其 Dynkin 图，$C = (c_{i,j})_{i,j\in I}$为其 Cartan 矩阵。在 [8], Frenkel-Reshetikhin 引入 Cartan 矩阵 C 的二参数变形 $C(q,t)$，以定义与 $\mathfrak{g}$相关的 $\mathcal{W}$-代数 $\mathcal{W}$ 的变形 $\mathcal{W}_{q,t}(\mathfrak{g})$。有趣的是，人们发现 $\mathcal{W}_{q,t}(\mathfrak{g})$ 以如下方式插值了非扭曲类型的量子仿射代数 $U'_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ 及其 Langlands 对偶 $U'_q(\widehat{\mathfrak{g}}^L)$ 的表示理论。设 $\mathscr{C}_{\widehat{\mathfrak{g}}}$ 为有限维 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$-模范畴，$K(\mathscr{C}_{\widehat{\mathfrak{g}}})$ 为其

日期：2023年2月15日。M. Kashiwarawas 的研究得到日本学术振兴会科学研究资助金（B）20H01795的支持。S.-j. Oh 的研究得到大韩民国教育部和韩国国家研究基金会（NRF-2022R1A2C1004045）的支持。

Grothendieck环。则 $\mathcal{W}_{q,\,t}(\mathfrak{g})$ 在 $t=1$ 处的特化可恢复 $K(\mathscr{C}_{\widehat{\mathfrak{g}}})$，而在 $q=\exp(\pi i/r)$ 处的特化预计可恢复 $K(\mathscr{C}_{\widehat{\mathfrak{g}}^L})$，其中 r 是 $\mathfrak{g}^L$ [9, 7, 6]的竞争数。

在基域 $\mathbf{k}=\mathbb{Q}(q)$ 上的 $U_q'(\widehat{\mathfrak{g}})$ 的表示论中，R-矩阵发挥着核心作用，因为 $\mathscr{C}_{\widehat{\mathfrak{g}}}$ 中的每个简单模都可表示为定义在某个特殊简单模族的张量积上的 R-矩阵的像，这类特殊简单模被称为基本模[1, 27, 57]。下面将以更精确的方式加以说明。R-矩阵被构造为 $\mathscr{C}_{\widehat{\mathfrak{g}}}$ 中满足 Yang-Baxter 方程的模之间的交织算子。对于一个简单模 $M\in\mathscr{C}_{\widehat{\mathfrak{g}}}$，存在唯一的有限族 $\{(i_k,a_k)\in I\times\mathbf{k}^\times\}_{1\leqslant k\leqslant r}$ 以及相应的基本模 $\{V_{i_k}(a_k)\}_{1\leqslant k\leqslant r}$，使得 M 是 R-矩阵复合的像

$$\mathbf{r}: V_{i_r}(a_r)\otimes\cdots\otimes V_{i_2}(a_2)\otimes V_{i_1}(a_1)\to V_{i_1}(a_1)\otimes V_{i_2}(a_2)\otimes\cdots\otimes V_{i_r}(a_r),$$

其中

$$\mathbf{r}_{t,s}: V_{i_t}(a_t)\otimes V_{i_s}(a_s)\to V_{i_s}(a_s)\otimes V_{i_t}(a_t)$$

表示 $V_{i_t}(a_t)$ 与 $V_{i_t}(a_t)$ 之间的 R-矩阵，

$$\mathbf{r}=(\mathbf{r}_{2,1})\circ\cdots\circ(\mathbf{r}_{r-1,1}\circ\cdots\circ\mathbf{r}_{r-1,r-2})\circ(\mathbf{r}_{r,1}\circ\cdots\circ\mathbf{r}_{r,r-1}),$$

并且 a_s/a_t 不是归一化 R-矩阵 $R^{\mathrm{norm}}_{V_{i_t}V_{i_s}}(1)_z$ 的分母的根；该分母是 $\mathbf{k}[z]$ 中的多项式，记作 $d_{i_t,i_s}(z)$。此外，$R^{\mathrm{norm}}_{V_{i_t}V_{i_s}}(1)_z$ 的分母表明 $V_{i_t}(a_t)\otimes V_{i_s}(a_s)$ 是否为简单模（关于归一化 R-矩阵及其分母的更多细节，请参阅 [30]）。因此，基本模之间的 R-矩阵及其分母的研究，是探究量子仿射代数表示论的首要步骤之一。令人惊讶的是，事实证明，矩阵 $(d_{i,j}(z))_{i,j\in I}$ 可以通过分次箭图簇的几何以及有限型 $\mathfrak{g}$ [17, 52, 14] 中单边型 $\mathfrak{g}$ 的根系（见下方 (1.1)）从 $\mathbf{C}_{\mathfrak{q}}(q):=\mathbf{C}_{\mathfrak{q}}(q)^{-1}$ 的逆矩阵中读取，其中 $\mathbf{C}_{\mathfrak{q}}(q):=\mathbf{C}(q,t)|_{t=1}$。我们在此指出，$(d_{i,j}(z))_{i,j\in I}$ 已在 [20, 5, 25, 47, 51, 11] 中得到明确计算。

我们将 $\mathbf{C}_{\mathfrak{q}}(q)$ 称为量子 Cartan 矩阵。注意，$\mathbf{C}_{\mathfrak{q}}(q)$ 在 $U_q'(\widehat{\mathfrak{g}})$ 的表示论中被广泛使用。例如，它在 q-特征标理论中发挥着关键作用，该理论由 [9, 7] 提出；此外，它还在量子 Grothendieck环 $K_t(\mathscr{C}_{\widehat{\mathfrak{g}}})$ 的构造中发挥着关键作用，该构造由 [45, 56, 16]提出。正如我们所提到的，为了计算 $\mathfrak{g}$ 类型的 $\mathbf{C}_{\mathfrak{q}}(q)$，我们需要考虑其对应的单边型李代数 $\mathfrak{g}$，如下所示：

$$(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=(ADE_n,ADE_n),\ (B_n,A_{2n-1}),\ (C_n,D_{n+1}),\ (F_4,E_6),\ (G_2,D_4). \tag{1.1}$$

随后可以看出，尽管 $\mathfrak{g}$ 不是单边型，$U_q'(\widehat{\mathfrak{g}})$ 的表示论本质却是单边型的。例如，$\mathscr{C}_{\widehat{\mathfrak{g}}}$ 的心子范畴 $\mathscr{C}_{\widehat{\mathfrak{g}}}^{\mathcal{Q}}$ 的量子 Grothendieck 环 $K_t(\mathscr{C}_{\widehat{\mathfrak{g}}}^{\mathcal{Q}})$ 同构于 $U_q(\mathfrak{g})$ [17, 34, 51], 的幂幺量子坐标环 $A_q(\mathfrak{n})$ 的整形式，而 $\mathscr{C}_{\widehat{\mathfrak{g}}}$ 的分块由 $\mathfrak{g}$ 的根格 $Q_{\mathfrak{g}}$ 参数化[4, 33, 14]。这里，(A) 心子范畴 $\mathscr{C}_{\widehat{\mathfrak{g}}}^{\mathcal{Q}}$ 取决于 $\mathfrak{g}$的一个 Q-数据 $\mathcal{Q}=(\triangle_{\mathfrak{g}},\sigma,\xi)$ 的选择，该 Q-数据由以下部分组成：(i) 类型为 $\mathfrak{g}$ 的 Dynkin 图 $\triangle_{\mathfrak{g}}$；(ii) Dynkin 图自同构 σ，它给出 $\triangle_{\mathfrak{g}}$ 的 σ-轨道 $\triangle_{\mathfrak{g}}$；以及 (iii) 一个高度

函数 ξ：满足某些条件的 $I \to \mathbb{Z}$ （[14, 定义 3.5]）；(B) $\mathscr{C}_{\hat{\mathfrak{g}}}^{\mathcal{Q}}$ 由 $\mathscr{C}_{\hat{\mathfrak{g}}}$ 的最小子范畴刻画，该子范畴包含 $V_{\mathcal{Q}} := \{V_i((-q)^p)\}$，其中 (i,p) 遍历 $I \times \mathbb{Z}$ 的某个子集； $I \times \mathbb{Z}$ 是组合 AR-箭图 $\Gamma_{\mathcal{Q}}$的顶点集合 $(\Gamma_{\mathcal{Q}})_0$，该箭图属于 $\mathcal{Q}$；并且该子范畴 (ii) 在取子商、扩张和张量积 [17, 34, 51]下稳定。

箭图 Hecke 代数 R由 Khovanov-Lauda [39]和 Rouquier [54] 分别独立引入，是一种 $\mathbb{Z}$分次 k-代数；其有限维分次模范畴R-gmod 也将量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ 的整形式 $A_q(\mathfrak{n})$ 范畴化，该量子群与一个可对称化 Kac-Moody 代数 g 相关联。当 g 对称且基域 k 的特征为 0 时， R-gmod 中的自对偶简单模将基 B^{up} [58, 55] 范畴化，该基称为上整体基（等价于 Lusztig 的对偶典范基）。对于有限维单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$，每个简单模都可以表示为某个尖点模的有序卷积积 $\circ$ 的 R-矩阵像（§ 8.1），其中尖点模将对偶 PBW 向量 [37, 44] 范畴化（另见 [41, 18]）。下面对此作更精确的说明。对于 $\underline{w}_0$ 的约化表达式的一个交换类 $\mathbf{c}$，其中 w_0 是 Weyl 群 $W_{\mathfrak{g}}$ 的最长元素（§ 2.2），可以定义相应的尖点模集合 $S_{\mathbf{c}} = \{S_{\mathbf{c}}(\beta)\}_{\beta \in \Phi_{\mathfrak{g}}^+}$；该集合由仿实简单模（定义 7.6）组成，并由正根集合 $\Phi_{\mathfrak{g}}^+$参数化。于是，每个简单 R-模 M 都可以表示为一个特定同态的像；该同态也称为 R-矩阵，并满足 Yang-Baxter 方程（详见 [21] ），它定义在 $S_{\mathbf{c}}$中的模的有序卷积积上。也就是说，存在唯一的 $\underline{m} = (m_\ell, \ldots, m_1) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{\Phi_{\mathfrak{g}}^+}$，使得$M$ 是 R-矩阵复合的像（§ 8.1）

$$\mathbf{r} : S_{\mathbf{c}}(\beta_\ell)^{\circ m_\ell} \circ \cdots \circ S_{\mathbf{c}}(\beta_2)^{\circ m_2} \circ S_{\mathbf{c}}(\beta_1)^{\circ m_1} \to S_{\mathbf{c}}(\beta_1)^{\circ m_1} \circ S_{\mathbf{c}}(\beta_2)^{\circ m_2} \circ \cdots \circ S_{\mathbf{c}}(\beta_\ell)^{\circ m_\ell},$$

其中

$$\mathbf{r}_{t,s} : S_{\mathbf{c}}(\beta_t) \circ S_{\mathbf{c}}(\beta_s) \to S_{\mathbf{c}}(\beta_s) \circ S_{\mathbf{c}}(\beta_t)$$

表示 $S_{\mathbf{c}}(\beta_t)$ 与 $S_{\mathbf{c}}(\beta_s)$ 之间的 R-矩阵，且

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r}_{2,1}^{\circ m_2 m_1}) \circ \cdots \circ (\mathbf{r}_{r-1,1}^{\circ m_{r-1} m_1} \circ \cdots \circ \mathbf{r}_{r-1,r-2}^{\circ m_{r-1} m_{r-2}}) \circ (\mathbf{r}_{r,1}^{\circ m_r m_1} \circ \cdots \circ \mathbf{r}_{r,r-1}^{\circ m_r m_{r-1}}).$$

这里，R-矩阵 $\mathbf{r}_{t,s}$ 的齐次次数 $\Lambda(S_{\mathbf{c}}(\beta_t)\ S_{\mathbf{c}}(\beta_s))$ $(t > s)$ 与 $-(\beta_t, \beta_s)$ 重合。与量子仿射代数情形一样，对于每个 $\mathbf{r}_{t,s}$，我们都有 R-矩阵的 $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$-不变量

$$\mathfrak{d}(S_{\mathbf{c}}(\beta_t), S_{\mathbf{c}}(\beta_s)) := \frac{1}{2}\big(\Lambda(S_{\mathbf{c}}(\beta_t), S_{\mathbf{c}}(\beta_s)) + \Lambda(S_{\mathbf{c}}(\beta_s), S_{\mathbf{c}}(\beta_t))\big)$$

这表明 $S_{\mathbf{c}}(\beta_t) \circ S_{\mathbf{c}}(\beta_s)$ 是否为简单的。注意，一般而言，当 M 和 N 是简单的 R-模且其中一个是仿实的时，计算 $\mathfrak{d}(M, N)$ 相当困难。

在 [21], Kang-Kashiwara-Kim 构造了广义 Schur-Weyl 函子 $\mathscr{F}_J$，它将箭图 Hecke 代数 R^J 的范畴 R^J-gmod 映射到范畴 $\mathscr{C}_{\hat{\mathfrak{g}}}$。这里，箭图 Hecke 代数 R^J 和幺半群函子 $\mathscr{F}_J$ 由对偶数据（[32,第 4]节）、$\mathscr{C}_{\hat{\mathfrak{g}}}$中的一组实单模 $\{V^j\}_{j \in J}$ 以及 R 矩阵的分母（$\mathbf{r}_{V^i,V^j}$）$_{i,j \in J}$决定。当该对偶数据源自 $\mathfrak{g}$的一个 Q-数据 $\mathcal{Q}$时，箭图 Hecke 代数 $R^{\mathcal{Q}}$ 与 g 相关联，并且对于 (1.1) 中的每一对 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ 以及 $\mathfrak{g}$ [20, 23, 34, 51, 10, 46,的任意 Q-数据 $\mathcal{Q}$，函子 $\mathscr{F}_{\mathcal{Q}}$ 给出 $\mathscr{C}_{\hat{\mathfrak{g}}}^{\mathcal{Q}}$ 与 $R^{\mathfrak{g}}$-模之间的范畴等价

32]。注意， $\mathscr{T}_{\mathcal{Q}}$ （i）在两个范畴中都保持 R 矩阵及其不变量，并且（ii）将 $\mathscr{C}_{\mathfrak{g}}$ 映射到基本模 $V_{\mathcal{Q}}$ 的集合 $V_{\mathcal{Q}}$ 到 $S_{\mathcal{Q}} := \{S_{\mathcal{Q}}(\beta) := S_{[\mathcal{Q}]}(\beta)\}_{\beta\in\Phi_{\mathfrak{g}}^{+}}$，其中$[\mathcal{Q}]$ 是一个与 $\mathcal{Q}$相适配的 w_0 的交换类。因此，我们可以从 $\mathfrak{g}$的 $C_{\mathfrak{q}}(q)$ 中获得关于 $R^{\mathfrak{g}}$-gmod 中的$\partial(S_{\mathcal{Q}}(\alpha)\ S_{\mathcal{Q}}(\beta))$ 的信息。粗略地说，我们可以将$\widetilde{C}_{\mathfrak{q}}(q)$理解为 $S_{\mathcal{Q}}$中尖点模之间的分母公式。

总而言之，量子Cartan矩阵 $C_{\mathfrak{q}}(q)$ 是 $C(q,t)$ 在$t=1$处的特化，或者更确切地说，其逆矩阵 $C_{\mathfrak{q}}(q)$ 控制了量子仿射代数 $U_q'(\widehat{\mathfrak{g}})$ 对所有 $\mathfrak{g}$ 的表示理论，以及单边类型 $\mathfrak{g}$ 的箭图 Hecke 代数 $R^{\mathfrak{g}}$ 的表示理论：

$$\begin{array}{ccccc} & & \overset{\text{控制}}{\rightsquigarrow} & \mathscr{C}_{\widehat{\mathfrak{g}}} & \text{对于任意 } \mathfrak{g} \\ C(q,t) & \overset{t=1}{\dashrightarrow} & C_{\mathfrak{q}}(q) & & \\ & & \underset{\text{控制}}{\rightsquigarrow} & \mathrm{Rep}(R^{\mathfrak{g}}) & \text{仅适用于 } \mathfrak{g}。 \end{array} \tag{1.2}$$

在本文中，我们证明，无论类型如何，(a) 矩阵 $C(q,t)|_{q=1}$（记作 $C_{\mathfrak{t}}(t)$，称为 t-量子化 Cartan 矩阵），以及 (b) 与任意 Dynkin 箭图 $Q=(\triangle_{\mathfrak{g}},\xi)$ Γ_Q 相关联的一个（组合）AR箭图，都能够向我们揭示箭图 Hecke 代数 $R^{\mathfrak{g}}$ 上尖点模对 $(S_Q(\alpha)\ S_Q\beta)$ 的 R-矩阵的 $\mathbb{Z}$-不变量及相关性质，其中 $[Q]$ 是适配于 Q 的 $w_0\in W_{\mathfrak{g}}$ 的交换类（定义 2.4）。由于当 $\mathfrak{g}$ 为单边型时，$C_{\mathfrak{t}}(t)$只需将 q 替换为 t 即可由 $C_{\mathfrak{q}}(q)$得到，因此我们可以说，$C_{\mathfrak{t}}(t)$控制 $\mathscr{C}_{\widehat{\mathfrak{g}}}$，从而可以如下补全 (1.2) 的左翼：

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Rep}(R^{\mathfrak{g}}) & & & & & \overset{\text{controls}}{\rightsquigarrow} & \mathscr{C}_{\widehat{\mathfrak{g}}} \qquad \text{for any } \mathfrak{g} \\ & \overset{\text{controls}}{\rightsquigarrow} & & & & & \\ & & C_{\mathfrak{t}}(t) & \overset{q=1}{\dashleftarrow\!\dashrightarrow} & C(q,t) & \overset{t=1}{\dashrightarrow} & C_{\mathfrak{q}}(q) \\ & \underset{\text{controls}}{\rightsquigarrow} & & & & & \\ \mathscr{C}_{\widehat{\mathfrak{g}}} & & & & & \underset{\text{controls}}{\rightsquigarrow} & \mathrm{Rep}(R^{\mathfrak{g}}) \qquad \text{only for } \mathfrak{g}. \end{array} \tag{1.3}$$

如我们所解释的，当 $\mathfrak{g}$ 属于单边型且 Q 是一个同型的 Dynkin 箭图时，$C_{\mathfrak{t}}(t)=C_{\mathfrak{q}}(q)|_{q=t}$表示 $S_Q(\alpha)\circ S_Q(\beta)$ 是否为单的。更准确地说，通过双射 $I\times\mathbb{Z}\supset\widehat{\triangle}_0\xrightarrow{\phi_Q}\Phi_{\mathfrak{g}}^{+}\times\mathbb{Z}$，我们有

$$\partial(S_Q(\beta)\circ S_Q(\alpha)) = \text{ the coefficient of } t^{|p-s|-1} \text{ in } \widetilde{C}_{\mathfrak{q}}(t)_{i,j},$$

其中 $\phi_Q^{-1}(\alpha,0)=(i,p)$，且 $\phi_Q^{-1}(\beta,0)=(j,s)$。也就是说，只需读取（I） α 和 β 在 Γ_Q 中的相对位置，以及（II）$C_{\mathfrak{q}}(t)_{i的系数j}$，我们就可以得到 $\mathbb{Z}$-不变量$\partial(S_Q(\beta)\ S_Q(\alpha))$。这种策略是在 [48, 49, 50, 52] 中通过构造关于 $\Gamma_{\mathcal{Q}}$的统计量实现的，而该统计量同样只取决于 α 和 β 在 $\Gamma_{\mathcal{Q}}$中的相对位置。

我们也将上述策略应用于非单边型 $\mathfrak{g}$。为此，在作者此前的论文 [35] 中，我们将 Dynkin 箭图 Q 的概念推广到了非单边类型。随后，我们为任意类型 $\mathfrak{g}$构造了组合 AR-箭图 Γ_Q，它在组合意义下推广了单边型 Q 路径代数 $\mathbb{C}Q$ 的经典AR箭图 Γ_Q。更确切地说，我们证明了：(i) 存在适配于 Q 的 w_0 的约化表达式 $\underline{w_0}$，并且这些约化表达式构成交换

类 $[Q]$; (ii) 我们引入了组合 AR-箭图 Γ_Q ，它在正根集合 $\Phi_{\mathfrak{g}}^+$ 上实现了凸偏序 $\prec_Q$ （见（2.4）及定理 4.1）。此外，我们通过构造重复箭图 $\triangle = (\triangle_0, \triangle_1)$ 来将 Γ_Q 理解为一个心的满子箭图 $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$；该重复箭图仅依赖于 $\mathfrak{g}$ ，且其顶点集合 $\triangle_0$ 与 $\Phi_{\mathfrak{g}}^+ \times \mathbb{Z}$存在双射。我们在此 $\widehat{\quad}$指出，当 $\mathfrak{g}$ 为单边型时， $\triangle$ 同构于路径代数 $\mathbb{C}Q$ [15] 的有界导出范畴 $\widehat{\quad}$的 AR箭图，而 $\triangle_0$ 是 $I \times \mathbb{Z}$的子集。[35] 中的一个主定理是，B（t）的逆 B（t）：$= \mathsf{C}_{\mathsf{t}}(t) \times \mathsf{D}^{-1}$ 可以从同型 $\mathfrak{g}$的任意 AR-箭图 Γ_Q 中读出。这里，D $=$ diag($\mathsf{d}_i \mid i \in I$) 是将 Cartan 矩阵 C 对称化的对角矩阵。

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$本文首先证明，B(t)（类型为 $\mathfrak{g}$ ）可由类型为 g 的 B(t) 经 $\widetilde{\quad}$在 $\triangle_{\mathfrak{g}}$ 上进行 Dynkin 图折叠 σ 得到 $\triangle_{\mathfrak{g}}$ （定理 3.7）。由于类型为 g 的 B(t) 可从任意同型 g 的 Γ_Q 中读出，定理 3.7 说明，类型为 $\mathfrak{g}$ 的 Γ_Q 的组合性质与单边型 AR 箭图的组合性质相关。在第 5 节中，我们证明，通过 $\Phi_{\mathfrak{g}}^+$得到的类型为 $\mathfrak{g} = B_n$、 C_n、 F_4 和 G_2 的 Γ_Q 的标记，可以分别通过简单手术，从经 $\Phi^+{}_{\mathfrak{g}'}$ 得到的类型为 $\mathfrak{g}' = D_{n+1}$、 A_{2n-1}、 E_6 和 D_4 的 Γ_Q 的标记得到:

$$(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}') = (C_n, A_{2n-1}), (B_n, D_{n+1}), (F_4, E_6), (G_2, D_4). \tag{1.4}$$

注意， $\mathfrak{g}$可视为$\mathfrak{g}'$ 经 Dynkin 图折叠得到的一个非平凡李子代数σ （[19, 命题 7。9]）。基于第 5 节的组合结果，我们证明，针对单边型在 [48, 49, 50] 中定义的统计量，对任意类型也有良好定义，且不依赖于 Dynkin 箭图的选择。因此，我们可以得到任意类型的一组多项式，称为次数多项式 $(\mathfrak{d}_{i,\ j}(t))_{\ i,\ j\in I} \subset \mathbb{Z}_{\geqslant 0}[t]$ 适用于 $\mathfrak{g}$ 任意类型（命题 6.1）。然后我们在定理 6.6中证明

$$\mathfrak{d}_{i,j}(t) + \delta_{i,j^*}\, \mathsf{d}_i\, t^{\mathsf{h}-1} = \widetilde{\underline{\mathsf{B}}}_{i,j}(t) + t^{\mathsf{h}} \widetilde{\underline{\mathsf{B}}}_{i,j^*}(t), \tag{1.5}$$

当 $\mathfrak{g}$ 属于经典型或类型 E_6 （见注4.29 ，对于其余类型）。这里h 是 $\mathfrak{g}$ 的 Coxeter 数，且 $*$: $I \to I$ 是 I 上的对合，由最长元素w_0诱导。

主定理（定理8.6）。设 Q 是任意类型 $\mathfrak{g}$的 Dynkin 箭图。那么，对于任意α， $\beta \in \Phi_{\mathfrak{g}}^+$，我们有

$$\mathfrak{d}(S_Q(\alpha), S_Q(\beta)) = \text{ the coefficient of } t^{|p-s|-1} \text{ in } \widetilde{\underline{\mathsf{B}}}_{i,j}(t), \tag{1.6}$$

其中 $\phi_Q(i,p) = (\alpha, 0)$， 且 $\phi_Q(j,s) = (\beta, 0)$。此外，我们有以下结论:
(a) 在 $\beta \not\prec_Q \alpha$ 的假设下， $S_Q(\alpha) \circ S_Q(\beta)$ 的头部是单的，并同构于 S_Q 中两两可交换的尖点模的卷积积。(b) 若 $t^{|p-s|-1}$ 在 $\mathfrak{d}_{i,j}(t)$ 中的系数严格大于 max(d_i, d_j)，则 $S_Q(\alpha) \circ S_Q(\beta)$ 的合成长度 $\ell(S_Q(\alpha) \circ S_Q(\beta))$ 严格大于 2。(c) 若 $t^{|p-s|-1}$ 在 $\mathfrak{d}_{i,j}(t)$ 中的系数等于 max(d_i, d_j)，则 $\ell(S_Q(\alpha) \circ S_Q(\beta))$ 等于 2。(d) 若 $t^{|p-s|-1}$ 在 $\mathfrak{d}_{i,j}(t)$ 中的系数等于 0，则 $S_Q(\alpha) \circ S_Q(\beta)$ 是单的。

我们通过主定理利用（i）第4、5节研究的 AR箭图的组合性质， （ii）对偶 PBW 向量及其范畴化的研究来证明

在 [3] 以及（iii）作者及其合作者在 [24, 29] 中发展起来的与 R-矩阵相关的理论。

注意到，主定理表明，对于带有源点 i 的 Dynkin 箭图 $Q = (\triangle, \xi)$，我们有

$$\mathfrak{d}(S_Q(\alpha), S_Q(\beta)) = \mathfrak{d}(S_{s_iQ}(s_i\alpha), S_{s_iQ}(s_i\beta)) \quad \text{if } \alpha \neq \alpha_i \text{ and } \beta \neq \alpha_i, \tag{1.7}$$

其中 α_i 是第 i 个单根，而 $s_iQ = (\triangle, s_i\xi)$ 是另一个由Q 得到的 Dynkin 箭图（见（2.7））。由于 S_Q 和 S_{s_iQ} 将两族不同的对偶 PBW 向量范畴化，而这两族向量通过 Lusztig 和 Saito 的辫群作用相互联系，因此我们可以期待存在一个函子来证明（1.7）。当 $\mathfrak{g}$ 属于单边型时，Kato 在[37, 38], 中构造了这样的函子，并将其称为 Saito反射函子，所采用的是几何方法。我们在此指出，与单边型相比，对于非单纯连通型 $\mathfrak{g}$尚不存在完善发展的几何理论，因此目前无法在[58, 37, 38, 11] 中应用几何方法。于是，本文采用代数-组合方法。

本文组织如下。在第2节中，我们回顾本文所需的背景知识。特别地，我们回顾 Dynkin 箭图的概念，以及关于 Φ^+ 上凸偏序下正根对所定义的统计量。在第3节中，我们首先回顾 [35] 中关于将 $B(t) = (B_{i,j}(t))$ 计算为一个元素属于 $\mathbb{Z}((t))$ 的矩阵的结果。随后我们证明，非单边型 $\mathfrak{g}$ 的 $B(t)$ 可以由单边型 $\mathfrak{g}$ 的相应对象通过得到。在第4节中，我们回顾 [48, 49, 50] 中关于 Q 为单边型时 AR箭图 Γ_Q's 的统计量和次数多项式的结果。在第5节中，我们发展第4节的 BCFG类比，并观察不同类型的 Γ_Q 之间的相似性。特别地，我们证明，非单边型 AR 箭图通过 Φ^+ 的标记可以由单边型的相应标记通过简单手术得到。在第6节中，我们为每个 Dynkin 箭图 Q 定义次数多项式的概念，并证明它不依赖于 Q 的选择，因此对任意有限型 $\mathfrak{g}$ 都是良定义的。然后我们证明，对于经典型和 E_6，(1.5) 成立。我们在第4、5和6节中安排了本文的大量篇幅，以展示许多计算和例子。在第7节中，我们回顾箭图 Hecke 代数、R-矩阵以及与 R-矩阵相关的 $\mathbb{Z}$-不变量。同时，我们回顾通过尖点模对 PBW向量进行范畴化。在第8节中，我们基于前几节的结果，采用逐案方法证明主定理。更具体地说，我们按照 Γ_Q 中的相对位置对 (α, β) 进行分类，从而得到统计量，并根据相对位置和 $\mathfrak{g}$ 的类型证明 (1.6)。

约定 1. 本文通篇采用以下约定。

(1) 对于命题 $\mathtt{P}$，当 $\mathtt{P}$ 为真或假时，$\delta(\mathtt{P})$ 分别取 1 或 0。特别地，我们将 $\delta_{i,j} := \delta(i = j)$ 记为克罗内克δ。(2) 对于有限集 A，我们用 $|A|$ 表示 A 中元素的数量。(3) 有时，我们使用 ▲ 表示非单边型的 Dynkin 图，以便将其与单边型的 Dynkin 图区分开来。

2. Backgrounds

本节将回顾本文所需的背景知识。

2.1. 有限 Cartan 数据。设 I 为一个指标集。Cartan 数据是一个五元组

$$(\mathsf{C}, \mathsf{P}, \Pi, \mathsf{P}^\vee, \Pi^\vee)$$

由以下各项组成:

(1) 一个广义可对称化 Cartan 矩阵 $\mathsf{C} = (\mathsf{c}_{i,\ j})_{i,\ j\in I}$; (2) 一个称为权格的自由阿贝尔群 P; (3) $\Pi = \{\alpha_i \mid i \in I\}$, 称为单根集; (4) $\mathsf{P}^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{P}, \mathbb{Z})$, 称为余权格; 以及 (5) $\Pi^\vee = \{h_i \mid i \in I\}$, 称为简单余根集

满足

(i) $\langle h_i, \alpha_j\rangle = \mathsf{c}_{i,\ j}$ 对于 i、$j \in I$, (ii) Π 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关, (iii) 对于每个 $i \in I$, 存在 $\varpi_i \in \mathsf{P}$, 称为基本权, 使得 $\langle h_i, \varpi_j\rangle = \delta_{i,\ j}$ 对于所有 $j \in I$ 以及

(iv) 存在一个取值于 $\mathbb{Q}$ 的对称双线性形式 $(\cdot, \cdot)$ 定义在 P 上, 使得 $\langle h_i, \lambda\rangle = \frac{2(\alpha_i, \lambda)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$ 并且对于任意 i 和 $\lambda \in \mathsf{P}$, 都有 $(\alpha_i, \alpha_i) \in \mathbb{Q}_{>0}$。

记 $\mathfrak{h} := \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{P}^\vee$, $\mathsf{Q} := \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\alpha_i$, 以及 $\mathsf{Q}^+ := \sum_{i\in I} \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\alpha_i$, $\mathsf{P}^+ := \{\lambda \in P \mid \langle h_i, \lambda\rangle \geqslant 0,$ 对于任意 $i \in I\}$, 并且对于 $\beta = \sum_{i\in I} k_i\alpha_i \in \mathsf{Q}^+$, 有 $\mathrm{ht}(\beta) = \sum_{i\in I} k_i$。我们将根的集合记为 Φ, 将正根（分别为负根）的集合记为 $\Phi^\pm$。

定义 2.1。

(a) $\beta = \sum_{i\in I} n_i\alpha_i \in \mathsf{Q}^+$ 的重数 $\mathrm{mul}(\beta)$ 定义为

$$\mathrm{mul}(\beta) := \max\{n_i \mid i \in I\}.$$

(b) $\beta = \sum_{i\in I} n_i\alpha_i \in \mathsf{Q}^+$ 的支集 $\mathrm{supp}(\beta)$ 定义为

$$\mathrm{supp}(\beta) := \{i \in I \mid n_i \neq 0\}.$$

(c) 对于 $i \in I$ 和 $\beta = \sum_{i\in I} n_i\alpha_i \in \mathsf{Q}^+$, 我们令 $\mathrm{supp}_i(\beta) := n_i$。(d) 对于 α、$\beta \in \Phi$, 我们令

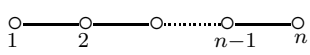
$$p_{\beta,\alpha} := \max\{p \in \mathbb{Z} \mid \beta - p\alpha \in \Phi\}.$$

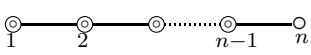
在本文中, 我们只考虑有限 Cartan 数据, 并用标准正交基 $\{\epsilon_s\}_{s\in J}$ 实现根格 $\mathsf{Q} \subset \bigoplus_{s\in J} \mathbb{R}\epsilon_s$。例如, 如果 Q 是 A_n 类型, 则 $\mathsf{Q} \subset \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathbb{Z}\epsilon_i$ 以及 $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$, 其中 $1 \leqslant i \leqslant n$。

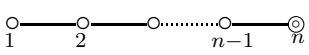
对于每个有限 Cartan 数据, 我们取 $\mathfrak{h}^*$ 上的非退化对称双线性型 $(\cdot, \cdot)$, 使得对于 α 中的短根, 有 $(\alpha, \alpha)=2$。在本文中, 与 Cartan 数据 $\triangle$ 相关联的 Dynkin 图是一个图, 其顶点集为 I, 边集为 i 和 j 之间的边, 并满足 $(\alpha_i, \alpha_j) < 0$。我们为每个顶点赋予 $\mathsf{d}_i := (\alpha_i, \alpha_i)/2 = (\alpha_i, \varpi_i) \in \mathbb{Z}_{>0}$

顶点 $i \in I$。我们将顶点集记为 $\triangle_0$，将边集记为 $\triangle_1$。以下是 Dynkin图列表：

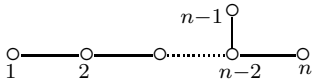
(2.1)

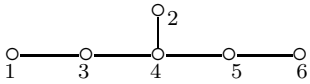
A_n 

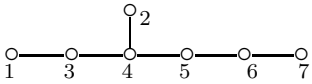
，B_n 

，C_n 

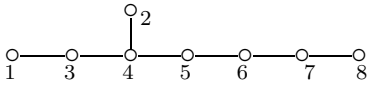
，

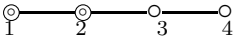
D_n 

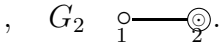
，E_6 

，E_7 

，

E_8 

，F_4 

，G_2 

.

这里，$\circ_j$意味着（α_j，α_j）$= 2$，$\circledcirc_j$意味着（α_j，α_j）$= 4$，而$\circledcirc_j$意味着（α_j，α_j）$= 6$。对于i、$j \in I$、d，（i，j）表示图 $\triangle$ 中 i与 j之间的边数。

对于对角矩阵 $\mathsf{D} = \mathrm{diag}(\mathsf{d}_i \mid i \in I)$，$\mathsf{C}$ 是可对称化的；即，

矩阵 $\mathsf{B} := \mathsf{DC} = \big((\alpha_i, \alpha_j) \big)_{i,\, j\in I}$和 $\mathsf{B} := \mathsf{CD}^{-1} = \big((\alpha_i^\vee, \alpha_j^\vee) \big)_{i,\, j\in I}$都是对称的，

其中 $\alpha_i^\vee = (\mathsf{d}_i)^{-1}\alpha_i$。

对于 $\beta \in \Phi$，我们令 $\mathsf{d}_\beta := (\beta, \beta)/2$。对于 α、$\beta \in \Phi$ 使得 $\gamma = \alpha + \beta \in \Phi$，我们有

$$p_{\beta,\alpha} = \begin{cases} 2 & \text{if } \mathsf{d}_\gamma = 3 \text{ and } \mathsf{d}_\alpha = \mathsf{d}_\beta = 1, \\ 1 & \text{if } \mathsf{d}_\gamma = 2 \text{ and } \mathsf{d}_\alpha = \mathsf{d}_\beta = 1, \\ 1 & \text{if } \mathfrak{g} \text{ is of type } G_2 \text{ and } \mathsf{d}_\alpha = \mathsf{d}_\beta = \mathsf{d}_\gamma = 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.2}$$

2.2. 凸序。我们用 W 表示与有限 Cartan 数据相关联的 Weyl 群。它由简单反射 $\{s_i \mid i \in I\}$：$s_i\lambda = \lambda - \langle h_i, \lambda\rangle\alpha_i$ $(\lambda \in \mathsf{P})$ 生成。

注意，存在唯一的元素 $w_0 \in \mathsf{W}$，其长度 $\ell(w_0)$ 最大，并且 w_0诱导 Dynkin 图自同构 $*$：$I \to I$将 $i \mapsto i^*$映至 $w_0(\alpha_i) = -\alpha_{i^*}$。令 $\underline{w}_0 := s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$为 $w_0 \in \mathsf{W}$ 的一个约化表达式，并定义

$$\beta_k^{\underline{w}_0} := s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}) \quad \text{for } k = 1, \dots, \ell. \tag{2.3}$$

于是我们有 $\Phi^+ = \{\beta_k^{\underline{w}_0} \mid 1 \leqslant k \leqslant l\}$ 以及 $|\Phi^+| = \ell(w_0)$。众所周知，由 $\beta_a^{\underline{w}_0} <_{\underline{w}_0} \beta_b^{\underline{w}_0}$对 $a < b$定义的 Φ^+上的全序 $<_{\underline{w}_0}$ 是凸的，具体来说：若$\alpha, \beta \in \Phi^+$ 满足 $\alpha <_{\underline{w}_0} \beta$和 $\alpha + \beta \in \Phi^+$，则有 $\alpha <_{\underline{w}_0} \alpha + \beta <_{\underline{w}_0} \beta$。

$\underline{w}_0$ 和 $\underline{w}_0'$ 是 w_0 的两个约化表达式。若 $\underline{w}_0'$ 可以通过对 $\underline{w}_0$ 应用换位关系 $s_is_j = s_js_i$（$d(i, j) > 1$）得到，则称二者交换等价，记为$\underline{w}_0 \sim \underline{w}_0'$。注意，这个关系 $\sim$ 是一个等价关系，而在 $\sim$ 下的一个等价类称为交换类。我们用 $[\underline{w}_0]$ 表示 $\underline{w}_0$的交换类。对于 w_0 的一个交换类 $\mathbf{c}$，我们在 Φ^+ 上定义凸偏序 $\prec_{\mathbf{c}}$ 如下：

$$\alpha \prec_{\mathbf{c}} \beta \quad \text{if and only if} \quad \alpha <_{\underline{w}_0} \beta \quad \text{for any } \underline{w}_0 \in \mathbf{c}. \tag{2.4}$$

对于 w_0 的$[\underline{w}_0]$ 和 $\alpha \in \Phi^+$，我们将 α的 $[\underline{w}_0]$-剩余类记为 $\mathrm{res}^{[\underline{w}_0]}(\alpha)$，若 $\beta_k^{w_0} = \alpha$ 满足 $\underline{w}_0 = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$，则其定义为$i_k \in I$。注意，这一定义是良定义的；即，对于任意满足 $\beta_t^{w_0'} = \alpha$ 的$\underline{w}_0' = s_{j_1} \cdots s_{j_\ell} \in [\underline{w}_0]$，都有 $j_t = i_k$。注意

$$(\alpha, \alpha) = (\alpha_i, \alpha_i) \quad \text{if } i = \mathrm{res}^{[\underline{w}_0]}(\alpha).$$

对于约化表达式 $\underline{w}_0 = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_\ell}$，已知表达式 $\underline{w}_0' := s_{i_2} \cdots s_{i_\ell} s_{i_1^*}$也是 w_0 的约化表达式。该操作有时称为组合反射函子，记作 $r_{i_1} \underline{w}_0 = \underline{w}_0'$。此外，它还在 w_0 的交换类上诱导出该操作（即，若存在约化表达式 $\underline{w}_0' = s_{j_1} s_{j_2} \cdots s_{j_\ell} \in [\underline{w}_0]$ 使得 $j_1 = i_1$，则 $r_{i_1}[\underline{w}_0] = [r_{i_1} \underline{w}_0]$ 是良定义的）。关系 $[\underline{w}] \overset{r}{\sim} [r_i \underline{w}]$（针对 $i \in I$）生成一个等价关系，称为反射等价关系 $\overset{r}{\sim}$，定义在 w_0 的交换类集合上。对于 $\underline{w}_0$ 的 w_0，交换类族 $[\![\underline{w}_0]\!] := \{[\underline{w}_0'] \mid [\underline{w}_0'] \overset{r}{\sim} [\underline{w}_0]\}$ 被称为一个 r-簇点。

2.3. 统计量。 元素 $\underline{m} = \{\underline{m}_\beta\}_{\beta \in \Phi^+}$ 中的 $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{\Phi^+}$ 称为一个 指数。在本小节中，我们给出关于指数的几个概念，这些概念是简单 R-模的 PBW 描述所需要的（例如，见下文定理 8.1 ）。

对于指数 $\underline{m}$，定义 $\mathsf{wt}(\underline{m}) := \sum_{\beta \in \Phi^+} \underline{m}_\beta \beta \in \mathsf{Q}^+$。

定义 2.2（参见 [44, 50]）。对于约化表达式 $\underline{w}_0 = s_{i_1} \ldots s_{i_\ell}$ 以及交换类 $\mathbf{c}$，我们如下定义 $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{\Phi^+}$ 上的偏序 $<_{\underline{w}_0}^{\mathbf{b}}$ 和 $\prec_{\mathbf{c}}^{\mathbf{b}}$：

(i) $<_{\underline{w}_0}^{\mathbf{b}}$ 是由 $<_{\underline{w}_0}$诱导的双字典序偏序。也就是说，当

- $\mathsf{wt}(\underline{m}) = \mathsf{wt}(\underline{m}')$。
- 存在 $\alpha \in \Phi^+$，使得对于满足 $\beta <_{\underline{w}_0} \alpha$的任意 β，均有 $\underline{m}_\alpha < \underline{m}_\alpha'$ 和 $\underline{m}_\beta = \underline{m}_\beta'$，
- 存在 $\eta \in \Phi^+$，使得 $\underline{m}_\eta < \underline{m}_\eta'$，并且对于任意满足 $\eta <_{\underline{w}_0} \zeta$ 的 ζ，都有 $\underline{m}_\zeta = \underline{m}_\zeta'$。

(ii) 对于序列 $\underline{m}$ 和 $\underline{m}'$，如果满足以下条件，我们定义 $\underline{m} \prec_{\mathbf{c}}^{\mathbf{b}} \underline{m}'$：

$$\underline{m} <_{\underline{w}_0}^{\mathbf{b}} \underline{m}' \quad \text{for all } \underline{w}_0 \in \mathbf{c}.$$

如果指数 $\underline{m} = \{\underline{m}_\beta\}_{\beta \in \Phi^+} \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{\Phi^+}$ 关于偏序 $\prec_{\mathbf{c}}^{\mathbf{b}}$ 是极小的，则称其为 $\mathbf{c}$-简单指数。对于给定的 $\mathbf{c}$-简单指数 $\underline{s} = \{\underline{s}_\beta\}_{\beta \in \Phi^+} \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{\Phi^+}$，我们称 $\prec_{\mathbf{c}}^{\mathbf{b}}$ 下 $\underline{s}$ 的覆盖关系 [1] 为 $\underline{s}$ 的 $\mathbf{c}$-极小指数。指数 $\underline{m}$ 的 $\mathbf{c}$-次数记为 $\deg_{\mathbf{c}}(\underline{m})$，其定义为满足以下条件的最大整数 $k \geqslant 0$：

$$\underline{m}^{(0)} \prec_{\mathbf{c}}^{\mathbf{b}} \underline{m}^{(1)} \prec_{\mathbf{c}}^{\mathbf{b}} \cdots \prec_{\mathbf{c}}^{\mathbf{b}} \underline{m}^{(k-1)} \prec_{\mathbf{c}}^{\mathbf{b}} \underline{m}^{(k)} = \underline{m}. \tag{2.5}$$

α, β的一对 $\alpha, \beta \in \Phi^+$ 称为 $\mathbf{c}$-对，如果 $\beta \not\preccurlyeq_{\mathbf{c}} \alpha$（即，对于某个 $\underline{w}_0 \in \mathbf{c}$，有 $\alpha <_{[\underline{w}_0]} \beta$）。我们将 $\mathbf{c}$-对 $\underline{p} := \alpha, \beta$视为 $\underline{p}_\alpha = \underline{p}_\beta = 1$ 和 $\underline{p}_\gamma = 0$ 的指数，适用于 $\gamma \neq \alpha, \beta$。当存在唯一满足 $\underline{s} \preccurlyeq_{\mathbf{c}}^{\mathbf{b}} \underline{p}$的 $\mathbf{c}$-简单指数 $\underline{s}$ 时，我们称 $\underline{s}$ 为 $\underline{p}$的 $\mathbf{c}$-头，并记作 $\mathrm{hd}_{\mathbf{c}}(\underline{p})$[2]。

[1]回顾一下，在偏序集 x 中，元素 $y \in P$称为元素 $x \prec y$ 的覆盖关系，其中偏序为 $\prec$，如果 $x \prec y$ 满足 $y' \in P$，并且不存在 $x \prec y' \prec y$使得 [2]。 [50], 在 [50], 中，我们使用了 根底 而不是头部，这是因为在下文的定理 8.1 中采用了不同的约定

我们将正根 $\alpha \in \Phi^+$ 视为指数 $\underline{m}$，通过$\underline{m}_\beta = \delta_{\beta,\ \alpha}$。

注 2.3。 dist 的定义$^{[\widetilde{w}_0]}(\underline{p})$ 对于 c-对 $\underline{p}$ 中的 [50] 不同于 $\deg^{[\widetilde{w}_0]}(\underline{p})$，后者在 (2.5) 中定义如下：

$$\underline{m}^{(0)} \prec^{\mathtt{b}}_{\mathbf{c}} \underline{p}^{(1)} \prec^{\mathtt{b}}_{\mathbf{c}} \cdots \prec^{\mathtt{b}}_{\mathbf{c}} \underline{p}^{(k-1)} \prec^{\mathtt{b}}_{\mathbf{c}} \underline{p}^{(k)} = \underline{p}, \tag{2.6}$$

对于 c-对 $\underline{p}^{(i)}$ 和 $\underline{m}^{(0)}$ 是 c-单的。然而，对于单边型 Dynkin 箭图 Q，对于每个 c-对 $\underline{p}$，统计量 $\deg^{Q}(\underline{p})$ 仍然与 [50] 中的统计量 $\mathrm{dist}^{Q}(\underline{p})$ 相同，只要 Q不是 E_7 类型且 E_8（关于 Dynkin 箭图，见下一小节）。

2.4。 Dynkin 箭图。 一个 Dynkin 箭图 Q，其 $\triangle$ 是一个有向图，其底层图为 $\triangle$（见下文例 2.8）。对于每个 Q的 Dynkin 箭图，我们可以关联一个函数ξ: $\triangle_0 \to \mathbb{Z}$，称为 高度函数，它是 Q 并满足：

$$\xi_i = \xi_j + 1 \qquad \text{if } i \to j \text{ in } Q.$$

反之，对于 Dynkin 图 $\triangle$ 和满足 $|\xi_i - \xi_j| = 1$（$i,\ j \in I$）且 $d(i,\ j) = 1$的函数 ξ: $\triangle_0 \to \mathbb{Z}$，我们可以以规范的方式关联一个 Dynkin 箭图 Q。因此，我们可以将 Dynkin 箭图 Q 与一对（$\triangle$, ξ）对应起来。注意，由于 $\triangle$ 是连通的， Q 的高度函数相差整数。

对于 Dynkin 箭图 $Q =$（$\triangle$, ξ），由 $(\xi^*)_i = \xi_{i^*}$ 给出的函数 ξ^*： $\triangle_0 \to \mathbb{Z}$ 也是一个高度函数。因此我们记作 $Q^* =$（$\triangle$, ξ^*）。

对于 Dynkin 箭图 Q，如果对所有满足 $d(i,\ j) = 1$的 $j \in \triangle_0$ 都有 $\xi_i > \xi_j$，则称 $i \in \triangle_0$ 为 Q 的一个源点。对于 Dynkin 箭图 $Q =$（$\triangle$, ξ）及其源点 i，我们将 Dynkin 箭图（$\triangle$, $s_i\xi$）记为 s_iQ，其中 $s_i\xi$ 是由下式定义的高度函数：

$$(s_i\xi)_j = \xi_j - 2\delta_{i,j}. \tag{2.7}$$

定义 2.4. 设 $Q = (\triangle, \xi)$ 是一个 Dynkin 箭图。

（i）若一个元素的约化表达式 $\underline{w} = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$ 属于 $\mathrm{W}_\triangle$，并适配于 Q（或称为 Q-适配），则称其为

$$i_k \text{ is a source of } s_{i_{k-1}} s_{i_{k-2}} \dots s_{i_1} Q \text{ for all } 1 \leqslant k \leqslant l.$$

（ii）$\mathrm{W}_\triangle$ 的 Coxeter 元 τ 是所有简单反射的乘积；也就是说，存在 τ 的一个约化表达式 $s_{i_1} \cdots s_{i_{|I|}}$，使得 $\{i_1, \dots, i_{|I|}\} = I$。（iii）我们用 h 表示 $\triangle$ 的 Coxeter 数，它等于 Coxeter 元的阶。

定理2.5（[53, 35]）。对于每个 Dynkin 箭图 $Q = (\triangle, \xi)$，都存在一个 Q-适配的约化表达式 $\underline{w}_0$，它属于 $w_0 \in \mathrm{W}_\triangle$；所有 Q-适配的约化表达式构成 w_0 的一个交换类。

我们用 $[Q]$ 表示由所有 Q-适配的约化表达式组成的 w_0 的交换类。已知，对于固定的 Dynkin 图 $\triangle$，交换类集合 $\{[Q] \mid Q = (\triangle, \xi)\}$ 构成一个 r-簇点，记为 $[\![\triangle]\!]$。

众所周知，Coxeter 元 τ 的所有约化表达式构成一个单一的交换类，并且它们适配于某个 Dynkin 箭图 Q。反之，对于每个 Dynkin 箭图 Q，都存在唯一的 Coxeter 元 τ_Q，其所有约化表达式

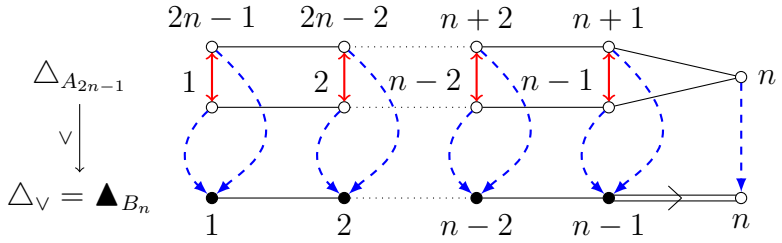
均适配于 Q。所有 Coxeter 元在 W 中共轭，且它们的共同阶称为 Coxeter 数，记为 h。

若双射 σ 从 $\triangle_0$ 到自身满足：对所有 i、$j \in \triangle_0$，均有 $\langle h_i, \alpha_j\rangle = \langle h_{\sigma(i)}, \alpha_{\sigma(j)}\rangle$，则称其为 Dynkin 图自同构。在本文中，我们假设 Dynkin 图自同构 σ 满足以下条件：

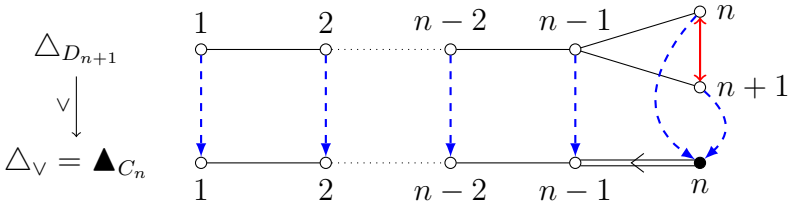
$$\text{there is no } i \in \triangle_0 \text{ such that } d(i,\sigma(i)) = 1. \tag{2.8}$$

对于类型为 A_{2n-1} 的 Dynkin 图，D_n 以及 E_6，存在唯一的非恒等 Dynkin 图自同构 $\vee$，其阶为 2（但 D_4-类型除外；在该类型中存在三个阶为 2 的自同构，以及两个 $\tilde{\vee}$ 和 $\tilde{\vee}^2$ 阶为 3 的自同构），并满足条件（2.8）。自同构 $\vee$ 和 $\tilde{\vee}$ 可表示如下：

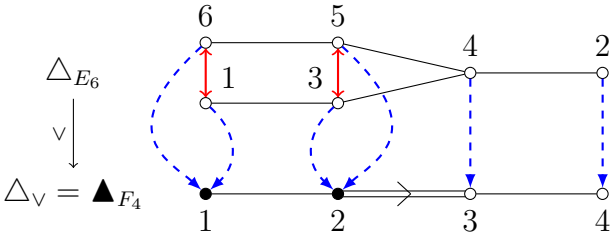
(2.9a)



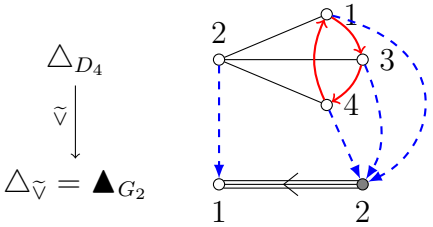
(2.9b)



(2.9c)



(2.9d)



定义 2.6。 设 $\triangle$ 为一个单边型 Dynkin 图，且 σ 为满足（2.8）的 Dynkin 图自同构。

(i) 设 $\triangle_\sigma$ 是 $\triangle$ 在 σ 作用下的折叠。也就是说，$\triangle_\sigma$ 的顶点集合 $(\triangle_\sigma)_0$ 是 σ-轨道的集合。设 π: $\triangle_0 \to (\triangle_\sigma)_0$ 为投影。$\triangle_\sigma$ 的边由以下 Cartan 矩阵给出

Cartan 矩阵

$$\mathsf{c}^{\triangle_\sigma}_{\pi(i),\pi(j)} = \sum_{j' \in \pi^{-1}\pi(j)} \mathsf{c}^{\triangle}_{i,j'}.$$

因此 $\mathsf{d}_{\pi(i)} = |\pi^{-1}\pi(i)|$。

（ii）对于与 $\triangle$ 相关联的单边型单李代数 $\mathfrak{g}$，记 $\mathfrak{g}_\sigma$ 为其 Dynkin 图为 $\triangle_\sigma$的单李代数。

注意，Coxeter 数满足以下关系：

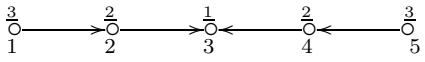
$$\mathsf{h}^{\triangle_\sigma} = \mathsf{h}^{\triangle}. \tag{2.10}$$

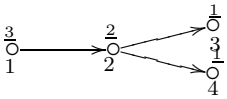
定义 2.7. 设 $Q = (\triangle, \xi)$ 是一个 Dynkin 箭图，其中 $\triangle$ 和 σ 是 $\triangle$ 的 Dynkin 图自同构。若 Q 是 σ-固定的，则称其为

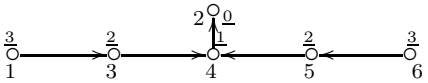
$$\xi_{\sigma(i)} = \xi_i \qquad \text{for all } i \in \triangle_0.$$

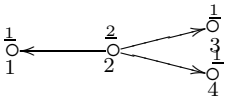
对于 σ-固定的 Dynkin 箭图 Q，有时我们用 ${}^\sigma\xi$ 代替 ξ 表示其高度函数，以示强调。

例 2.8. 以下是若干个 σ-不变的 Dynkin 箭图 Q。

(2.11a)  for $Q = (\triangle_{A_5}, {}^\vee\xi)$.

(2.11b)  for $Q = (\triangle_{D_4}, {}^\vee\xi)$.

(2.11c)  对于 $Q = (\triangle_{E_6}, {}^\vee\xi)$。

(2.11d)  for $Q = (\triangle_{D_4}, {}^{\widetilde{\vee}}\xi)$.

Here

(i) 下划线整数 $*$ 是每个顶点 $i \in \triangle_0$ 处的值 ξ_i；(ii) 箭头 $\overset{i}{\circ}\!\!\longrightarrow\!\!\overset{j}{\circ}$ 表示 $\xi_i > \xi_j$ 与 $d(i,j) = 1$。

下面的引理是显然的。

引理 2.9. 设 $\triangle$ 是一个 Dynkin 图，且 σ 是 $\triangle$. 的一个 Dynkin 图自同构。那么，σ-不变的 Dynkin 箭图（作为有向图）的数量为 2^r，其中 r 是 $\triangle_\sigma$ 的边数。特别地，$\vee$-不变的 Dynkin 箭图数量为

$$\begin{cases} 2^{n-1} & \textit{if Dynkin is of type } A_{2n-1} \textit{ or } D_{n+1}, \\ 8 & \textit{if Dynkin is of type } E_6. \end{cases}$$

$\widetilde{\vee}$固定的 Dynkin 箭图数量为 2。

3. t-QUANTIZED CARTAN MATRIX

本节简要回顾 Frenkel-Reshetikhin 在 [8], 中引入的 (q,t)-Cartan 矩阵 $\mathsf{C}(q,t)$, 以及文献 [17, 35] 中关于 $\mathsf{C}(1,t)^{-1}$ 与 Dynkin 箭图之间关系的结果。然后我们将看到, 类型为 $\triangle_\sigma$ 的 $\mathsf{C}(1,t)\mathsf{D}^{-1}$ 的逆矩阵可以通过 $\sigma \neq \mathrm{id}$ 的折叠, 由类型为 $\triangle$ 的 $\mathsf{C}(1,t)$ 的逆矩阵得到。

对于不定元 x 和 $k \in \mathbb{Z}$, 我们设为

$$[k]_x := \frac{x^k - x^{-k}}{x - x^{-1}}.$$

对于不定元 q 和 i, 我们设 $q_i := q^{\mathsf{d}_i}$。例如, 当 $\mathfrak{g}$ 属于 G_2 类型时, 我们有$q_2 = q^3$。

对于给定的有限 Cartan 数据, 我们将 C 的邻接矩阵 $\mathcal{I} =(\mathcal{I}_{i,j})_{i,j\in I}$ 定义为

$$\mathcal{I}_{i,j} = 2\delta_{i,j} - \mathsf{c}_{i,j} \qquad \text{for } i,j \in I. \tag{3.1}$$

在[8], 中 引入 Cartan 矩阵 $\mathsf{C}(q,t)$ 的 (q,t)-变形 $=(\mathsf{c}_{i,j}(q,t))_{i,j\in I}$:

$$\mathsf{c}_{i,j}(q,t) := (q_i t^{-1} + q_i^{-1} t)\delta_{i,j} - [\mathcal{I}_{i,j}]_q.$$

$\mathsf{C}(q,t)$ 在 $t = 1$ 处的特化记为 $\mathsf{C}_\mathsf{q}(q)$: $=\mathsf{C}(q,1)$, 通常称为量子 Cartan 矩阵。

定义 3.1. 对于每个有限 Cartan 数据, 置

$$\mathsf{C}_\mathsf{t}(t) := \mathsf{C}(1,t).$$

并称其为 t-量子化 Cartan 矩阵。我们还置

$$\underline{\mathsf{B}}(t) := \mathsf{C}_\mathsf{t}(t)\mathsf{D}^{-1} = (\underline{\mathsf{B}}_{i,j}(t))_{i,j\in I} \quad \text{and} \quad \overline{\mathsf{B}}(t) := \mathsf{D}\mathsf{C}_\mathsf{t}(t) = (\overline{\mathsf{B}}_{i,j}(t))_{i,j\in I}.$$

因此有

$$\underline{\mathsf{B}}_{i,j}(t) = \begin{cases} \mathsf{d}_i^{-1}(t + t^{-1}) & \text{if } i = j, \\ (\alpha_i^\vee, \alpha_j^\vee) & \text{if } i \neq j, \end{cases}$$

其中 $\alpha_i^\vee$:=$\mathsf{d}_i^{-1}\alpha_i$ 是余根。

例3.2. 注意, 对于单边类型, 我们有 $\mathsf{B}(t) = \mathsf{C}_\mathsf{t}(t)$。以下是非单边类型的 $\mathsf{B}(t)$:

$$\underline{\mathsf{B}}(t)_{B_n} = \begin{pmatrix} \frac{t+t^{-1}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{t+t^{-1}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & -\frac{1}{2} & \frac{t+t^{-1}}{2} & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & t+t^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathsf{B}}(t)_{C_n} = \begin{pmatrix} t+t^{-1} & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & t+t^{-1} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & t+t^{-1} & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & \frac{t+t^{-1}}{2} \end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathsf{B}}(t)_{F_4} = \begin{pmatrix} \frac{t+t^{-1}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{t+t^{-1}}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & t+t^{-1} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & t+t^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathsf{B}}(t)_{G_2} = \begin{pmatrix} t+t^{-1} & -1 \\ -1 & \frac{t+t^{-1}}{3} \end{pmatrix}.$$

注意，$\underline{\mathsf{B}}(t)|_{t=1} = \underline{\mathsf{B}} \in \mathrm{GL}_I(\mathbb{Q})$。我们将 $\mathsf{B}(t)$ 视为 $\mathrm{GL}_I(\mathbb{Q}(t))$ 的一个元素，并将其逆记为 $\widetilde{\mathsf{B}}(t) := \big(\underline{\mathsf{B}}(t)\big)^{-1} = (\widetilde{\mathsf{B}}_{i,j}(t))_{i,j\in I}$。令

$$\widetilde{\underline{\mathsf{B}}}_{i,j}(t) = \sum_{u\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathsf{b}}_{i,j}(u)t^u$$

$\widetilde{\underline{\mathsf{B}}}_{i,j}(t)$ 是 $\mathsf{B}_{i,j}(t)$ 在 $t=0$ 处的洛朗展开。注意，对于所有 i、$j \in I$，$\mathsf{B}_{i,j}(t) = \mathsf{B}_{j,i}(t)$。

回顾一下，对于任意有限型的每个 Dynkin 箭图 $Q = (\triangle, \xi)$，存在唯一的 Coxeter 元 $\tau_Q \in W_\triangle$，使得其所有约化表达式都适配于 Q。

定义 3.3 ([17, 14, 35])。对于 Dynkin 箭图 Q 以及 i、$j \in I$，我们定义函数 $\eta_{i,j}^Q : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$，如下：

$$\eta_{i,j}^Q(u) := \begin{cases} (\varpi_i, \tau_Q^{(u+\xi_j-\xi_i-1)/2}(\gamma_j^Q)) & \text{if } u+\xi_j-\xi_i-1 \in 2\mathbb{Z}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这里 $\gamma_j^Q := (1-\tau_Q)\varpi_j \in \Phi^+$。

引理 3.4（[17, 35]）。设 Q' 是与 Q 同型的另一个 Dynkin 箭图。则有

$$\eta_{i,j}^Q = \eta_{i,j}^{Q'} \quad \textit{and hence } \eta_{i,j}^{\triangle} \textit{ is well-defined.}$$

定理 3.5（[17, 35]）。对于每个 i、$j \in I$ 和 $u \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，我们有

$$\widetilde{\mathsf{b}}_{i,j}(u) = \eta_{i,j}(u).$$

换言之，我们可以通过任意 Dynkin 箭图的 Γ_Q，如下计算 $\mathsf{B}(t)$ Q：

$$\widetilde{\mathsf{b}}_{i,j}(u) = \begin{cases} (\varpi_i, \tau_Q^{(u+\xi_j-\xi_i-1)/2}(\gamma_j^Q)) & \textit{if } u+\xi_j-\xi_i-1 \in 2\mathbb{Z} \textit{ and } u \geqslant 0, \\ 0 & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

推论 3.6（[17, 14, 13, 35]）。系数 $\{\mathsf{b}_{i,j}(u) \mid i、j \in I、u \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$ 具有以下性质：

(1) $\widetilde{\mathsf{b}}_{i,j}(u) = 0$ 对于 $u \leqslant 0$，以及 $\widetilde{\mathsf{b}}_{i,j}(1) = \mathsf{d}_i\,\delta(i=j)$。（2）$\widetilde{\mathsf{b}}_{i,j}(u-1) + \widetilde{\mathsf{b}}_{i,j}(u+1) = \sum_{k;\ d(k,j)=1} -\langle h_k, \alpha_j\rangle \widetilde{\mathsf{b}}_{i,k}(u)$ 对于 $u \geqslant 1$。（3）$\widetilde{\mathsf{b}}_{i,j}(u+\mathsf{h}) = -\mathsf{b}_{i,j^*}(u)$，以及 $\widetilde{\mathsf{b}}_{i,j}(u+2\mathsf{h}) = \mathsf{b}_{i,j}(u)$ 对于 $u \geqslant 0$。（4）$\widetilde{\mathsf{b}}_{i,j}(\mathsf{h}-u) = \mathsf{b}_{i,j^*}(u)$ 对于 $0 \leqslant u \leqslant \mathsf{h}$，以及 $\mathsf{b}_{i,j}(2\mathsf{h}-u) = -\mathsf{b}_{i,j}(u)$ 对于 $0 \leqslant u \leqslant 2\mathsf{h}$。（5）$\widetilde{\mathsf{b}}_{i,j}(u) \geqslant 0$ 对于 $0 \leqslant u \leqslant \mathsf{h}$，以及 $\mathsf{b}_{i,j}(u) \leqslant 0$ 对于 $\mathsf{h} \leqslant u \leqslant 2\mathsf{h}$。

根据推论 3.6 (3)，只需计算 $\mathbf{b}_{i,j}(u)$ 对于 $1 \leqslant u \leqslant \mathsf{h}$，即可得知任意 $i, j \in \triangle_0$ 的 $\mathbf{B}_{i,j}(t)$。因此我们设

$$\widetilde{\mathfrak{d}}_{i,j}(t) := \widetilde{\underline{\mathbf{B}}}_{i,j}(t) + t^{\mathsf{h}} \widetilde{\underline{\mathbf{B}}}_{i,j^*}(t) = \sum_{u=1}^{\mathsf{h}} \widetilde{\mathsf{b}}_{i,j}(u) t^u$$

and

$$\widetilde{\mathfrak{d}}_{i,j}[k] := \widetilde{\mathsf{b}}_{i,j}(k-1) \quad \text{for } 0 \leqslant k \leqslant \mathsf{h}.$$

于是，我们有

$$\widetilde{\underline{\mathbf{B}}}_{i,j}(t) = \frac{\widetilde{\mathfrak{d}}_{i,j}(t) - t^{2\mathsf{h}}\, \widetilde{\mathfrak{d}}_{i,j}(t^{-1})}{1 - t^{2\mathsf{h}}}.$$

定理 3.7。 设 σ 是一个 Dynkin 图自同构，$\triangle_\sigma$ 是 $\triangle$ 在 σ下的折叠，且$\pi\colon (\triangle)_0 \to (\triangle_\sigma)_0$ 为投影(见定义 2.6)。于是得到以下关系：

$$\widetilde{\mathfrak{d}}^{\triangle_\sigma}_{i,j}(t) = \sum_{\substack{\widetilde{i} \in \pi^{-1}(i), \\ \widetilde{j} \in \pi^{-1}(j)}} \widetilde{\mathfrak{d}}^{\triangle}_{\widetilde{i},\widetilde{j}}(t) \quad \textit{for any } i, j \in (\triangle_\sigma)_0.$$

证明。首先说明 $\mathbf{B}$ 关于 $\triangle_\sigma$ 和 $\triangle$ 的关系：

$$(\underline{\mathbf{B}}^{\triangle_\sigma})_{i,\pi(\widetilde{j})} = \mathsf{d}_i^{-1} \sum_{\widetilde{i} \in \pi^{-1}(i)} (\underline{\mathbf{B}}^{\triangle})_{\widetilde{i},\widetilde{j}} \quad \text{for any } i \in (\triangle_\sigma)_0 \text{ and } \widetilde{j} \in \triangle_0.$$

现在令

$$f^{\triangle}_{\widetilde{i},\widetilde{j}} = \left((\underline{\mathbf{B}}^{\triangle})^{-1}\right)_{\widetilde{i},\widetilde{j}} = (1+t^{\mathsf{h}})^{-1} \widetilde{\mathfrak{d}}^{\triangle}_{i,j}(t),$$

$$f^{\triangle_\sigma}_{i,j} = \sum_{\widetilde{i} \in \pi^{-1}(i),\, \widetilde{j} \in \pi^{-1}(j)} f^{\triangle}_{\widetilde{i},\widetilde{j}}$$

对 i、$j \in \triangle_0$ 和 i、$j \in (\triangle_\sigma)_0$。

为了看出该定理，只需证明

$$\sum_{j \in (\triangle_\sigma)_0} (\underline{\mathbf{B}}^{\triangle_\sigma})_{i,j} f^{\triangle_\sigma}_{j,k} = \delta_{i,k} \quad \text{for any } i, k \in (\triangle_\sigma)_0. \tag{3.2}$$

我们有

$$\delta_{\widetilde{i},\widetilde{k}} = \sum_{\widetilde{j} \in (\triangle)_0} (\underline{\mathbf{B}}^{\triangle})_{\widetilde{i},\widetilde{j}} f^{\triangle}_{\widetilde{j},\widetilde{k}}$$

对于任意 i、$k \in \triangle_0$。因此，对于 $i \in (\triangle_\sigma)_0$ 和 $k \in \triangle_0$，我们有

$$\begin{aligned} \delta_{i,\pi(\widetilde{k})} &= \sum_{\widetilde{i} \in \pi^{-1}(i)} \delta_{\widetilde{i},\widetilde{k}} = \sum_{\widetilde{i} \in \pi^{-1}(i),\, \widetilde{j} \in (\triangle)_0} (\underline{\mathbf{B}}^{\triangle})_{\widetilde{i},\widetilde{j}} f^{\triangle}_{\widetilde{j},\widetilde{k}} \\ &= \sum_{\widetilde{j} \in (\triangle)_0} \mathsf{d}_i (\underline{\mathbf{B}}^{\triangle_\sigma})_{i,\pi(\widetilde{j})} f^{\triangle}_{\widetilde{j},\widetilde{k}}. \end{aligned}$$

因此，对于任意 i、$k \in (\triangle_\sigma)_0$，我们有

$$\begin{aligned}\mathsf{d}_k\delta_{i,k} &= \sum_{\widetilde{k}\in\pi^{-1}(k)} \delta_{i,\pi(\widetilde{k})} = \sum_{\widetilde{k}\in\pi^{-1}(\widetilde{k}),\ \widetilde{j}\in(\triangle)_0} \mathsf{d}_i(\underline{\mathsf{B}}^{\triangle_\sigma})_{i,\pi(\widetilde{j})} f^{\triangle}_{\widetilde{j},\widetilde{k}} \\ &= \sum_{\widetilde{k}\in\pi^{-1}(\widetilde{k}),\ j\in(\triangle_\sigma)_0,\ \widetilde{j}\in\pi^{-1}(j)} \mathsf{d}_i(\underline{\mathsf{B}}^{\triangle_\sigma})_{i,j} f^{\triangle}_{\widetilde{j},\widetilde{k}} \\ &= \sum_{j\in(\triangle_\sigma)_0} \mathsf{d}_i(\underline{\mathsf{B}}^{\triangle_\sigma})_{i,j} f^{\triangle_\sigma}_{j,k}.\end{aligned}$$

因此我们得到（3.2）。 □

~多项式 $\mathfrak{d}_{i,\ j}(t)$ 的显式计算如下：

~ ~定理 3.8（[17, 11, 51, 35]）。注意，对于 $i, j \in I$，$\mathfrak{d}_{i,\ j}(t) = \mathfrak{d}_{j,\ i}(t)$。

~(1) 对于 $\triangle$ 类型 A_n，以及 $i, j \in I = \{1, \dots, n\}$, $\mathfrak{d}_{i,\ j}(t)$ 如下给出：

$$\widetilde{\mathfrak{d}}_{i,j}(t) = \sum_{s=1}^{\min(i,j,n+1-i,n+1-j)} t^{|i-j|+2s-1}. \tag{3.3}$$

~(2) 对于 $\triangle$ 类型 D_{n+1}，以及 $i, j \in I = \{1, \dots, n, n+1\}$, $\mathfrak{d}_{i,\ j}(t)$ 如下给出：

$$\widetilde{\mathfrak{d}}_{i,j}(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=1}^{\min(i,j)} \left(t^{|i-j|+2s-1} + \delta(\max(i,j) < n)\, t^{2n-i-j+2s-1}\right) & \text{if } \min(i,j) < n, \\ \displaystyle\sum_{s=1}^{\lfloor (n+\delta_{i,j})/2 \rfloor} t^{4s-1-2\delta(i,j)} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.4}$$

~(3) 对于 $\triangle$ 类型 B_n 或 C_n，以及 i、$j \in I = \{1, \dots, n\}$、$\mathfrak{d}_{i,\ j}(t)$ 如下给出：

$$\widetilde{\mathfrak{d}}_{i,j}(t) = \max(\mathsf{d}_i, \mathsf{d}_j) \sum_{s=1}^{\min(i,j)} \left(t^{|i-j|+2s-1} + \delta(\max(i,j) < n)\, t^{2n-i-j+2s-1}\right). \tag{3.5}$$

(~4) 对于 $\triangle$ 类型 E_6 和 $i \leqslant j \in I = \{1, \dots, 6\}$，$\mathfrak{d}_{i,\ j}(t)$ 如下给出 *s:*

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathfrak{d}}_{1,1}(t) = t + t^7, && \widetilde{\mathfrak{d}}_{1,2}(t) = t^4 + t^8, \\
&\widetilde{\mathfrak{d}}_{1,3}(t) = t^2 + t^6 + t^8, && \widetilde{\mathfrak{d}}_{1,4}(t) = t^3 + t^5 + t^7 + t^9, \\
&\widetilde{\mathfrak{d}}_{1,5}(t) = t^4 + t^6 + t^{10}, && \widetilde{\mathfrak{d}}_{1,6}(t) = t^5 + t^{11}, \\
&\widetilde{\mathfrak{d}}_{2,2}(t) = t^1 + t^5 + t^7 + t^{11}, && \widetilde{\mathfrak{d}}_{2,3}(t) = t^3 + t^5 + t^7 + t^9, \\
&\widetilde{\mathfrak{d}}_{2,4}(t) = t^2 + t^4 + 2t^6 + t^8 + t^{10}, && \widetilde{\mathfrak{d}}_{3,3}(t) = t^1 + t^3 + t^5 + 2t^7 + t^9, \\
&\widetilde{\mathfrak{d}}_{3,4}(t) = t^2 + 2t^4 + 2t^6 + 2t^8 + t^{10}, && \widetilde{\mathfrak{d}}_{3,5}(t) = t^3 + 2t^5 + t^7 + t^9 + t^{11}, \\
&\widetilde{\mathfrak{d}}_{4,4}(t) = t^1 + 2t^3 + 3t^5 + 3t^7 + 2t^9 + t^{11}, && \widetilde{\mathfrak{d}}_{i,j}(t) = t^{\mathsf{h}}\widetilde{\mathfrak{d}}_{i,j^*}(t^{-1}) = \widetilde{\mathfrak{d}}_{j,i}(t) = t^{\mathsf{h}}\widetilde{\mathfrak{d}}_{j,i^*}(t^{-1}).
\end{aligned}$$

(5) 关于 E_7 和 E_8，参见附录A。

(6) 对于 $\triangle$ 类型为 F_4 和 $i \leqslant j \in I = \{1,2,3,4\}$的情形，$\mathfrak{d}_{i,j}(t)$的定义如下：

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathfrak{d}}_{1,1}(t) = 2(t+t^5+t^7+t^{11}), && \widetilde{\mathfrak{d}}_{1,2}(t) = 2(t^2+t^4+2t^6+t^8+t^{10}),\\
&\widetilde{\mathfrak{d}}_{1,3}(t) = 2(t^3+t^5+t^7+t^9), && \widetilde{\mathfrak{d}}_{1,4}(t) = 2(t^4+t^8),\\
&\widetilde{\mathfrak{d}}_{2,2}(t) = 2(t+2t^3+3t^5+3t^7+2t^9+t^{11}), && \widetilde{\mathfrak{d}}_{2,3}(t) = 2(t^2+2t^4+2t^6+2t^8+t^{10}),\\
&\widetilde{\mathfrak{d}}_{2,4}(t) = 2(t^3+t^5+t^7+t^9), && \widetilde{\mathfrak{d}}_{3,3}(t) = t+2t^3+3t^5+3t^7+2t^9+t^{11},\\
&\widetilde{\mathfrak{d}}_{3,4}(t) = t^2+t^4+2t^6+t^8+t^{10}, && \widetilde{\mathfrak{d}}_{4,4}(t) = t+t^5+t^7+t^{11}.
\end{aligned}$$

(7) 对于 $\triangle$ 类型的 G_2 和 $i \leqslant j \in I = \{1,2\}$，$\mathfrak{d}_{i,j}(t)$如下给出：

$$\widetilde{\mathfrak{d}}_{1,1}(t) = t+2t^3+t^5, \qquad \widetilde{\mathfrak{d}}_{1,2}(t) = 3(t^2+t^4), \qquad \widetilde{\mathfrak{d}}_{2,2}(t) = 3\widetilde{\mathfrak{d}}_{1,1}(t).$$

4. Auslander-Reiten (AR) quivers

本节首先回顾与每个 Dynkin 箭图 Q相关的（组合）Auslander-Reiten 箭图 Γ_Q。然后回顾它们的组合性质，包括用正根集合对其进行标记的简单算法，以及经典 A_n 和D_n 情形中的统计量。下一节中，我们将研究与 Dynkin 图折叠 σ相关的 AR 箭图之间的关系。

4.1. 箭图。 对于每个约化表达式 $\underline{w}_0 = s_{i_1}\cdots s_{i_\ell}$ $w_0 \in \mathsf{W}$，我们如下关联一个箭图$\Upsilon_{\underline{w}_0}$ [52]:

(i) 顶点集合为 $\Phi^+ = \{\beta_k^{\underline{w}_0} \mid 1 \leqslant k \leqslant \ell\}$。(ii) 当且仅当 $1 \leqslant l < k \leqslant \ell$ 且不存在 j 使得 $l < j < k$ 和 $i_j \in \{i_k, i_l\}$ 时，从 $\beta_k^{\underline{w}_0}$ 到 $\beta_l^{\underline{w}_0}$ 分配 $(-\langle h_{i_k}, \alpha_{i_l}\rangle)$ 条箭头。

如果从 β_l 到 β_k 存在一条箭头，则有 $k < l$，我们称 Φ^+ 的全序 $(\beta_1 < \cdots < \beta_\ell)$ 是 $\Upsilon_{\underline{w}_0}$ 的相容读法。

定理 4.1 ([52, 35])。设 $\mathbf{c}$ 是一个交换类。

(i) w_0 的两个约化表达式 $\underline{w}_0$ 和 $\underline{w}_0'$ 交换等价，当且仅当 $\Upsilon_{\underline{w}_0} = \Upsilon_{\underline{w}_0'}$ 作为箭图。因此，$\Upsilon_{\mathbf{c}}$ 是良定义的。(ii) 对于 α、$\beta \in \Phi^+$、$\alpha \preccurlyeq_{\mathbf{c}} \beta$，当且仅当在 $\Upsilon_{\mathbf{c}}$ 中存在一条从 β 到 α 的路径。换言之，$\Upsilon_{\mathbf{c}}$（忽略箭头数量）是偏序 $\preccurlyeq_{\mathbf{c}}$ 的 Hasse 箭图。(iii) 如果关于 $\preccurlyeq_{\mathbf{c}}$，$\alpha$、$\beta \in \Phi^+$ 不可比较，则有 $(\alpha,\beta) = 0$。(iv) 如果 $\Phi^+ = \{\beta_1 < \cdots < \beta_\ell\}$ 是 $\Upsilon_{\mathbf{c}}$ 的相容读法，则 $\mathbf{c}$ 中存在唯一的约化表达式 $\underline{w}_0 = s_{i_1}\cdots s_{i_\ell}$，使得对于任意 k，都有 $\beta_k = \beta_k^{\underline{w}_0}$。

定义 4.2 ([35])。对于 Dynkin 箭图 $Q = (\triangle, \xi)$，与 Q 相关联的重复箭图 $\triangle = (\triangle_0, \triangle_1)$ 定义如下：

$$\begin{aligned}
&\widehat{\triangle}_0 := \{(i,p) \in \triangle_0 \times \mathbb{Z} \,\big|\, p - \xi_i \in 2\mathbb{Z}\},\\
&\widehat{\triangle}_1 := \{(i,p) \xrightarrow{-\langle h_i, \alpha_j\rangle} (j, p+1)) \mid (i,p), (j,p+1) \in \widehat{\triangle}_0,\ d(i,j) = 1\}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

这里 $(i,p) \xrightarrow{-\langle h_i\, \alpha_j\rangle} (j,p+1)$ 表示我们从 (i,p) 到 $\widehat{\ }$ $(j,p+1)$ 指定 $(-\langle h_i,\alpha_j\rangle)$ 条箭头。注意，$\triangle$ 的定义仅取决于Q的高度函数的奇偶性。

对于任意 Dynkin 箭图 $Q=(\triangle,\ \xi$，我们有一个双射 $\phi_Q\colon\ \widehat{\triangle}_0 \xrightarrow{\sim} \widehat{\Phi}^+_\triangle\colon =\Phi^+_\triangle\times\mathbb{Z}$ 如下所述（见 [17, 35]）：令 $\gamma_i^Q\colon =(1-\tau_Q)\varpi_i \in \Phi^+_\triangle$ 并且

$$\begin{aligned}
&\text{(i) } \phi_Q(i,\xi_i)=(\gamma_i^Q,0),\\
&\text{(ii) if } \phi_Q(i,p)=(\beta,u), \text{ then we define}\\
&\quad\text{(a) } \phi_Q(i,p\mp 2)=(\tau_Q^{\pm 1}(\beta),u) \text{ if } \tau_Q^{\pm1}(\beta)\in\Phi^+_\triangle,\\
&\quad\text{(b) } \phi_Q(i,p\mp 2)=(-\tau_Q^{\pm 1}(\beta),u\pm 1) \text{ if } \tau_Q^{\pm1}(\beta)\in\Phi^-_\triangle.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$\widehat{\ }$我们称带有 $\phi_Q(i,p)=(\beta,u)$ 的 (i,p) 为 (β,u) 在 $\triangle$ 中的 Q-坐标 . γ_i^Q 组合描述如下 [17, §2.2]:

$$\gamma_i^Q=\sum_{j\in B^Q(i)}\alpha_j, \tag{4.3}$$

其中，$B^Q(i)$ 表示满足以下条件的顶点集合：j 存在一条路径从 j 到 i，且该路径位于 Q 中。

对于每个 Dynkin 箭图 $Q=(\triangle,\xi)$，我们还用 $\Gamma_Q=\big((\Gamma_Q)_0,(\Gamma_Q)_1\big)$ 表示 $\widehat{\triangle}$ 的全子箭图，其顶点集合为 $\phi_Q^{-1}(\Phi^+_\triangle\times 0)$。我们称 Γ_Q 为与 Q相关联的 AR箭图。

定理4.3（[17, 52, 35]）。设 $Q=(\triangle,\xi)$ 是一个 Dynkin 箭图。

(i) 对于任意 $i\in I$，我们有 $\xi_i\equiv\xi_{i^*}-\mathsf{h}$ 模 2，且

$$(\Gamma_Q)_0=\{(i,p)\in\widehat{\triangle}_0 \mid \xi_i\geqslant p>\xi_{i^*}-\mathsf{h}\}. \tag{4.4}$$

特别地，我们有

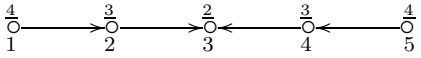
$$\phi_Q(i,p)=\big(\tau_Q^{(\xi_i-p)/2}(\gamma_i^Q),0\big)\quad \textit{for any } (i,p)\in(\Gamma_Q)_0.$$

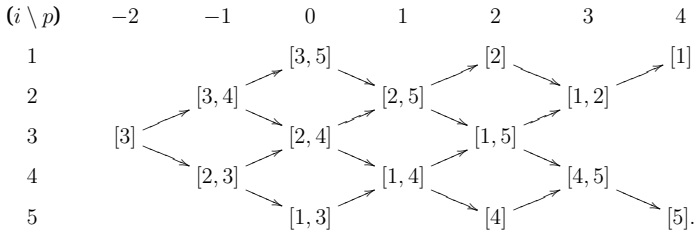
（ii）如果 i 是 Q 的源点，则我们有

$$\phi_{s_iQ}(i^*,\xi_i-\mathsf{h})=\phi_Q(i,\xi_i)=(\alpha_i,0)\ \textit{and}\ \ \Gamma_{s_iQ}=(\Gamma_Q\setminus\{(i,\xi_i)\})\cup\{(i^*,\xi_i-\mathsf{h})\}.$$

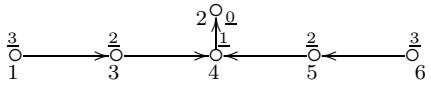
（iii）映射 ϕ_Q 诱导出一个箭图同构 $\Gamma_Q\xrightarrow{\sim}\Upsilon_{[Q]}$。回顾一下，$[Q]$ 是 Q-适配约化表达式的交换类。

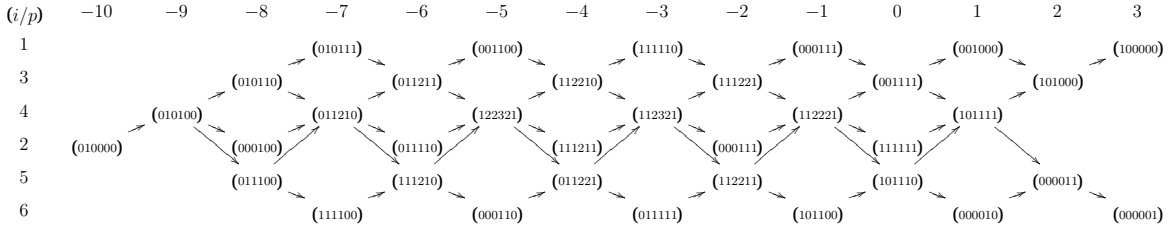
例4.4。以下是一些 Γ_Q 关于 Q 单边型的例子。

（1）对于 $Q=$  A_5类型， Γ_Q 可表示为

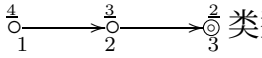


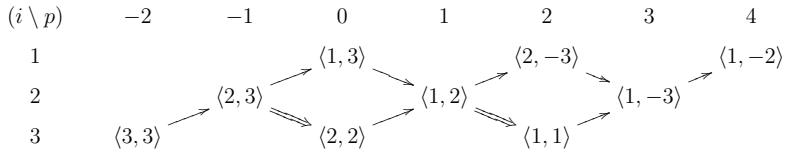
这里 $[a,b]:=\sum_{k=a}^{b}\alpha_k$ 对于 $1\leqslant a<b\leqslant 5$，而 $[a]:=\alpha_a$ 对于 $1\leqslant a\leqslant 5$。

（2）对于 $Q=$  类型为 E_6 的 Γ_Q 可以表示为



此处 $(a_1a_2a_3a_4a_5a_6):=\sum_{i=1}^{6}a_i\alpha_i$。

例 4.5. 对于 $Q=$  类型为 C_3, Γ_Q 可表示为



此处，$\langle a、\ \pm b\rangle:=\epsilon_a\pm\epsilon_b$ 对应于 $1\leqslant a<b\leqslant 4$，而 $\langle a、\ a\rangle:=2\epsilon_a$ 对应于 $1\leqslant a\leqslant 3$。

注意以下几点:

(4.5) （a） Γ_Q 中的顶点通过双射$\phi_Q|_{(\Gamma_Q)_0}$标记为 $\Phi_{\triangle}^{+}$。（b）对于 Q的一个源点 i，Γ_{s_iQ} 可通过以下方式由 Γ_Q 得到：（i）若 $s_i\beta$ 位于 Γ_Q中的（j，p），则每个 $\beta\in\Phi^{+}\setminus\{\alpha_i\}$ 位于 Γ_{s_iQ}中的（j，p）。（ii） α_i 位于 Γ_{s_iQ}中坐标（i^*，ξ_i- h）处，而 α_i 位于 Γ_Q中的（i，ξ_i）处。

我们将式（4.5）中的（b）操作称为从 Γ_Q 到 Γ_{s_iQ}的反射。

设 Q是一个 Dynkin 图，但不包括 E-类型。若箭头（i，p）$\to$（j，$p+1$）在 Γ_Q中是一个向下（分别为向上）箭头，则称其为向下（分别为向上）箭头，其中 $j>i$（分别为 $j<i$），方法是按照（$\triangle_0$ 2.1）将 $\triangle_0$ 的顶点与整数对应。

对于 $\triangle$的 E类型，我们在 $\{1,2,\ldots,8\}$上定义如下全序 $<$:

$$1<3<4<2<5<6<7<8.$$

然后，我们可以像其他情形中一样，在 Γ_Q 中定义向下（分别为向上）箭头（见例 4.4 (2)，其中为 E_6类型）。

定义 4.6。

(i) 若一个 $[Q]$-对 hhα,βii $\in(\Phi^+)^2$ 满足 $\phi_Q(i,p)=(\alpha,0)$ 且 $\phi_Q(j,s)=(\beta,0)$，则称其为截面的Γ_Q，如果 $d(i,j)=p-s$。 (ii) 若全子箭图 ρ 是 Γ_Q 的截面，则称其为截面的；也就是说，ρ 中的每个 $[Q]$-对 hhα,βii 都是截面的。 (iii) Γ_Q 中的连通满子箭图 ϱ 若由向下（分别地，向上）的箭头连接而成，则称其为 S- 截面（分别地，N- 截面）路径。 (iv) 若不存在 Γ_Q 中包含 ϱ 且由向下（分别地，向上）的箭头组成的更长连通截面路径，则称 ϱ 这一 S-截面（分别地，N-截面）路径为 N-路径（分别地，S-路径）。

4.2. 经典AR箭图 Γ_Q。本小节回顾 Dynkin 箭图 Q 中 Γ_Q 的标记及组合性质，其中箭图的类型为 ADE。在本小节中，$Q=$（$\triangle$，ξ）表示一个类型为 ADE的 Dynkin 箭图。

命题 4.7（[2, 20]）。（1）设 Q 是 ADE型 Dynkin 箭图，h 为 Coxeter 数。对于 $i\in I$，令

$$r_i^Q:==\frac{\mathsf{h}+\mathrm{a}_i^Q-\mathrm{b}_i^Q}{2}$$

其中，a_i^Q 是 Q 中位于 i 与 i^* 之间且指向 i^*的箭头数，b_i^Q 是 Q 中位于 i 与 i^* 之间且指向 i 的箭头数（$\mathrm{a}_i^Q-\mathrm{b}_i^Q=\xi_i-\xi_{i^*}$）。于是有 $r_i^Q\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 以及

$$(\Gamma_Q)_0=\{(i,\xi_i-2k)\mid 0\leqslant k<r_i^Q\}.$$

（2）对于 i、$j\in\triangle_0$ 及任意 Q，有

$$(i,\xi_j-d(i,j)),\ (i,\xi_j-2r_j^Q+d(i,j))\in\Gamma_Q.$$

注意，如果 Q 是 σ-不变的（$\sigma\neq$恒等），则有

$$r_i^Q=\mathsf{h}/2\quad\text{for all } i. \tag{4.6}$$

命题 4.8（[50, 命题 4.1]）。设 Q 为一个 ADE 类型的 Dynkin 箭图 Q，且 hhα,βii 是 Γ_Q 中的一个 $[Q]$-截面 pair。那么，我们有

(a) $[Q]$-pair hhα,βii 是 $[Q]$-simple；(b) $(\alpha,\beta)=1$；(c) $\alpha-\beta\in\Phi$；(d) 要么 hh$\alpha,\beta-\alpha$ii 是 β的一个 $[Q]$-minimal $[Q]$-pair，要么 hh$\alpha-\beta,\beta$ii 是 α的一个 $[Q]$-minimal$[Q]$-pair。

定义 4.9。对于 i、$j\in I$ 和整数 $k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，令 $\Phi_Q(i,j)[k]$ 表示满足以下条件的 $[Q]$-对 hhα,βii 的集合：

$$|p-s|=k\quad\text{when }\{\phi_Q(i,p),\phi_Q(j,s)\}=\{(\alpha,0),(\beta,0)\}.$$

引理 **4.10** ([50, 引理 6。15])。对于任意 $\langle\langle\alpha,\ \beta\rangle\rangle$、$\langle\langle\alpha',\ \beta'\rangle\rangle \in \Phi_Q(i,\ j)[k]$，有

$$\deg_{[Q]}(\langle\!\langle \alpha,\beta\rangle\!\rangle) = \deg_{[Q]}(\langle\!\langle \alpha',\beta'\rangle\!\rangle).$$

对于 i、$j \in I$ 和 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$，我们将 $\mathsf{o}_k^Q(i$、$j)$ 定义为

$$\mathsf{o}_k^Q(i,j) := \begin{cases} \deg_{[Q]}(\langle\!\langle \alpha,\beta\rangle\!\rangle) & \text{if } \langle\!\langle \alpha,\beta\rangle\!\rangle \in \Phi_Q(i,j)[k], \\ 0 & \text{if } \Phi_Q(i,j)[k] = \emptyset. \end{cases} \tag{4.7}$$

由上述引理可知，该定义是良定义的。

定义 **4.11.** 设 t 是一个不定元。对于 i、$j \in I$ 和一个 ADE 型 Dynkin 箭图 Q，我们定义多项式 $\mathfrak{d}_i^Q{}_{,j}(z) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}[t]$

$$\mathfrak{d}_{i,j}^Q(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}} \mathsf{O}_k^Q(i,j)t^{k-1},$$

其中

$$\mathsf{O}_k^Q(i,j) := \max(\mathsf{o}_k^Q(i,j), \mathsf{o}_k^{Q^*}(i,j)). \tag{4.8}$$

命题 **4.12**（[50,命题 6.18]）。对于任意 Dynkin 箭图 Q、Q'（属于 $\triangle$），有

$$\mathsf{O}_k^Q(i,j) = \mathsf{O}_k^{Q'}(i,j).$$

因此，$\mathsf{O}_k^\triangle(i,j)$ 是良定义的。

注 **4.13**。在 [50] 中，$\mathsf{O}_k^Q(i,j)$ 被定义为 $\max(\mathsf{o}_k^Q(i,j)\,\mathsf{o}_k^{Q^{\mathrm{rev}}}(i,j))$，其中 Q^{rev} 是一个通过反转 Q 的所有箭头得到的 Dynkin 箭图。然而，通过应用 [50]，中的论证可以验证

$$\max(\mathsf{o}_k^Q(i,j), \mathsf{o}_k^{Q^{\mathrm{rev}}}(i,j)) = \max(\mathsf{o}_k^Q(i,j), \mathsf{o}_k^{Q^*}(i,j)).$$

根据命题4.12，我们可以将 $\mathfrak{d}_i^Q{}_{,j}(t)$ 中的上标 Q 替换为 $\triangle$。我们称 $\mathfrak{d}_i^\triangle{}_{,j}(t)$ 为 $\triangle$ 在 (i,j) 处的次数多项式。对于 $k \in \mathbb{Z}$，我们定义

$$\mathfrak{d}_{i,j}[k] := \mathsf{O}_k^\triangle(i,j).$$

在接下来的 §4.2.1 和 § 4.2.2 中，我们回顾 [48, 49, 50] 中关于类型 A_n 和 D_n 的 AR 箭图的组合性质和统计量的结果，并证明在这些类型中，$\widetilde{\mathfrak{d}}_i^\triangle{}_{,j}(t) = \mathfrak{d}_i^\triangle{}_{,j}(t) + \delta_{i,\ j^*}t^{\mathsf{h}-1}$。

4.2.1. D_{n+1} 情形。设 Q 是一个类型为 D_{n+1} 的 Dynkin 箭图。单根 $\{\alpha_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n+1\}$ 和 $\Phi^+_{D_{n+1}}$ 可按如下方式在 $\mathsf{Q}^+ \subset \bigoplus_{i=1} \mathbb{R}\epsilon_i$ 中对应：

$$\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \quad \text{for } i < n+1 \quad \text{and} \quad \alpha_{n+1} = \epsilon_n + \epsilon_{n+1},$$

$$\Phi^+_{D_{n+1}} = \left\{ \epsilon_i - \epsilon_j = \sum_{i \leqslant k < j} \alpha_k \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n \right\}$$

$$\bigsqcup \left\{ \epsilon_i - \epsilon_{n+1} = \sum_{k=i}^{n} \alpha_k \mid 1 \leqslant i \leqslant n \right\} \bigsqcup \left\{ \epsilon_i + \epsilon_{n+1} = \sum_{k=i}^{n-1} \alpha_k + \alpha_{n+1} \mid 1 \leqslant i \leqslant n \right\} \tag{4.9}$$

$$\bigsqcup \left\{ \epsilon_i + \epsilon_j = \sum_{i \leqslant k < j} \alpha_k + 2 \sum_{j \leqslant k < n} \alpha_s + \big(\alpha_n + \alpha_{n+1}\big) \mid 1 \leqslant i < j < n+1 \right\}.$$

约定 2. 对于 $2 \leqslant a \leqslant n+1$，我们将 ϵ_{-a} 记作 $-\epsilon_a$。对于 $\beta = \epsilon_a + \epsilon_b \in \Phi$（$1 \leqslant |a| < |b| \leqslant n+1$），我们称 ϵ_a 和 ϵ_b 为 β的分量。

注 4.14. 注意以下几点：

(i) 对于每个 $1 \leqslant a \leqslant n$，恰好有（$2n+1-a$）个以 ϵ_a 为其分量的正根。(ii) 对于每个 $2 \leqslant a \leqslant n$，恰好有（$a-1$）个以 ϵ_{-a} 为其分量的正根。(iii) 恰好有 n个以 $\epsilon_{\pm(n+1)}$ 为其分量的正根。

定义 4.15. Γ_Q 中的一个连通子箭图 ρ 称为摆动，如果它由以下方式的顶点和箭头组成：存在正根 α、$\beta \in \Phi^+$ 以及 r、$s \leqslant n$，使得

$$S_r \to S_{r+1} \to \cdots \to S_{n-1} \begin{array}{c} \nearrow \beta \searrow \\ \searrow \alpha \nearrow \end{array} N_{n-1} \to N_{n-2} \to \cdots \to N_s, \quad \text{where}$$

(a) $S_r \to S_{r+1} \to \cdots \to S_{n-1} \begin{array}{c} \nearrow \beta \\ \searrow \alpha \end{array}$ 是一个 S-路径（对于某个 $k \in \mathbb{Z}$，$\phi_Q^{-1}(S_l, 0) = (l, k)$），

(b) $\begin{array}{c} \beta \searrow \\ \alpha \nearrow \end{array} N_{n-1} \to N_{n-2} \to \cdots \to N_s$ 是一个 N-路径（对于某个 $k' \in \mathbb{Z}$，$\phi_Q^{-1}(N_l, 0) = (l, k')$），

(c) 对于某个 $u \in \mathbb{Z}$，$\phi_Q^{-1}(\beta, 0) = (n, u)$ 且 $\phi_Q^{-1}(\alpha, 0) = (n+1, u)$

（摆动的示例见下文的例 4.20）。

命题 4.16（[48, 定理 2.21]）。对于每个 Γ_Q的摆动 ρ，存在唯一的$1 \leqslant a \leqslant n$ 满足以下性质：

(i) 每个顶点都共享一个分量 ϵ_a。

(ii) 它恰好由 $(2n+1-a)$个顶点组成。(iii) 每个以 ϵ_a 为其分量的正根都出现在摆动中。(iv) $\min(r,\ s)=1$，其中 r、s 见定义 *4.15*。

因此，我们将该摆动称为 a-摆动，并记作 ρ_a。

根据上述命题和注 4.14，在 n 中存在不同的 Γ_Q。

定义 4.17. 如果一个 S-路径（分别地，N-路径）在剩余类小于 n处结束（分别地，开始），则称其为浅的。

命题 4.18（[48, 定理 2.25]）。设 ρ 为一条浅的 S-路径（分别地，N-路径）。那么存在唯一的 $2\leqslant a\leqslant n$，使得

(i) ρ 由（$a-1$）个顶点组成；(ii) ρ 中的所有顶点都以 ϵ_{-a} 作为其分量。

此外，Γ_Q中恰好有（$n-1$）条浅的 X-路径（$X=S$ 或 N）。因此，我们将该浅的 X-路径称为（$-a$）-浅路径，并记作 ρ_{-a}。

在本文中，我们有时将 $\mathrm{W}^{D_{n+1}}$ 中的元素理解为集合的自同构

$$\{\pm1,\pm2,\dots,\pm(n+1)\},$$

即，$s_i\epsilon_t=\epsilon_{s_i(t)}$ 对于满足 $1\leqslant|t|\leqslant n$的 t。注意，$s_ns_{n+1}=s_{n+1}s_n$、$s_ns_{n+1}(n)=-n$ 以及$s_ns_{n+1}(n+1)=-n-1$。

引理 4.19. 设 $Q=(\triangle,\ ^\vee\xi)$是一个 $\vee$-固定的、类型为 D_{n+}的 Dynkin 箭图$_1$.

(a) 若 $\phi_Q^{-1}(\alpha,0)=(n,k)$（分别为 $(n+1,k)$）对某个 $\alpha\in\Phi^+$，则存在 $\beta\in\Phi^+$ 使得$\phi_Q^{-1}(\beta,0)=(n+1,k)$（分别为 (n,k)）。

(b) 对于 $\alpha,\beta\in\Phi^+$，若 $\phi_Q^{-1}(\alpha,0)=(n,k)$ 且 $\phi_Q^{-1}(\beta,0)=(n+1,k)$，则存在唯一的$1\leqslant a\leqslant n$ 使得

$$\{\alpha,\beta\}=\{\epsilon_a+\epsilon_{n+1},\ \epsilon_a-\epsilon_{n+1}\}.$$

(c) $\tau_Q(\pm(n+1))=\mp(n+1)$。

证明。第一个断言由[48, 引理 2.14]得出。回想一下，τ_Q 的任意约化表达式都适配于 Q。由于 $\xi_n=\xi_{n+1}$，存在 τ_Q 的一个约化表达式$\underline{w}=s_{i_1}\cdots s_{i_{n+1}}$，以及$u\in[1,n]$，使得 $\{i_u,i_{u+1}\}=\{n,n+1\}$。于是我们有

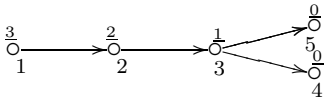
$$\tau_Q(n+1)=s_{i_1}\cdots s_{i_{u-1}}s_ns_{n+1}(n+1)=s_{i_1}\cdots s_{i_{u-1}}(-(n+1))=-(n+1),$$

如所需。 □

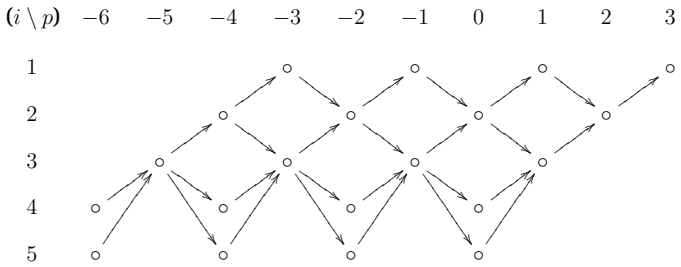
利用上述结果，我们可以在无需计算 $\beta_k^{w_0}$ 或双射 $\phi_Q|_{\Gamma_Q}$ 的情况下，根据 Φ^+ 标记 Γ_Q。

例 4.20. 让我们考虑以下 $\vee$-固定的 Q D_5 类型 Dynkin 箭图：

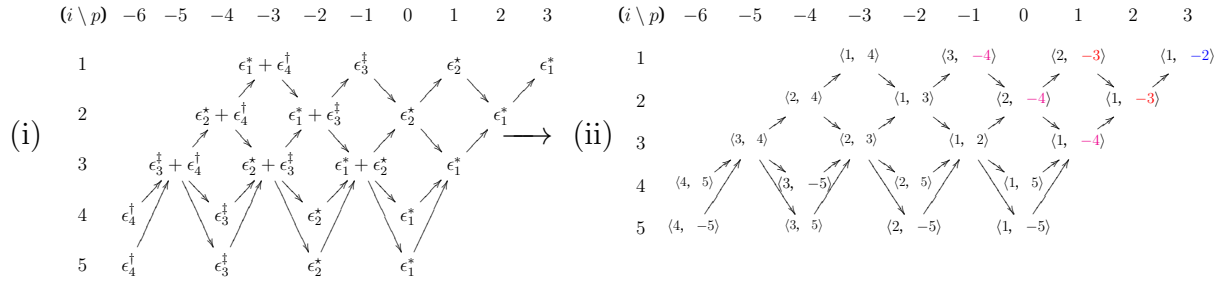
Q =



根据（4.2），没有标记的 Γ_Q 如下所示：



利用（i）命题 4.16 和（ii）引理 4.19以及命题 4.18，依次可以完成 Γ_Q 的标注如下：



这里，(i) 中的每个符号 $*$ 表示命题 a 中的一个摆动，4.16 而 (ii) 中的每种颜色表示命题 $-a$ 中的一个（$-a$）-浅的路径。4.18。

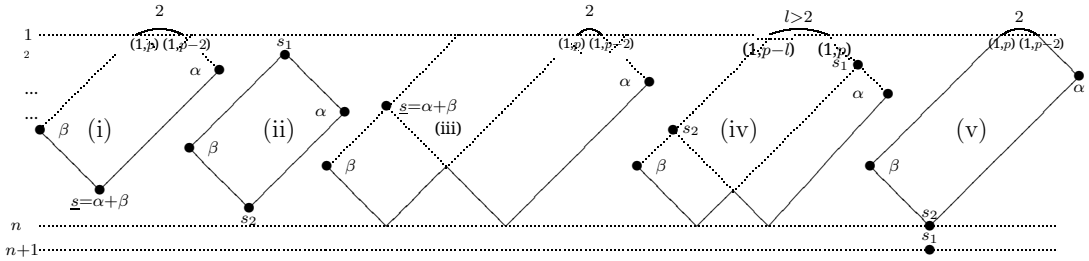
此外，[50], 第二作者运用（Γ_Q）$_0$ 的标记算法，并考察所有 hhα, βii 的相对位置，证明了以下命题。

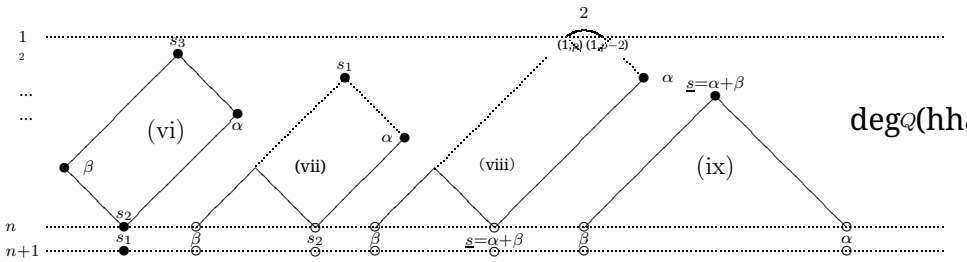
命题 4.21（[50, 命题 4.5]（另见 [3, 引理 2.6]））。对于任意 c-对 $\underline{p}$ =hhα, βii 以及任意 Q 类型为 D的 Dynkin 箭图，我们有以下结论：

(1) hd$_{[Q]}$(hhα, βii) 定义良好。特别地，如果 $\alpha + \beta = \gamma \in \Phi^+$，则 hd$_{[Q]}$(hh$\alpha, \beta$ii) $= \gamma$.(
2) deg$_{[Q]}$(hhα, βii) 6 2。

所有 c-对 $\langle\langle\alpha,\ \beta\rangle\rangle$ 且 $\deg_Q(\langle\langle\alpha,\beta\rangle\rangle)\ \neq\ 0$ 的相对位置均已分类并予以描述，且与 Q的选择无关，如下所示（[50]）：

(4.10)

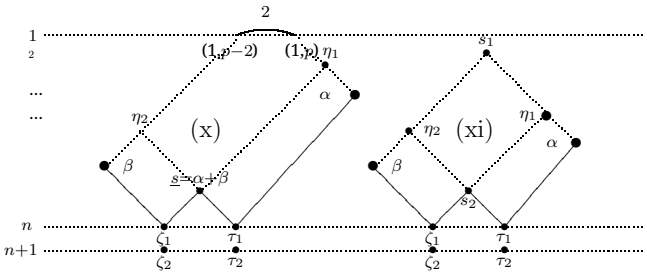




$\deg_Q(\mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii})\ =1,$

and

(4.11)



$\deg_Q(\mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii})\ =2.$

这里我们仅列出 $\mathrm{res}^{[Q]}(\alpha)$ 6 $\mathrm{res}^{[Q]}(\beta)$ 时的情形，并且
(1) 我们将 $\underline{s}=\{s_1,\ldots,s_r\}_{\beta\in\Phi^+}=\mathrm{hd}_Q(\mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii})$ 设为，(2) βin (vii)、(viii) 和 (ix) 中的一个顶点为 $\circ$，然后 $s_2$in (vii)（分别地，$\alpha+\beta$in (viii)、α in (ix)）由所作选择确定，(3) 每个指数 $\underline{m}\prec_Q^{\flat}\mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii}$ 也在上述图示中有所描述（$\prec_Q:=\prec_{[Q]}$），(4) 在 (4.10) 中，剩余类为 n 或 $n+1$ 的正根出现在 (v)、(vi)、(vii)、(viii)、(ix)、(x) 和 (xi) 中，(5) 关于 $\deg_Q(\mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii})\ =2$ 的情形，见下文例 4.22。

在每种情况下，(α,β) 的值都不取决于 Q 的选择，并且如下所示:

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)	(ix)	(ix)	(x)
(α,β)	-1	0	-1	0	0	1	0	-1	-1	-1	0

对于类型为 D_{n+1} 的非 $[Q]$-简单 c-对，TABLE 1. (α,β)

例 4.22。 利用 Γ_Q 例 4.20,
(1) $\langle 1,-4\rangle \prec^{\mathsf{b}}_Q \mathsf{hh}\langle 1,-2\rangle,\langle 2,-4\rangle\mathsf{ii}$ 对应于 (i), (2) $\mathsf{hh}\langle 2,-3\rangle,\langle 1,-4\rangle\mathsf{ii} \prec^{\mathsf{b}}_Q \mathsf{hh}\langle 1,-3\rangle,\langle 2,-4\rangle\mathsf{ii}$ 对应于 (ii), (3) $\langle 1,4\rangle \prec^{\mathsf{b}}_Q \mathsf{hh}\langle 1,-2\rangle,\langle 2,4\rangle\mathsf{ii}$ 对应于 (iii), (4) $\mathsf{hh}\langle 1,4\rangle,\langle 2,-3\rangle\mathsf{ii} \prec^{\mathsf{b}}_Q \mathsf{hh}\langle 1,-3\rangle,\langle 2,4\rangle\mathsf{ii}$ 对应于 (iv), (5) $\mathsf{hh}\langle 1,5\rangle,\langle 1,-5\rangle\mathsf{ii} \prec^{\mathsf{b}}_Q \mathsf{hh}\langle 1,-2\rangle,\langle 1,2\rangle\mathsf{ii}$ 对应于 (v), (6) $\{\langle 2,-3\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 1,-5\rangle\}_{\beta\in\Phi^+} \prec^{\mathsf{b}}_Q \mathsf{hh}\langle 1,-3\rangle,\langle 1,2\rangle\mathsf{ii}$ 对应于 (vi), (7) $\mathsf{hh}\langle 3,-4\rangle,\langle 1,5\rangle\mathsf{ii} \prec^{\mathsf{b}}_Q \mathsf{hh}\langle 1,-4\rangle,\langle 3,5\rangle\mathsf{ii}$ 和 $\mathsf{hh}\langle 3,-4\rangle,\langle 1,-5\rangle\mathsf{ii} \prec^{\mathsf{b}}_Q \mathsf{hh}\langle 1,-4\rangle,\langle 3,-5\rangle\mathsf{ii}$ 对应于 (vii), (8) $\langle 1,5\rangle \prec^{\mathsf{b}}_Q \mathsf{hh}\langle 1,-3\rangle,\langle 3,5\rangle\mathsf{ii}$ 和 $\langle 1,-5\rangle \prec^{\mathsf{b}}_Q \mathsf{hh}\langle 1,-3\rangle,\langle 3,-5\rangle\mathsf{ii}$ 对应于 (viii), (9) $\langle 1,3\rangle \prec^{\mathsf{b}}_Q \mathsf{hh}\langle 1,5\rangle,\langle 3,-5\rangle\mathsf{ii}$ 和 $\langle 1,3\rangle \prec^{\mathsf{b}}_Q \mathsf{hh}\langle 1,-5\rangle,\langle 3,5\rangle\mathsf{ii}$ 对应于 (ix),

(10) $\langle 1,2\rangle \prec^{\mathsf{b}}_Q \mathsf{hh}\langle 1,-5\rangle,\langle 2,5\rangle\mathsf{ii}$,$\mathsf{hh}\langle 1,5\rangle,\langle 2,-5\rangle\mathsf{ii}$,$\mathsf{hh}\langle 1,3\rangle,\langle 2,-3\rangle\mathsf{ii} \prec^{\mathsf{b}}_Q \mathsf{hh}\langle 1,-3\rangle,\langle 2,3\rangle\mathsf{ii}$ 对应于 (x),

(11) $\mathsf{hh}\langle 1,2\rangle,\langle 3,-4\rangle\mathsf{ii} \prec^{\mathsf{b}}_Q \{\langle 1,5\rangle,\langle 2,-5\rangle,\langle 3,-4\rangle\}_{\beta\in\Phi^+} \prec^{\mathsf{b}}_Q \mathsf{hh}\langle 1,-4\rangle,\langle 2,3\rangle\mathsf{ii}$ 对应于 $\mathsf{hh}\langle 1,3\rangle,\langle 2,-4\rangle\mathsf{ii}$ (xi)。

对于类型为 D_{n+1} 的 $\triangle$, $i,j\in\triangle_0$ 的次数多项式 $\mathfrak{d}_i^{D_{n+1}}{}_{,j}(t)$ 可表示为以下显式形式 [48, 50, 11]:

$$\mathfrak{d}_{i,j}^{D_{n+1}}(t)+\delta_{i,j^*}t^{\mathsf{h}-1}=\begin{cases}\dfrac{\sum_{s=1}^{\min(i,j)}(t^{|i-j|+2s-1}+t^{2n-i-j+2s-1})}{1+\delta(\max(i,j)\geqslant n)} & \text{if } \min(i,j)<n,\\ \sum_{s=1}^{\lfloor (n+\delta_{i,j})/2\rfloor} t^{4s-1-2\delta(i,j)} & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{4.12}$$

注记 4.23。$\mathfrak{d}_i^{\triangle}{}_{,j}(t)$ 当且仅当

$$2\leqslant i,j\leqslant n-1,\quad i+j\geqslant n+1,\quad \mathsf{h}+2-i-j\leqslant s\leqslant i+j\quad\text{and}\quad s\equiv_2 i+j\tag{4.13}$$

（见[20, 引理 3.2。4] 另见）。等价地，若 $\deg_Q(\langle\langle\alpha,\ \beta\rangle\rangle)=2$，则c-对$\langle\langle\alpha,\ \beta\rangle\rangle$ 在 Γ_Q 中的相对位置如（4.11）所述，其中

（x）在 $\alpha+\beta=\gamma=\underline{s}$ 且 $\mathsf{mul}(\gamma)=2$ 时发生，并且我们有

$$\gamma \prec^{\mathsf{b}}_Q \langle\!\langle\eta_1,\eta_2\rangle\!\rangle,\langle\!\langle\tilde\tau_1,\tilde\zeta_1\rangle\!\rangle,\langle\!\langle\tilde\tau_2,\tilde\zeta_2\rangle\!\rangle \prec^{\mathsf{b}}_Q \langle\!\langle\alpha,\beta\rangle\!\rangle$$

其中 $\{\tilde\tau_1,\tilde\tau_2\}=\{\tau_1,\tau_2\}$、$\{\tilde\zeta_1,\tilde\zeta_2\}=\{\zeta_1,\zeta_2\}$ 和 $\tilde\tau_i+\zeta_i=\gamma$ $(i=1,\ 2)$，

(xi) 当 $\mathrm{hd}_Q(\mathsf{hh}\alpha,\beta\mathsf{ii})=\mathsf{hh}\gamma_1,\gamma_2\mathsf{ii}$ 时，我们有

$$\langle\!\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle\!\rangle \prec^{\mathsf{b}}_Q \langle\!\langle\eta_1,\eta_2\rangle\!\rangle,\left\{\tilde\tau_1,\tilde\zeta_1,\gamma_1\right\}_{\beta\in\Phi^+},\left\{\tilde\tau_2,\tilde\zeta_2,\gamma_1\right\}_{\beta\in\Phi^+} \prec^{\mathsf{b}}_Q \langle\!\langle\alpha,\beta\rangle\!\rangle$$

where $\{\tilde\tau_1,\tilde\tau_2\}=\{\tau_1,\tau_2\}$, $\{\tilde\zeta_1,\tilde\zeta_2\}=\{\zeta_1,\zeta_2\}$ and $\tilde\tau_i+\tilde\zeta_i=\gamma_1$ $(i=1,2)$.

4.2.2. A_{2n-1}-情形。设 Q 是类型为 A_{2n-1}的 Dynkin 箭图。单根和 $\Phi^+_{A_{2n-1}}$可按如下方式在 $\mathsf{Q}^+ \subset \bigoplus_{i=1} \mathbb{Z}\epsilon_i$ 中对应起来：

$$\begin{aligned} &\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \quad \text{for } 1 \leqslant i \leqslant 2n-1, \\ &\Phi^+_{A_{2n-1}} = \left\{ \epsilon_i - \epsilon_j = \sum_{i \leqslant k < j} \alpha_k \mid 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2n \right\}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

注4.24. 注意，对于 $\vee$-不变的 A_{2n-1} 型 Dynkin 箭图 $Q = (\triangle, {}^\vee\xi)$，(1) 不存在一条 Q 中经过 n 的路径；(2) 由于 ${}^\vee\xi_{n-1} = {}^\vee\xi_{n+1}$ 和 $|{}^\vee\xi_n - {}^\vee\xi_{n\pm1}| = 1$，$n$ 总是 Q 的汇或源点。

我们将 $\beta \in \Phi^+_{A_{2n-1}}$ 与 $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant 2n-1$ 的一个线段 $[a,b]$ 等同，其中 $\beta = \sum_{k=a}^{b} \alpha_k$。对于 $[a,b]$，我们称 a 为 β 的第一分量，称 b 为其第二分量。如果 β 是单的，我们有时将 β 写作 $[a]$，而不写作 $[a,a]$。

命题 4.25。[49,定理 1。11] (1) 每条 N-路径中的正根具有相同的第一分量，而每条 S-路径中的正根具有相同的第二分量。(2) 对于每个 $1 \leqslant i \leqslant 2n-i$，恰好存在一条 N-路径 ϱ_i^N，包含 $(2n-i)$ 个顶点，且 ϱ_i^N中的每个顶点都以 i 作为其第一分量。反之，第一分量为 i 的每个正根都出现在 ϱ_i^N 中。(3) 对于每个 $1 \leqslant i \leqslant 2n-i$，恰好存在一条 S- 路径 ϱ_i^S，包含 i 个顶点，且 ϱ_i^S 中的每个顶点都以 i 作为其第二分量。反之，第二分量为 i 的每个正根都出现在 ϱ_i^S 中。

与 D_{n+1} 情形一样，我们可以利用上述结果，在无需计算 $\beta_k^{w_0}$'s 或双射 $\phi_Q|_{\Gamma_Q}$ 的情况下，根据 Φ^+ 对 Γ_Q 进行标记，并得到以下命题：

命题 4.26. [50, 命题 4.5]（另见 [3, 引理 2.6]）对于任意 c-对 $\underline{p} = \mathrm{hh}\alpha, \beta\mathrm{ii}$ 以及任意 A_n类型的 Dynkin 箭图 Q，有如下结论：(1) $\mathrm{hd}_{[Q]}(\mathrm{hh}\alpha, \beta\mathrm{ii})$ 定义良好。特别地，如果 $\alpha + \beta = \gamma \in \Phi^+$，则 $\mathrm{hd}_{[Q]}(\mathrm{hh}\alpha, \beta\mathrm{ii}) = \gamma$.(2) $\deg_{[Q]}(\mathrm{hh}\alpha, \beta\mathrm{ii}) \leqslant 1$。

将 A_{2n-1} 上的非平凡 Dynkin 图自同构 $\vee$ 理解为 $\{1, \ldots, 2n\}$上的一个对合，$\vee$通过 $\vee s_i \vee = s_{\vee(i)}$使 $\mathsf{W}_{A_{2n-1}}$ 正规化。

引理 4.27。对于 $\vee$-不变的 A_{2n-1} 类型 Dynkin 箭图 $Q = (\triangle, {}^\vee\xi)$ 以及 $i \in \triangle_0$，我们有 e

$$\gamma^Q_{\vee(i)} = \vee(\gamma^Q_i).$$

这里我们将 $\vee$ 理解为 $\Phi^+_{A_{2n-1}}$的对合。

证明。回顾 (4.3) 中的 $B^Q(i)$。根据 ${}^\vee\xi_i = {}^\vee\xi_{\vee(i)}$ 以及注4.24，若对于 i、$j \leqslant n$，在 Q 中存在一条从 j 到 i 的路径，则在 Q中存在一条从 $2n-i$ 到 $2n-j$ 的路径。因此，对于 i、$j \leqslant n$，$j \in B^Q(i)$ $\iff$ $2n-j \in B^Q(2n-i)$，我们的断言由 (4.3) 得证。□

对于 $\triangle$ 类型为 A_{2n-1} 且$\mathsf{h} = 2n$的，次数多项式$\mathfrak{d}_i^{A_{2n-1}}{}_{,j}(t)$ 对于 $i,\ j \in \triangle_0$ 由以下显式形式给出 [48, 50, 11]:

$$\mathfrak{d}_{i,j}^{A_{2n-1}}(t) + \delta_{i,j^*} t^{\mathsf{h}-1} = \sum_{s=1}^{\min(i,j,2n-i,2n-j)} t^{|i-j|+2s-1}.$$

注意到，$\mathfrak{d}_i^{A_{2n-1}}{}_{,j}(t)$ 的每个非零系数均为 1。

~4.3. $\mathfrak{d}_{i,j}(t)$ 与 $\mathfrak{d}_{i,j}(t)$ 之间的关系。对于一个 $\triangle$ 类型为 A_n、D_n 和 E_6 的 Dynkin 图，我们有以下定理:

定理4.28（[50]）。对于 $\triangle$ 类型为 A_n、D_n 和 E_6，且 i、$j \in I$，我们有

$$\widetilde{\mathfrak{d}}_{i,j}(t) = \mathfrak{d}_{i,j}(t) + \delta_{i,j^*} t^{\mathsf{h}-1}. \tag{4.15}$$

注4.29。在第 6 节中，我们将看到（4.15）对 B_n 和 C_n 也成立（见定理 6.6）。然而，对于 E_7、E_8、F_4 和 G_2类型，（4.15）并不成立（见下文关于 6.16 和注 6.18 的注 F_4 和 G_2）。

5. Labeling of AR-quivers in type BCFG

对于与 $\triangle$ 相关的单边型李代数 $\mathfrak{g}$，以及 $\triangle_{\mathfrak{g}}$上的 Dynkin 图自同态 σ（$\neq \mathrm{id}$），我们将 ${}^{\sigma}\mathfrak{g}$ 记为 $\mathfrak{g}$ 的李子代数，使其为非单纯连通型 [19,命题7.9]:

$(\triangle, \sigma)$	$(\triangle_{A_{2n-1}}, \vee)$	$(\triangle_{D_{n+1}}, \vee)$	$(\triangle_{E_6}, \vee)$	$(\triangle_{D_4}, \widetilde{\vee})$
${}^{\sigma}\mathfrak{g}$ 的类型	C_n	B_n	F_4	G_2

每个满足 $\sigma \neq \mathrm{id}$ 的 $(\triangle, \sigma)$ 对应的 Table 2. ${}^{\sigma}\mathfrak{g}$

注意，${}^{\sigma}\mathfrak{g}$ 的指标 ${}^{\sigma}I$ 可以由以下满射$\overline{\sigma}$下的 $I_{\mathfrak{g}}$ 的像来识别：对于类型为 B_n 或 C_n的 ${}^{\sigma}\mathfrak{g}$,

$$\overline{\sigma}(i) = \begin{cases} n & \text{if } {}^{\sigma}\mathfrak{g} \text{ is of type } B_n \text{ and } i = n+1, \\ 2n-i & \text{if } {}^{\sigma}\mathfrak{g} \text{ is of type } C_n \text{ and } i \geqslant n+1, \\ i & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and

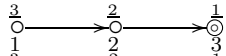
$$\begin{aligned} &\overline{\sigma}(1) = \overline{\sigma}(6) = 2, \quad \overline{\sigma}(3) = \overline{\sigma}(5) = 2, \quad \overline{\sigma}(4) = 2, \quad \overline{\sigma}(2) = 1, && \text{if } {}^{\sigma}\mathfrak{g} \text{ is of type } F_4, \\ &\overline{\sigma}(1) = \overline{\sigma}(3) = \overline{\sigma}(4) = 2, \quad \overline{\sigma}(2) = 1, && \text{if } {}^{\sigma}\mathfrak{g} \text{ is of type } G_2. \end{aligned}$$

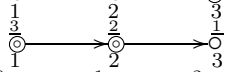
然后，对于一个 σ-固定的 Dynkin 箭图 $Q = (\triangle_{\mathfrak{g}}, \xi)$，我们可以得到一个 Dynkin 箭图 $\overline{Q} = (\triangle_{{}^{\sigma}\mathfrak{g}}, \overline{\xi})$，使得

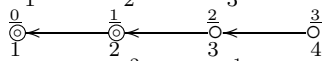
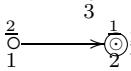
$$\overline{\xi}_{\overline{\sigma}(i)} = {}^{\sigma}\xi_i. \tag{5.1}$$

对于任意 $i \in I$。我们记 ${}^{\sigma}I = \{\overline{\imath} := \overline{\sigma}(\imath) \mid \imath \in I_{\mathfrak{g}}\}$。

例5.1。 以下是 $\overline{Q}$对应于 Q在例 2.8中的。

(1) $\overline{Q} =$  类型的 C_n， 对应于 Q 类型的 A_5， 见例 2.8 (2.11a)。

(2) $\overline{Q} =$  类型的 B_3， 对应于 Q 类型的 D_4， 见例 2.8 (2.11b)。

(3) $\overline{Q} =$  类型的 F_4，对应于 Q类型的 E_6，见例 2.8 (2.11c)。(4) $\overline{Q} =$  类型的 G_2， 对应于 Q 类型的 D_4， 见例 2.8 (2.11d)。

在本节中，我们将说明可以从 $\Gamma_{\overline{Q}}$ 得到 Γ_Q ，从而可以由$\Gamma_{\overline{Q}}$ 的标记得到 Γ_Q的标记。以下引理对任意有限型的 Dynkin 箭图 Q均成立，它推广了（4.3）：

Lemma 5.2. 对任意有限型的 Dynkin 箭图 $Q = (\triangle, \xi)$ 以及 $i \in I$，我们有

$$\gamma_i^Q = \sum_{j \in B^Q(i)} \left(\prod_{k=1}^{l^j - 1} - \left\langle h_{p_k^j}, \alpha_{p_{k+1}^j} \right\rangle \right) \alpha_j$$

其中 $B^Q(i)$ 表示指标 j 的集合，使得存在一条路径 $\mathrm{p}^j = (j = p_1^j \to p_2^j \to \cdots \to p_{l^j-1}^j \to p_{l^j}^j = i)$ 在 Q 中。这里，当 $i = j$ 时，我们将 $\left(\prod_{k=1}^{l^j-1} - \left\langle h_{p_k^j}, \alpha_{p_{k+1}^j} \right\rangle \right) = 1$ 理解为，因此 $l^j = 1$。

证明。令 $i_m = i$。注意，我们有

$$\gamma_{i_m}^Q = (1 - \tau_Q)\varpi_{i_m} = (s_{i_1} \cdots s_{i_{m-1}} - s_{i_1} \cdots s_{i_{m-1}} s_{i_m})\varpi_{i_m} = s_{i_1} \cdots s_{i_{m-1}}(\alpha_{i_m}), \tag{5.2}$$

其中 $\tau_Q = s_{i_1} \cdots s_{i_{|\triangle_0|}}$ 且 $1 \leqslant m \leqslant |\triangle_0|$。令 $j \notin B^Q(i)$。于是不存在指数 $1 \leqslant t_1 < \ldots < t_l = m$ 使得 $d(i_{t_x}, i_{t_{x+1}}) = 1$。因此 j不能包含于 $\mathrm{supp}(\gamma_i^Q)$ 中，由（5.2）。

令 $j \in B^Q(i)$。由于 $\triangle$ 是有限型的，因此存在唯一的路径 $\mathrm{p}^j = (j = p_1^j \to p_2^j \to \cdots \to p_{l^j-1}^j \to p_{l^j}^j = i$于 Q中。如果 p^j的长度为 2，则有 $\xi_j = \xi_i + 1$，断言由（5.2）得证。对 l^j进行归纳，$p_2^j \in \mathrm{supp}(\gamma_i^Q)$ 和 $\mathrm{supp}^{p_2^j}(\gamma_i^Q) = \left(\prod_{k=2}^{l^j-1} - \left\langle h_{p_k^j}, \alpha_{p_{k+1}^j} \right\rangle \right)$。由于 $\xi_j = \xi_{p_2^j} + 1$ 和 τ_Q 适配于 Q，我们可以保证 $\mathrm{supp}^j(\gamma_i^Q) \geqslant \left(\prod_{k=1}^{l^j-1} - \left\langle h_{p_k^j}, \alpha_{p_{k+1}^j} \right\rangle \right)$。

(i) 假设存在 $j' \in \triangle_0$，使得 $d(j, j') = 1$ 且 $\xi_{j'} = \xi_j + 1$。那么，在 τ_Q 的每个 Q-适配约化表达式中，s'_j 都早于 s_j 出现。

(ii) 假设存在 $j' \in \triangle_0$，使得 $d(j, j') = 1$ 且 $\xi_{j'} = \xi_j - 1$。那么不存在从 j' 到 i的路径。因此，尽管在 τ_Q的每个 Q-适应约化表达式中，s'_j 都比 s_j 出现得晚，但我们有 $j' \notin \mathrm{supp}(\gamma_i^Q)$。

By (i) and (ii), we have $\mathrm{supp}_j(\gamma_i^Q) = \left(\prod_{k=1}^{l^j-1} - \left\langle h_{p_k^j}, \alpha_{p_{k+1}^j}\right\rangle\right)$, as we desired. □

推论 5.3。 对于任意类型的 Dynkin 箭图 $Q=(\triangle,\xi)$ 以及 $i\in\triangle_0$，我们有

$$\alpha_i - \sum_{\substack{d(i,j)=1,\\ \xi_j-\xi_i=1}} \mathsf{c}_{j,i}\gamma_j^Q = \gamma_i^Q.$$

约定 3. 在本节其余部分，我们使用
(a) $\imath$、$\jmath$表示类型为 ADE 的指标集 I中的元素， i、j表示类型为 $BCFG$ 的指标集 I 中的元素；(b) α、β、γ表示类型为 ADE 的正根， $\mathsf{\alpha}$、$\mathsf{\beta}$、$\mathsf{\gamma}$表示类型为 $BCFG$ 的正根；(c) ϵ、ε表示类型为 ADE 的 $\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathsf{Q}^+$ 中的元素， $\mathsf{\epsilon}$、$\mathsf{\varepsilon}$表示类型为$BCFG$ 的 $\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathsf{Q}^+$ 中的元素，
以避免混淆。

对于下面的 5.1 和 5.2 小节，我们将研究类型为 B_n 和 C_n的 AR 箭图的组合性质和标记算法，并分别考察其与 D_n 和 A_{2n-1}对应结果之间的关系。这些小节中的结果将对下一节中次数多项式的获取起到关键作用。

5.1. B_n情形。注意，对于 D_{n+1} 类型的 g，其对应的 ${}^\vee\mathsf{g}$ 为 B_n 类型。对于 B_n 类型的 $Q=(\blacktriangle_{B_n},\xi)$，我们将 $\vee$-不变的 D_{n+1} 类型 Dynkin 箭图记为 $\underline{Q}=(\triangle_{D_{n+1}},{}^\vee\underline{\xi})$，使得

$$ {}^\vee\underline{\xi}_\imath = \xi_{\overline{\imath}} \qquad \text{for } \imath\in\triangle_0. \tag{5.3}$$

回顾记号 $\overline{Q}=(\blacktriangle_{B_n},\ \overline{\xi})$（ B_n 对应于 $\vee$-不变的 Dynkin 箭图 $Q=(\triangle_{D_{n+1}},\ {}^\vee\xi)$，其类型为 D_{n+1} 见（5.1）。

n B_n 类型的单根 $\{\alpha_i\}$ 和 Φ^+ 可在 $\mathsf{Q}^+\subset\bigoplus_{i=1}\mathbb{R}\epsilon_i$ 中如下对应：

$$\begin{aligned}
&\alpha_i=\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1} \quad \text{for } i<n, \quad \alpha_n=\varepsilon_n \quad \text{and} \quad \varepsilon_i=\sqrt{2}\epsilon_i,\\
&\Phi^+_{B_n} = \left\{\varepsilon_i-\varepsilon_j=\sum_{k=i}^{j-1}\alpha_k \mid 1\leqslant i<j\leqslant n\right\}\bigsqcup\left\{\varepsilon_i=\sum_{k=i}^{n}\alpha_k \mid 1\leqslant i\leqslant n\right\}\\
&\qquad\bigsqcup\left\{\varepsilon_i+\varepsilon_j=\sum_{k=i}^{j-1}\alpha_k+2\sum_{s=j}^{n}\alpha_s \mid 1\leqslant i<j\leqslant n\right\}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

对于$\beta\in\Phi^+_{B_n}$，我们记作

$$\beta=\begin{cases}\langle i,\pm j\rangle & \text{if } \beta=\varepsilon_i\pm\varepsilon_j \text{ for some } 1\leqslant i<j\leqslant n,\\ \langle i\rangle & \text{if } \beta=\varepsilon_i \text{ for some } 1\leqslant i\leqslant n\end{cases} \tag{5.5}$$

将 W_{B_n} 理解为 $\{\pm 1, \dots, \pm n\}$上的双射，我们对简单反射有如下描述：

$$s_i(\pm i) = \pm(i+1) \quad \text{for } i < n \quad \text{and} \quad s_n(n) = -n.$$

注意到存在一个满射 $\psi\colon \Phi^+_{D_{n+1}} \to \Phi^+_{B_n}$，其描述可以使用 $\epsilon_\imath$、$\varepsilon_{\bar\imath}$、$\alpha_\imath$ 和 $\upalpha_{\bar\imath}$ 以两种方式给出：

$$\psi(\epsilon_\imath) = \begin{cases} \varepsilon_{\bar\imath} & \text{if } \imath \leqslant n, \\ 0 & \text{if } \imath = n+1, \end{cases} \qquad (\text{equivalently, } \psi(\alpha_\imath) = \upalpha_{\bar\imath}) \tag{5.6}$$

并将其线性延拓。

对于每个 $i \in I_{B_n}$，令 $\imath$ 为 I_{D_n} 的指标，使得 $i = \imath$ 是一个整数。由（4.9）和（5.4），我们有

$$\psi^{-1}(\varepsilon_i) = \{\epsilon_\imath + \epsilon_{n+1}, \epsilon_\imath - \epsilon_{n+1}\} \quad \text{and} \quad \psi^{-1}(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) = \epsilon_\imath \pm \epsilon_j.$$

命题 5.4. 对于一个 $\vee$-不变的 Q 型 Dynkin 箭图 D_{n+1}，我们可以通过以下简单手术从 Γ_Q 得到 $\Gamma_{\overline{Q}}$：
（1）移除 Γ_Q 中位于剩余类（$n+1$）处的所有顶点。（2）
将剩余类 n 处的所有标记从 $\langle \imath, \pm(n+1)\rangle$ 替换为 $\langle i \rangle$。

为证明命题 5.4，我们需要作如下准备：

引理 5.5. 对于任意 $\vee$-固定的 Q 类型为 D_{n+1} 的 Dynkin 箭图，我们有

$$\tau_Q(\imath) = \tau_{\overline{Q}}(i) \qquad \textit{for } 1 \leqslant \imath \leqslant n.$$

证明。由引理 4.19 (c)，$\tau_Q(n+1) = -(n+1)$。由于 Q 是 $\vee$-固定的，存在一个 $1 \leqslant k < n+1$ 约化表达式 $s_{\imath_1} \cdots s_{\imath_{n+1}}$，它是 τ_Q 的约化表达式，使得 $\{\imath_k, \imath_{k+1}\} = \{n, n+1\}$。由于 $\overline{\xi}_i = {}^\vee\xi_\imath$，$1 \leqslant \imath \leqslant n$，$\tau_{\overline{Q}}$ 具有一个约化表达式 $s_{\overline{\imath_1}} \cdots s_{\overline{\imath_{k-1}}} s_{i_k^\dagger} s_{\overline{\imath_{k+2}}} \cdots s_{\overline{\imath_{n+1}}}$，使得 $i_k^\dagger = n$。因此我们的断言得证。□

下面的引理是显然的：

引理 5.6. 对于 $Q = (\blacktriangle_{B_n}, \xi)$，我们有

$$\underline{s_i Q} = \iota(s_i)\underline{Q} \qquad \textit{for } 1 \leqslant i \leqslant n,$$

其中

$$\iota(s_i) := \begin{cases} s_\imath & \textit{if } i < n, \\ s_n s_{n+1} & \textit{if } i = n. \end{cases}$$

引理 5.7. 对于任意 $\vee$-固定的 Q 类型为 D_{n+1}的 Dynkin 箭图，我们有

$$\psi(\gamma_\imath^Q) = \boldsymbol{\gamma}_i^{\overline{Q}} \qquad \textit{for } 1 \leqslant \imath \leqslant n \qquad \textit{and} \qquad \psi(\gamma_{n+1}^Q) = \boldsymbol{\gamma}_n^{\overline{Q}}.$$

证明。 由引理 5.2 和（5.6），

$$\psi(\gamma_i^Q) = \sum_{j\in B^Q(i)\setminus\{n+1\}} \left(\prod_{k=1}^{l^j-1} -\left\langle h_{p_k^j}, \alpha_{p_{k+1}^j}\right\rangle\right)\alpha_j + \delta(n+1\in B^Q(i))\left(\prod_{k=1}^{l^{n+1}-1} -\left\langle h_{p_k^{n+1}}, \alpha_{p_{k+1}^{n+1}}\right\rangle\right)\alpha_n. \tag{5.7}$$

对于任意 $j \in B^{\overline{Q}}(i) \setminus \{n\}$，有 $|c_{ji}^{B_n}| \leqslant 1$。于是，对于任意 j（$\gamma_i^{\overline{Q}}$）$= \mathrm{supp}^j$（γ_i^Q），由引理 $j \in B^Q(i) \setminus \{n\}$ 5.2，有 5.2。

设 $n \in B^{\overline{Q}}(i)$。则当 $i < n$ 时，有 $n, n+1 \in B^Q(i)$；当 $i = n$时，有 $n+1 \notin B^Q(n)$。由于 $-c_{n,\,n-1} = 2$，我们有

$$\left(\prod_{k=1}^{l^n-1} -\left\langle h_{p_k^n}, \alpha_{p_{k+1}^n}\right\rangle\right)\alpha_n + \delta(n+1\in B^Q(i))\left(\prod_{k=1}^{l^{n+1}-1} -\left\langle h_{p_k^{n+1}}, \alpha_{p_{k+1}^{n+1}}\right\rangle\right)\alpha_n = \left(\prod_{k=1}^{l^n-1} -\left\langle h_{p_k^n}, \alpha_{p_{k+1}^n}\right\rangle\right)\alpha_n,$$

这就完成了我们的断言。 □

命题 5.4 的证明。 由引理 5.7，利用 $\{\gamma_i^{\overline{Q}}\}$、$\{\gamma_i^Q\}$ 以及 (ψ 中的满射 5.6)，可得到所需结论。于是，由引理 5.5 和 (4.2)，我们的断言成立。 □

定义 5.8. 设 $\overline{p}$ in $\Gamma_{\overline{Q}}$ 是一个连通满子箭图。若它是由一条 N-路径和一条 S-路径连接而成，且二者的交点位于 $(n,p) \in (\Gamma_Q)_0$（其中 $p \in \mathbb{Z}$ 满足：存在一个正根 $\beta \in \Phi^+$ 以及 $r, s \leqslant n$，使得

$$S_r \to S_{r+1} \to \cdots \to S_{n-1} \to \beta \Rightarrow N_{n-1} \to N_{n-2} \to \cdots \to N_s \quad \text{where}$$

- $S_r \to S_{r+1} \to \cdots \to S_{n-1} \to \beta$ 是一条 S-路径（$\phi_Q^{-1}(S_l, 0) = (l,k)$，对于 $k \in \mathbb{Z}$），
- $\beta \Rightarrow N_{n-1} \to N_{n-2} \to \cdots \to N_s$ 是一条 N-路径（$\phi_Q^{-1}(N_l, 0) = (l,k')$，对于 $k' \in \mathbb{Z}$），
- β 位于 (n,p)，其中 $p \in \mathbb{Z}$。

根据命题 5.4，我们有 B_n-命题 4.16 和命题 4.18 的如下类比：

命题 5.9。

(1) 对于 $\Gamma_{\overline{Q}}$ 中的每个摆动，存在唯一的 $1 \leqslant a \leqslant n$ 满足以下性质：

(i) 每个顶点共享一个分量 ε_a。(ii) 如果每个顶点共享一个分量 ε_a，则该分量恰好包含 $(2n-a)$ 个顶点。(iii) 所有以 ε_a 为其分量的正根都出现在该摆动中。(iv) 它从 1 开始或在 1 处结束。(v) 只有 n 个摆动。

因此，我们将该摆动称为 a-摆动，并将其记为 $\overline{\varrho}_a$。

（2）设 $\overline{p}$ 是 $\Gamma_{\overline{Q}}$ 中的一条浅的 S （分别为 N）-路径。则存在唯一的 $2 \leqslant a \leqslant n$ 使得

(i) $\overline{p}$ 由（$a-1$）个顶点组成，(ii) ρ 中的所有顶点都以 ε_{-a} 作为其分量。

此外，恰好存在（$n-1$）条浅的 X-路径（$X = S$ 或 N）位于$\Gamma_{\overline{Q}}$中。因此，我们将这条浅的 X-路径称为（$-a$）-路径，并记为$\overline{p}_{-a}$。

由命题 5.4 和命题 5.9，我们得到本小节的以下主要结果：

定理 5.10. 对于每个 σ-固定的 Q （类型为 D_{n+1} 和 $k \in \mathbb{Z}$），有

$$\psi\left(\tau_Q^k(\gamma_i^Q)\right) = \tau_{\overline{Q}}^k(\gamma_i^{\overline{Q}}) \quad for\ \imath < n$$

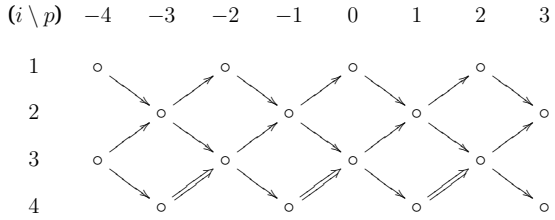
and

$$\psi\left(\tau_Q^k(\gamma_i^Q)\right) = \tau_{\overline{Q}}^k(\gamma_n^{\overline{Q}}) \quad for\ \imath = n\ or\ n+1.$$

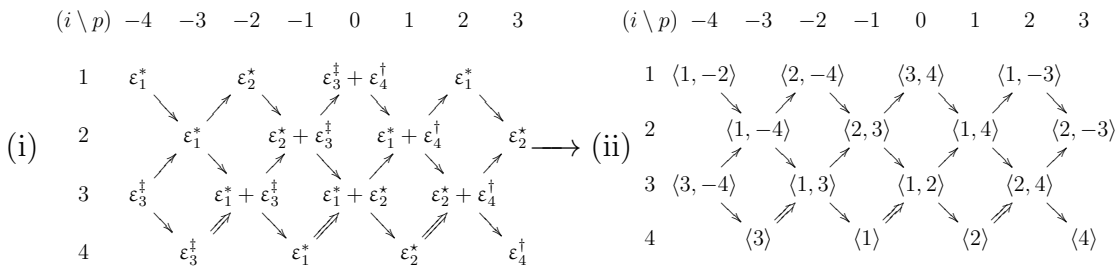
例 5.11. 考虑如下类型为 B_4的 $\vee$-固定 Dynkin 箭图 Q:

$$Q \ = \ \overset{2}{\underset{1}{\circ}} \longleftarrow \overset{3}{\underset{2}{\circ}} \longrightarrow \overset{2}{\underset{3}{\circ}} \longleftarrow \overset{3}{\underset{4}{\circ}}$$

根据（4.4），不带标记的 Γ_Q 如下给出：



通过依次应用命题 5.9 (1) 和 (2，我们可以完成 Γ_Q 的标注如下：



5.2. C_n情形。注意，对于类型为 A_{2n-1} 的 $\mathfrak{g}$，其对应的 ${}^{\vee}\mathfrak{g}$ 为类型 C_n。简单n根 $\{\alpha_i\}$ 和 $\Phi^+_{C_n}$ 可在 $\mathbf{Q}^+ \subset \bigoplus_{i=1} \mathbb{Z}\epsilon_i$ 中如下对应：

$$\begin{aligned}
&\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \quad \text{for } i < n \quad \text{and} \quad \alpha_n = 2\epsilon_n \\
&\Phi^+_{C_n} = \left\{ \epsilon_i - \epsilon_j = \sum_{k=i}^{j-1} \alpha_k \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n \right\} \bigsqcup \left\{ 2\epsilon_i = 2\sum_{k=i}^{n-1} \alpha_k + \alpha_n \mid 1 \leqslant i \leqslant n \right\} \\
&\qquad \bigsqcup \left\{ \epsilon_i + \epsilon_j = \sum_{k=i}^{j-1} \alpha_k + 2\sum_{s=j}^{n-1} \alpha_s + \alpha_n \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n \right\}.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

对于 $\beta \in \Phi^+_{C_n}$，我们记（参见（5.5））

$$\beta = \begin{cases} \langle i, \pm j \rangle & \text{if } \beta = \epsilon_i \pm \epsilon_j \text{ for some } 1 \leqslant i < j \leqslant n, \\ \langle i, i \rangle & \text{if } \beta = 2\epsilon_i \text{ for some } 1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases} \tag{5.9}$$

注意，$\mathbf{W}_{B_n} \simeq \mathbf{W}_{C_n}$。对于类型为 B_n 的 Dynkin 箭图 $Q = (\blacktriangle_{B_n}, \xi)$，我们将类型为 C_n 的 Dynkin 箭图记为$Q^{\mathrm{tr}} = (\blacktriangle_{C_n}, \xi^{\mathrm{tr}})$，使得

$$\xi^{\mathrm{tr}}_i = \xi_i \qquad \text{for } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

于是我们有一个自然双射 $\psi^{\mathrm{tr}}\colon \Phi^+_{B_n} \to \Phi^+_{C_n}$，其定义为

$$\psi^{\mathrm{tr}}(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) = \epsilon_i \pm \epsilon_j \ \ (1 \leqslant i < j \leqslant n) \qquad \text{and} \qquad \phi^{\mathrm{tr}}(\varepsilon_i) = 2\epsilon_i.$$

命题 5.12. 对于所有 $1 \leqslant i \leqslant n$，我们有

$$\psi^{\mathrm{tr}}(\gamma^Q_i) = \gamma^{Q^{\mathrm{tr}}}_i.$$

证明。注意，对于所有 $1 \leqslant i \leqslant n$，$B^Q(i) = B^{Q^{\mathrm{tr}}}(i)$。令

(a) $a = \min(s \mid s \in B^Q(i))$，(b) $b = \max($
$s \mid s \in B^Q(i))$，如果 $i \neq n$ 且 $n \notin B^Q(i)$。

根据引理 5.2，我们有

$$\begin{aligned}
\gamma^Q_i &= \begin{cases} \displaystyle\sum_{j \in B^Q(n)} \alpha_j & \text{if } i = n, \\ \displaystyle\sum_{j \in B^Q(i) \setminus \{n\}} \alpha_j + \delta(n \in B^Q(i)) 2\alpha_n & \text{if } i \neq n, \end{cases} \\
&= \begin{cases} \varepsilon_a & \text{if } i = n, \\ \varepsilon_a - \varepsilon_{b+1} & \text{if } i \neq n \text{ and } n \notin B^Q(i), \\ \varepsilon_a + \varepsilon_n, & \text{if } i \neq n \text{ and } n \in B^Q(i), \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

另一方面，我们有

$$\gamma_i^{Q^{\mathrm{tr}}} = \begin{cases} \left(\sum_{j \in B^Q(n) \setminus \{n\}} 2\alpha_j \right) + \alpha_n & \text{if } i = n, \\ \sum_{j \in B^Q(i)} \alpha_j & \text{if } i \neq n, \end{cases} \tag{5.11}$$

$$= \begin{cases} 2\epsilon_a & \text{if } i = n, \\ \epsilon_a - \epsilon_{b+1} & \text{if } i \neq n \text{ and } n \notin B^Q(i), \\ \epsilon_a + \epsilon_n, & \text{if } i \neq n \text{ and } n \in B^Q(i), \end{cases}$$

这就得到了我们的断言。 □

注意，任意一个 Q 类型的 C_n 都是某个 Q 类型的 B_n。因此我们有如下定理:

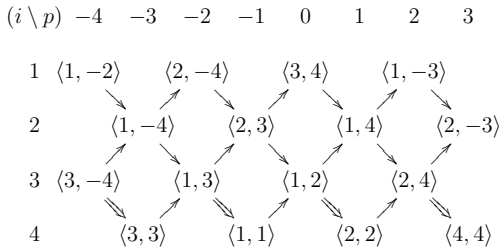
命题 5.13。用记号 $\langle i、 \pm j\rangle$ 和 $\langle i、 i\rangle$ 对 $\Gamma_{Q^{\mathrm{tr}}}$ 进行的标记，可以通过仅将 $\langle i\rangle$ 替换为 $\langle i、 i\rangle$（对于 $1 \leqslant i \leqslant n$）而从对 Γ_Q 的标记得到。

证明。 根据前一个命题，记号的替换适用于 $\{\gamma_i^Q\}$ 和 $\{\gamma_i^{Q^{\mathrm{tr}}}\}$。于是，由于以下事实，我们的断言成立：$\mathsf{W}_{B_n} = \mathsf{W}_{C_n}$ 以及双射 ϕ 见（4.2）。□

例 5.14。 考虑 Q ，它是例 5.11中 B_4 类型的 Dynkin 箭图。则其相应的 Q^{tr} 的 C_4 可以如下表示:

$$Q \;=\; \overset{2}{\underset{1}{\circ}} \longleftarrow \overset{3}{\underset{2}{\circ}} \longrightarrow \overset{2}{\underset{3}{\circ}} \longleftarrow \overset{3}{\underset{4}{\circledcirc}}$$

采用 Γ_Q 在例 5.11 和命题 5.13中的标记，我们有



对于每个 $i \in I_{C_n}$，令 $\imath$ 为满足 $i = \imath$ 为整数的 $I_{A_{2n-1}}$ 的指标。注意，存在一个满射 $\psi\colon \Phi^+_{A_{2n-1}} \to \Phi^+_{C_n}$，其描述如下:

$$\psi(\alpha_\imath) = \alpha_{\bar{\imath}} \qquad \left(\text{equivalently, } \psi(\epsilon_\imath) = \begin{cases} \epsilon_{\bar{\imath}} & \text{if } \imath \leqslant n, \\ -\epsilon_{2n+1-\bar{\imath}} & \text{if } \imath > n, \end{cases} \right) \tag{5.12}$$

并将其线性延拓。

于是，$\beta \in \Phi^+_{C_n}$ 的逆像可描述如下：

$$\psi^{-1}(2\epsilon_i) = \epsilon_\imath - \epsilon_{2n+1-\imath} = \sum_{k=\imath}^{2n-\imath} \alpha_k \quad \text{for } 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$$\psi^{-1}(\epsilon_i - \epsilon_j) = \left\{ \epsilon_\imath - \epsilon_\jmath = \sum_{k=\imath}^{\jmath-1} \alpha_k, \vee(\epsilon_\imath - \epsilon_\jmath) = \epsilon_{2n+1-\jmath} - \epsilon_{2n+1-\imath} = \sum_{k=2n+1-\jmath}^{2n-\imath} \alpha_k \right\}, \tag{5.13}$$

$$\psi^{-1}(\epsilon_i + \epsilon_j) = \left\{ \epsilon_\imath - \epsilon_{2n+1-\jmath} = \sum_{k=\imath}^{2n-\jmath} \alpha_k, \vee(\epsilon_\imath - \epsilon_{2n+1-\jmath}) = \epsilon_\jmath - \epsilon_{2n+1-\imath} = \sum_{k=\jmath}^{2n-\imath} \alpha_k \right\}$$

对于 $i < j \leqslant n$。

注意，对于 $\vee$-固定的 $Q = (\triangle, {}^\vee\xi)$ 型 Dynkin 箭图，由于存在一个 τ_Q 的约化表达式 $s_{\imath_1} \cdots s_{\imath_{2n-1}}$，使得

$$\begin{cases} \imath_1 = n, \quad (\imath_{2s}, \imath_{2s+1}) = (k_s, \vee(k_s)) & \text{if } n \text{ is a source of } Q, \\ \imath_{2n-1} = n, (\imath_{2s-1}, \imath_{2s}) = (k_s, \vee(k_s)) & \text{if } n \text{ is a sink of } Q, \end{cases} \tag{5.14}$$

对于 $1 \leqslant s \leqslant n-1$ 且唯一的 $k_s \in \{1, \ldots, n-1\}$。因此，对于 $\vee$-固定的 Q 型 Dynkin 箭图，Coxeter 元 τ_Q 也是 $\vee$-固定的，其含义是

$$\vee \tau_Q \vee = \tau_Q. \tag{5.15}$$

引理 5.15. 对于每个 $\vee$-固定的 Q 型 A_{2n-1} 和 $k \in \mathbb{Z}$，有

$$\psi(\gamma_\imath^Q) = \psi(\gamma_{2n-\imath}^Q) = \gamma_i^{\overline{Q}} \quad \textit{for } \imath \leqslant n. \tag{5.16}$$

证明。 (5.16) 中的等式由引理 4.27 以及 (ψ 5.12) 中的满射得到。

由于 n 是 Q的汇或源点，$\mathrm{supp}(\gamma_i^Q) \subset \{1, \ldots, n\}$ 对于 $\imath < n$，且 $\mathrm{supp}(\gamma_i^Q) \subset \{n, \ldots, 2n-1\}$ 对于 $\imath > n$。因此 n 是 $\overline{Q}$ 的汇或源点，并且 $\mathrm{supp}(\gamma_i^Q) \subset \{1, \ldots, n\}$ 对于$i < n$ 以及

$$\psi(\gamma_\imath^Q) = \sum_{\jmath \in B^Q(\imath)} \alpha_j.$$

由于 $B^Q(\imath) = B^{\overline{Q}}(i)$ 作为 $i < n$ 的整数子集，这些情形的断言由（5.11）可得。

对于 $i = n$，若 $i \in B^{\overline{Q}}(n)$，则有 $\imath$，$2n - \imath \in B^Q(n)$。因此关于 $i = n$ 的断言也由（5.11）可得。□

对于 $\vee$-固定的 Dynkin 箭图 Q，其类型为 A_{2n-1}，在 Γ_Q中剩余类为 n 的正根构成集合 $\eta := \{[i, 2n-i] \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$，因为 γ_n^Q和 τ_Q 都是 $\vee$-固定的，并且 $r_n^Q = n$（见（4.6））。我们通过使用 ϕ_Q^{-1} 如下标记集合：

$$\eta_k = [a_k, 2n - a_k] = \epsilon_{a_k} - \epsilon_{2n+1-a_k} = \epsilon_{a_k} - \epsilon_{b_k} \in \Phi^+_{A_{2n-1}} \quad (1 \leqslant k \leqslant n \text{ and } 1 \leqslant a_k \leqslant n)$$

其中

$$(\eta_1, 0) = \phi_Q(n, \xi_n), \ (\eta_2, 0) = \phi_Q(n, \xi_n - 2), \ldots, (\eta_n, 0) = \phi_Q(n, \xi_n - 2(n-1)).$$

于是有 $\{a_1、\ldots\ldots、a_n\}=\{1,\ldots,n\}$ 和 $\{b_1,\ldots,b_n\}=\{n+1,\ldots,2n\}$。它还意味着

$$\tau_Q(\epsilon_{a_k})=\epsilon_{a_{k+1}} \text{ and } \tau_Q(\epsilon_{b_k})=\tau_Q(\epsilon_{2n+1-a_k})=\epsilon_{b_{k+1}} \text{ for } 1\leqslant i<n.$$

回忆一下， n 是 Q的源点或汇。

(1) 若 n 是 Q的源点，则有 $\epsilon_{a_1}-\epsilon_{b_1}=[n]=\epsilon_n-\epsilon_{n+1}$，从而 $\tau_Q(\epsilon_{a_n})=\epsilon_{n+1}$。(2) 若 n是 Q的汇，则有 $\epsilon_{a_n}-\epsilon_{b_n}=[n]=\epsilon_n-\epsilon_{n+1}$，从而 $\tau_Q(\epsilon_n)=\epsilon_{2n+1-a_1}$以及 $\tau_Q(\epsilon_{n+1})=\epsilon_{a_1}$。

命题 5.16。我们有

$$\tau_{\overline{Q}}(\epsilon_{a_k})=\epsilon_{a_{k+1}} \quad for\ 1\leqslant k<n \quad and \quad \tau_{\overline{Q}}(\epsilon_{a_n})=-\epsilon_{a_1}$$

证明。 回忆约化表达式 $\tau_Q=s_{\imath_1}\cdots s_{\imath_{2n-1}}$见（5.14）。

(1) 假设 n 是 Q 的源点。则 $\tau_{\overline{Q}}$ 有一个约化表达式 $s_ns_{i_2}s_{i_4}\cdots s_{i_{2n}}$。由于对于 $2\leqslant k\leqslant n$ 有 $a_k<n$，我们得到 $\tau_Q^{k-1}(\epsilon_n)=\tau_Q^{k-1}(\epsilon_{a_1})=\epsilon_{a_k}=s_n\epsilon_{a_k}$。因此，对于 $1\leqslant k<n$，有 $\tau_{\overline{Q}}(\epsilon_{a_k})=\epsilon_{a_{k+1}}$。对于 $k=n$，我们有 $\tau_Q(\epsilon_{a_n})=\epsilon_{n+1}=s_n(\epsilon_n)$，这意味着 $s_{i_2}s_{i_4}\cdots s_{i_{2n}}(\epsilon_{a_n})=\epsilon_n$。于是我们有 $\tau_{\overline{Q}}(\epsilon_{a_n})=s_n(\epsilon_n)$ $=-\epsilon_n=-\epsilon_{a_1}$。

(2) 假设 n是 Q 的汇。则 $\tau_{\overline{Q}}$有一个约化表达式 $s_{i_1}s_{i_3}\cdots s_{i_{2n-1}}s_n$。注意到$a_i\leqslant n$对于 $1\leqslant i<n$ 和 $a_n=n$。于是，对于 $1\leqslant k\leqslant n$，我们有 $\tau_{\overline{Q}}^{k-1}(\epsilon_{a_1})=\tau_{\overline{Q}}^{k-1}(\epsilon_{a_1})=\epsilon_{a_k}$。现在计算 $\tau_{\overline{Q}}(\epsilon_{a_n})$。根据引理 5.15 和，我们有

$$w_0(2\epsilon_{a_1})=\tau_{\overline{Q}}^n(2\epsilon_{a_1})=\tau_{\overline{Q}}^n(\gamma_n^{\overline{Q}})=\tau_{\overline{Q}}(2\epsilon_{a_n})=-\gamma_n^{\overline{Q}}=-2\epsilon_{a_1},$$

这意味着 $\tau_{\overline{Q}}(\epsilon_{a_n})=-\epsilon_{a_1}$。 □

定理 5.17. 对于每个类型为 A_{2n-1} 和 $k\in\mathbb{Z}$的 $\vee$-不变 Q，我们有

$$\psi\left(\tau_Q^k(\gamma_i^Q)\right)=\psi\left(\tau_Q^k(\gamma_{2n-\imath}^Q)\right)=\tau_{\overline{Q}}^k(\gamma_i^{\overline{Q}}).$$

证明。 根据命题 5.12、（5.12）和（5.15），我们有

$$\psi(\tau_Q(\alpha_\imath))=\tau_{\overline{Q}}(\psi(\alpha_\imath)) \qquad \text{for all } 1\leqslant\imath\leqslant 2n-1.$$

由于 $\psi(\gamma_i^Q)=\psi(\gamma_{2n-\imath}^Q)=\gamma_i^{\overline{Q}}$ 由引理 5.15，故断言得证。 □

5.3。 F_4 和 G_2 情形。 （1）正根集$\Phi_{E_6}^+$ 可描述为 s

$$\begin{gathered}(000001),(000010),(000100),(011111),(101110),(010100),\\(001000),(100000),(000011),(000110),(011211),(112221),\\(111210),(011100),(101000),(000111),(011221),(112321),\\(122321),(112210),(111100),(010111),(001110),(111211),\\(011110),(101100),(010000),(001111),(111211),(011210),\\(112211),(111110),(101111),(010110),(001100),(111111),\end{gathered}$$

其中 $(a_1a_2a_3a_4a_5a_6):=\sum_{i=1}^6 a_i\alpha_i$。

另一方面，正根集合$\Phi^+_{F_4}$ 可以描述为

$$\begin{aligned}&(0001),(0010),(0100),(1121),(0121),(1100),\\&(0011),(0110),(1221),(1242),(1110),(0111),\\&(1231),(1342),(2342),(1111),(0120),(1222),\\&(1120),(1000),(1220),(1232),(0122),(1122),\end{aligned}$$

其中 $(b_1b_2b_3b_4)\colon=\sum_{i=1}^4 b_i\alpha_{i\circ}$

然后容易检验，存在一个双射 $\psi\colon \Phi^+_{E_6}\to\Phi^+_{F_4}$，其定义为

$$\alpha_{\imath}\mapsto \alpha_{\overline{\imath}}\quad \text{and extends it linearly.}$$

注意，在 $\Phi^+_{F_4}$ 中满足 $\psi^{-1}(\beta)=1$ 或 2 的正根 β，以及

$$\{\beta\in\Phi^+_{F_4}\mid \phi^{-1}(\beta)=2\}=\left\{\begin{matrix}(0001),(0010),(1221),(0011),(1231),(1111)\\(0111),(0121),(1222),(1121),(1110),(0110)\end{matrix}\right\}.$$

(2) 正根$\Phi^+_{G_2}$ 如下列出：

$$\Phi^+_{G_2}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_1+\alpha_2,3\alpha_1+\alpha_2,3\alpha_1+2\alpha_2\}$$

Then ~容易检验，存在一个双射 $\psi\colon \Phi^+_{D_4}\to\Phi^+_{G_2}$，其定义为

$$\alpha_{\imath},\mapsto \alpha_{\overline{\imath}}\quad \text{and extends it linearly.}$$

现在可以验证下述定理成立：

定理 5.18. 对于每个 $\vee$-固定的（分别为 $\widetilde{\vee}$-固定的） $Q=(\triangle,{}^{\vee}\xi)$（分别为 $Q=(\triangle,{}^{\widetilde{\vee}}\xi)$），其类型为 E_6（分别为 D_4）且满足 $k\in\mathbb{Z}$，我们有

$$\psi\left(\tau_Q^k(\gamma_i^Q)\right)=\tau_{\overline{Q}}^k(\gamma_{\overline{i}}^{\overline{Q}})\quad (resp.\ \widetilde{\psi}\left(\tau_Q^k(\gamma_i^Q)\right)=\tau_{\overline{Q}}^k(\gamma_{\overline{i}}^{\overline{Q}}))\quad for\ i\in\triangle_0.$$

6. Degree polynomials

在本节中，我们将次数多项式的定义推广到包含类型 $BCFG$，并利用前几节的结果计算这些类型中的次数多项式。回顾小节 2.3 中介绍的统计量。在本节中，我们几乎略去证明，因为其论证与 [50] 中的论证几乎相同，后者将命题 5.9 和命题 5.13 中所描述的标记算法作为关键工具。

由（4.2）以及（4.5）中的反射操作（b），引理 4.10和命题 4.12 可以推广到任意有限型的 Dynkin 图 $\triangle$：

命题 6.1。

(a) 设 Q 是任意有限型的 Dynkin 箭图。对于任意 $\mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii}$、$\mathrm{hh}\alpha',\beta'\mathrm{ii}\in\Phi_Q(i,j)[k]$，有 $\deg_{[Q]}(\mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii})=\deg_{[Q]}(\mathrm{hh}\alpha',\beta'\mathrm{ii})$。因此，整数 $o_k^Q(i,j)$ 由 (4.7) 良定义。随后我们通过 (4.8) 定义 $o_k^Q(i,j)$。(b) 设 $\triangle$ 是任意有限型的 Dynkin 图。对于任意 $[Q],[Q']\in[\![\triangle]\!]$，有 $o_k^Q(i,j)=o_k^{Q'}(i,j)$。因此，$o_k^{\triangle}(i,j)$ 是良定义的。

证明。(a) 根据 (4.2)、(4.4) 以及假设，存在 $0 \leqslant a, a', b, b' < \mathsf{h}/2$ 使得 $\tau_Q^a(\gamma_i^Q) = \alpha$， $\tau_Q^b(\gamma_j^Q) = \beta$， $\tau_Q^{a'}(\gamma_i^Q) = \alpha'$， $\tau_Q^{b'}(\gamma_j^Q) = \beta'$， $s{:=}a-a' = b-b'$。因此，$\underline{m} \prec_Q^{\mathsf{b}} \mathsf{hh}\alpha, \beta\mathsf{ii}$ 当且仅当 $\tau_Q^{-s}(\underline{m}) \prec_Q^{\mathsf{b}} \mathsf{hh}\alpha', \beta'\mathsf{ii}$。此处，$\tau_Q^{-s}(\underline{m})$ 表示对 $\underline{m}$ 应用 τ_Q^{-s} 后得到的 $\underline{m}$ 的规范指数。

（b）只需证明 $\mathsf{O}_k^Q(i, j) = \mathsf{O}_k^{s_t Q}(i, j)$ 对于具有源点的 Dynkin 箭图 $Q = (\triangle, \xi)$ 成立即可 $t \in \triangle_0$。由于$\mathsf{h}/2 > 2$，第二个断言由（a）以及（4.5）中的反射操作（b）可得。□

定义 6.2. 设 t 为一个不定元。

（1）对于任意有限型的 Dynkin 图 $\triangle$ 以及 i、$j \in \triangle_0$，我们定义多项式 $\mathfrak{d}_{i,j}^{\triangle}(t)$ 如下：

$$\mathfrak{d}_{i,j}^{\triangle}(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}} \max(\mathsf{d}_i, \mathsf{d}_j) \mathsf{O}_k^{\triangle}(i, j) t^{k-1}. \tag{6.1}$$

我们将 $\mathfrak{d}_{i,j}^{\triangle}(t)$ 称为 $\triangle$ 在 (i, j) 处的次数多项式。

（2）对于 $k \in \mathbb{Z}$，我们令

$$\mathfrak{d}_{i,j}[k] := \max(\mathsf{d}_i, \mathsf{d}_j) \mathsf{O}_k^{\triangle}(i, j).$$

注6.3。定义 6.2 与定义 4.11 一致，Q 是类型为 ADE的 Dynkin 箭图时，因为 $\mathsf{d}_i = 1$ 对所有 $i \in \triangle_0$均成立。

引理 6.4。设 $\underline{p} = \mathsf{hh}\alpha, \beta\mathsf{ii}$ 是 $(\Phi_{\triangle}^+)^2$ 中的一个 $[Q]$-对。若 $\deg_Q(\mathsf{hh}\alpha, \beta\mathsf{ii}) \neq 0$，则有

$$\deg_{\overline{Q}}(\langle\!\langle \psi(\alpha), \psi(\beta) \rangle\!\rangle) \neq 0.$$

证明。由于 $\deg_Q(\alpha, \beta) \neq 0$，存在 $\underline{m}$ 使得 $\underline{m} \prec_Q^{\mathsf{b}} \underline{p}$。令 $\psi(\underline{m})$ 为 $\Phi_{\blacktriangle}^+$ 中的指数，它可以理解为经由 ψ 将 $\underline{m}$ 映射得到的规范像。于是有

$$\psi(\underline{m}) \prec_{\overline{Q}}^{\mathsf{b}} \langle\!\langle \psi(\alpha), \psi(\beta) \rangle\!\rangle$$

因为 $\eta_1 \prec_Q \eta_2$ 蕴含 $\psi(\eta_1) \prec_{\overline{Q}} \psi(\eta_2)$。断言得证。 □

注 6.5。注意，尽管关于 $\prec_Q$ 而言 $\alpha, \beta \in \Phi_{\triangle}^+$ 不可比较，但有时 $\psi(\alpha)$ $\psi(\beta) \in \Phi_{\blacktriangle}^+$ 关于 $\prec_{\overline{Q}}$ 却是可比较的。此外，存在一对 $\mathsf{hh}\alpha, \beta\mathsf{ii} \in (\Phi_{\triangle}^+)^2$，使得 $\deg_Q(\alpha, \beta) = 0$，但 $\deg_{\overline{Q}}(\psi(\alpha)\ \psi(\beta)) \neq 0$。例如，考虑例4.4中类型为 A_5 的 $\mathsf{hh}[2, 5], [2, 3]\mathsf{ii}$。于是有

$\deg_Q([2, 5], [2, 3]) = 0$，而 $\deg_{\overline{Q}}(\psi([2, 5])\ \psi([2, 3])) = \deg_{\overline{Q}}(\langle 2, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle) = 1$，因为 $\mathrm{hd}_{\overline{Q}}(\langle 2, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle) = (\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle)$（参见 Γ_Q 类型 A_5 的例4.4以及$\Gamma_{\overline{Q}}$类型C_3 的例 4.5）。

在以下各小节中，我们将通过逐个情形讨论的方法给出下述定理的证明（参见注4.29）。

定理 6.6. 设 $\triangle$ 是经典型 A_n、B_n、C_n、D_n 和 E_6 的 Dynkin 图。则有

$$\widetilde{\mathfrak{d}}_{i,j}^{\triangle}(t) = \mathfrak{d}_{i,j}^{\triangle}(t) + \delta_{i,j^*}\, \mathsf{d}_i\, t^{\mathsf{h}-1}.$$

注意，fo 当 A_n、D_n 和 E_6 时的 r 种情形；上述定理已在 [48, 49, 50 中得到证明].

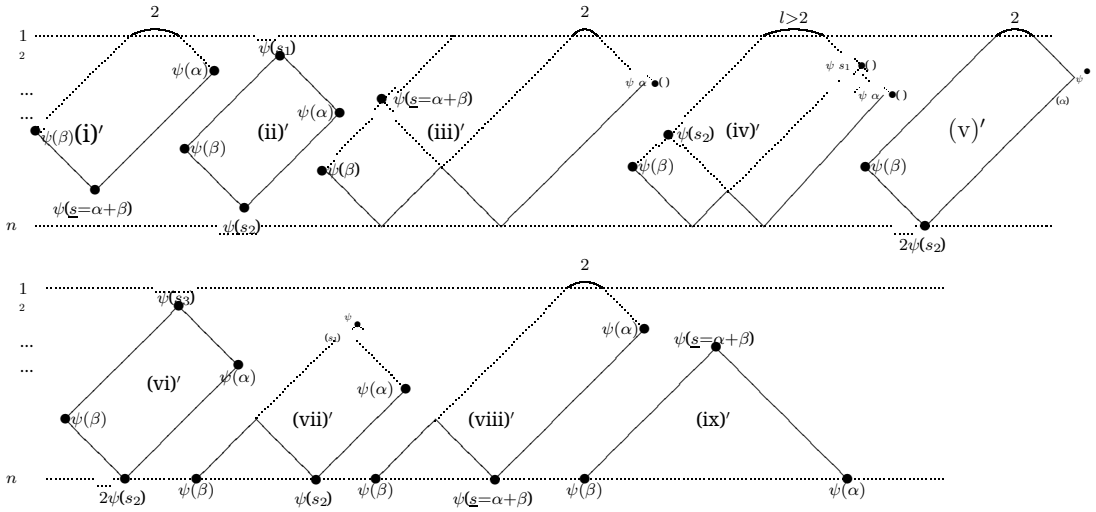
6.1. B_n情形。在本小节中，△ 表示 D_{n+1} 类型的 Dynkin 图，而▲ 表示 B_n类型的 Dynkin 图。

定理 6.7。设 ▲ 为 B_n类型的 Dynkin 图。则有

$$\mathfrak{d}^{\blacktriangle}_{i,j}(t) + \delta_{i,j}\, \mathsf{d}_i\, t^{\mathsf{h}-1} = \widetilde{\mathfrak{d}}^{\blacktriangle}_{i,j}(t).$$

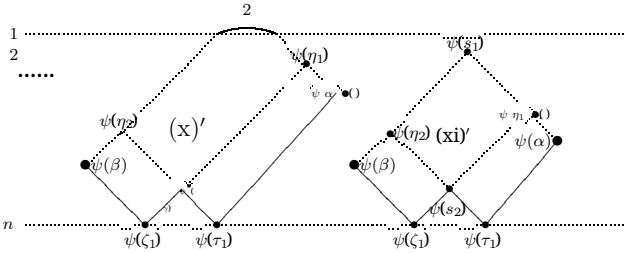
通过 ψ 在（4.10）中取值，我们得到以下图示：

(6.2)



取 ψ （4.11）可得：

(6.3)



$2 \leqslant i, j \leqslant n-2$

在每种情况下，该值（α， β） = （$\psi(\alpha)$ $\psi(\beta)$）不依赖于 Q 的选择，并且列于表3中：

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)	(ix)	(x)	(ix)
(α, β)	−2	0	−2	0	0	2	0	−2	0	−2	0

TABLE 3. （α， β），对于非 $[Q]$-单纯的 $[Q]$-对，类型为 B_n

对于 hhα, βii 是 $\alpha+\beta \in \Phi^+$ 的 $[Q]$-极小 $[Q]$-对的情形，

(6.4) $$p_{\beta,\alpha} = 1 \quad \text{if } \langle\!\langle \alpha, \beta \rangle\!\rangle \text{ is of case (ix)}' \quad \text{and} \quad p_{\beta,\alpha} = 0, \text{ otherwise.}$$

例 6.8。 使用 Γ_Q 在例 5.11中,

(1) $\langle 1,2\rangle \prec_Q^{\flat} \mathrm{hh}\langle 1,-3\rangle,\langle 2,3\rangle\mathrm{ii}$ 对应于 (i)′; (2) $\mathrm{hh}\langle 1,-3\rangle,\langle 2,4\rangle\mathrm{ii} \prec_Q^{\flat} \mathrm{hh}\langle 2,-3\rangle,\langle 1,4\rangle\mathrm{ii}$ 对应于 (ii)′; (3) $\langle 2,-4\rangle \prec_Q^{\flat} \mathrm{hh}\langle 2,-3\rangle,\langle 3,-4\rangle\mathrm{ii}$ 对应于 (iii)′; (4) $\mathrm{hh}\langle 1,-3\rangle,\langle 2,-4\rangle\mathrm{ii} \prec_Q^{\flat} \mathrm{hh}\langle 2,-3\rangle,\langle 1,-4\rangle\mathrm{ii}$ 对应于 (iv)′; (5) $2\langle 1\rangle \prec_Q^{\flat} \mathrm{hh}\langle 1,-3\rangle,\langle 1,3\rangle\mathrm{ii}$ 对应于 (v)′; (6) $\{\langle 3,4\rangle, 2\langle 1\rangle\}_{\beta\in\Phi^+} \prec_Q^{\flat} \mathrm{hh}\langle 1,4\rangle,\langle 1,3\rangle\mathrm{ii}$ 对应于 (vi)′; (7) $\mathrm{hh}\langle 1\rangle,\langle 2,3\rangle\mathrm{ii} \prec_Q^{\flat} \mathrm{hh}\langle 1,2\rangle,\langle 3\rangle\mathrm{ii}$ 对应于 (vii)′; (8) $\langle 1\rangle \prec_Q^{\flat} \mathrm{hh}\langle 1,-3\rangle,\langle 3\rangle\mathrm{ii}$ 对应于 (viii)′; (9) $\langle 2,3\rangle \prec_Q^{\flat} \mathrm{hh}\langle 2\rangle,\langle 3\rangle\mathrm{ii}$ 对应于 (ix)′; (10) $\langle 1,2\rangle \prec_Q^{\flat} \mathrm{hh}\langle 1,-3\rangle,\langle 2,3\rangle\mathrm{ii}$, $\mathrm{hh}\langle 2\rangle,\langle 1\rangle\mathrm{ii} \prec_Q^{\flat} \mathrm{hh}\langle 2,-3\rangle,\langle 1,3\rangle\mathrm{ii}$ 对应于 (x)′; (11) $\mathrm{hh}\langle 1,2\rangle,\langle 3,4\rangle\mathrm{ii} \prec_Q^{\flat} \mathrm{hh}\langle 1\rangle,\langle 2\rangle,\langle 3,4\rangle\mathrm{ii}$, $\mathrm{hh}\langle 2,3\rangle,\langle 1,4\rangle\mathrm{ii} \prec_Q^{\flat} \mathrm{hh}\langle 2,4\rangle,\langle 1,3\rangle\mathrm{ii}$ 对应于 (xi)′。

由于 Γ_Q 与 $\Gamma_{\underline{Q}}$的组合结构具有相似性，正如命题 4.16、4.18 中关于 Γ_Q 以及命题 5.9 中关于$\Gamma_{\underline{Q}}$所描述的那样，我们可以在[50] 中应用相同的论证，从而得到以下定理:

定理 6.9. 设 $Q=(\blacktriangle,\xi)$ 是一个类型为 B_n 的 Dynkin 箭图。
(1) 对任意 $[Q]$-对 $\mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii}$, $\in(\Phi_{B_n}^+)^2$, $\mathrm{hd}_Q(\mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii})$ 都是良定义的。(2) 对于一个 $[Q]$-对 $\mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii}$，若 $\deg_Q(\mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii}) \neq 0$，则 $\mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii}$ 的相对位置属于 (i)′ ∼(xi)′ 中的一个，即 (6.2) 和 (6.3) 中所列出的情形。(3) 每个指数 $\underline{m} \prec_Q^{\flat} \mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii}$ 也可由 (6.2) 和 (6.3) 描述。(4) 对于 $\mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii} \in(\Phi_{\blacktriangle}^+)^2,$，假设 $\deg_Q(\mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii}) \neq 0$。则存在 $\alpha'\in\psi^{-1}(\alpha)$ 和 $\beta'\in\psi^{-1}(\beta)$，使得 $\deg_{\underline{Q}}(\mathrm{hh}\alpha',\beta'\mathrm{ii}) \neq 0$ 且 $\mathrm{hd}_Q(\mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii}) = \psi(\mathrm{hd}_{\underline{Q}}(\mathrm{hh}\alpha',\beta'\mathrm{ii}))$。此外，在此情形下，我们有

$$\deg_Q(\langle\!\langle\alpha,\beta\rangle\!\rangle)=\deg_{\underline{Q}}(\langle\!\langle\alpha',\beta'\rangle\!\rangle).$$

注意，在情形 (v) 和 (vi) 中，$\mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii}$ 的头部具有分量 2，而这一现象不会发生在 D_{n+1}-情形中。

定理 6.7的证明。 注意，对于 $1\leqslant i,\ j\leqslant n$ 且 $\min(i,\ j)<n$，我们有 $\max(\mathrm{d}_i,\ \mathrm{d}_j)=2$。由定理 6.9，我们有

$$\mathfrak{d}_{i,j}^{\blacktriangle}(t)=2\times\mathfrak{d}_{i,j}^{\triangle}(t)$$

由公式 (4.12) 和 (6.1) 可得所述断言。

当 $i=j=n$ 时，根据定理 6.9，以及 $\psi(\epsilon_i\pm\epsilon_{n+1})=\varepsilon_i$ 和$\mathrm{d}_n=1$ 的事实，我们有

$$\mathfrak{d}_{n,n}^{\blacktriangle}(t)=\left(\mathfrak{d}_{n,n+1}^{\triangle}(t)+\mathfrak{d}_{n,n}^{\triangle}(t)\right)=\sum_{s=1}^{n}t^{2s-1},$$

这就完成了所述断言。 □

观察（6.3）可得以下命题:

命题 6.10. 对于一个 Q 类型为 B_n的 Dynkin 箭图，设 $\mathsf{hh}\alpha,\beta\mathsf{ii}$ 是一个 $[Q]$-对，使得 $\deg_Q(\mathsf{hh}\alpha,\beta\mathsf{ii}) = 2$。

（1）若 $\alpha+\beta=\gamma\in\Phi^+_{B_n}$，则存在两个 $[Q]$-对 $\mathsf{hh}\alpha_i,\beta_i\mathsf{ii}$（$1\leqslant i\leqslant 2$），其 γ 满足

$$\mathrm{hd}_Q(\langle\!\langle\alpha,\beta\rangle\!\rangle)=\gamma\prec^{\mathsf{b}}_{[Q]}\langle\!\langle\alpha_i,\beta_i\rangle\!\rangle\prec^{\mathsf{b}}_{[Q]}\langle\!\langle\alpha,\beta\rangle\!\rangle$$

（i）就 $\prec^{\mathsf{b}}_{[Q]}$ 而言，$\mathsf{hh}\alpha_1,\beta_1\mathsf{ii}$、$\mathsf{hh}\alpha_2,\beta_2\mathsf{ii}$ 不可比较，

（ii）$\{\alpha_2,\beta_2\}=\{\langle a\rangle,\langle b\rangle\}$ 且 $\mathrm{res}_Q(\alpha_1)$、$\mathrm{res}_Q(\beta_1)<n$。

（2）若 $\alpha+\beta\notin\Phi^+_{B_n}$，则存在指数 $\mathsf{hh}\alpha_1,\beta_1\mathsf{ii}$、$\{\tau,\zeta,\gamma\}_{\beta\in\Phi^+}$，使得

$$\mathrm{hd}_Q(\langle\!\langle\alpha,\beta\rangle\!\rangle)\prec^{\mathsf{b}}_{[Q]}\langle\!\langle\alpha_1,\beta_1\rangle\!\rangle,\{\tau,\zeta,\gamma\}_{\beta\in\Phi^+}\prec^{\mathsf{b}}_{[Q]}\langle\!\langle\alpha,\beta\rangle\!\rangle$$

（i）就 $\prec^{\mathsf{b}}_{[Q]}$ 而言，$\mathsf{hh}\alpha_1,\beta_1\mathsf{ii}$、$\{\tau,\zeta,\gamma\}_{\beta\in\Phi^+}$ 不可比较；（ii）$\mathrm{res}^{[Q]}(\alpha_1)$、$\mathrm{res}^{[Q]}(\gamma)$、$\mathrm{res}^{[Q]}(\beta_1)<n$，且 $\mathrm{res}^{[Q]}(\tau)$、$\mathrm{res}^{[Q]}(\zeta)=n$。

6.2. C_n情形。在本小节中，▲ 通常表示类型为C_n的 Dynkin 图。本小节旨在证明以下定理：

定理 6.11。设 ▲ 为类型为 C_n的 Dynkin 图。则有

$$\mathfrak{d}^{\blacktriangle}_{i,j}(t)+\delta_{i,j}\max(\mathsf{d}_i,\mathsf{d}_j)t^{\mathsf{h}-1}=\widetilde{\mathfrak{d}}^{\blacktriangle}_{i,j}(t).$$

回顾自然双射 $\psi^{\mathrm{tr}}\colon\ \Phi^+_{B_n}\to\Phi^+_{C_n}$ 以及命题 5.13，该命题表明，对于类型为 Γ_Q 的 Dynkin 箭图 $\Gamma_{Q^{\mathrm{tr}}}$，其 Q 与 B_n 的标记几乎相同，只要我们使用记号$\langle a$、$b\rangle$、$\langle a\rangle$ 和 $\langle a$来表示 $a\rangle$。$1\leqslant a\leqslant|b|\leqslant n$

对于 $\alpha\in\Phi^+_{B_n}$，我们令

$$\alpha^{\mathrm{tr}}:=\psi^{\mathrm{tr}}(\alpha).$$

利用 5.9 关于 $\Gamma_{\overline{Q}}$ 的命题，以及 [50], 中的类似论证，我们得到如下与 B_n情形相同的结论：

定理6.12。设 Q^{tr} 为类型为 C_n的 Dynkin 箭图。

(1) 对任意 $[Q]$-对 $\mathsf{hh}\alpha,\beta\mathsf{ii},\ \in(\Phi^+_{C_n})^2$, $\mathsf{hd}_{Q^{\mathrm{tr}}}(\mathsf{hh}\alpha,\beta\mathsf{ii})$ 都是良定义的。(2) 对 $\mathsf{hh}\alpha,\beta\mathsf{ii},\ \in(\Phi^+_{B_n})^2$, $\deg_Q(\mathsf{hh}\alpha,\beta\mathsf{ii})\neq 0$ 当且仅当 $\deg_{Q^{\mathrm{tr}}}(\mathsf{hh}\alpha^{\mathrm{tr}},\beta^{\mathrm{tr}}\mathsf{ii})\neq 0$。此外，我们有

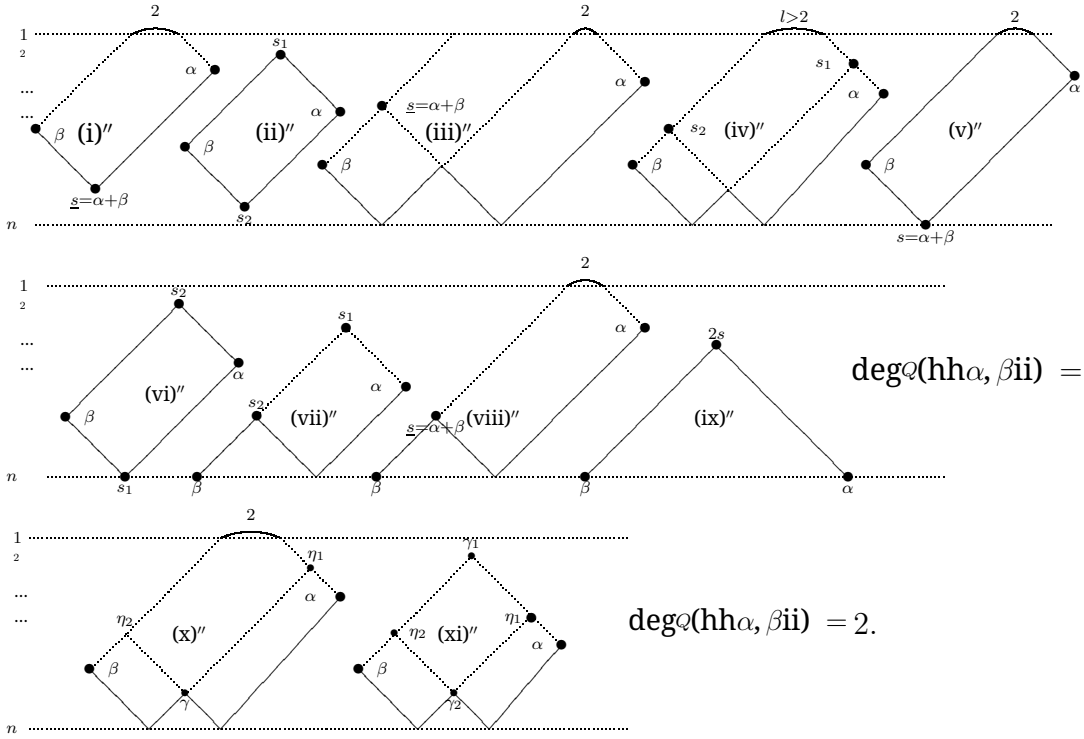
$$\deg_Q(\langle\!\langle\alpha,\beta\rangle\!\rangle)=\deg_{Q^{\mathrm{tr}}}(\langle\!\langle\alpha^{\mathrm{tr}},\beta^{\mathrm{tr}}\rangle\!\rangle).$$

注意到

$$\langle i\rangle=\varepsilon_i\ \text{ if ▲ is of type } B_n \text{ and } \langle i,i\rangle=2\epsilon_i\ \text{ if ▲ is of type } C_n.$$

由于这种差异，对于类型为 C_n 的 Dynkin 箭图 Q，当 $\deg_Q(\mathsf{hh}\alpha,\beta\mathsf{ii})\neq 0$ 时，$[Q]$-对 $\mathsf{hh}\alpha,\beta\mathsf{ii}\in\Phi^+_{C_n}$ 的 $\mathsf{hd}_Q(\mathsf{hh}\alpha,\beta\mathsf{ii})$ 描述有时不同于类型为 B_n 的情形中的相应描述。这里我们给出 $\deg_Q(\mathsf{hh}\alpha,\beta\mathsf{ii})\neq 0$ 时 $[Q]$-对 $\mathsf{hh}\alpha,\beta\mathsf{ii}\in\Phi^+_{C_n}$ 的描述。

具体如下，$\mathsf{hd}_Q(\mathsf{hh}\alpha,\beta\mathsf{ii})$ 的描述为：



在这里可以看出，当我们比较 B_n的情形时，差异出现在情形 (vii)″ $\sim$ (xi)″中。

在每种情形中，数值 $(\alpha,\ \beta)$ 不取决于 Q 的选择，并且列于表 4中：

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)	(ix)	(x)	(xi)
(α,β)	-1	0	-1	0	0	1	0	-1	0	-1	0

TABLE 4. (α,β)，适用于非 $[Q]$-简单 $[Q]$对，其类型为 C_n

对于 $[Q]$-对 $\mathsf{hh}\alpha,\beta\mathsf{ii}$ 关于 $\alpha+\beta\in\Phi^+$是 $[Q]$-极小的情形，

$$p_{\beta,\alpha}=1 \quad \text{if } \langle\!\langle\alpha,\beta\rangle\!\rangle \text{ is of case (v)}'' \quad \text{and} \quad p_{\beta,\alpha}=0, \text{ otherwise.} \tag{6.5}$$

例6.13。 在 Γ_Q 例 5.14中，

(7) $\mathsf{hh}\langle1,3\rangle,\langle3,4\rangle\mathsf{ii} \prec_Q^{\flat} \mathsf{hh}\langle1,4\rangle,\langle3,3\rangle\mathsf{ii}$ 对应于 (vii)″, (8) $\langle1,3\rangle \prec_Q^{\flat} \mathsf{hh}\langle1,4\rangle,\langle3,-4\rangle\mathsf{ii}$ 对应于 (viii)″, (9) $2\langle3,4\rangle \prec_Q^{\flat} \mathsf{hh}\langle3,3\rangle,\langle4,4\rangle\mathsf{ii}$ 对应于 (ix)″, (10) $\langle1,3\rangle \prec_Q^{\flat} \mathsf{hh}\langle3,4\rangle,\langle1,-4\rangle\mathsf{ii} \prec_Q^{\flat} \mathsf{hh}\langle1,4\rangle,\langle3,-4\rangle\mathsf{ii}$ 对应于 (x)″, (11) $\mathsf{hh}\langle1,2\rangle,\langle3,4\rangle\mathsf{ii} \prec_Q^{\flat} \mathsf{hh}\langle2,3\rangle,\langle1,4\rangle\mathsf{ii} \prec_Q^{\flat} \mathsf{hh}\langle2,4\rangle,\langle1,3\rangle\mathsf{ii}$ 对应于 (xi)″。

通过观察 (x)″ 和 (xi)″，我们得到以下命题：

命题 6.14. 对于一个 Q 类型为 C_n的 Dynkin 箭图，设 $\mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii}$ 为一个 $[Q]$-对，满足 $\deg_Q(\alpha,\beta)=2$。则存在唯一的 $[Q]$-对 $\underline{p}$ 使得

$$\mathrm{hd}_Q(\langle\!\langle\alpha,\beta\rangle\!\rangle)\prec_Q^{\mathsf{b}}\underline{p}\prec_Q^{\mathsf{b}}\langle\!\langle\alpha,\beta\rangle\!\rangle.$$

定理 *6.11* 的证明。由定理 6.9，我们有

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}\mathsf{O}_k^{B_n}(i,j)t^{k-1}=\sum_{k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}\mathsf{O}_k^{C_n}(i,j)t^{k-1}$$

对任意 $1\leqslant i,j\leqslant n$。由于当 $\max(i,j)=n$ 时，我们有 $\max(\mathsf{d}_i,\mathsf{d}_j)=2$ 以及

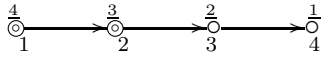
$$\sum_{s=1}^{\min(i,j)}(t^{|i-j|+2s-1}+t^{2n-i-j+2s-1})=2\sum_{s=1}^{i}t^{n-i+2s-1},$$

我们的断言由次数多项式的定义可得

$$\mathfrak{d}_{i,j}^{\blacktriangle}(t):=\sum_{k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}\max(\mathsf{d}_i,\mathsf{d}_j)\mathsf{O}_k^{\blacktriangle}(i,j)t^{k-1}.$$ □

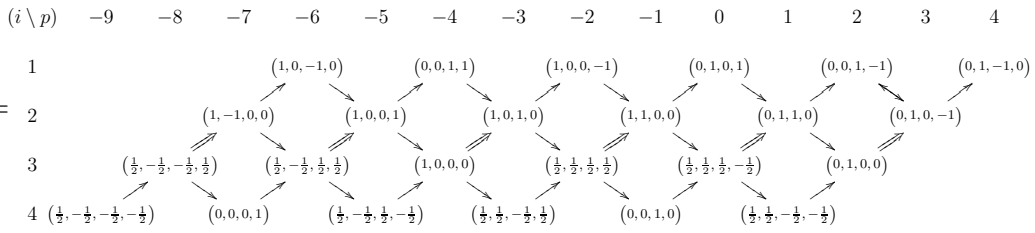
6.3. F_4-情形。在此情形下，我们只有有限多个 Dynkin 箭图。回顾 $\mathsf{d}_1=\mathsf{d}_2=2$以及 $\mathsf{d}_3=\mathsf{d}_4=1$。然后可以检验本小节中的结果；我们列举几个例子，而不再给出证明。

对于一个 Dynkin 箭图 $Q=(\blacktriangle_{F_4},\xi)$，其



AR箭图 Γ_Q 可描述如下：

(6.6) $\Gamma_Q^{F_4}=$



这里我们采用记号 $(a,\ b,\ c,\ d)$：$=a\varepsilon_1+b\varepsilon_2+c\varepsilon_3+d\varepsilon_4$、$\varepsilon_i=\sqrt{2}\epsilon_i$ 以及

$$\alpha_1=(0,1,-1,0),\quad \alpha_2=(0,0,1,-1),\quad \alpha_3=(0,0,0,1)\quad\text{and}\quad \alpha_4=(1/2,-1/2,-1/2,-1/2).$$

定理 6.15. 对于一个类型为 F_4 的 Dynkin 箭图 Q 以及任意 $[Q]$-对 $\mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii}\in(\Phi_{F_4}^+)^2$，$\mathrm{hd}_Q(\mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii})$ 是良定义的。特别地，如果 $\alpha+\beta=\gamma$，则 $\mathrm{hd}_Q(\mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii})=\gamma$。

注 6.16。在 F_4-情形下，$\mathfrak{d}_{i,j}(t)+\delta_{i,j}t^{\mathsf{h}-1}$ 不再与 $\widetilde{\mathfrak{d}}_{i,j}(t)$ 一致。例如，

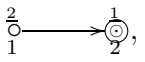
$$\widetilde{\mathfrak{d}}_{2,3}[9]=4\quad\text{while}\quad\mathfrak{d}_{2,3}[9]=6.$$

这里，$\mathfrak{d}_{2,3}[9]=6$ 这一事实可以利用 Γ_Q 在（6.6）中的结果如下计算：令 $\alpha=(0,1,0,-1)$ 和 $\beta=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$。则 $\gamma=\alpha+\beta\in\Phi^+$ 以及

$$\gamma\prec_Q^{\mathfrak{b}}\langle\!\langle\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right),(0,0,1,0)\rangle\!\rangle\prec_Q^{\mathfrak{b}}\langle\!\langle(0,1,0,0),\left(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right)\rangle\!\rangle\prec_Q^{\mathfrak{b}}\langle\!\langle\alpha,\beta\rangle\!\rangle. \tag{6.7}$$

6.4. G_2-情形。在此情形下，我们只有有限多个 Dynkin 箭图。回忆 $\mathrm{d}_1=1$and $\mathrm{d}_2=3$。于是，可以检验本小节中的结果；我们将展示几个例子，而不再给出证明。

对于满足下述条件的 Dynkin 箭图 $Q=(\blacktriangle_{G_2},\xi)$,



我们有

$$\Gamma_Q^{G_2}=\begin{array}{ccccccc} (i\setminus p) & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & & (0,1,-1) & & (1,0,-1) & & (1,-1,0)\\ 2 & & & (1,1,-2) & & (2,-1,-1) & & (1,-2,1) \end{array}.$$

这里我们使用 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基 $\{\epsilon_i\mid 1\leqslant i\leqslant 3\}$，记号为 $(a,b,c):=a\epsilon_1+b\epsilon_2+c\epsilon_3$and

$$\alpha_1=(0,1,-1)\quad\text{and}\quad\alpha_2=(1,-2,1).$$

定理 6.17. 对于类型为 G_2 的 Dynkin 箭图 Q 以及任意 $[Q]$-对 $\mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii}\in(\Phi_{G_2}^+)^2$，$\mathrm{hd}_Q(\mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii})$ 是良定义的。特别地，如果 $\alpha+\beta=\gamma$，则 $\mathrm{hd}_Q(\mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii})=\gamma$。

注 6.18. 与 F_4-情形一样，$\mathfrak{d}_{i,j}(t)+\delta_{i,j}t^{\mathrm{h}-1}$ 不再与$\widetilde{\mathfrak{d}}_{i,j}(t)$重合，在 G_2-情形下也是如此。例如，

$$\widetilde{\mathfrak{d}}_{1,1}[4]=2\quad\text{while}\quad\mathfrak{d}_{1,1}[4]=1.$$

注意，对于每个 G_2 类型的 Dynkin 箭图 Q，只存在一对 $[Q]$-正根对 $\mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii}$，使得 $\alpha+\beta=\gamma\in\Phi^+$ 且 $\deg_Q(\mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii})=2\,(i=1,2)$。在这种情况下，存在唯一的一对 $[Q]$-对$\underline{p}$，使得

$$\gamma\prec_Q^{\mathfrak{b}}\underline{p}\prec_Q^{\mathfrak{b}}\langle\!\langle\alpha,\beta\rangle\!\rangle.$$

7. Quiver Hecke algebras and R-matrices

本节简要回顾幂幺量子坐标环和与有限 Cartan 数据（R 相关的箭图 Hecke 代数（C，P Π，P$^\vee$，Π$^\vee$）的定义。然后，我们回顾箭图 Hecke 代数上模的仿射化的定义、不变量及性质；这些内容在[36, 31]中被引入并加以研究。在最后一节中，我们将看到，与 Dynkin 箭图 $\sim$ 相关的 R 上尖点模对的 $\mathfrak{d}$- 不变量与（$\mathfrak{d}_{i,j}(t)$）$_{i,j\in I}$ 相一致。

7.1. 幂幺量子坐标环。设 q 为一个不定元。对于 $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ 和$i \in I$，记

$$q_i = q^{\mathsf{d}_i}, \quad [k]_i := \frac{q_i^k - q_i^{-k}}{q_i - q_i^{-1}} \quad \text{and} \quad [k]_i! := \prod_{s=1}^{k} [s]_i.$$

我们将由有限 Cartan 数据 $(\mathsf{C}, \mathsf{P}\ \Pi, \mathsf{P}^\vee, \Pi^\vee)$ 关联的量子群记为 $U_q(\mathfrak{g})$，它是由 e_i、f_i $(i \in I)$ 和 q^h $(h \in \mathsf{P}^\vee)$ 生成的、定义在 $\mathbb{Q}(q)$ 上的结合代数。我们令 $U_q^{\pm}(\mathfrak{g})$ 为由 e_i （分别由 f_i）生成的子代数，其中 $i \in I$。注意， $U_q(\mathfrak{g})$ 具有如下权空间分解:

$$U_q(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}} U_q(\mathfrak{g})_\beta.$$

对于任意 $i \in I$，存在唯一的 $\mathbb{Q}(q)$-线性自同态 e_i'，其作用于 $U_q^-(\mathfrak{g})$ 上满足

$$e_i'(f_j) = \delta_{i,j},\ e_i'(xy) = e_i'(x) + q^{(\alpha_i,\beta)} x e_i'(y) \quad (x \in U_q^-(\mathfrak{g})_\beta,\ y \in U_q^-(\mathfrak{g})).$$

于是，在 $U_q^-(\mathfrak{g})$ 上存在唯一的非退化对称双线性型 $(\ ,\ )_K$，使得

$$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_K = 1, \quad (f_i u, v)_K = (u, e_i' v)_K \text{ for } i \in I,\ u, v \in U_q^-(\mathfrak{g}).$$

我们令 $\mathbb{A} = \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$，并令 $U_q^+(\mathfrak{g})_{\mathbb{A}}$ 为 $U_q^+(\mathfrak{g})$ 的 $\mathbb{A}$-子代数，由 $e_i^{(n)}$ 生成: $=e_i^n/[n]_i!$ ($i \in I$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$)。

令 $\Delta_{\mathfrak{n}}$ 为代数同态 $U_q^+(\mathfrak{g}) \to U_q^+(\mathfrak{g}) \otimes U_q^+(\mathfrak{g})$，其由 $\Delta_{\mathfrak{n}}(e_i) = e_i \otimes 1 + 1 \otimes e_i$ 给出，其中 $U_q^+(\mathfrak{g}) \otimes U_q^+(\mathfrak{g})$ 上的代数结构定义为

$$(x_1 \otimes x_2) \cdot (y_1 \otimes y_2) = q^{-(\mathrm{wt}(x_2), \mathrm{wt}(y_1))} (x_1 y_1 \otimes x_2 y_2).$$

Set

$$A_q(\mathfrak{n}) = \bigoplus_{\beta \in \mathsf{Q}^-} A_q(\mathfrak{n})_\beta \quad \text{where } A_q(\mathfrak{n})_\beta := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}(q)}(U_q^+(\mathfrak{g})_{-\beta}, \mathbb{Q}(q)).$$

则 $A_q(\mathfrak{n})$ 是一个代数，其乘法定义为 $(\psi \cdot \theta)(x) = \theta(x_{(1)})\psi(x_{(2)})$，其中 $\Delta_{\mathfrak{n}}(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ 采用 Sweedler 记号表示。

记 $A_{\mathbb{A}}(\mathfrak{n})$ 为由 $\mathbb{A}$-子模 $A_q(\mathfrak{n}$组成的 $\psi \in A_q(\mathfrak{n})$，满足$\psi\left(U_q^+(\mathfrak{g})_{\mathbb{A}}\right) \subset \mathbb{A}$。则它是 $\mathbb{A}$-子代数 $A_q(\mathfrak{n})$。注意，Lusztig [42, 43] 和 Kashiwara [26]构造了一个特定的 $\mathbb{A}$-基 $\mathbf{B}^{\mathrm{up}}$，它属于 $A_{\mathbb{A}}(\mathfrak{n})$。

注意，对于交换类 c，凸序 $\prec_{\mathbf{c}}$ 给出了对偶 PBW 向量

$$\left\{ r_{\mathbf{c}}(\beta) \mid \beta \in \Phi^+ \right\}$$

of $A_q(\mathfrak{n})$，它满足以下条件。

定理 7.1 （[3]）。对偶 PBW 向量 $r_{\mathbf{c}}(\alpha_i)$（$i \in I$）是满足 $\left(f_j, r_{\mathbf{c}}(\alpha_i)\right)_K = \delta_{i,\ j}$ 的元素。对于 $\gamma \in \Phi^+ \setminus \Pi$ 的一个 c-极小 c-对 $\mathrm{hh}\alpha, \beta\mathrm{ii}$，我们有

$$r_{\mathbf{c}}(\alpha) r_{\mathbf{c}}(\beta) - q^{-(\alpha,\beta)} r_{\mathbf{c}}(\beta) r_{\mathbf{c}}(\alpha) = q^{-p_{\beta,\alpha}} (1 - q^{2(p_{\beta,\alpha} - (\alpha,\beta))}) r_{\mathbf{c}}(\gamma). \tag{7.1}$$

对于支配权 $\lambda \in \mathrm{P}^+$，令 $V(\lambda)$ 为最高权为 u_λ 、最高权向量 λ 的不可约最高权 $U_q(\mathfrak{g})$-模。令 $(\ ,\ )_\lambda$ 为 $V(\lambda)$ 上的非退化对称双线性型，使得 $(u_\lambda, u_\lambda)_\lambda = 1$ 且 $(xu, v)_\lambda = (u, \varphi(x)v)_\lambda$，其中 $u, v \in V(\lambda)$ 和 $x \in U_q(\mathfrak{g})$，这里 φ 是定义在 $U_q(\mathfrak{g})$ 上的代数反自同态，满足 $\varphi(e_i) = f_i, \varphi(f_i) = e_i$ 且 $\varphi(q^h) = q^h$。对于每个 $\mu, \zeta \in \mathrm{W}_\mathfrak{g}\lambda$，幺幂量子子式 $D(\mu, \zeta)$ 是 $A_q(\mathfrak{n})$ 中由 $D(\mu, \zeta)(x) = (xu_\mu, u_\zeta)_\lambda$ 给出的元素，其中 u_μ 和 u_ζ 分别是 $V(\lambda)$ 中权为 μ 和 ζ 的极端权向量。于是我们有$D(\mu, \zeta) \in \mathrm{B}^{\mathrm{up}} \sqcup \{0\}$。注意，$D(\mu, \zeta) \in \mathrm{B}^{\mathrm{up}}$ 当且仅当 $\mu \preccurlyeq \zeta$。这里，若存在$w, w' \in \mathrm{W}_\mathfrak{g}$ 使得 $w' \preccurlyeq w$ 且 $\mu = w\lambda, \zeta = w'\lambda$，则 $\mu \preccurlyeq \zeta$。

对于最长元素 $w_0 \in \mathrm{W}_\mathfrak{g}$ 的约化表达式 $\underline{w}_0 = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_\ell}$，定义 $\underline{w}_{\leqslant k} := s_{i_1} \cdots s_{i_k}$和 $\lambda_k := \underline{w}_{\leqslant k}\varpi_{i_k}$（$1 \leqslant k \leqslant l$）。注意，当 $k^- > 0$ 时，$\lambda_{k^-} = \underline{w}_{\leqslant k-1}\varpi_{i_k}$。这里

$$k^- := \max\left(\{1 \leqslant s < k \mid i_s = i_k\} \sqcup \{0\}\right).$$

对于 $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \ell$，我们设

$$D_{\underline{w}_0}(s,t) := \begin{cases} D(\underline{w}_{\leqslant s}\varpi_{i_s},\ \underline{w}_{\leqslant t}\varpi_{i_t}) & \text{if } 1 \leqslant t \leqslant s \leqslant \ell \text{ and } i_s = i_t, \\ D(\underline{w}_{\leqslant s}\varpi_{i_s},\ \varpi_{i_s}) & \text{if } 0 = t < s \leqslant \ell, \\ \mathbf{1} & \text{if } 0 = t = s. \end{cases}$$

那么 $D_{\underline{w}_0}(s,t)$ 属于 B^{up}，并且

$$r_{[\underline{w}_0]}(\beta_s^{\underline{w}_0}) = D_{\underline{w}_0}(s, s^-) \qquad \text{for } 1 \leqslant s \leqslant \ell. \tag{7.2}$$

7.2. 箭图 Hecke 代数。设 $\mathbf{k}$ 为一个域。对于 i、$j \in I$，我们选取多项式$\mathcal{Q}_{i,j}(u,v) \in \mathbf{k}[u,v]$，使得 $\mathcal{Q}_{i,j}(u,v) = \mathcal{Q}_{j,i}(v,u)$，其形式为

$$\mathcal{Q}_{i,j}(u,v) = \begin{cases} \sum_{p(\alpha_i,\alpha_i)+q(\alpha_j,\alpha_j)=-2(\alpha_i,\alpha_j)} t_{i,j;p,q} u^p v^p & \text{if } i \neq j, \\ 0 & \text{if } i = j, \end{cases}$$

其中 $t_{i,j;-c_{i,j},0} \in \mathbf{k}^\times$

对于 $\beta \in \mathrm{Q}^+$，其中 $\mathrm{ht}(\beta) = m$，我们定义

$$I^\beta := \Big\{\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m) \in I^m \ \Big|\ \sum_{k=1}^m \alpha_{\nu_k} = \beta\Big\},$$

对其，对称群 $\mathfrak{S}_m = \langle r_k \mid k = 1、\ldots、n-1\rangle$ 通过位置置换作用。

定义 7.2. 对于 $\beta \in \mathrm{Q}^+$，与 C 和 $(\mathcal{Q}_{i,j}(u,v))_{i,j\in I}$ 相关联的箭图 Hecke 代数 $R(\beta)$ 是由以下元素生成的 $\mathbf{k}$-代数

$$\{e(\nu) \mid \nu \in I^\beta\},\ \{x_k \mid 1 \leqslant k \leqslant m\},\ \{\tau_l \mid 1 \leqslant l < m\}$$

满足以下定义关系：

$$e(\nu)e(\nu') = \delta_{\nu,\nu'},\ \sum_{\nu\in I^\beta} e(\nu) = 1,\ x_k e(\nu) = e(\nu)x_k, x_k x_l = x_l x_k,$$

$$\tau_l e(\nu) = e\big(r_l(\nu)\big)\tau_l,\ \tau_k\tau_l = \tau_l\tau_k \ \text{ if } |k-l| > 1,\ \tau_k^2 e(\nu) = \mathcal{Q}_{\nu_k,\nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1})e(\nu),$$

$$(\tau_k x_l - x_{r_k(l)}\tau_k)e(\nu) = \begin{cases} -e(\nu) & \text{if } l = k \text{ and } \nu_k = \nu_{k+1}, \\ e(\nu) & \text{if } l = k+1 \text{ and } \nu_k = \nu_{k+1}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$(\tau_{k+1}\tau_k\tau_{k+1} - \tau_k\tau_{k+1}\tau_k)e(\nu) = \begin{cases} \overline{\mathcal{Q}}_{\nu_k,\nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1}, x_{k+2})e(\nu) & \text{if } \nu_k = \nu_{k+2}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中

$$\overline{\mathcal{Q}}_{i,j}(u,v,w) := \frac{\mathcal{Q}_{i,j}(u,v) - \mathcal{Q}_{i,j}(w,v)}{u-w} \in \mathbf{k}[u,v,w].$$

代数 $R(\beta)$ 具有如下定义的 $\mathbb{Z}$-分次:

$$\deg(e(\nu)) = 0, \quad \deg(x_k e(\eta)) = (\alpha_{\eta_k}, \alpha_{\eta_k}), \quad \deg(\tau_l e(\eta)) = -(\alpha_{\eta_l}, \alpha_{\eta_{l+1}}).$$

我们用 $R(\beta)$-gmod 表示具有保持次数的同态的有限维分次 $R(\beta)$-模所构成的范畴。我们记 R-gmod $:= \bigoplus_{\beta\in\mathbb{Q}^+} R(\beta)$-gmod。次数为 0 的平凡$R(0)$-模记为 1。为简便起见,我们用"模"代替"分次模"。我们定义分次平移函子 q : 对于 $\mathbb{Z}$-分次模 $M = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} M_k$, $(qM)_k = M_{k-1}$ 。对于 $M, N \in R(\beta)$-gmod, $\mathrm{Hom}^{R(\beta)}(M,N)$ 表示保持次数的模同态空间。我们定义

$$\mathrm{HOM}_{R(\beta)}(M,N) := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{R(\beta)}(q^k M, N),$$

并对 $f \in \mathrm{Hom}^{R(\beta)}(q^k M, N)$ 设 $\deg(f) := k$。为简便起见, 我们有时在 $\mathrm{HOM}_{R(\beta)}(M,N)$ 中用 R 表示 $R(\beta)$。

对于 $M \in R(\beta)$-gmod, 我们定义 $M^\star := \mathrm{HOM}_{R(\beta)}(M, R(\beta))$, 其 $R(\beta)$-作用定义为

$$(r\cdot f)(u) := f(\psi(r)u), \quad \text{for } f \in M^\star,\ r \in R(\beta) \text{ and } u \in M,$$

其中, ψ 是 $R(\beta)$的反自同构, 它固定各生成元。若 $M \simeq M^\star$, 则称 M 是自对偶的。对于一个 $R(\beta)$-模 M, 我们定义 $\mathrm{wt}(M) := -\beta$。

本文其余部分有时会忽略分次平移。

令 $e(\beta,\beta') := \sum_{\nu\in I^\beta, \nu'\in I^{\beta'}} e(\nu,\nu')$, 其中 $e(\nu,\nu')$是对应于 ν 与 ν'的连接 $\nu * \nu'$ 的幂等元。则存在一个单射环同态

$$R(\beta)\otimes R(\beta') \to e(\beta,\beta')R(\beta+\beta')e(\beta,\beta')$$

其定义为: $e(\nu)\otimes e(\nu') \mapsto e(\nu,\nu')$, $x_k e(\beta)\otimes 1 \mapsto x_k e(\beta,\beta')$, $1\otimes x_k e(\beta') \mapsto x_{k+\mathrm{ht}(\beta)} e(\beta,\beta')$, $\tau_k e(\beta)\otimes 1 \mapsto \tau_k e(\beta,\beta')$, 以及 $1\otimes \tau_k e(\beta') \mapsto \tau_{k+\mathrm{ht}(\beta)} e(\beta,\beta')$。

对于 $R(\beta)$-模 M 和 N, 我们定义

$$M\circ N := R(\beta+\beta')e(\beta,\beta')\otimes_{R(\beta)\otimes R(\beta')} (M\otimes N).$$

我们将 $M\circ N$ 的头部记为 $M\nabla N$, 将 $M\circ N$ 的根底记为 $M\Delta N$。如果 $M\circ N$ 是单的, 则称单 R-模 M 和 N 强交换。若 L 与自身强交换, 则称单 R-模 L 为实的。注意, 如果 M 和 N 强交换, 则 $M\circ N \simeq N\circ M$ 相差一个分次平移。

我们将 $K(R\text{-gmod})$ 记作 R-gmod 的 Grothendieck环。

定理 7.3 ([39, 40, 54])。 存在一个 $\mathbb{A}$-双代数同构

$$\Omega\colon K(R\text{-gmod}) \xrightarrow{\sim} A_{\mathbb{A}}(\mathfrak{n}), \tag{7.3}$$

其保持权不变。

命题 7.4（[29, 命题 4.1]）。对于 $\varpi \in \mathsf{P}^+$ 和 $\mu,\ \zeta \in W\varpi$ 满足 $\mu \preccurlyeq \zeta$，存在一个自对偶实单 R-模 $\mathsf{M}(\mu,\zeta)$，使得

$$\Omega([\mathsf{M}(\mu,\zeta)]) = D(\mu,\zeta).$$

我们称 $\mathsf{M}(\mu,\zeta)$ 为与 $D(\mu,\zeta)$ 相关的行列式模。注意，每个行列式模都是实的。

7.3. 仿射化与 R-矩阵。本小节回顾箭图 Hecke 代数的仿射化和 R-矩阵的概念，这些概念主要在 [21, 24, 36] 中进行了研究。

对于满足 $\mathsf{ht}(\beta) = m$ 和 $i \in I$ 的 $\beta \in \mathsf{Q}^+$，令

$$\mathfrak{p}_{i,\beta} = \sum_{\eta \in I^\beta} \left(\prod_{a\in[1,m];\ \eta_a = i} x_a \right) e(\eta) \in R(\beta), \tag{7.4}$$

它属于 $R(\beta)$ 的中心 $Z(R(\beta))$。

定义 7.5。设 M 是一个简单的 $R(\beta)$-模。M 的仿射化是一个次数为 $t_{\widehat{\mathsf{M}}}$ 的 $R(\beta)$-模 $\widehat{\mathsf{M}}$，带有一个 M 的次数为 $t_{\widehat{\mathsf{M}}} \in \mathbb{Z}_{>0}$ 的自同态 $z_{\widehat{\mathsf{M}}}$，以及一个同构 $\widehat{\mathsf{M}}/z_{\widehat{\mathsf{M}}}\widehat{\mathsf{M}} \simeq M$，满足 $\widehat{\mathsf{M}}$ (i) M 是多项式环 $\mathsf{k}[z_{\widehat{\mathsf{M}}}]$ 上的有限生成自由模；(ii) $\mathfrak{p}_{i,\beta}\mathsf{M} \neq 0$ 对所有 $i \in I$ 均成立。

注意，每个仿射化本质上都是偶次的，即 $t_{\widehat{\mathsf{M}}} \in 2\mathbb{Z}_{>0}$ ([36, 命题 2.5])。因此，从现在起，我们假设每个仿射化都具有偶次数。

定义 7.6。若一个简单的 R-模 M 是仿实的，且存在其仿射化，则称 M 为仿实模。若某个仿射化的次数为 $t \in 2\mathbb{Z}_{>0}$，则称 M 是 t-仿实的。

定理 7.7（[31, 定理 3.26]）。对于 $\varpi \in \mathsf{P}^+$ 和 $\mu,\ \zeta \in W\varpi$ 满足 $\mu \preccurlyeq \zeta$ 时，行列式模 $\mathsf{M}(\mu,\zeta)$ 具有一个仿射化 $\mathsf{M}(\mu,\zeta)$。当 $\varpi = \varpi_i$ 时，$\mathsf{M}(\mu,\zeta)$ 具有次数为 $(\alpha_i,\alpha_i) = 2\mathsf{d}_i$ 的仿射化。

设 $\beta \in \mathsf{Q}^+$，且 $m = \mathsf{ht}(\beta)$。对于 $k = 1$、……、$m-1$ 和 $\nu \in I^\beta$，交织算子 φ_k 定义为

$$\varphi_k e(\nu) = \begin{cases} (\tau_k x_k - x_k \tau_k) e(\nu) = (x_{k+1}\tau_k - \tau_k x_{k+1}) e(\nu) & \text{if } \nu_k = \nu_{k+1}, \\ \tau_k e(\nu) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

引理 7.8（[21, 引理 1.5]）。设 $\mathfrak{S}_m$ 为次数 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ 的对称群。

(i) $\varphi_k^2 e(\nu) = (Q_{\nu_k,\ \nu_{k+1}}(x_k,\ x_{k+1}) + \delta_{\nu_k,\ \nu_{k+1}})\ e(\nu)$。（ii）$\{\varphi_k\}_{k=1,\ \ldots\ldots m-1}$ 满足辫子关系。

(iii) 对于约化表达式 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_t} \in \mathfrak{S}_m$，我们设 $\varphi_w := \varphi_{i_1} \cdots \varphi_{i_t}$。那么 φ_w 确实 es 不依赖于 w 的约化表达式的选择。(iv) 对于 $w \in \mathfrak{S}_m$ 和 $1 \leqslant k \leqslant m$，有 $\varphi_w x_k = x_{w(k)} \varphi_w$。(v) 对于 $w \in \mathfrak{S}_m$ 和 $1 \leqslant k < m$，如果 $w(k+1) = w(k) + 1$，则 $\varphi_w \tau_k = \tau_{w(k)} \varphi_w$。

对于 m、$n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，我们用 $w[m,n]$ 表示由下式定义的 $\mathfrak{S}_{m+n}$ 中的元素

$$w[m,n](k) := \begin{cases} k+n & \text{if } 1 \leqslant k \leqslant m, \\ k-m & \text{if } m < k \leqslant m+n. \end{cases}$$

设 β、$\gamma \in \mathrm{Q}^+$，并令 $m := \mathrm{ht}(\beta)$ 以及 $n := \mathrm{ht}(\gamma)$。对于 $M \in R(\beta)$-Mod 和 $N \in R(\gamma)$-Mod，由 $u \otimes v \mapsto \varphi_{w[n,m]}(v \otimes u)$ 定义的 $R(\beta) \otimes R(\gamma)$-线性映射 $M \otimes N \to N \circ M$ 可以扩展为一个 $R(\beta+\gamma)$-模同态（在进行分次平移后）

$$\mathrm{R}_{M,N} \colon M \circ N \longrightarrow N \circ M.$$

设 $\widehat{\mathsf{M}}$ 是简单 R-模 M 的一个仿射化，并设 N 是一个非零的 R-模。我们定义一个同态（差一个分次平移）

$$R^{\mathrm{norm}}_{\widehat{\mathsf{M}},N} := z_{\widehat{\mathsf{M}}}^{-s} \mathrm{R}_{\widehat{\mathsf{M}},N} \colon \widehat{\mathsf{M}} \circ N \longrightarrow N \circ \widehat{\mathsf{M}},$$

其中 s 是满足 $\mathrm{R}_{\widehat{\mathsf{M}},N}(\widehat{\mathsf{M}} \circ N) \subset z_{\widehat{\mathsf{M}}}^{s}(N \circ \widehat{\mathsf{M}})$ 的最大整数。我们定义

$$\mathbf{r}^{\mathrm{l}}_{M,N} \colon M \circ N \longrightarrow N \circ M$$

为由 $R^{\mathrm{norm}}_{\widehat{\mathsf{M}},N}$ 在 $z_{\widehat{\mathsf{M}}} = 0$ 处特化所诱导的同态（差一个分次平移）。根据定义，$\mathbf{r}^{\mathrm{l}}_{M,N}$ 永不为零。

类似地，对于一个具有仿射化 N 的单模 N，我们可以定义

$$\mathbf{r}^{\mathrm{r}}_{M,N} \colon M \circ N \longrightarrow N \circ M.$$

命题 7.9 ([22], [31, 命题 3.13])。设 M 和 N 是简单模。我们假设其中一个是仿实的。则有

$$\mathrm{Hom}_R(M \circ N, N \circ M) = \mathbf{k}\,\mathbf{r},$$

其中 $\mathbf{r} = \mathbf{r}^{\mathrm{l}}_{M,N}$ 或 $\mathbf{r}^{\mathrm{r}}_{M,N}$。

根据上述命题，我们可以将同态写作 $\mathbf{r}_{M,\ N}$，称为 R-矩阵，不带上标。现在我们定义

$$\begin{aligned} \Lambda(M,N) &:= \deg(\mathbf{r}_{M,N}), \\ \widetilde{\Lambda}(M,N) &:= \frac{1}{2}\big(\Lambda(M,N) + (\mathrm{wt}(M), \mathrm{wt}(N))\big), \\ \mathfrak{d}(M,N) &:= \frac{1}{2}\big(\Lambda(M,N) + \Lambda(N,M)\big). \end{aligned}$$

对于简单模 M、N，其中至少有一个允许进行仿射化 .

命题 7.10（[22, 定理 3.2], [36, 命题 2.10], [31, 命题 3.13，引理 3.17]）。设 M 和 N 是简单的 R-模，且 M 和 N 中至少有一个是仿实的。则有

(i) $M \circ N$ 具有简单底和简单顶，(ii) $\mathrm{Im}(r_{M,N})$ 同构于 $M \nabla N$和 $N \Delta M$，(iii) $M \nabla N$和 $M \Delta N$分别在 $M \circ N$ 的合成序列中出现一次。

~现在，让我们汇总以下对象的性质： Λ（M、 N）、 Λ（M、 N）以及 $\mathfrak{d}$（M、 N），对于简单的 R-模M 以及 N，其中 M 和 N 之一是仿实的。它们已在以下文献中得到证明，或者可以利用这些论文中的论证加以证明： [22, 24, 29, 31]

引理7.11（[31,引理3.11]）。设 M 和 N 是简单的 R-模。假设其中一个允许次数为 t的仿射化。则有

$$\widetilde{\Lambda}(M,N),\ \mathfrak{d}(M,N) \in \frac{t}{2}\,\mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

由此引理，对于 t_1-仿实的 M 和 t_2-仿实的 N，有

$$\widetilde{\Lambda}(M,N),\ \mathfrak{d}(M,N) \in \frac{\mathrm{lcm}(t_1,t_2)}{2}\,\mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

此处，$\mathrm{lcm}(a,b)$表示 a与 $b \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$的最小公倍数。

命题7.12（[24, 命题3.2.17]）。设 M_i 是 t_i-仿实的（$i=1$，2）。假设

$$\mathfrak{d}(M_1,M_2) = \frac{\max(t_1,t_2)}{2}.$$

于是我们得到一个正合序列

$$0 \to M_1 \Delta M_2 \to M_1 \circ M_2 \to M_1 \nabla M_2 \to 0.$$

引理 7.13（[24, 引理 3.1.4]）。设 M 和 N 为自对偶简单模。若其中一个是仿实的，则

$$q^{\widetilde{\Lambda}(M,N)} M \nabla N \ \textit{is a self-dual simple module.}$$

命题7.14（[22, 推论 3.11]）。设 M_k 为 R-模（$k=1$、2、3），并假设 M_2 是单模。若 $\varphi_1\colon\ L \to M_1 \circ M_2$ 和 $\varphi_2\colon\ M_2 \circ M_3 \to L'$ 是非零同态，则其复合

$$L \circ M_3 \xrightarrow{\varphi_1 \circ M_3} M_1 \circ M_2 \circ M_3 \xrightarrow{M_1 \circ \varphi_2} M_1 \circ L'$$

不为零。同样地，若 $\psi_1\colon\ L \to M_2 \circ M_3$ 和 $\psi_2\colon\ M_1 \circ M_2 \to L'$ 是非零同态，则其复合

$$M_1 \circ L \xrightarrow{M_1 \circ \varphi_1} M_1 \circ M_2 \circ M_3 \xrightarrow{\varphi_2 \circ M_3} L' \circ M_3.$$

不为零。

以下命题在 [50, 命题5.11], 中的表述有误，现给出其正确表述及证明。

命题 7.15 ([50, 命题 5.11])。 设 M_i 和 N_i 是单 R-模，其中一个为仿实，且 $M_i \circ N_i$ 的合成长度为 2，当 $i = 1, 2$。设 M 和 N 是单 R-模，其中一个为仿实。设 φ_i: $M_i \circ N_i \to M \circ N (i = 1, 2)$ 是一个非零同态。我们假设

$$M_1 \Delta N_1 \simeq M_2 \Delta N_2 \quad and \quad M_1 \nabla N_1 \not\simeq M_2 \nabla N_2.$$

于是我们有

$$M_1 \Delta N_1 \simeq M_2 \Delta N_2 \simeq M \Delta N \quad and \quad \varphi_i \colon M_i \circ N_i \rightarrowtail M \circ N.$$

证明。如果 φ_i 不是单射，则 $\mathrm{Im}(\varphi_i) \simeq M_i \nabla N_i \simeq M \Delta N$。如果 φ_i 是单射，则 $M_i \Delta N_i \simeq M \Delta N$。

(i) 如果 φ_1 和 φ_2 不是单射，则 $M_1 \nabla N_1 \simeq M_2 \nabla N_2$，这产生矛盾。

(ii) 假设 φ_1 和 φ_2 （设 φ_1）中的一个是单射而另一个不是单射。于是我们有 $M \Delta N \simeq M_1 \Delta N_1 \simeq M_2 \nabla N_2$。因此 $M_2 \nabla N_2 \simeq M_1 \Delta N_1 \simeq M_2 \Delta N_2$，这与命题 7.10(iii) 矛盾。

(iii) 因此， φ_1 和 φ_2 是单射，且 $M \Delta N \simeq M_1 \Delta N_1 \simeq M_2 \Delta N_2$。 □

定义 7.16 （[28, 定义 2.5]）。设 L_1、L_2、……、L_r 是仿实模。若序列（L_1，……，L_r）中 R-矩阵的复合

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{L_1,\dots,L_r} :=& \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r} \mathbf{r}_{L_i,L_j} \\ =&(\mathbf{r}_{L_{r-1},L_r}) \circ \cdots \circ (\mathbf{r}_{L_2,L_r} \circ \cdots \circ \mathbf{r}_{L_2,L_3}) \circ (\mathbf{r}_{L_1,L_r} \circ \cdots \circ \mathbf{r}_{L_1,L_2}) \\ &: q^{\sum_{1\leqslant i<k\leqslant r} \Lambda(L_i,L_k)} L_1 \circ L_2 \circ \cdots \circ L_r \longrightarrow L_r \circ \cdots \circ L_2 \circ L_1.\end{aligned}$$

不为零。

以下引理在 [28, 32] 为对称型时得以证明。然而，使用相同的论证，当 $\mathfrak{g}$ 为可对称化型时，我们也可以证明该结论。

引理 7.17 （[28, 引理 2.6]）。设（L_1，……、L_r）是仿实 R-模的正规序列。那么 $\mathrm{Im}(\mathbf{r}_{L_1,\dots,L_r})$ 是单的，并且它与 $L_1 \circ \cdots \circ L_r$ 的头部重合，也与 $L_r \circ \cdots \circ L_1$ 的根底重合。

引理 7.18 （[28, 引理 2.8，引理 2.10]）。

（i）一列仿实 R-模（$L_1, \dots, L_r$）是正规序列，当且仅当（$L_1, \dots, L_{r-1}$）是正规序列，并且

$$\Lambda(\mathrm{hd}(L_1, \dots, L_{r-1}), L_r) = \sum_{1\leqslant j\leqslant r-1} \Lambda(L_j, L_r).$$

(ii) 一列仿实 R-模 $(L_1, \dots, L_r)$ 是正规序列，当且仅当 $(L_2, \dots, L_r)$ 是正规序列，并且

$$\Lambda(L_1, \mathrm{hd}(L_2, \dots, L_r)) = \sum_{2\leqslant j\leqslant r} \Lambda(L_1, L_j).$$

引理 7.19 ([32, 引理 2.23])。设 L、M、N 是仿实 R-模。那么 $\mathfrak{d}(L, M \nabla N) = \mathfrak{d}(L, M) + \mathfrak{d}(L, N)$，当且仅当 (L, M, N) 和 (M, N, L) 是正规序列。

8. Cuspidal modules and t-quantized Cartan matrix

设 (C, P Π, P$^\vee$, $\Pi^\vee$) 是任意有限 Cartan 数据。本节首先回顾对偶PBW向量范畴化的箭图 Hecke 代数上的尖点模。然后我们将证明，与 Dynkin 箭图相关的尖点模中的 $\mathfrak{d}$-不变量被$\widetilde{}$编码于 $(\mathfrak{d}_{i,j}(t))_{i,j\in I}$ 中，而 $(\mathfrak{d}_{i,j}(t))_{i,j\in I}$ 则向我们提供了关于两个尖点模的卷积积的合成长度的信息。为证明这些结论，我们将关键性地使用 AR 箭图的组合性质和统计量。

8.1. 尖点模。设 R 是类型为 C 的箭图 Hecke 代数。那么，在 [3, 44,37, 41], 中证明了以下定理:

定理 8.1. 对于 $w_0 \in$ W 的任意约化表达式 $\underline{w}_0 = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$，存在一族自对偶仿实单模

$$\{S_{\underline{w}_0}(\beta) \mid \beta \in \Phi^+\}$$

满足以下性质:

(1) 对于每个 $\beta \in \Phi^+$，有

$$\Omega([S_{\underline{w}_0}(\beta)]) = r_{[\underline{w}_0]}(\beta) \quad \textit{and} \quad \mathrm{wt}(S_{\underline{w}_0}(\beta)) = -\beta.$$

(2) 对于任意指数 $\underline{m} = \{m_\beta\}_{\beta\in\Phi^+} \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{\Phi^+}$，存在唯一的非零 R-模同态（差一个分次平移）

$$\overrightarrow{\mathcal{S}}_{\underline{w}_0}(\underline{m}) := S_{\underline{w}_0}(\beta_\ell)^{\circ m_{\beta_\ell}} \circ \cdots \circ S_{\underline{w}_0}(\beta_1)^{\circ m_{\beta_1}}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{r}_{\underline{m}}} \overleftarrow{\mathcal{S}}_{\underline{w}_0}(\underline{m}) := S_{\underline{w}_0}(\beta_1)^{\circ m_{\beta_1}} \circ \cdots \circ S_{\underline{w}_0}(\beta_\ell)^{\circ m_{\beta_\ell}}$$

其中 $\beta_k = \beta_k^{\underline{w}_0}$。此外，Im($\mathbf{r}_{\underline{m}}$) 是单模，且 Im($\mathbf{r}_{\underline{m}}$) $\simeq$soc $\left(\overleftarrow{\mathcal{S}}_{\underline{w}_0}(\underline{m})\right) \simeq$hd $\left(\overrightarrow{\mathcal{S}}_{\underline{w}_0}(\underline{m})\right)$，差一个分次平移。

(3) 对于任意简单 R-模 M，存在唯一的指数 $\underline{m} \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{\Phi^+}$ 使得

$$M \simeq \mathrm{hd}\left(\overrightarrow{\mathcal{S}}_{\underline{w}_0}(\underline{m})\right) \quad \textit{up to a grading shift.}$$

→注意，对于每个 $\underline{m} = \{m_1, \ldots, m_\ell\}_{\beta\in\Phi^+} \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{\ell}$，hd($q^{s_{\underline{m}}}\mathcal{S}_{\underline{w}_0}(\underline{m})$) 都是一个自对偶单对象$R$-模，其中

$$s_{\underline{m}} := \sum_{k=1}^{\ell} \mathsf{d}_{\beta_k^{\underline{w}_0}} \frac{m_k(m_k-1)}{2}.$$

记

$$S_{\underline{w}_0}(\underline{m}) := \mathrm{hd}(q^{s_{\underline{m}}}\overrightarrow{\mathcal{S}}_{\underline{w}_0}(\underline{m})).$$

我们将 $S_{\underline{w}_0}(\beta)$ 称为与之相关的尖点模 $\underline{w}_0$。已知（见 [50, 定理 5。8]），集合 $\{S_{\underline{w}_0}(\beta) \mid \beta \in \Phi^+\}$ 只取决于交换类 $[\underline{w}_0]$；即，

$$S_{\underline{w}_0}(\beta) \simeq S_{\underline{w}_0'}(\beta) \quad \text{if } \underline{w}_0 \text{ and } \underline{w}_0' \text{ are commutation equivalent.}$$

因此，对于任意交换类 $\mathbf{c}$，$S_{\mathbf{c}}(\beta)$ 对于 $\beta \in \Phi^+$ 是良定义的。

引理 8.2（[50, 命题 5.7]）。设 $\underline{w}_0$ 是 w_0 的一个约化表达式。若关于 $\preccurlyeq_{[\underline{w}_0]}$，$\alpha$ 与 β 不可比，则 $S_{[\underline{w}_0]}(\alpha)$ 与 $S_{[\underline{w}_0]}(\beta)$ 可交换。

$\leftarrow$ $\rightarrow$由此引理，$S_{\underline{w}_0}(\underline{m})$，以及 $\mathcal{S}_{\underline{w}_0}(\underline{m})$ 和 $\mathcal{S}_{\underline{w}_0}(\underline{m})$，只取决于交换类 $\leftarrow$ $\rightarrow$$\mathbf{c}$ $[\underline{w}_0]$。因此，$S_{[\underline{w}_0]}(\underline{m})$、$\mathcal{S}_{[\underline{w}_0]}(\underline{m})$ 和 $\mathcal{S}_{[\underline{w}_0]}(\underline{m})$ 都是良定义的。

命题 8.3（[3, 44, 50]）。设 $\mathbf{c}$ 是一个交换类。

(i) 对于 $\gamma \in \Phi^+$ 的任意 $\mathbf{c}$-极小 $\mathbf{c}$-对 $\mathrm{hh}\alpha, \beta\mathrm{ii}$，存在 R-模的正合序列

$$0 \to S_{\mathbf{c}}(\gamma) \to S_{\mathbf{c}}(\beta) \circ S_{\mathbf{c}}(\alpha) \to S_{\mathbf{c}}(\beta) \nabla S_{\mathbf{c}}(\alpha) \to 0,$$
$$0 \to S_{\mathbf{c}}(\beta) \nabla S_{\mathbf{c}}(\alpha) \to S_{\mathbf{c}}(\alpha) \circ S_{\mathbf{c}}(\beta) \to S_{\mathbf{c}}(\gamma) \to 0$$

and

$$[S_{\mathbf{c}}(\alpha)] \cdot [S_{\mathbf{c}}(\beta)] = [S_{\mathbf{c}}(\gamma)] + [S_{\mathbf{c}}(\alpha) \,\Delta\, S_{\mathbf{c}}(\beta)] \quad \textit{in } K(R\text{-gmod})$$

在分次平移意义下。

(ii) 对于任意指数 $\underline{m}$，我们有

$$[\vec{\mathcal{S}}_{\mathbf{c}}(\underline{m})] \in [S_{\mathbf{c}}(\underline{m})] + \sum_{\underline{m}' \prec_{\mathbf{c}}^{\flat} \underline{m}} \mathbb{Z}_{\geqslant 0}[S_{\mathbf{c}}(\underline{m}')]. \tag{8.1}$$

在分次平移意义下。

$\rightarrow$ $\leftarrow$(iii) 若$\underline{m}$是一个 $\mathbf{c}$-简单序列，则 $\mathcal{S}_{\mathbf{c}}(\underline{m})$与 $\mathcal{S}_{\mathbf{c}}(\underline{m})$在分次平移意义下同构，且它们是单的。

命题 8.4（[3, 定理 4.7]）。对于任意交换类 $\mathbf{c}$ 和一个 $\mathbf{c}$-对 $\mathrm{hh}\alpha, \beta\mathrm{ii}$，我们有

$$\widetilde{\Lambda}(S_{\mathbf{c}}(\beta), S_{\mathbf{c}}(\alpha)) = 0 \quad \textit{and hence} \quad \Lambda(S_{\mathbf{c}}(\beta), S_{\mathbf{c}}(\alpha)) = -(\alpha, \beta). \tag{8.2}$$

特别地，若 $\mathbf{c}$-对 $\mathrm{hh}\alpha, \beta\mathrm{ii}$ 对于正根 $\gamma \in \Phi^+$ 是 $\mathbf{c}$-极小的，则我们有短正合序列（包括分次平移）

$$0 \to q^{p_{\beta,\alpha} - (\beta,\alpha)} S_{\mathbf{c}}(\gamma) \to S_{\mathbf{c}}(\beta) \circ S_{\mathbf{c}}(\alpha) \to S_{\mathbf{c}}(\langle\!\langle \alpha, \beta \rangle\!\rangle) \to 0,$$
$$0 \to q^{-(\beta,\alpha)} S_{\mathbf{c}}(\langle\!\langle \alpha, \beta \rangle\!\rangle) \to S_{\mathbf{c}}(\alpha) \circ S_{\mathbf{c}}(\beta) \to q^{-p_{\beta,\alpha}} S_{\mathbf{c}} \to 0, \tag{8.3}$$

这说明

$$\widetilde{\Lambda}(S_{\mathbf{c}}(\alpha), S_{\mathbf{c}}(\beta)) = p_{\beta,\alpha}, \quad \Lambda(S_{\mathbf{c}}(\alpha), S_{\mathbf{c}}(\beta)) = 2p_{\beta,\alpha} - (\alpha, \beta), \quad \textit{and}$$
$$\mathfrak{d}(S_{\mathbf{c}}(\alpha), S_{\mathbf{c}}(\beta)) = p_{\beta,\alpha} - (\alpha, \beta).$$

命题 8.5（[50, 推论 5.12]）。设 $\underline{m}^{(k)}$ $(k=1,2,3)$ 是互不相同的序列，使得 $\mathrm{wt_c}(\underline{m}^{(a)}_{k_1}) = \mathrm{wt_c}(\underline{m}^{(b)})$ $(a,b\in\{1,2,3\})$，$\deg_{\mathbf{c}}(\underline{m}^{(j)}) = 1$ 且 $\deg_{\mathbf{c}}(\underline{m}^{(3)}) > 1$，并且 $\underline{m}^{(j)} \prec^{\flat}_{\mathbf{c}} \underline{m}^{(3)} (j=1,2)$。如果存在非零的 $R(\gamma)$-同态（允许分次平移）

$$\vec{\mathcal{S}}_{\mathbf{c}}(\underline{m}^{(j)}) \longrightarrow \vec{\mathcal{S}}_{\mathbf{c}}(\underline{m}^{(3)}) \quad for\ j=1,2,$$

并且 $\vec{\mathcal{S}}_{\mathbf{c}}(\underline{m}^{(k)})$（$k=1$，2，3）具有相同的单头，则有

$$\vec{\mathcal{S}}_{\mathbf{c}}(\underline{m}^{(j)}) \hookrightarrow \vec{\mathcal{S}}_{\mathbf{c}}(\underline{m}^{(3)}) \qquad for\ j=1,2.$$

对于 Q-数据 $Q=(\triangle,\xi)$ 和 $(i,p)\in(\Gamma_Q)_0$，我们令

$$S_Q(i;p) := S_{[Q]}(\beta) \quad \text{where } \phi_Q(i,p)=(\beta,0).$$

下面是本文的一个主定理：

定理 8.6. 设 $Q=(\triangle,\xi)$ 是任意类型的 Dynkin 箭图。则有

$$\mathfrak{d}(S_Q(i;p),S_Q(j;s)) = \widetilde{\mathfrak{d}}^{\triangle}_{i,j}[\,|p-s|\,] \quad for\ any\ (i,p),\,(j,s)\in(\Gamma_Q)_0. \tag{8.4}$$

此外，对于一个 $[Q]$-对 $\mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii}$，若 $\phi_Q(i,p)=(\alpha,0)$ 且 $\phi_Q(j,s)=(\beta,0)$，则有以下结论：

(a) $S_Q(\alpha)\nabla S_Q(\beta)\simeq S_Q(\mathrm{hd}_Q(\mathrm{hh}\alpha,\beta\mathrm{ii}))$，相差一个分次平移。(b) 如果 $\mathfrak{d}^{\triangle}_{i,j}[\,|p-s|\,]=\max(d_i,d_j)$，则有 $\ell(S_Q(\alpha)\circ S_Q(\beta))=2$。(c) 如果 $\mathfrak{d}^{\triangle}_{i,j}[\,|p-s|\,]>\max(d_i,d_j)$，则有 $\ell(S_Q(\alpha)\circ S_Q(\beta))>2$。(d) labelit: length1 如果 $\mathfrak{d}^{\triangle}_{i,j}[\,|p-s|\,]=0$，那么 $S_Q(\alpha)\circ S_Q(\beta)$ 是单模。这里，$\ell(M)$ 表示 M for $M\in R$-gmod 的合成长度。

注 8.7。在定理 8.6 (a) 中，$S_Q(\mathrm{hd}_Q(\langle\langle\alpha,\beta\rangle\rangle))$ 同构于彼此可交换的尖点模的卷积积，因为 $\mathrm{hd}_Q(\langle\langle\alpha,\beta\rangle\rangle$ 是 $[Q]$-单的。对于 $\mathfrak{g}$ 单纯laced 类型，我们请读者参阅 [50, 定理 5。18]。

该定理的单边型情形由 [32, 定理 4.12], [11, 定理 1.2], [50] 得出。在下一小节中，我们将给出该定理在 BCFG 情形下的证明。

推论 8.8。回顾 (4.13)。对于 $\mathfrak{g}$ 类型为 B_n、C_n 或 D_{n+1} 且 $(i;p)$、$(j;s)\in(\Gamma_Q)_0$，的R-模 $S_Q(i;p)\circ S_Q(j;s)$，其合成长度为 >2 当且仅当

$$2\leqslant i,j\leqslant n-1,\ i+j\geqslant n+1,\ \mathsf{h}+2-i-j\leqslant|p-s|\leqslant i+j\ and\ |p-s|\equiv_2 i+j.$$

下面关于 ADE 情形的推论也已在[12, 引理 9.12] 中得到证明（另见 [32]）。

推论8.9. 对于满足 $a\neq b$的 $\phi_Q(\alpha_a,0)=(i,p)$和 $\phi_Q(\alpha_b,0)=(j,s)$，我们有

$$\widetilde{\mathfrak{d}}_{i^*,j}[\mathsf{h}-|p-s|]=\widetilde{\mathfrak{d}}_{i,j^*}[\mathsf{h}-|p-s|]=0. \tag{8.5}$$

证明. 注意

$$(8.6)\quad \begin{aligned} &\text{(A) } \widetilde{\mathfrak{d}}_{i,n}^{D_{n+1}}(t)=\widetilde{\mathfrak{d}}_{i,n+1}^{D_{n+1}}(t) \text{ for } i<n \text{ and}\\ &\text{(B) } \widetilde{\mathfrak{d}}_{i,j}^{C_n}(t)=\kappa_{i,j}\widetilde{\mathfrak{d}}_{i,j}^{B_n}(t), \text{ where } \kappa_{i,j}=\begin{cases}1/2 & \text{if } i,j<n,\\ 1 & \text{if } \min(i,j)<\max(i,j)=n,\\ 2 & \text{if } i=j=n.\end{cases}\end{aligned}$$

(1) 假设 $\max(a,b)<n$ 且 $\triangle$ 属于 B_n 或 C_n类型。在此情况下，由于 $\mathsf{d}_{\alpha_a}=\mathsf{d}_{\alpha_a}\neq\mathsf{d}_{\alpha_n}$，我们有 $\max(i,j)<n$。将 $\alpha_a\in\Phi^+_{B_n}$ 视为.....，由命题 5.4，对于 $\imath=\pi^{-1}(i)$，我们有 $\alpha_a=\psi^{-1}(\alpha_a)\in\Phi^+_{D_{n+1}}$ 以及 $\phi_{\underline{Q}}^{-1}(\alpha_a,0)=(\imath,p)$。对于 $\alpha_b=\psi^{-1}(\alpha_b)$，也有类似的观察。由于（8.5）对 D_{n+1}-情形成立，因此我们有

$$\frac{1}{2}\widetilde{\mathfrak{d}}_{i,j}^{B_n}[\mathsf{h}-|p-s|]=\widetilde{\mathfrak{d}}_{i,j}^{C_n}[\mathsf{h}-|p-s|]=\widetilde{\mathfrak{d}}_{i,j}^{D_{n+1}}[\mathsf{h}-|p-s|]=0.$$

这里的第二个等式由定理 3.7 得出。因此，该情形下的断言得证。(2) 假设 $\max(a,b)=n$ 且 $\triangle$ 属于 B_n 或 C_n类型。不妨设 $\alpha_a=\alpha_n$。注意，在 Q 和 $i=n$中， n 是汇或源点。将 $\alpha_n\in\Phi^+_{B_n}$ 视为.....，我们有 $\{\alpha_n,\alpha_{n+1}\}=\psi^{-1}(\alpha_n)\subset\Phi^+_{D_{n+1}}$ 以及 $\{\phi_{\underline{Q}}^{-1}(\alpha_n,0)\ \phi_{\underline{Q}}^{-1}(\alpha_{n+1},0)\}=\{(n,p),\ (n+1,p)\}$。于是，与 (1)-情形相同，我们有

$$\widetilde{\mathfrak{d}}_{n,j}^{B_n}[\mathsf{h}-|p-s|]=\widetilde{\mathfrak{d}}_{n,j}^{C_n}[\mathsf{h}-|p-s|]=\widetilde{\mathfrak{d}}_{n,j}^{D_{n+1}}[\mathsf{h}-|p-s|]+\widetilde{\mathfrak{d}}_{n+1,j}^{D_{n+1}}[\mathsf{h}-|p-s|]=0.$$

(3) 对于 F_4 和 G_2 的情形，只需考察这些类型的所有 Dynkin 箭图即可直接验证。□

8.2. BCFG 情形。在本小节中，当 Q 是 BCFG 型的 Dynkin 箭图时，我们考察 $[Q]$-尖点模的卷积积。

我们令 $\phi_Q(i,p)=(\alpha,0)$，以及 $\phi_Q(j,s)=(\beta,0)$。

命题 8.10. 设 Q 是类型为 B_n 和 C_n 的任意 Dynkin 箭图。对于 Dynkin 箭图 Q，令 $\mathsf{hh}\alpha,\beta\mathsf{ii}$ 为关于 $\alpha+\beta=\gamma\in\Phi^+$ 的一个 $[Q]$-最小 $[Q]$-对。则有

$$\mathfrak{d}(S_Q(\alpha),S_Q(\beta))=\max(\mathsf{d}_i,\mathsf{d}_j)=\widetilde{\mathfrak{d}}_{i,j}^{\triangle}[\ |p-s|\ ].$$

证明。 第二个等式由定理 6.6 得出。

(1) 考虑 $\mathsf{d}_\gamma=2,\mathsf{d}_\alpha=\mathsf{d}_\beta=1$ 且 $\mathfrak{g}$ 为类型 B_n 的情形。则有 $\mathrm{res}^{[Q]}(\alpha)=\mathrm{res}^{[Q]}(\beta)=n$，以及 $\mathrm{res}^{[Q]}(\gamma)<n$。因此，对于 $1\leqslant a\neq b\leqslant n$，有 $\gamma=\varepsilon_a+\varepsilon_b$ 和 $\{\alpha,\beta\}=\{\epsilon_a,\epsilon_b\}$。于是有

$$\mathfrak{d}(S_Q(\alpha),S_Q(\beta))=1-(\varepsilon_a,\varepsilon_b)=1=\max(\mathsf{d}_\alpha,\mathsf{d}_\beta).$$

（2）对于类型为 B_n 或 C_n 的其余情形，我们需要证明

$$\mathfrak{d}(S_Q(\alpha),S_Q(\beta))=-(\alpha,\beta)=\max(\mathsf{d}_\alpha,\mathsf{d}_\beta).$$

于是我们有

(a) $\{\alpha,\beta\}=\{\varepsilon_a-\varepsilon_b,\varepsilon_b\pm\varepsilon_c\}$ 或 $\{\varepsilon_a-\varepsilon_b,\varepsilon_b\}$，如果 $\mathfrak{g}$ 属于 B_n类型；(b) $\{\alpha,\beta\}=\{\epsilon_a-\epsilon_b,\epsilon_b\pm\epsilon_c\}$、$\{\epsilon_a-\epsilon_b,2\epsilon_b\}$ 或 $\{\epsilon_a+\epsilon_b,\epsilon_a-\epsilon_b\}$，如果 $\mathfrak{g}$ 属于 C_n类型，

对于彼此不同的适当 $1 \leqslant a$、 b、 $c \leqslant n$。那么很容易看出

$$-(\alpha, \beta) = \max(\mathsf{d}_i, \mathsf{d}_j),$$

这就完成了我们的断言。 □

注意，命题 8.10 中的论证同样适用于 ADE-情形。

8.2.1. B_n 情形。设 Q 是任意一个类型为 B_n的 Dynkin 箭图。在假设

a $[Q]$-pair $\langle\!\langle \alpha, \beta \rangle\!\rangle$ is neither $[Q]$-simple nor $[Q]$-minimal for $\alpha + \beta = \gamma \in \Phi^+$,

只需考虑′、′、′、′和′ （6.2）中的情形，以及′、′ （6.3）中的情形。回顾一下，α、 β）和 $p_{\beta,\ \alpha}$ 的取值记录在表 3 和（6.4）中，并且不依赖于 Q的选择。

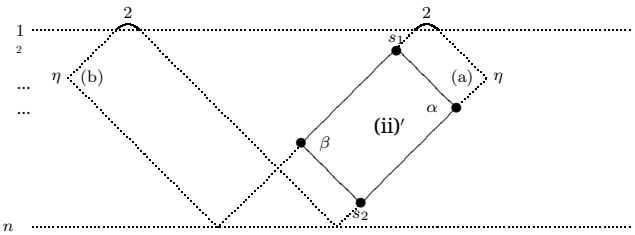
在本节中，记

$$\phi_Q(i, p) = (\alpha, 0) \quad \text{and} \quad \phi_Q(j, s) = (\beta, 0).$$

在本小节中，我们将通过考虑每种情形来证明定理 8.6。

考虑情形 (ii)′。根据命题 4.8 以及 ψ 具有可加性的事实，存在$\eta \in \Phi^+$ 使得

(a) α 的 $[Q]$-对 hhη, s_1ii 是 $[Q]$-极小的，且具有形式 (i)′；或 (b) s_1 的 $[Q]$-对 hhα, ηii 是 $[Q]$-极小的，且具有形式 (iii)′。



首先假设（a）。然后，8.3）说明存在一个齐次的 R-模单态射

$$q^{p_{s_1,\eta} - (s_1,\eta)} S_Q(\alpha) \circ S_Q(\beta) \hookrightarrow S_Q(s_1) \circ S_Q(\eta) \circ S_Q(\beta).$$

注意，hhη, βii 是一个对于 s_2 的 $[Q]$-极小 $[Q]$-对，形式为 (i)。因此我们有

$$S_Q(s_1) \circ S_Q(\eta) \circ S_Q(\beta) \twoheadrightarrow q^{-p_{\beta,\eta}} S_Q(s_1) \circ S_Q(s_2)$$

再次由（8.3）。然后复合

$$q^{p_{s_1,\eta} - (s_1,\eta)} S_Q(\alpha) \circ S_Q(\beta) \hookrightarrow S_Q(s_1) \circ S_Q(\eta) \circ S_Q(\beta) \twoheadrightarrow q^{-p_{\beta,\eta}} S_Q(s_1) \circ S_Q(s_2) \tag{8.7}$$

根据命题 7.14，该式不为零。由于 S_Q（s_1）$\circ S_Q$（s_2）根据引理 8.2 是自对偶单对象，因此我们有 S_Q（α）∇S_Q（β）$\simeq S_Q$（s_1）$\circ S_Q$（s_2），相差一个分次平移，且

$$S_Q(\alpha) \circ S_Q(\beta) \twoheadrightarrow q^{-p_{\beta,\eta} - p_{s_1,\eta} + (s_1,\eta)} S_Q(s_1) \circ S_Q(s_2),$$

这说明

$$\widetilde{\Lambda}(S_Q(\alpha), S_Q(\beta)) = p_{\beta,\eta} + p_{s_1,\eta} - (s_1, \eta),$$

根据引理 7.13。因此（8.2）说明

$$\mathfrak{d}(S_Q(\alpha), S_Q(\beta)) = p_{\beta,\eta} + p_{s_1,\eta} - (s_1, \eta) - (\alpha, \beta).$$

由于 $p_{\beta,\ \eta} = p_{s_1,\ \eta} = 0$、$(s_1, \eta) = -2$ 以及 $(\alpha, \beta) = 0$，我们有

$$\mathfrak{d}(S_Q(\alpha), S_Q(\beta)) = 2 = \max(\mathsf{d}_\alpha, \mathsf{d}_\beta) = \mathfrak{d}_{i,j}[p - s].$$

现在假设 (b)。类似地，我们有一个齐次的 R-模同态，

$$q^{p_{\eta,\alpha}-(\eta,\alpha)} S_Q(s_2) \circ S_Q(s_1) \hookrightarrow S_Q(s_2) \circ S_Q(\eta) \circ S_Q(\alpha)$$

注意，$[Q]$-对 hhs_2, ηii 对于 β 是 $[Q]$-极小的，并且具有 (iii)′ 的形式。因此，我们有一个非零的 R-模同态复合，

$$q^{p_{\eta,\alpha}-(\eta,\alpha)} S_Q(s_2) \circ S_Q(s_1) \hookrightarrow S_Q(s_2) \circ S_Q(\eta) \circ S_Q(\alpha) \twoheadrightarrow q^{-p_{\eta,s_2}} S_Q(\beta) \circ S_Q(\alpha), \tag{8.8}$$

这表明 $S_Q(\beta) \Delta S_Q(\alpha) \simeq S_Q(s_1) \circ S_Q(s_2)$，相差一个分次平移，并且

$$\mathfrak{d}(S_Q(\alpha), S_Q(\beta)) = p_{\eta,\alpha} + p_{\eta,s_2} - (s_2, s_1) - (\eta, \alpha) = 2 = \max(\mathsf{d}_\alpha, \mathsf{d}_\beta) = \mathfrak{d}_{i,j}[p - s].$$

由（8.7）和 （8.8），我们有一个非零的 R-模单态射（相差分次平移）)

$$S_Q(s_2) \circ S_Q(s_1) \hookrightarrow S_Q(\beta) \circ S_Q(\alpha).$$

我们可以对 $\prec_Q^{\mathsf{b}}$-序列中的长度为 1 的链应用类似的论证。这些链的形式为 $\underline{m} \prec_Q^{\mathsf{b}} \underline{m}'$，并在情形 (iv)′、(vii)′、(x)′ 和 (xi)′中描述，从而得到非零的R-模同态（相差分次平移）

$$\overleftarrow{\mathcal{S}}_{[\underline{w}_0]}(\underline{m}) \to \overleftarrow{\mathcal{S}}_{[\underline{w}_0]}(\underline{m}'). \tag{8.9}$$

更准确地说，这些长度为 1 的链如下列出：

$$\begin{cases} \langle\!\langle s_1, s_2 \rangle\!\rangle \prec_Q^{\mathsf{b}} \langle\!\langle \alpha, \beta \rangle\!\rangle & \text{(iv)}' \text{ and (vii)}' \text{ cases}, \\ \langle\!\langle \eta_1, \eta_2 \rangle\!\rangle, \langle\!\langle \tau_1, \zeta_1 \rangle\!\rangle \prec_Q^{\mathsf{b}} \langle\!\langle \alpha, \beta \rangle\!\rangle & \text{(x)}' \text{ case}, \\ \langle\!\langle \eta_1, \eta_2 \rangle\!\rangle \prec_Q^{\mathsf{b}} \langle\!\langle \alpha, \beta \rangle\!\rangle, \{s_1, \tau_1, \zeta_1\}_{\beta \in \Phi^+} \prec_Q^{\mathsf{b}} \langle\!\langle \alpha, \beta \rangle\!\rangle, & \text{(xi)}' \text{ case}, \\ \langle\!\langle s_1, s_2 \rangle\!\rangle \prec_Q^{\mathsf{b}} \langle\!\langle \eta_1, \eta_2 \rangle\!\rangle, \langle\!\langle s_1, s_2 \rangle\!\rangle \prec_Q^{\mathsf{b}} \{s_1, \tau_1, \zeta_1\}_{\beta \in \Phi^+}, & \text{(xi)}' \text{ case continued}. \end{cases}$$

在情形 (iv)′ 和 (vii)′中，可以证明

$$S_Q(\alpha) \nabla S_Q(\beta) \simeq S_Q(s_1) \circ S_Q(s_2) \quad \text{(up to grading shifts)}$$

and

$$\mathfrak{d}(S_Q(\alpha), S_Q(\beta)) = 2$$

如同 (ii)′-情形。进一步地，根据（8.1）以及命题 7.10，我们有

$$[S_Q(\alpha) \circ S_Q(\beta)] = [S_Q(\alpha) \Delta S_Q(\beta)] + [S_Q(s_2) \circ S_Q(s_1)],$$

对于情形 (ii)′， (iv)′ 和 (vii)′。因此，定理 8.6 中的断言对这些情形成立。

例 8.11。 利用 Γ_Q 在例5.11 以及 $[Q]$-对（对应于（iv））′和（vii）′在例6.8中，我们可以如下计算 $\mathfrak{d}$（S_Q（α） S_Q（β））：

(1) 由于 $p_{\langle 1,\ -2\rangle,\ \langle 2,\ -4\rangle} = 0$, $p_{\langle 1,\ -2\rangle,\ \langle 2,\ -3\rangle} = 0$, $(\langle 1,-2\rangle, \langle 2,-4\rangle) = -2$ 以及 $(\langle 2,-3\rangle, \langle 1,-4\rangle) = 0$, 我们有

$$\mathfrak{d}(S_Q(\langle 2,-3\rangle), S_Q(\langle 1,-4\rangle)) = 2.$$

(2) 由于 $p_{\langle 1\rangle,\ \langle 2\rangle} = 1$, $p_{\langle 3\rangle,\ \langle 2\rangle} = 1$、$(\langle 1\rangle, \langle 2\rangle) = 0$ 以及 $(\langle 2\rangle, \langle 3\rangle) = 0$，我们有

$$\mathfrak{d}(S_Q(\langle 1,2\rangle), S_Q(\langle 3\rangle)) = 2.$$

现在考虑情形 (x)′。在此情形下，我们有非零的 R-模同态（在分次平移意义下）

$$S_Q(\eta_2)\circ S_Q(\eta_1) \to S_Q(\beta)\circ S_Q(\alpha) \quad \text{and} \quad S_Q(\zeta_1)\circ S_Q(\tau_1) \to S_Q(\beta)\circ S_Q(\alpha) \tag{8.10}$$

由（8.9）可知，因此这些同态是单射的，并且

$$S_Q(\alpha)\nabla S_Q(\beta) \simeq S_Q(\mathrm{hd}_Q(\alpha,\beta)) \simeq S_Q(\gamma) \simeq S_Q(\eta_1)\nabla S_Q(\eta_2) \simeq S_Q(\tau_1)\nabla S_Q(\zeta_1) \tag{8.11}$$

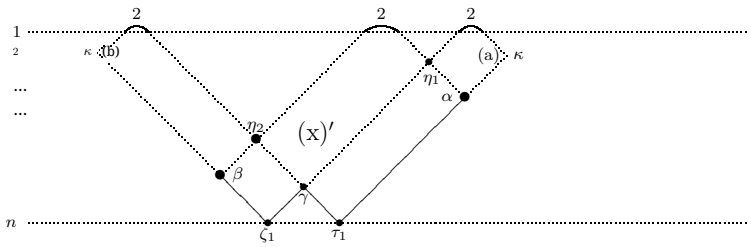
根据命题 7.15和命题 8.5（在分次平移意义下）。此外，根据命题 8.3和命题 7.15，我们可以得出

$$\ell(S_Q(\alpha)\circ S_Q(\beta)) > 2.$$

类似地，对于情形 (xi)′，我们也可以得到相同的结果。

我们来计算 $\mathfrak{d}(S_Q(\alpha)\ S_Q(\beta))$ 在情形 (x)′ 下的值：由于 (α,η_1) 是截面的，存在 $\zeta\in\Phi^+$ 使得

(a) $[Q]$-对 $\mathrm{hh}\kappa,\eta_1\mathrm{ii}$ 对于 α 是 $[Q]$-极小的，且形式为 (i)′；或 (b) $[Q]$-对 $\mathrm{hh}\alpha,\kappa\mathrm{ii}$ 对于 η_1 是 $[Q]$-极小的，且形式为 (iii)′。



假设 (a)。那么与前述情形一样，我们有一个齐次的 R-模同态

$$q^{p_{\eta_1,\kappa}-(\eta_1,\kappa)} S_Q(\alpha)\circ S_Q(\beta) \hookrightarrow S_Q(\eta_1)\circ S_Q(\kappa)\circ S_Q(\beta).$$

由于 $[Q]$-对 $\mathrm{hh}\kappa,\beta\mathrm{ii}$ 对于 η_2 是 $[Q]$-极小的，且形式为 (iii)′，我们有一个非零的 R-模同态复合

$$q^{p_{\eta_1,\kappa}-(\eta_1,\kappa)} S_Q(\alpha)\circ S_Q(\beta) \hookrightarrow S_Q(\eta_1)\circ S_Q(\kappa)\circ S_Q(\beta) \twoheadrightarrow q^{-p_{\beta,\kappa}} S_Q(\eta_1)\circ S_Q(\eta_2).$$

注意，根据命题 8.5 和（8.10），该同态是满射的。因此，我们可以得到一个非零的 R-模同态

$$q^{p_{\eta_1,\kappa}-(\eta_1,\kappa)} S_Q(\alpha)\circ S_Q(\beta) \twoheadrightarrow q^{-p_{\beta,\kappa}-p_{\eta_2,\eta_1}} S_Q(\gamma),$$

由于 $S_Q(\eta_1)\ \nabla S_Q(\eta_2) \simeq q^{-p_{\eta_2,\ \eta_1}} S_Q(\gamma)$。因此我们有

$$\widetilde{\Lambda}(S_Q(\alpha), S_Q(\beta)) = p_{\beta,\kappa} + p_{\eta_2,\eta_1} + p_{\eta_1,\kappa} - (\eta_1,\kappa)$$

and

$$\mathfrak{d}(S_Q(\alpha), S_Q(\beta)) = p_{\beta,\kappa} + p_{\eta_2,\eta_1} + p_{\eta_1,\kappa} - (\eta_1, \kappa) - (\alpha, \beta).$$

由于 $p_{\beta,\ \kappa} = p_{\eta_2,\ \eta_1} = p_{\eta_1,\ \kappa} = 0$ 且 $(\eta_1, \kappa) = (\alpha, \beta) = -2$，我们有

$$\mathfrak{d}(S_Q(\alpha), S_Q(\beta)) = 4 = \deg_Q(\alpha, \beta) \times \max(\mathsf{d}_\alpha, \mathsf{d}_\beta) = \mathfrak{d}_{i,j}[p - s]. \tag{8.12}$$

~类似地，在 $\Lambda(S_Q(\alpha)\ S_Q(\beta))$ 和 $\mathfrak{d}(S_Q(\alpha)\ S_Q(\beta))$ 的（b）情形下，也有相同的结果。现在计算 $\mathfrak{d}(S_Q(\alpha)\ S_Q(\beta))$ 的情形（xi）′：与情形（x）′一样，我们有

(a) $[Q]$-对 hhζ, η_1ii 对 α 是 $[Q]$-极小的，且具有 (i)′ 的形式；或 (b) $[Q]$-对 hhα, ζii 对 η_1 是 $[Q]$-极小的，且具有 (iii)′ 的形式。

假设（a）。如 i 在情形（x）′中，我们有一个由 R-模同态组成的非零复合

$$q^{p_{\eta_1,\zeta} - (\eta_1,\zeta)} S_Q(\alpha) \circ S_Q(\beta) \hookrightarrow S_Q(\eta_1) \circ S_Q(\zeta) \circ S_Q(\beta) \twoheadrightarrow q^{-p_{\beta,\zeta}} S_Q(\eta_1) \circ S_Q(\eta_2).$$

由于 $[Q]$-对 $\langle\langle \eta_1, \eta_2 \rangle\rangle$ 对应于情形（ii）′，（8.11）说明我们可以得到一个非零的R-模同态

$$q^{p_{\eta_1,\zeta} - (\eta_1,\zeta)} S_Q(\alpha) \circ S_Q(\beta) \twoheadrightarrow q^{-p_{\beta,\zeta} - \widetilde{\Lambda}(S_Q(\eta_1), S_Q(\eta_2))} S_Q(s_1) \circ S_Q(s_2),$$

其为满射。因此我们有

$$\widetilde{\Lambda}(S_Q(\alpha), S_Q(\beta)) = p_{\beta,\zeta} + \widetilde{\Lambda}(S_Q(\eta_1), S_Q(\eta_2)) + p_{\eta_1,\zeta} - (\eta_1, \zeta)$$

从而

$$\mathfrak{d}(S_Q(\alpha), S_Q(\beta)) = p_{\beta,\zeta} + \widetilde{\Lambda}(S_Q(\eta_1), S_Q(\eta_2)) + p_{\eta_1,\zeta} - (\eta_1, \zeta) - (\alpha, \beta).$$

由于 $[Q]$-对 hhη_1, η_2ii 对应于情形 (ii)′，我们有

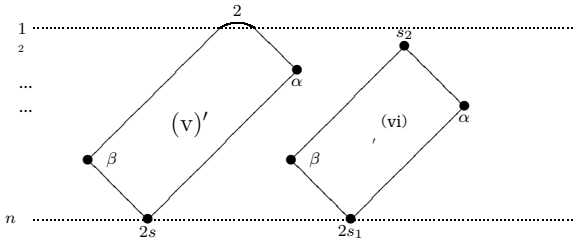
$$\widetilde{\Lambda}(S_Q(\eta_1), S_Q(\eta_2)) = \mathfrak{d}(S_Q(\eta_1), S_Q(\eta_2)) + (\eta_1, \eta_2) = 2.$$

由表 3，以及以下事实：$p_{\beta,\ \zeta} = p_{\eta_1,\ \zeta} = 0$ $(\eta_1, \zeta) = -2$ 和 $(\alpha, \beta) = 0$，我们有

$$\mathfrak{d}(S_Q(\alpha), S_Q(\beta)) = 4 = \deg_Q(\alpha, \beta) \times \max(\mathsf{d}_\alpha, \mathsf{d}_\beta) = \mathfrak{d}_{i,j}[p - s].$$

因此，定理 8.6 中的断言对于情形 (x)′ 和 (xi)′成立。

我们考虑情形 (v)′ 和 (vi)′，其中 hhα, βii 的头部 $\underline{m}$ 包含 $m_i = 2$。



考虑（v）′ 情形。与前述情形一样，存在 $\eta \in \Phi^+$ 使得

(a) α 的 $[Q]$-对 hhη, sii 是 $[Q]$-极小的，且形式为 (ix)′；或 (b) β 的 $[Q]$-对 hhs, ηii 是 $[Q]$-极小的，且形式为 (ix)′。

假设（a）。那么我们有一个齐次的 R-模单态射

$$q^{p_{s,\eta}-(s,\eta)}S_Q(\alpha)\circ S_Q(\beta)\hookrightarrow S_Q(s)\circ S_Q(\eta)\circ S_Q(\beta).$$

注意到 $\mathbf{hh}\eta,\beta\mathbf{ii}$ 是一个 $[Q]$-极小的 $[Q]$-对，且具有 (viii)′ 的形式。因此，复合

$$q^{p_{s,\eta}-(s,\eta)}S_Q(\alpha)\circ S_Q(\beta)\hookrightarrow S_Q(s)\circ S_Q(\eta)\circ S_Q(\beta)\twoheadrightarrow q^{-p_{\beta,\eta}}S_Q(s)^{\circ 2}$$

根据命题 7.14 不为零，因此 $S_Q(\alpha)\nabla S_Q(\beta)\simeq S_Q(s)^{\circ 2}$ 在分次平移意义下。注意，$S_Q(s)^{\circ 2}$不是自对偶单对象，而 $S_Q(2s):=qS_Q(s)^{\circ 2}$是自对偶单对象。因此我们有

$$S_Q(\alpha)\circ S_Q(\beta)\twoheadrightarrow q^{-p_{\beta,\eta}-p_{s,\eta}+(s,\eta)-1}S_Q(2s)$$

这说明

$$\widetilde{\Lambda}(S_Q(\alpha),S_Q(\beta))=p_{\beta,\eta}+p_{s,\eta}-(s,\eta)+1$$

因此

$$\mathfrak{d}(S_Q(\alpha),S_Q(\beta))=p_{\beta,\eta}+p_{s,\eta}-(s,\eta)-(\alpha,\beta)+1.$$

由于 $p_{\beta,\ \eta}=1$ 且 $p_{s,\ \eta}=(s,\eta)\ =(\alpha,\beta)\ =0$，我们有

$$\mathfrak{d}(S_Q(\alpha),S_Q(\beta))=2=\max(\mathsf{d}_\alpha,\mathsf{d}_\beta)=\mathfrak{d}_{i,j}[p-s]. \tag{8.13}$$

根据命题 7.12，$\ell(S_Q(\alpha)\circ S_Q(\beta))=2$。我们可以对（b）应用类似的论证。

考虑（vi）′ 情形。与（v）′-情形一样，存在 $\eta\in\Phi^+$ 使得

（a）$[Q]$-对 $\mathbf{hh}\eta,s_2\mathbf{ii}$ 对于 α 是 $[Q]$-极小的，且具有（ix）′的形式；

或（b）$[Q]$-对 $\mathbf{hh}s_2,\eta\mathbf{ii}$ 对于 β 是 $[Q]$-极小的，且具有（ix）′的形式。

假设（a）。则有

$$q^{p_{s_2,\eta}-(s_2,\eta)}S_Q(\alpha)\circ S_Q(\beta)\hookrightarrow S_Q(s_2)\circ S_Q(\eta)\circ S_Q(\beta).$$

于是，$[Q]$-对 $\mathbf{hh}\eta,\beta\mathbf{ii}$ 对应于（vii）′。因此，我们有齐次 R-模同态的非零复合

$$\begin{aligned}&q^{p_{s_2,\eta}-(s_2,\eta)}S_Q(\alpha)\circ S_Q(\beta)\hookrightarrow S_Q(s_2)\circ S_Q(\eta)\circ S_Q(\beta)\\&\twoheadrightarrow q^{-\widetilde{\Lambda}(S_Q(\eta),S_Q(\beta))}S_Q(s_2)\circ S_Q(s_2)\circ S_Q(s_3)\simeq q^{-\widetilde{\Lambda}(S_Q(\eta),S_Q(\beta))-1}S_Q(2s_2)\circ S_Q(s_3),\end{aligned}$$

从而在分次平移意义下，$S_Q(\alpha)\circ S_Q(\beta)\simeq S_Q(2s_2)\circ S_Q(s_3)$。此外，我们有

$$S_Q(\alpha)\circ S_Q(\beta)\twoheadrightarrow q^{-p_{s_2,\eta}+(s_2,\eta)-\widetilde{\Lambda}(S_Q(\eta),S_Q(\beta))-1}S_Q(2s_2)\circ S_Q(s_3)$$

这说明

$$\widetilde{\Lambda}(S_Q(\alpha),S_Q(\beta))=p_{s_2,\eta}-(s_2,\eta)+\widetilde{\Lambda}(S_Q(\eta),S_Q(\beta))+1$$

从而

$$\mathfrak{d}(S_Q(\alpha),S_Q(\beta))=p_{s_2,\eta}+\widetilde{\Lambda}(S_Q(\eta),S_Q(\beta))-(s_2,\eta)-(\alpha,\beta)+1.$$

由于 $[Q]$-对 $\mathbf{hh}\eta,\beta\mathbf{ii}$ 对应于 (vii)′，我们有

$$\widetilde{\Lambda}(S_Q(\eta),S_Q(\beta))=\widetilde{\Lambda}(S_Q(\eta),S_Q(\beta))+(\eta,\beta)=2+0=2.$$

T那么，由以下事实：$p_{s_2,\ \eta}=1$、$(s_2,\eta)\ =0$ 以及 $(\alpha,\beta)\ =2$，可知我们有

$$\mathfrak{d}(S_Q(\alpha),S_Q(\beta))=2=\max(\mathsf{d}_\alpha,\mathsf{d}_\beta)=\mathfrak{d}_{i,j}[p-s]. \tag{8.14}$$

我们可以对（b）应用类似的论证。因此，定理 8.6中的断言对于情形 (v)′ 和 (vi)′也成立。

8.2.2. C_n 情形。现在我们将考虑 C_n-情形。与 B_n-情形相比，不存在 C_n-类比的命题 6.10；也就是说，对于一个 $[Q]$-对 $\underline{p}=\langle\langle\alpha,\ \beta\rangle\rangle$ 且 $\deg^Q(\alpha,\beta)\ =2$，存在唯一的序列 $\underline{m}$使得

$$\mathrm{hd}_Q(\underline{p})\prec^{\mathsf{b}}_Q\underline{m}\prec^{\mathsf{b}}_Q\underline{p}.$$

因此，对于情形 (x)″ 和 (xi)″，我们不能应用命题 7.15 。对于除 (x)″ 和 (xi)″以外的情形，我们可以应用 B_n 类型的相同策略来证明定理 8.6。

我们来考虑 (x)″-情形。在考虑一般的 (x)″-情形之前，我们先观察例 Γ_Q 4.5中描述的 C_3 类型的 AR箭图。在此情形下，$\langle\langle\alpha,\ \beta\rangle\rangle:=\langle\langle\langle1,\ -3\rangle,\ \langle2,\ 3\rangle\rangle\rangle$是与 (x) $[Q]$-情形对应的唯一 ″-对。

现在我们要证明

$$\mathfrak{d}(S_Q(\langle1,-3\rangle),S_Q(\langle2,3\rangle))=2.$$

由于 $[Q]$-对 hh⟨2、 −3⟩、 ⟨3、 3⟩ii 对于 ⟨2、 3⟩ 是 $[Q]$-极小的，因此有

$$S_Q(\langle2,3\rangle)\simeq S_Q(\langle2,-3\rangle)\nabla S_Q(\langle3,3\rangle)\quad(\text{up to grading shift}).$$

设 $L=S_Q(\langle1,-3\rangle)$、 $M=S_Q(\langle2,-3\rangle)$ 和 $N=S_Q(\langle3,3\rangle)$。由于 L 与 M 可交换，序列 (L,M,N) 是正规序列。另一方面，我们可以计算

$$\Lambda(M,L)=-1\quad\Lambda(N,L)=2\quad\text{and}\quad\Lambda(M\nabla N,L)=1$$

因为

$$\langle1,-3\rangle\prec_Q\langle2,-3\rangle,\quad\langle1,-3\rangle\prec_Q\langle3,3\rangle\quad\text{and}\quad\langle1,-3\rangle\prec_Q\langle2,3\rangle.$$

那么引理 7.18 推出（M、 N、 L）是正规序列，因此

$$\mathfrak{d}(L,M\nabla N)=\mathfrak{d}(L,M)+\mathfrak{d}(L,N)=0+2=2,$$

根据引理 7.19。这里我们使用了以下事实： $\mathfrak{d}$（L、 N） $=2$，再由命题 8.10。此外，我们有

$$\begin{aligned}L\nabla(M\nabla N)&\simeq\mathrm{hd}(L\circ M\circ N)\simeq\mathrm{hd}(M\circ L\circ N)\simeq\mathrm{hd}(M\circ(L\nabla N))\\&\simeq S_Q(\langle2,-3\rangle)\nabla S_Q(\langle1,3\rangle)\simeq S_Q(\langle1,2\rangle)\end{aligned}$$

正如我们所希望的。由于存在一个非零的 R-模同态

$$S_Q(\langle1,3\rangle)\circ S_Q(\langle2,-3\rangle)\to S_Q(\langle2,3\rangle)\circ S_Q(1,-3),$$

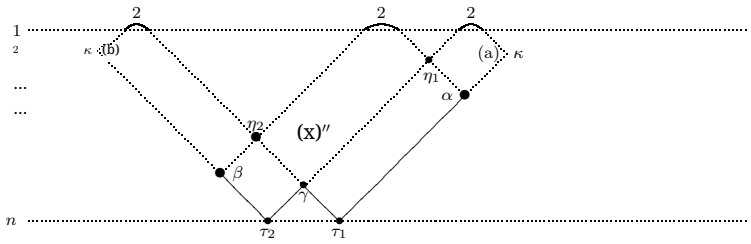
$\ell(S_Q(\langle1,3\rangle)\circ S_Q(\langle2,-3\rangle))\ =2$ 且它们具有共同的简单底，因此该 R-模同态是单射的。于是我们得到

$$\ell(S_Q(\langle2,3\rangle)\circ S_Q(1,-3))>2.$$

因此，我们可以检验定理 8.6 对 $[Q]$-对成立。

让我们考虑一般的 (x)″ 情形。则存在 $\kappa\in\Phi^+$ 使得

(a) hhκ, η_1ii 是 α 的一个 $[Q]$-极小 $[Q]$-对，且形式为 (i)″；或 (b) hhα, κii 是 η_1 的一个 $[Q]$-极小 $[Q]$-对，且形式为 (iii)″。



这里是 $\tau_1 + \tau_2 = 2\gamma = 2(\alpha + \beta)$。

假设（a）成立。则有

(8.15) (1) $S_Q(\kappa) \nabla S_Q(\eta_1) \simeq S_Q(\alpha)$，(2) $[Q]$-对 hhκ, βii 对于形如 (iii)″ 的 η_2 是 $[Q]$-极小的，(3) $[Q]$-对 hhα, η_2ii 对于形如 (v)″ 的 τ_1 是 $[Q]$-极小的，(4) $[Q]$-对 hhη_1, βii 对于形如 (v)″ 的 τ_2 是 $[Q]$-极小的，(5) $[Q]$-对 hhκ, τ_2ii 对于形如 (viii)″ 的 γ 是 $[Q]$-极小的。

现在我们将证明以下断言：

定理 Sequences $(S_Q(\beta), S_Q(\kappa), S_Q(\eta_1))$ and $(S_Q(\kappa), S_Q(\eta_1), S_Q(\beta))$ are norma

(I) 注意到

$$\Lambda(S_Q(\beta), S_Q(\kappa)) = -(\beta, \kappa),\ \Lambda(S_Q(\beta), S_Q(\eta_1)) = -(\beta, \eta_1) \text{ and } \Lambda(S_Q(\beta), S_Q(\alpha)) = -(\beta, \alpha),$$

由于 $\alpha, \eta_1, \kappa \prec_Q \beta$。因此有

$$\Lambda(S_Q(\beta), S_Q(\kappa) \nabla S_Q(\eta_1)) = \Lambda(S_Q(\beta), S_Q(\kappa)) + \Lambda(S_Q(\beta), S_Q(\eta_1))$$

这意味着序列（$S_Q(\beta)$ $S_Q(\kappa)$ $S_Q(\eta_1)$）是正规的。

（II）我们有

$$\Lambda(S_Q(\kappa), S_Q(\eta_1)) = 2\mathfrak{d}(S_Q(\kappa), S_Q(\eta_1)) + (\kappa, \eta_1) \overset{(A)}{=} 2 + (\kappa, \eta_1),$$

$$\Lambda(S_Q(\kappa), S_Q(\beta)) = 2\mathfrak{d}(S_Q(\kappa), S_Q(\beta)) + (\kappa, \beta) \overset{(B)}{=} 2 + (\kappa, \beta),$$

$$\Lambda(S_Q(\kappa), S_Q(\tau_2)) = 2\mathfrak{d}(S_Q(\kappa), S_Q(\tau_2)) + (\kappa, \tau_2) \overset{(C)}{=} 4 + (\kappa, \tau_2).$$

这里我们使用以下事实

$$\mathfrak{d}(S_Q(\kappa), S_Q(\eta_1)) \overset{(A)}{=} 1,\ \mathfrak{d}(S_Q(\kappa), S_Q(\beta)) \overset{(B)}{=} 1 \text{ and } \mathfrak{d}(S_Q(\kappa), S_Q(\tau_2)) \overset{(C)}{=} 2$$

由命题 8.10 和（8.15）可知。因此我们有

$$\Lambda(S_Q(\kappa), S_Q(\eta_1) \nabla S_Q(\beta)) = \Lambda(S_Q(\kappa), S_Q(\tau_2)) = \Lambda(S_Q(\kappa), S_Q(\eta_1)) + \Lambda(S_Q(\kappa), S_Q(\beta))$$

这意味着序列（$S_Q(\kappa)$ $S_Q(\eta_1)$ $S_Q(\beta)$）是正规的。

由（I）和（II），引理 7.19 表明

$$\mathfrak{d}(S_Q(\alpha), S_Q(\beta)) = \mathfrak{d}(S_Q(\kappa) \nabla S_Q(\eta_1), S_Q(\beta)) = \mathfrak{d}(S_Q(\kappa), S_Q(\beta)) + \mathfrak{d}(S_Q(\eta_1), S_Q(\beta)) = 2,$$

正如我们所希望的那样。此外，我们有

$$\begin{aligned} S_Q(\alpha) \nabla S_Q(\beta) &\simeq \mathrm{hd}(S_Q(\kappa) \circ S_Q(\eta_1) \circ S_Q(\beta)) \\ &\simeq S_Q(\kappa) \nabla (S_Q(\eta_1) \nabla S_Q(\beta)) \simeq S_Q(\kappa) \nabla S_Q(\tau_2) \\ &\simeq S_Q(\gamma), \end{aligned}$$

相差分次平移。最后我们有

$$\ell(S_Q(\alpha) \circ S_Q(\beta)) > 2,$$

如同类型 C_3的特殊情形。对于情形 (b) 和 (xi)″，我们可以应用类似的论证。因此，定理 8.6 中的断言对情形 (x)″ 和 (xi)″成立。

8.2.3. G_2 情形。 注意，对于 w_0 类型 G_2，只有 2-约化表达式，且它们都与两个 Dynkin 箭图相适配（相差常数）。我们在第 Q 和 Γ_Q节6.4中只考虑

$$\begin{aligned} &\beta_1 = \alpha_2 = (1,-2,1), && \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 = (1,-1,0), && \beta_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2 = (2,-1,-1), \\ &\beta_4 = 2\alpha_1 + \alpha_2 = (1,0,-1), && \beta_5 = 3\alpha_1 + \alpha_2 = (1,1,-2), && \beta_6 = \alpha_1 = (0,1,-1). \end{aligned}$$

注意，非 $[Q]$-简单的 $[Q]$-对如下给出：

$$\begin{aligned} &\beta_3 \prec_Q^{\mathsf{b}} \langle\!\langle \beta_2, \beta_4 \rangle\!\rangle, \quad \beta_5 \prec_Q^{\mathsf{b}} \langle\!\langle \beta_4, \beta_6 \rangle\!\rangle, \quad \beta_4 \prec_Q^{\mathsf{b}} \langle\!\langle \beta_2, \beta_6 \rangle\!\rangle, \\ &2\beta_2 \prec_Q^{\mathsf{b}} \langle\!\langle \beta_1, \beta_4 \rangle\!\rangle, \quad 2\beta_4 \prec_Q^{\mathsf{b}} \langle\!\langle \beta_3, \beta_6 \rangle\!\rangle, \quad 2\beta_3 \prec_Q^{\mathsf{b}} \langle\!\langle \beta_2, \beta_5 \rangle\!\rangle, \end{aligned} \tag{8.16}$$

and

$$\text{(i) } 3\beta_2 \prec_Q^{\mathsf{b}} \langle\!\langle \beta_1, \beta_3 \rangle\!\rangle, \quad \text{(ii) } 3\beta_4 \prec_Q^{\mathsf{b}} \langle\!\langle \beta_3, \beta_5 \rangle\!\rangle, \quad \text{(iii) } \beta_3 \prec_Q^{\mathsf{b}} \langle\!\langle \beta_2, \beta_4 \rangle\!\rangle \prec_Q^{\mathsf{b}} \langle\!\langle \beta_5, \beta_1 \rangle\!\rangle. \tag{8.17}$$

（8.16）中的情形可以按照 B_n 或 C_n-情形中的方法证明。因此，我们来考虑（8.17）中的情形。

首先，我们处理（8.17）中的 (iii)。取 $L = S_Q(\beta_1)$、 $M = S_Q(\beta_4)$、 $N = S_Q(\beta_6)$，从而取 $M \nabla N \simeq S_Q(\beta_5)$ 和 $L \nabla M \simeq S_Q(\beta_2)^{\circ 2}$，只差分次平移。由命题 8.4，我们知道$\mathfrak{d}(S_Q(\beta_2)\ N) = 2$、 $\mathfrak{d}(L, N) = 3$以及 $\mathfrak{d}(M, N) = 1$，因此我们知道

$$\begin{aligned} 2 \times 3 = 2\Lambda(S_Q(\beta_2), N) &= \Lambda(L \nabla M, N) \\ &= \Lambda(L, N) + \Lambda(M, N) = 3 + 3, \end{aligned}$$

这意味着序列（L、 M、 N）根据引理 7.18 是正规的。根据凸序$\prec_Q$，序列（M、 N、 L）也是正规的。因此

$$\mathfrak{d}(L, M \nabla N) = \mathfrak{d}(L, M) + \mathfrak{d}(L, N) = 6,$$

根据引理 7.19。此外，我们有

$$\begin{aligned} L \nabla (M \nabla N) &\simeq (L \nabla M) \nabla N \simeq S_Q(\beta_2)^{\circ 2} \nabla N \\ &\simeq S_Q(\beta_2) \nabla (S_Q(\beta_2) \nabla N) \simeq S_Q(\beta_2) \nabla S_Q(\beta_4) \simeq S_Q(\beta_3). \end{aligned}$$

由于我们可以构造一个非零同态

$$S_Q(\beta_4) \circ S_Q(\beta_2) \to S_Q(\beta_5) \circ S_Q(\beta_1)$$

且它们具有共同的简单底，因此我们有

$$S_Q(\beta_4)\circ S_Q(\beta_2)\hookrightarrow S_Q(\beta_5)\circ S_Q(\beta_1)$$

从而

$$\ell(S_Q(\beta_5)\circ S_Q(\beta_1))>2.$$

现在考虑（8.17）中的 (i)。由于 $\langle\langle\beta_2,\ \beta_4\rangle\rangle$ 是 $[Q]$-对的极小 β_5，因此存在以下各项的非零复合 R-模同态

$$S_Q(\beta_1)\circ S_Q(\beta_3)\hookrightarrow S_Q(\beta_1)\circ S_Q(\beta_4)\circ S_Q(\beta_2)\twoheadrightarrow S_Q(\beta_2)^{\circ 3},$$

这意味着

$$S_Q(\beta_1)\circ S_Q(\beta_3)\simeq S_Q(\beta_2)^{\circ 3}.$$

（8.17）中的断言 (ii) 可用相同的方法证明。

8.2.4. F_4 情形。 在 F_4-情形下，我们可以对每个 $[Q]$-对 $\langle\langle\alpha,\ \beta\rangle\rangle$运用前几小节中使用的技巧来证明定理 8.6。在本小节中，我们将列出若干情形，而不考虑所有情形。令 Γ_Q 见（6.6）并假设定理 8.6对 $[Q]$-对 $\langle\langle\theta,\ \mu\rangle\rangle$ 成立，其中 $\deg_Q(\theta,\ \mu)\leqslant 1$。

(1) 让我们计算当 $\alpha'=(0,1,0,0)$ 且 $\beta'=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ 时的 $\mathfrak{d}(S_Q(\alpha')\ S_Q(\beta'))$。在这种情况下，我们有

(a) $\phi_Q(3,2)=(\alpha',0)$, $\phi_Q(4,-5)=(\beta',0)$, $\mathfrak{d}_{3,4}[7]=2$,

(b) 存在唯一的 $[Q]$-对 $\underline{p}=\mathrm{hh}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}),(0,0,1,0)\mathrm{ii}=\mathrm{hh}\alpha^{(1)},\beta^{(1)}\mathrm{ii}$，使得

$$\gamma:=\alpha'+\beta'\prec_Q^{\flat}\underline{p}\prec_Q^{\flat}\langle\!\langle\alpha',\beta'\rangle\!\rangle.$$

注意，$\mathrm{hh}\beta^{(1)},\eta:=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\mathrm{ii}$ 是 β' 的一个极小 $[Q]$-对，而 $\mathrm{hh}\alpha',\beta^{(1)}\mathrm{ii}$ 是 $\zeta=(0,1,1,0)$ 的一个极小$[Q]$-对。令 $L=S_Q(\alpha')$、$M=S_Q(\beta^{(1)})$、$N=S_Q(\eta)$ 和 $T=S_Q(\zeta)$，我们有 $\mathfrak{d}(S_Q(\alpha')\ S_Q(\beta'))=\mathfrak{d}(L,M\nabla N)$ 以及 $L\nabla M\simeq T$。由于 $\alpha'\prec_Q\beta^{(1)}\prec_Q\beta\prec_Q\eta$，序列 (M,N,L) 是正规序列。

另一方面，我们有

$$\Lambda(L\nabla M,N)=\Lambda(T,N)=2\,\mathfrak{d}(T,N)+(\zeta,\eta)=2-2=2$$

and

$$\Lambda(L,N)=2\mathfrak{d}(L,N)+(\alpha',\eta)=2\times1-1=1,\ \ \Lambda(M,N)=2\mathfrak{d}(M,N)+(\beta^{(1)},\eta)=2\times1-1=1.$$

因此，序列 (L,M,N) 也是正规的。因此我们有

$$\mathfrak{d}(L,M\nabla N)=\mathfrak{d}(L,M)+\mathfrak{d}(L,N)=1+1=2.$$

最后，我们有

$$L\nabla(M\nabla N)\simeq(L\nabla M)\nabla N\simeq T\nabla N\simeq S_Q(\gamma)$$

从而 $\ell(S_Q(\alpha')\circ S_Q(\beta'))>2$。

(2) 现在保留 (1) 中的记号，并计算 $\mathfrak{d}(S_Q(\alpha)\ S_Q(\beta))$，其中 $\alpha=(0,1,0,-1)$ 以及 $\beta=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 见于 (6.7)。正如我们在 (6.7) 中所看到的，我们有

$$\gamma=\alpha+\beta\prec_Q^{\flat}\langle\!\langle\alpha^{(1)},\beta^{(1)}\rangle\!\rangle\prec_Q^{\flat}\langle\!\langle\alpha',\beta'\rangle\!\rangle\prec_Q^{\flat}\langle\!\langle\alpha,\beta\rangle\!\rangle.$$

然而，我们还有如下所给出的另一条链：

$$\gamma = \alpha + \beta \prec_Q^{\mathtt{b}} \langle\!\langle \alpha^{(1)}, \beta^{(1)} \rangle\!\rangle \prec_Q^{\mathtt{b}} \langle\!\langle \alpha'', \beta'' \rangle\!\rangle \prec_Q^{\mathtt{b}} \langle\!\langle \alpha, \beta \rangle\!\rangle,$$

其中 $\alpha'' = (0, 0, 1, -1)$ 和 $\beta'' = (1\,2, 1\,2, -\frac{1}{2}, 1\,2)$。如同 (1) 中一样，我们可以证明 $\mathfrak{d}(J, K) = 2$和 $J \nabla K \simeq S_Q(\gamma)$，其中 $J := S_Q(\alpha'')$ 且 $K := S_Q(\beta'')$。令 $\kappa = (0, 1, -1, 0)$，并设 $P := S_Q(\kappa), R = S_Q(\alpha)$、$X = S_Q(\beta')$ 以及 $U = S_Q(\beta)$。则 $\mathfrak{d}(R, U) = \mathfrak{d}(P \nabla J, U)$，因为 $\mathrm{hh}\alpha'', \kappa\mathrm{ii}$ 是 α 的一个极小 $[Q]$-对。注意 $J \nabla U \simeq M \circ X \simeq X \circ M$。由于

$$\kappa \prec_Q \alpha'' \prec_Q \beta^{(1)} \prec_Q \beta' \prec_Q \beta,$$

序列 (J, U, P) 是正规的。

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}\Lambda(P, J \nabla U) &= \Lambda(P, X \circ M) = \Lambda(P, X) + \Lambda(P, M) \\ &= (2\mathfrak{d}(P, X) + (\kappa, \beta')) + (2\mathfrak{d}(P, M) + (\kappa, \beta^{(1)})) = (2 \times 2 - 2) + (2 \times 2 - 2) = 4\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\Lambda(P, J) &= 2\mathfrak{d}(P, J) + (\kappa, \alpha'') = 2 \times 2 - 2 = 2, \\ \Lambda(P, U) &= 2\mathfrak{d}(P, U) + (\kappa, \beta) = 2 \times 2 - 2 = 2.\end{aligned}$$

因此，序列 (P, J, U) 也是正规的。因此

$$\mathfrak{d}(P \nabla J, U) = \mathfrak{d}(P, U) + \mathfrak{d}(J, U) = 2 + 2 = 4 = \widetilde{\mathfrak{d}}_{1,3}[9].$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}(P \nabla J) \nabla U &\simeq P \nabla (J \nabla U) \simeq P \nabla (X \circ M) \simeq (P \nabla X) \nabla M \\ &\simeq L \nabla M \simeq S_Q(\gamma).\end{aligned}$$

因此，我们有单射 R-模同态

$$S_Q(\beta'') \circ S_Q(\alpha'') \hookrightarrow S_Q(\beta) \circ S_Q(\alpha) \quad \text{and} \quad S_Q(\beta') \circ S_Q(\alpha') \hookrightarrow S_Q(\beta) \circ S_Q(\alpha),$$

因为它们具有公共根底 $S_Q(\gamma)$，且该根底在它们的合成序列中出现一次。因此，我们有 $\ell(S_Q(\alpha) \circ S_Q(\beta)) > 2$。

8.3. 结束语。 我们也可以应用前几小节中的技巧来证明（8.4）对于 ADE-类型的情形。此外，关于 $\deg_Q(\alpha, \beta) = 1$ 的结果可以写成（7.1）的形式。

例 8.12。 对于一个约化表达式 $s_1 s_2 s_3 s_1 s_2 s_3 s_1 s_2 s_3$，它属于 w_0 类型 C_3，且适用于Q 例 4.5，事实是

$$S_Q(\langle 1, 1 \rangle) \nabla S_Q(\langle 2, 2 \rangle) \simeq S_Q(\langle 1, 2 \rangle)^{\circ 2} \quad \text{(up to a grading shift)}$$

对应于

$$r_{[Q]}(\langle 1, 1 \rangle) r_{[Q]}(\langle 2, 2 \rangle) - r_{[Q]}(\langle 2, 2 \rangle) r_{[Q]}(\langle 1, 1 \rangle) = (q^{-1} - q^3) r_{[Q]}(\langle 1, 2 \rangle)^2.$$

Appendix A. $\widetilde{\mathfrak{d}}_{i,j}(t)$ for E_7 and E_8

A.1. E_7。以下是 E_7的$\mathfrak{d}_{i,\ j}(t)$列表。

$\widetilde{\mathfrak{d}}_{1,1}(t) = t^1 + t^7 + t^{11} + t^{17}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{1,2}(t) = t^4 + t^8 + t^{10} + t^{14}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{1,3}(t)$
$= t^2 + t^6 + t^8 + t^{10} + t^{12} + t^{16}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{1,4}(t) = t^3 + t^5 + t^7 + 2t^9 + t^{11} + t^{13} + t^{15}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{1,6}(t) = t^5 + t^7 + t^{11} + t^{13}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{1,7}(t) = t^6 + t^{12}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{2,2}(t)$
$= t^1 + t^5 + t^7 + t^9 + t^{11} + t^{13} + t^{17}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{2,3}(t) = \widetilde{\mathfrak{d}}_{1,4}(t)\widetilde{\mathfrak{d}}_{2,4}(t)$
$= t^2 + t^4 + 2t^6 + 2t^8 + 2t^{10} + 2t^{12} + t^{14} + t^{16}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{2,5}(t)$
$= t^3 + t^5 + 2t^7 + t^9 + 2t^{11} + t^{13} + t^{15}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{2,7}(t) = t^5 + t^9 + t^{13}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{2,6}(t)$
$= t^4 + t^6 + t^8 + t^{10} + t^{12} + t^{14}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{3,3}(t) = t^1 + t^3 + t^5 + 2t^7 + 2t^9 + 2t^{11} + t^{13} + t^{15} + t^{17}$,
$\widetilde{\mathfrak{d}}_{3,4}(t) = t^2 + 2t^4 + 2t^6 + 3t^8 + 3t^{10} + 2t^{12} + 2t^{14} + t^{16}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{3,5}(t)$
$= t^3 + 2t^5 + 2t^7 + 2t^9 + 2t^{11} + 2t^{13} + t^{15}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{3,6}(t) = t^4 + 2t^6 + t^8 + t^{10} + 2t^{12} + t^{14}$,
$\widetilde{\mathfrak{d}}_{3,7}(t) = t^5 + t^7 + t^{11} + t^{13}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{4,4}(t)$
$= t^1 + 2t^3 + 3t^5 + 4t^7 + 4t^9 + 4t^{11} + 3t^{13} + 2t^{15} + t^{17}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{4,5}(t)$
$= t^2 + 2t^4 + 3t^6 + 3t^8 + 3t^{10} + 3t^{12} + 2t^{14} + t^{16}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{4,6}(t) = \widetilde{\mathfrak{d}}_{3,5}(t)$
$\widetilde{\mathfrak{d}}_{4,7}(t) = t^4 + t^6 + t^8 + t^{10} + t^{12} + t^{14}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{5,5}(t)$
$= t^1 + t^3 + 2t^5 + 2t^7 + 3t^9 + 2t^{11} + 2t^{13} + t^{15} + t^{17}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{5,6}(t)$
$= t^2 + t^4 + t^6 + 2t^8 + 2t^{10} + t^{12} + t^{14} + t^{16}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{5,7}(t) = t^3 + t^7 + t^{11} + t^{15}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{6,6}(t)$
$= t^1 + t^3 + t^7 + 2t^9 + t^{11} + t^{15} + t^{17}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{6,7}(t) = t^2 + t^8 + t^{10} + t^{16}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{7,7}(t)$
$= t^1 + t^9 + t^{17}$ 和 $\widetilde{\mathfrak{d}}_{i,j}(t) = \widetilde{\mathfrak{d}}_{j,i}(t)$。

A.2. E_8。以下是 E_8的$\mathfrak{d}_{i,\ j}(t)$列表。

$\widetilde{\mathfrak{d}}_{1,1}(t) = t^1 + t^7 + t^{11} + t^{13} + t^{17} + t^{19} + t^{23} + t^{29}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{1,2}(t)$
$= t^4 + t^8 + t^{10} + t^{12} + t^{14} + t^{16} + t^{18} + t^{20} + t^{22} + t^{26}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{1,3}(t)$
$= t^2 + t^6 + t^8 + t^{10} + 2t^{12} + t^{14} + t^{16} + 2t^{18} + t^{20} + t^{22} + t^{24} + t^{28}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{1,4}(t)$
$= t^3 + t^5 + t^7 + 2t^9 + 2t^{11} + 2t^{13} + 2t^{15} + 2t^{17} + 2t^{19} + 2t^{21} + t^{23} + t^{25} + t^{27}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{1,5}(t)$
$= t^4 + t^6 + t^8 + 2t^{10} + t^{12} + 2t^{14} + 2t^{16} + t^{18} + 2t^{20} + t^{22} + t^{24} + t^{26}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{1,6}(t)$
$= t^5 + t^7 + t^9 + t^{11} + t^{13} + 2t^{15} + t^{17} + t^{19} + t^{21} + t^{23} + t^{25}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{1,7}(t)$
$= t^6 + t^8 + t^{12} + t^{14} + t^{16} + t^{18} + t^{22} + t^{24}$, $\widetilde{\mathfrak{d}}_{1,8}(t) = t^7 + t^{13} + t^{17} + t^{23}$,

$$\widetilde{\mathfrak{d}}_2,2(t) = t^1 + t^5 + t^7 + t^9 + 2t^{11} + t^{13} + 2t^{15} + t^{17} + 2t^{19} + t^{21} + t^{23} + t^{25} + t^{29},\widetilde{\mathfrak{d}}_2,3(t)$$
$$= t^3 + t^5 + t^7 + 2(t^9 + t^{11} + t^{13} + t^{15} + t^{17} + t^{19} + t^{21}) + t^{23} + t^{25} + t^{27},\widetilde{\mathfrak{d}}_2,4(t)$$
$$= t^2 + t^4 + 2t^6 + 2t^8 + 3(t^{10} + t^{12} + t^{14} + t^{16} + t^{18} + t^{20}) + 2t^{22} + 2t^{24} + t^{26} + t^{28},\widetilde{\mathfrak{d}}_2,5(t)$$
$$= t^3 + t^5 + 2t^7 + 2t^9 + 2t^{11} + 3t^{13} + 3t^{15} + 3t^{17} + 2t^{19} + 2t^{21} + 2t^{23} + t^{25} + t^{27},\widetilde{\mathfrak{d}}_2,6(t)$$
$$= t^4 + t^6 + 2t^8 + t^{10} + 2t^{12} + 2t^{14} + 2t^{16} + 2t^{18} + t^{20} + 2t^{22} + t^{24} + t^{26},\widetilde{\mathfrak{d}}_2,7(t) = \widetilde{\mathfrak{d}}_1,6(t)$$
$$\widetilde{\mathfrak{d}}_2,8(t) = t^6 + t^{10} + t^{14} + t^{16} + t^{20} + t^{24},\widetilde{\mathfrak{d}}_3,3(t)$$
$$= t^1 + t^3 + t^5 + 2t^7 + 2t^9 + 3t^{11} + 3t^{13} + 2t^{15} + 3t^{17} + 3t^{19} + 2t^{21} + 2t^{23} + t^{25} + t^{27} + t^{29},\widetilde{\mathfrak{d}}_3,$$
$$4(t) = t^2 + 2(t^4 + t^6) + 3t^8 + 4(t^{10} + t^{12} + t^{14} + t^{16} + t^{18} + t^{20}) + 3t^{22} + 2(t^{24} + t^{26}) + t^{28},\widetilde{\mathfrak{d}}_3,$$
$$5(t) = t^3 + 2t^5 + 2t^7 + 3t^9 + 3t^{11} + 3t^{13} + 4t^{15} + 3t^{17} + 3t^{19} + 3t^{21} + 2t^{23} + 2t^{25} + t^{27},\widetilde{\mathfrak{d}}_3,$$
$$6(t) = t^4 + 2t^6 + 2t^8 + 2t^{10} + 2t^{12} + 3t^{14} + 3t^{16} + 2t^{18} + 2t^{20} + 2t^{22} + 2t^{24} + t^{26},\widetilde{\mathfrak{d}}_3,7(t)$$
$$= t^5 + 2t^7 + t^9 + t^{11} + 2t^{13} + 2t^{15} + 2t^{17} + t^{19} + t^{21} + 2t^{23} + t^{25},\widetilde{\mathfrak{d}}_3,8(t)$$
$$= t^6 + t^8 + t^{12} + t^{14} + t^{16} + t^{18} + t^{22} + t^{24},\widetilde{\mathfrak{d}}_4,4(t)$$
$$= t^1 + 2t^3 + 3t^5 + 4t^7 + 5t^9 + 6t^{11} + 6t^{13} + 6t^{15} + 6t^{17} + 6t^{19} + 5t^{21}$$
$$+ 4t^{23} + 3t^{25} + 2t^{27} + t^{29},\widetilde{\mathfrak{d}}_4,5(t)$$
$$= t^2 + 2t^4 + 3t^6 + 4t^8 + 4t^{10} + 5t^{12} + 5t^{14} + 5t^{16} + 5t^{18} + 4t^{20} + 4t^{22} + 3t^{24} + 2t^{26} + t^{28},\widetilde{\mathfrak{d}}_4,$$
$$6(t) = t^3 + 2t^5 + 3t^7 + 3t^9 + 3t^{11} + 4t^{13} + 4t^{15} + 4t^{17} + 3t^{19} + 3t^{21} + 3t^{23} + 2t^{25} + t^{27},\widetilde{\mathfrak{d}}_4,$$
$$7(t) = \widetilde{\mathfrak{d}}_3,6(t) \quad \widetilde{\mathfrak{d}}_4,8(t) = t^5 + t^7 + t^9 + t^{11} + t^{13} + 2t^{15} + t^{17} + t^{19} + t^{21} + t^{23} + t^{25},\widetilde{\mathfrak{d}}_5,5(t)$$
$$= t^1 + t^3 + 2t^5 + 3t^7 + 3t^9 + 4t^{11} + 4t^{13} + 4t^{15} + 4t^{17} + 4t^{19} + 3t^{21} + 3t^{23} + 2t^{25} + t^{27} + t^{29},$$
$$\widetilde{\mathfrak{d}}_5,6(t) = t^2 + t^4 + 2t^6 + 2t^8 + 3t^{10} + 3t^{12} + 3t^{14} + 3t^{16} + 3t^{18} + 3t^{20} + 2t^{22} + 2t^{24} + t^{26} + t^{28},$$
$$\widetilde{\mathfrak{d}}_5,7(t) = t^3 + t^5 + t^7 + 2t^9 + 2t^{11} + 2t^{13} + 2t^{15} + 2t^{17} + 2t^{19} + 2t^{21} + t^{23} + t^{25} + t^{27},\widetilde{\mathfrak{d}}_5,8(t)$$
$$= t^4 + t^8 + t^{10} + t^{12} + t^{14} + t^{16} + t^{18} + t^{20} + t^{22} + t^{26},\widetilde{\mathfrak{d}}_6,6(t)$$
$$= t^1 + t^3 + t^5 + t^7 + 2t^9 + 3t^{11} + 2t^{13} + 2t^{15} + 2t^{17} + 3t^{19} + 2t^{21} + t^{23} + t^{25} + t^{27} + t^{29},\widetilde{\mathfrak{d}}_6,$$
$$7(t) = t^2 + t^4 + t^8 + 2t^{10} + 2t^{12} + t^{14} + t^{16} + 2t^{18} + 2t^{20} + t^{22} + t^{26} + t^{28},\widetilde{\mathfrak{d}}_6,8(t)$$
$$= t^3 + t^9 + t^{11} + t^{13} + t^{17} + t^{19} + t^{21} + t^{27},\widetilde{\mathfrak{d}}_7,7(t)$$
$$= t^1 + t^3 + t^9 + 2t^{11} + t^{13} + t^{17} + 2t^{19} + t^{21} + t^{27} + t^{29},$$

$\widetilde{\mathfrak{d}}_{7,\ 8}(t) = t^2 + t^{10} + t^{12} + t^{18} + t^{20} + t^{28}$、$\widetilde{\mathfrak{d}}_{8,\ 8}(t) = t^1 + t^{11} + t^{19} + t^{29}$ 和 $\widetilde{\mathfrak{d}}_{i,\ j}(t) = \widetilde{\mathfrak{d}}_{j,\ i}(t)$。

References

[1] T. Akasaka and M. Kashiwara, 量子仿射代数的有限维表示, 京都大学数理解析研究所出版物, 33 (1997), 839–867.[2] R. Bedard, 关于魏尔群中约化词的交换类, European J. Combin. 20 (1999), 483–505.[3] J. Brundan, A. Kleshchev and P. J. McNamara, 有限 Khovanov-Lauda-Rouquier 代数的同调性质, 《杜克数学杂志》, 163 (2014), 1353–1404.[4] V. Chari and A. A. Moura, 量子仿射代数有限维表示的特征标与分块, Int. Math. Res. Not. IMRN 5 (2005), 257–298.[5] E. Date and M. Okado, 与 $A_n^{(1)}$ 型量子化仿射代数的向量表示相关的自旋模型激发谱的计算, Int. J. Modern Phys. A 9 (1994), 399–417.[6] E.Frenkel and D. Hernandez, 量子仿射代数有限维表示的朗兰兹对偶性, Lett. Math. Phys. 96, 217–261 (2011).[7] E. Frenkel, E. Mukhin, 量子仿射代数有限维表示的 q-特征标组合学, Comm. Math. Phy. 216 (1) (2001) 23–57.[8] E. Frenkel and N. Reshetikhin,, 与单李代数相关的 W-代数的变形, Commun. Math. Phys. 197 (1998), 1–32.[9] ———, 量子仿射代数表示的 q-特征标, 量子仿射代数及相关主题的新进展. Contemp. Math. 248, (1999), 163–205.[10] R. Fujita, 仿射最高权范畴与 Dynkin 箭图类型的量子仿射 Schur–Weyl 对偶, Represent. Theory 26 (2022), 211–263.[11] ———,分次箭图簇与基本模归一化 R 矩阵的奇点, Selecta Math. (N.S.), 28 no.1 (2022) 1–45.[12] R. Fujita, D. Hernandez, S-j. Oh and H. Oya 量子 Grothendieck 环之间的同构与正性的传播, J. Reine Angew. Math. 785, 117–185 (2022).[13] R. Fujita and K. Murakami, 变形卡当矩阵与广义预投射代数 I：有限型, arXiv:2109.07985v3.[14] R. Fujita and S-j. Oh, 非扭曲量子仿射代数的 Q-数据与表示论, Com- mun. Math. Phys., 384 (2021), 1351–1407.[15] D. Happel, 关于有限维代数的导出范畴, Comment. Math. Helv., 62 (3) (1987), 339–389, .[16] D. Hernandez, 关于 q,t-特征标的代数方法, Adv. Math. 187, no. 1, 1–52 (2004).[17] D. Hernandez and B. Leclerc, 量子 Grothendieck 环与导出 Hall 代数, J. Reine Angew. Math. 701, 77–126 (2015).[18] D. Hill, G. Melvin, and D. Mondragon, 利用 Lyndon 基表示箭图 Hecke 代数, J. Pure Appl. Algebra 216 (2012), no. 5, 1052–1079.[19] V. Kac, 无限维李代数, 第 3 版, 剑桥大学出版社, Cambridge, 1990.[20] S.-J. Kang, M. Kashiwara and M. Kim, 对称箭图 Hecke 代数与量子仿射代数的 R-矩阵 II, 《杜克数学杂志》 164 (2015), no. 8, 1549–1602.[21] ———, 对称箭图 Hecke 代数与量子仿射代数的 R-矩阵, Invent. Math. 211 (2018), no. 2, 591–685.[22] S.-J. Kang, M. Kashiwara, M. Kim and S.-j. Oh, 张量积的头部与底部的单纯性, Compos. Math. 151 (2015), no. 2, 377–396.[23] ———, 对称箭图 Hecke 代数与量子仿射代数的 R-矩阵 IV, Selecta Math. (N.S.), 22 (2016) 1987–2015.

[24] ———, 簇代数的幺半群范畴化, J. Amer. Math. Soc. 31 (2018), no. 2, 349–426.[25] S.-J. Kang, M. Kashiwara, K. C. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki, 量子仿射李代数的完美晶体, 《杜克数学杂志》68 (1992), 499–607.[26] M. Kashiwara, 关于泛包络代数的 q-类比的晶体基, 《杜克数学杂志》63 (1991) 465–516.[27] ———, 关于量子仿射代数的零级表示, Duke. Math. J., 112 (2002), 117–175.[28] M. Kashiwara and M. Kim, 箭图 Hecke 代数的 Laurent 现象与简单模, Compos. Math. 155 (2019), no. 12, 2263–2295[29] M. Kashiwara, M. Kim, S.-j. Oh and E. Park, 与旗簇流形分层相关的幺半群范畴, Adv. Math. 328 (2018), 959–1009.[30] ———, 幺半群范畴化与量子仿射代数, Compos. Math. 156 (2020), no. 5, 1039–1077.[31] ———, 箭图 Hecke 代数的局部化, Pure Appl. Math. Q 17 (2021), no.4, 1465–1548.[32] ———, 量子仿射代数的 PBW 理论, arXiv:2011.14253 已被 Journal of the European Mathematical Society 接收.[33] ———, 由量子仿射代数产生的单边根系, Compos. Math. 158 (2022), no. 1, 168–210.[34] M. Kashiwara and S.-j. Oh, Langlands 对偶量子仿射代数之间的范畴关系：双边型, J. Algebraic Combin., 49 (2019), 401–435.[35] ———, 专化于 $q = 1$ 的（q, t）-Cartan 矩阵及其应用, arXiv:2201.11918.[36] M. Kashiwara and E. Park, 箭图 Hecke 代数的仿射化与 R-矩阵, J. Eur. Math. Soc. 20 (2018), no. 5, 1161–1193.[37] S. Kato, Poincar ´e-Birkhoff-Witt 基与 Khovanov-Lauda-Rouquier 代数, 《杜克数学杂志》163, 3 (2014), 619–663.[38] ———, 关于 Saito 反射函子的幺半群性, Int. Math. Res. Not. IMRN 22 (2020), 8600–8623.[39] M. Khovanov and A. Lauda, 量子群范畴化的图示方法 I, Repre- sent. Theory 13 (2009), 309–347.[40] ———, 量子群范畴化的图示方法 II, Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), 2685–2700.[41] A. Kleshchev and A. Ram, Khovanov-Lauda-Rouquier 代数的表示与 Lyndon 词的组合学, Math. Ann. 349 (2011), no. 4, 943–975.[42] G. Lusztig, 由量子化包络代数产生的典范基, J. Amer. Math. Soc. 3 (1990), no. 2, 447–498.[43] 箭图、层叠层与量子化包络代数, J. Amer. Math. Soc. 4 (1991), no. 2, 365–421.[44] P. J. McNamara, Khovanov-Lauda-Rouquier 代数的有限维表示 I：有限型, J. Reine Angew. Math. 707, 103–124 (2015).[45] H. Nakajima, 箭图簇与量子仿射代数 q-特征标的 t-类比, Ann. of Math. (2) 160, 1057–1097 (2004).[46] K. Naoi, 通过广义量子仿射 Schur-Weyl 对偶得到的等价, arXiv:2101.03573 (2021).[47] S.-j. Oh, $A^{(2)}_{2n-1}, A^{(2)}_{2n}, B^{(1)}_n$ 和 $D^{(2)}_{n+1}$ 类型归一化 R 矩阵的分母, 京都大学数理解析研究所出版物 51 (2015), no. 4, 709–744.[48] ———, D 型的 Auslander-Reiten 箭图与广义量子仿射 Schur-Weyl 对偶, J. Al- gebras 460, 203–252 (2016).[49] ———,A 型的 Auslander-Reiten 箭图与广义量子仿射 Schur-Weyl 对偶, Trans- actions of the American Mathematical Society 369 (2017), 1895–1933.[50] ———, Auslander–Reiten 箭图及与 KLR 型 Schur–Weyl 对偶相关的表示理论, Mathematische Zeitschrift 291.1, 499-554 (2019).

[51] S.-j. Oh 和 T. Scrimshaw，《Langlands 对偶量子仿射代数之间的范畴关系：例外情形》，《数学物理通讯》368 (2019)，第 1 期，295–367。[52] S.-j. Oh 和 U.R. Suh，《组合 Auslander-Reiten 箭图与约化表达式》，《韩国数学会志》56(2) (2019)，353–385。[53] ———，《扭曲与折叠 Auslander-Reiten 箭图及其在量子仿射代数表示论中的应用》，《代数杂志》535，53–132 (2019)。[54] R. Rouquier，《2-Kac-Moody 代数》，arXiv:0812.5023v1。[55] ———，《箭图 Hecke 代数与 2-Lie 代数》，《代数专论》19 (2012)，第 2 期，359–410。[56] M. Varagnolo 和 E. Vasserot，《层叠层与量子 Grothendieck 环》，载于：《纪念 Issai Schur 研究集》，数学进展 210，Birkh¨auser-Verlag，巴塞尔，345–365 (2002)。[57] ———，《量子仿射代数的标准模》，《杜克数学杂志》111 (2002)，第 3 期，509–533。[58]《典范基与 KLR 代数》，《纯粹与应用数学杂志》659 (2011)，67–100。

（M. KASHIWARA）Kyoto University Institute for Advanced Study、 Research Institute for Mathematical Sciences、 Kyoto University、 Kyoto 606-8502、 Japan & Korea Institute for Advanced Study、 Seoul 02455、 Korea电子邮箱地址：masaki@kurims.kyoto-u.ac.jp

（S.-J. OH）Ewha Womans University Seoul、 52 Ewhayeodae-gil、 Daehyeon-dong、 Seodaemun-gu、 Seoul、 South Korea电子邮箱地址：sejin092@gmail.com