arXiv:2302.08725v1 [math.RA] 17 Feb 2023

3-Lie代数上嵌入张量的变形与上同调

MEIYAN HU、SHUAI HOU、LINA SONG 和 YANQIU ZHOU

摘要。本文首先引入 3-Lie 代数上嵌入张量的概念，该概念自然诱导出一个 3-Leibniz 代数。利用导出括号，我们构造了一个 Lie 3-代数，其 Maurer-Cartan 元为嵌入张量。因此，我们得到支配嵌入张量变形的 L_∞-代数。我们定义了 3-Lie 代数上嵌入张量的上同调理论。作为应用，我们证明，若一个 3-Lie 代数上嵌入张量的两个形式变形等价，则它们的无穷小变形属于第二上同调群中的同一个上同调类。此外，一个嵌入张量的 n 阶变形可延拓，当且仅当其障碍类（属于第三上同调群）是平凡的。

目录

1. 引言 1
2. 3-Lie 代数上的嵌入张量 3
3. 3-Lie 代数上嵌入张量的 Maurer-Cartan刻画 6
4. 嵌入张量的上同调 10
5. 嵌入张量的变形 14
5.1. 3-Lie 代数上嵌入张量的形式变形 14
5.2. 阶 n 3-Lie 代数上嵌入张量的变形 16
参考文献 19

1. 引言

嵌入张量的概念已在数学和物理学领域得到广泛研究与应用。嵌入张量的出现可以追溯到对规范超引力理论[18]的研究。在 [4], 中，作者使用嵌入张量研究了 N =8 超对称规范理论和多重 M2膜的 Bagger-Lambert理论。Kotov 和 Strobl 使用嵌入张量构造了张量层级，这从物理学角度展示了嵌入张量可能具有的数学性质 [13]。在数学中，嵌入张量被称为平均算子。文献[1]研究了结合代数和 Lie代数等各种类型代数上的平均算子。特别地，Lie代数上的平均算子可以产生 Leibniz代数结构。其控制

2020年数学主题分类。17A42，17B56，17B38 关键词和短语。嵌入张量，3-Lie 代数，表示，上同调，变形。1

嵌入张量的代数和上同调理论见于 [22]。此外，平均算子与拟序理论 [19, 20] 和双代数理论密切相关。详见[29] 。

3-Lie 代数以及更一般的 n-Lie 代数由 Filippov 于 [9]，引入，可以将其视为 Lie 代数在更高元数情形下的推广。Nambu 证明了，n-Lie 代数是与 Nambu 力学相对应的代数结构 [17]。3-Lie 代数在数理物理中有着多种应用，例如，度量 3-Lie 代数可用于构造 Bagger-Lambert-Gustavsson 理论的基本模型[7], ，而由八元数构造的一类特殊 3-Lie 代数可用于研究 Chern-Simons 物质理论，并为具有规范对称性的多重 M2膜理论提供一种可能的候选 [16]。n-Lie 代数和 3-Lie 代数的变形问题分别在 [8, 15] 中进行了研究。更多细节请参见综述 [6] 。近年来，3-Lie 代数上的经典 Yang-Baxter 方程、（相对）Rota-Baxter 算子、乘积结构和复结构得到了研究[2, 3, 23, 27]。Casas、Loday 和 Pirashvili 引入了 Leibniz 代数的 n 元版本 [5],，称为 n-Leibniz 代数，其斜对称对应物是 n-Lie 代数。在[21], 中，作者在 n-Leibniz 代数的上链空间上引入了分次李括号，并将 n-Leibniz 代数结构描述为一种典范结构。

鉴于嵌入张量在 Lie 代数和 3-Lie 代数中的重要性，本文旨在引入 3-Lie 代数上的嵌入张量这一概念，并研究相应的变形与上同调理论。线性映射 $T : V \to \mathfrak{g}$ 称为 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 上关于表示 $(V; \rho)$ 的嵌入张量，若 T 满足

$$[Tu, Tv, Tw]_{\mathfrak{g}} = T\big(\rho(Tu, Tv)w\big), \quad \forall u, v, w \in V.$$

我们证明，3-Lie 代数 g 上关于 V 上某个表示的嵌入张量 $T : V \to \mathfrak{g}$，自然会在 V 上诱导出一个 3-Leibniz 代数结构，并在 g 上诱导出一个表示。取 V 上 3-Leibniz 代数以 g 为系数的相应上同调作为嵌入张量 T 的上同调。此外，我们利用 Voronov 的高阶导出括号构造一个 Lie 3-代数，其 Maurer-Cartan 元正是 3-Lie 代数上的嵌入张量。我们还得到了控制嵌入张量变形的扭曲 L_∞-代数。最后，我们利用嵌入张量的上同调理论，研究 3-Lie 代数上嵌入张量的形式变形，以及 n 阶变形可延拓至 n 阶 + 1 变形的问题。由于嵌入张量和 3-Lie 代数在数理物理中均有丰富的应用，3-Lie 代数上的嵌入张量也可能在数理物理中有所应用，这将留待今后研究。

本文结构安排如下。在第2节，我们引入 3-Lie 代数上的嵌入张量的概念，它们自然地诱导出 3-Leibniz 代数结构。我们证明，嵌入张量可用半半直积 3-Leibniz 代数的图来刻画。在第3节，我们构造一个L_∞-代数，其 Maurer-Cartan 元是 3-Lie 代数上的嵌入张量。我们还构造了一个支配嵌入张量变形的L_∞-代数。在第4节，我们引入 3-Lie 代数上嵌入张量的上同调理论。在第5节，我们利用所建立的上同调理论研究嵌入张量的形式变形以及阶数为n 的变形的可延拓性。

本文中，我们在特征 0 的代数闭域 $\mathbb{K}$ 上进行研究 .

致谢。本研究获国家自然科学基金（12001226）资助。

2. 3-Lie代数上的嵌入张量

本节介绍 3-Lie 代数上的嵌入张量概念。我们证明，线性映射 $T: V \to \mathfrak{g}$ 是嵌入张量，当且仅当 T 的图是半半直积 3-Leibniz 代数 $\mathfrak{g} \ltimes_{\rho} V$ 的子代数。因此，嵌入张量 T 在 V 上诱导出一个 3-Leibniz代数结构。最后，我们给出 3-Lie 代数上嵌入张量的一些例子。

定义 2.1. [9] 一个 3-Lie 代数 是一个向量空间 $\mathfrak{g}$ 以及一个斜对称线性映射 $[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}: \otimes^3\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$，使得下述 基本恒等式 成立：

(1) $[x_1, x_2, [x_3, x_4, x_5]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}} - [[x_1, x_2, x_3]_{\mathfrak{g}}, x_4, x_5]_{\mathfrak{g}} - [x_3, [x_1, x_2, x_4]_{\mathfrak{g}}, x_5]_{\mathfrak{g}} - [x_3, x_4, [x_1, x_2, x_5]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}} = 0$, 对所有 $x_i \in \mathfrak{g}, 1 \le i \le 5$.

定义 2.2. [12] 3-Lie代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 在向量空间 V 上的表示是一个线性映射 $\rho: \wedge^2\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$，使得对所有 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathfrak{g}$，下列等式成立：

$$\rho(x_1, x_2)\rho(x_3, x_4) = \rho([x_1, x_2, x_3]_{\mathfrak{g}}, x_4) + \rho(x_3, [x_1, x_2, x_4]_{\mathfrak{g}}) + \rho(x_3, x_4)\rho(x_1, x_2), \tag{2}$$

$$\rho(x_1, [x_2, x_3, x_4]_{\mathfrak{g}}) = \rho(x_3, x_4)\rho(x_1, x_2) - \rho(x_2, x_4)\rho(x_1, x_3) + \rho(x_2, x_3)\rho(x_1, x_4). \tag{3}$$

设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 是一个 3-Lie 代数。线性映射 $\mathrm{ad}: \wedge^2\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 定义如下：

$$\mathrm{ad}_{x,y}z := [x, y, z]_{\mathfrak{g}}, \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}, \tag{4}$$

表示 ，称为 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 在自身上的表示，即 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示 .

定义 2.3. [5] 3-Leibniz 代数是一个向量空间 $\mathcal{L}$，配备线性映射 $[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathcal{L}}: \mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \to \mathcal{L}$，使得

$$[x_1, x_2, [y_1, y_2, y_3]_{\mathcal{L}}]_{\mathcal{L}} = [[x_1, x_2, y_1]_{\mathcal{L}}, y_2, y_3]_{\mathcal{L}} + [y_1, [x_1, x_2, y_2]_{\mathcal{L}}, y_3]_{\mathcal{L}} + [y_1, y_2, [x_1, x_2, y_3]_{\mathcal{L}}]_{\mathcal{L}}, \tag{5}$$

for all $x^1, x^2, y^1, y^2, y^3 \in \mathcal{L}$

设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 是一个 3-Lie 代数，且 $(V; \rho)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示。在直和向量空间 $\mathfrak{g} \oplus V$ 上，定义三线性括号运算 $[\cdot,\cdot,\cdot]_{\rho}$ 如下：

$$[x + u, y + v, z + w]_{\rho} = [x, y, z]_{\mathfrak{g}} + \rho(x, y)w, \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}, u, v, w \in V. \tag{6}$$

命题 2.4. 使用上述记号，$(\mathfrak{g} \oplus V, [\cdot,\cdot,\cdot]_{\rho})$ 是一个 3-Leibniz 代数，称为半半直积 3-Leibniz 代数，记作 $\mathfrak{g} \ltimes_{\rho} V$。

证明。 对所有 $x_i \in \mathfrak{g}, u_i \in V, 1 \le i \le 5$, 由（1）-（2），我们有

$$\begin{aligned}
&[x_1 + u_1, x_2 + u_2, [x_3 + u_3, x_4 + u_4, x_5 + u_5]_{\rho}]_{\rho} - [[x_1 + u_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3]_{\rho}, x_4 + u_4, x_5 + u_5]_{\rho} \\
&-[x_3 + u_3, [x_1 + u_1, x_2 + u_2, x_4 + u_4]_{\rho}, x_5 + u_5]_{\rho} \\
&-[x_3 + u_3, x_4 + u_4, [x_1 + u_1, x_2 + u_2, x_5 + u_5]_{\rho}]_{\rho} \\
= \;& [x_1, x_2, [x_3, x_4, x_5]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}} + \rho(x_1, x_2)\rho(x_3, x_4)u_5 - [[x_1, x_2, x_3]_{\mathfrak{g}}, x_4, x_5]_{\mathfrak{g}} - \rho([x_1, x_2, x_3]_{\mathfrak{g}}, x_4)u_5 \\
&-[x_3, [x_1, x_2, x_4]_{\mathfrak{g}}, x_5]_{\mathfrak{g}} - \rho(x_3, [x_1, x_2, x_4]_{\mathfrak{g}})u_5 - [x_3, x_4, [x_1, x_2, x_5]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}} - \rho(x_3, x_4)\rho(x_1, x_2)u_5 \\
= \;& 0.
\end{aligned}$$

因此，$(\mathfrak{g} \oplus V, [\cdot,\cdot,\cdot]_{\rho})$ 是一个 3-Leibniz 代数。 □

定义 2.5. 设 (V; ρ) 是 3-Lie 代数 (g, $[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$) 的一个表示。若线性映射 T : V $\to$ g 满足以下条件，则称 T 是相对于表示 (V;ρ) 的 3-Lie 代数 (g, $[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$) 上的嵌入张量:

$$[Tu, Tv, Tw]_{\mathfrak{g}} = T\Big(\rho(Tu, Tv)w\Big), \quad \forall u, v, w \in V. \tag{7}$$

恒等式 (7) 可用 T 的图是一个子代数来刻画。

定理 2.6. 线性映射 T : V $\to$ g 是关于表示 (V; ρ) 的 3-Lie 代数 g 上的嵌入张量，当且仅当图 Gr(T) = {T u + u|u $\in$ V} 是半半直积 3-Leibniz 代数 g $\ltimes_{\rho}$ V 的一个 3-Leibniz 子代数。

证明. 设 T 是一个线性映射。对所有 u, v, w $\in$ V，有

$$[Tu + u, Tv + v, Tw + w]_{\rho} = [Tu, Tv, Tw]_{\mathfrak{g}} + \rho(Tu, Tv)w.$$

因此，图 Gr(T) = {T u + u|u $\in$ V} 是半半直积 3-Leibniz 代数 g $\ltimes_{\rho}$ V 的一个子代数，当且仅当 T 满足 [T u, T v, T w]$_{\mathfrak{g}}$ = T(ρ(T u, T v)w)，这意味着 T 是关于表示 (V;ρ) 的 3-Lie 代数 g 上的嵌入张量。 □

3-Lie 代数 (g, $[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$) 上嵌入张量所对应的代数结构是一个 3-Leibniz 代数。我们有如下命题。

命题 2.7. 设 T : V $\to$ g 是 3-Lie 代数 (g, $[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$) 上关于表示 (V; ρ) 的嵌入张量。定义线性映射 $[\cdot,\cdot,\cdot]_T$: $\otimes^3$V $\to$ V 如下:

$$[u, v, w]_T = \rho(Tu, Tv)w, \quad \forall u, v, w \in V. \tag{8}$$

则 (V, $[\cdot,\cdot,\cdot]_T$) 是一个 3-Leibniz 代数。此外，T 是从 3-Leibniz 代数 (V, $[\cdot,\cdot,\cdot]_T$) 到 3-Lie 代数 (g, $[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$) 的同态。

证明。 对于任意 u_1,u_2,u_3,u_4,u_5, 由（2）、（7）和（8），我们有

$$\begin{aligned}
&[[u_1,u_2,u_3]_T,u_4,u_5]_T + [u_3,[u_1,u_2,u_4]_T,u_5]_T + [u_3,u_4,[u_1,u_2,u_5]_T]_T\\
=\ &[\rho(Tu_1,Tu_2)u_3,u_4,u_5]_T + [u_3,\rho(Tu_1,Tu_2)u_4,u_5]_T + [u_3,u_4,\rho(Tu_1,Tu_2)u_5]_T\\
=\ &\rho(T(\rho(Tu_1,Tu_2)u_3),Tu_4)u_5 + \rho(Tu_3,T(\rho(Tu_1,Tu_2)u_4))u_5 + \rho(Tu_3,Tu_4)\rho(Tu_1,Tu_2)u_5\\
=\ &\rho([Tu_1,Tu_2,Tu_3]_{\mathfrak{g}},Tu_4)u_5 + \rho(Tu_3,[Tu_1,Tu_2,Tu_4]_{\mathfrak{g}})u_5 + \rho(Tu_3,Tu_4)\rho(Tu_1,Tu_2)u_5\\
=\ &\rho(Tu_1,Tu_2)\rho(Tu_3,Tu_4)u_5\\
=\ &[u_1,u_2,\rho(Tu_3,Tu_4)u_5]_T\\
=\ &[u_1,u_2,[u_3,u_4,u_5]_T]_T.
\end{aligned}$$

因此，$(V,\ [\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ 是一个 3-Leibniz 代数。由 (7)，T 是从 3-Leibniz 代数 $(V,\ [\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ 到 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g},\ [\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 的同态。□

定义 2.8. 设 T 和 T′ 是 3-Lie 代数 (g, $[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$) 上关于表示 (V; ρ) 的两个嵌入张量。从 T′ 到 T 的同态由一个 3-Lie 代数同态 $\phi_{\mathfrak{g}}$: g $\to$ g 和一个线性映射 ϕ_V : V $\to$ V 组成，使得

$$T \circ \phi_V = \phi_{\mathfrak{g}} \circ T', \tag{9}$$

$$\phi_V(\rho(x, y)u) = \rho(\phi_{\mathfrak{g}}(x), \phi_{\mathfrak{g}}(y))(\phi_V(u)), \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}, u \in V. \tag{10}$$

特别地，　　*if b*若 $\phi_{\mathfrak{g}}$和 ϕ_V均可逆，则称 $(\phi_{\mathfrak{g}}, \phi_V)$ 为从 T ′到 T 的同构。

命题2.9. 设 T 和 T′ 是 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 上关于表示 $(V; \rho)$ 的两个嵌入张量，且 $(\phi_{\mathfrak{g}}, \phi_V)$ 是从 T ′到 T 的同态。那么 ϕ_V是从 $(V, [\cdot,\cdot,\cdot]_{T'})$ 到 $(V, [\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ 的 3-Leibniz 代数同态。

证明。 对于所有 u，v，w，由（9）-（10），可得

$$\begin{aligned}\phi_V([u,v,w]_{T'}) &= \phi_V(\rho(T'u,T'v)w)\\ &= \rho(\phi_{\mathfrak{g}}(T'u),\phi_{\mathfrak{g}}(T'v))(\phi_V(w))\\ &= \rho(T(\phi_V(u)),T(\phi_V(v)))(\phi_V(w))\\ &= [\phi_V(u),\phi_V(v),\phi_V(w)]_T.\end{aligned}$$

因此 ， ϕ_V 是从（V， $[\cdot,\cdot,\cdot]_{T'}$）到（V， $[\cdot,\cdot,\cdot]_T$的3-Leibniz代数同态). □

本节末尾 我们给出一些3-Lie代数上的嵌入张量示例 s.

例2.10. 回顾一下，3-Lie 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 上的导子 D 是满足以下条件的线性映射 $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$:

$$D[x_1,x_2,x_3]_{\mathfrak{g}} = [D(x_1),x_2,x_3]_{\mathfrak{g}} + [x_1,D(x_2),x_3]_{\mathfrak{g}} + [x_1,x_2,D(x_3)]_{\mathfrak{g}}, \quad \forall x_1,x_2,x_3 \in \mathfrak{g}.$$

如果 $D \circ D = 0$，则有

$$\begin{aligned}D[D(x_1),D(x_2),x_3]_{\mathfrak{g}} &= [D^2(x_1),D(x_2),x_3]_{\mathfrak{g}} + [D(x_1),D^2(x_2),x_3]_{\mathfrak{g}} + [D(x_1),D(x_2),D(x_3)]_{\mathfrak{g}}\\ &= [D(x_1),D(x_2),D(x_3)]_{\mathfrak{g}}.\end{aligned}$$

那么，关于伴随表示 (g; ad)，D 是 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 上的嵌入张量。

严格 3-Lie 2-代数的概念是在 [30] 中引入的。

例2.11. 严格 3-Lie 2-代数是一个 2-项分次向量空间 $V = V_1 \oplus V_0$，配备一个线性映射 $d : V_1 \to V_0$ 以及斜对称三线性映射 $[\cdot,\cdot,\cdot]: V_i \wedge V_j \wedge V_k \to V_{i+j+k}$，其中 $0 \le i + j + k \le 1$，使得对于所有 x、y、$x_i \in V_0, i = 1,\cdots$、5 以及 f、$g \in V_1$,，以下等式成立:

(i) $d[x,y,f] = [x,y,df]$, $[df,g,x] = [f,dg,x]$,(ii) $[x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]] = [[x_1,x_2,x_3],x_4,x_5] + [x_3,[x_1,x_2,x_4],x_5] + [x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]]$,(iii) $[f,x_2,[x_3,x_4,x_5]] = [[f,x_2,x_3],x_4,x_5] + [x_3,[f,x_2,x_4],x_5] + [x_3,x_4,[f,x_2,x_5]]$,(iv) $[x_1,x_2,[f,x_4,x_5]] = [[x_1,x_2,f],x_4,x_5] + [f,[x_1,x_2,x_4],x_5] + [f,x_4,[x_1,x_2,x_5]]$.

定义线性映射 $\rho: \wedge^2 V_0 \to gl(V_1)$，使得

$$\rho(x,y)(f) = [x,y,f].$$

于是，由 (iii) 和 (iv)，(V_1,ρ) 是 3-Lie 代数 $(V_0,[\cdot,\cdot,\cdot])$ 的一个表示。由 (i)，d 是关于表示 $(V_1; \rho)$ 的 3-Lie 代数 $(V_0,[\cdot,\cdot,\cdot])$ 上的一个嵌入张量。

严格 3-Lie 2-代数与 3-Lie代数的交叉模之间存在一一对应关系[30], 于是我们有以下例子。

例 2.12. 3-Lie 代数的交叉模是一个四元组 $((\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}),(\mathfrak{h},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}}),\mu,\alpha)$，其中 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 和 $(\mathfrak{h},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}})$ 是 3-Lie 代数，$\mu : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是 3-Lie

代数的同态，且 α：$\wedge^2$h $\to$Der(g) 是一个表示，使得对所有 x, y $\in$h、f, g, h $\in$g，以下等式成立：

$$\begin{aligned}\mu(\alpha(x,y)(f)) &= [x,y,\mu(f)]_{\mathfrak{h}},\\ \alpha(\mu(f),\mu(g))(h) &= [f,g,h]_{\mathfrak{g}},\\ \alpha(x,\mu(f))(g) &= -\alpha(x,\mu(g))(f).\end{aligned}$$

那么，μ 是 3-Lie 代数 $(\mathfrak{h},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}})$ 上关于表示 $(\mathfrak{g};\ \alpha)$ 的嵌入张量。

例2.13. 设 $(V;\ \rho)$ 是 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 的一个表示。若线性映射 T : V $\to$ g 满足

$$T(\rho(x,Tu)v)=[x,Tu,Tv]_{\mathfrak{g}},\quad \forall x\in\mathfrak{g},u,v\in V.$$

那么，T 是 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 上关于表示 $(V;\ \rho)$ 的嵌入张量。

3. 3-Lie代数上嵌入张量的 Maurer-Cartan刻画

本节构造一个 Lie 3-代数，其 Maurer-Cartan 元是 3-Lie代数上的嵌入张量。此外，我们还将得到控制 3-Lie代数上嵌入张量变形的扭曲 L∞-代数。

所谓L_∞-代数（也称为强同伦李代数）由 Schlessinger 和 Stasheff [14, 24]引入。L_∞-代数可视为微分次李代数的一种推广，其中 Jacobi规则仅在一系列高阶同伦意义下成立。

若置换 $\sigma\in\mathbb{S}_n$ 满足 $\sigma(1)<\cdots<\sigma(i)$ 且 $\sigma(i+1)<\cdots<\sigma(n)$，则称其为 (i, n–i)-混洗。若 i = 0 或 n，则假设 σ = Id。所有 (i, n – i)-混洗的集合记为 $\mathbb{S}_{(i,n-i)}$。

定义3.1. ([25]) L∞-代数是一个 $\mathbb{Z}$-分次向量空间 g = $\oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}^k$，配备一族 (k $\geq$ 1) 线性映射 l_k： $\otimes^k$g $\to$ g，其次数为1，并满足以下性质：对于任意齐次元素 $x_1,\cdots,x_n\in\mathfrak{g}$，有

(i)（分次对称性）对每个 $\sigma\in\mathbb{S}_n$,

$$l_n(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(n-1)},x_{\sigma(n)})=\varepsilon(\sigma)l_n(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n).$$

(ii)（广义Jacobi恒等式）对所有 n $\geq$ 1,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{(i,n-i)}}\varepsilon(\sigma)l_{n-i+1}(l_i(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(i)}),x_{\sigma(i+1)},\cdots,x_{\sigma(n)})=0.$$

Lie k-代数是一种特殊的 L∞-代数，由 Hanlon 和 Wachs 在 [11],中引入，仅配备 k元括号，其他运算均为平凡的。

定义 3.2. Lie 3-代数是一个 $\mathbb{Z}$分次向量空间 g = $\oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}^k$，配备一个三线性括号 $\{\cdot,\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{g}}$: g $\otimes$ g $\otimes$ g $\to$ g，其次数为 1，且满足

(i)（分次对称性）对于所有齐次元素 x_1,x_2,$x_3\in\mathfrak{g}$,

$$\{x_1,x_2,x_3\}_{\mathfrak{g}}=(-1)^{x_1x_2}\{x_2,x_1,x_3\}_{\mathfrak{g}}=(-1)^{x_2x_3}\{x_1,x_3,x_2\}_{\mathfrak{g}}. \tag{11}$$

(ii)（广义Jacobi恒等式）对于所有齐次元素 $x_i \in \mathfrak{g}, 1 \leq i \leq 5$,

$$\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_5} \varepsilon(\sigma)\{\{x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}\}_\mathfrak{g}, x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(5)}\}_\mathfrak{g} = 0. \tag{12}$$

定义 3.3. (i) L_∞-代数 $(\mathfrak{g}, \{l_i\}^{+\infty}{}_{i=1})$ 的 Maurer-Cartan 元是满足 Maurer-Cartan 方程的元素 $\alpha \in \mathfrak{g}^0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} l_n(\alpha, \cdots, \alpha) = 0. \tag{13}$$

(ii) Lie 3-代数 $(\mathfrak{g}, \{\cdot,\cdot,\cdot\}_\mathfrak{g})$ 的 Maurer-Cartan 元是满足 Maurer-Cartan 方程的元素 $\alpha \in \mathfrak{g}^0$

$$\frac{1}{3!}\{\alpha, \alpha, \alpha\}_\mathfrak{g} = 0. \tag{14}$$

设 α 是 Lie 3-代数 $(\mathfrak{g}, \{\cdot,\cdot,\cdot\}_\mathfrak{g})$ 的一个 Maurer-Cartan 元。对所有 $k \geq 1$ 和 $x_1, \cdots, x_k \in \mathfrak{g}$，定义一列 1 次线性映射 $l^\alpha{}_k : \otimes^k\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$:

$$l_k^\alpha(x_1, \cdots, x_k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} l_{k+n}\{\underbrace{\alpha, \cdots, \alpha}_{n}, x_1, \cdots, x_k\}_\mathfrak{g}. \tag{15}$$

引理 3.4. ([10]) 使用上述记号，$(\mathfrak{g}, l_1^\alpha, l_2^\alpha, l_3^\alpha)$ 是一个 L_∞-代数，它由 Lie 3-代数 $(\mathfrak{g}, \{\cdot,\cdot,\cdot\}_\mathfrak{g})$ 通过 Maurer-Cartan 元 α 扭曲得到。此外，$\alpha + \alpha'$ 是 $(\mathfrak{g}, \{\cdot,\cdot,\cdot\}_\mathfrak{g})$ 的 Maurer-Cartan 元，当且仅当 α' 是扭曲后的 L_∞-代数 $(\mathfrak{g}, l_1^\alpha, l_2^\alpha, l_3^\alpha)$ 的 Maurer-Cartan 元。

接下来，我们回顾 Th. Voronov 的导出括号理论 [28], ，它是构造显式 L_∞-代数的有用工具。

定义 3.5. ([28]) V-数据由四元组 $(L, F, \mathcal{P}, \Delta)$ 构成，其中

- $(L, [\cdot,\cdot])$ 是一个分次李代数;
- F 是 $(L, [\cdot,\cdot])$ 的阿贝尔分次李子代数;
- $\mathcal{P} : L \to L$ 是一个投影，即 $\mathcal{P} \circ \mathcal{P} = \mathcal{P}$，其像为 F，核是 $(L, [\cdot,\cdot])$ 的一个分次李子代数;
- Δ 是 $\ker(\mathcal{P})^1$ 中的一个元素，使得 $[\Delta, \Delta] = 0$。

定理 3.6. ([28]) 设 $(L, F, \mathcal{P}, \Delta)$ 为 V-数据。那么 $(F, \{l_k\}^{+\infty}{}_{k=1})$ 是一个 L_∞-代数，其中 e

$$l_k(a_1, \cdots, a_k) = \mathcal{P}[\underbrace{\cdots[[}_{k}\Delta, a_1], a_2], \cdots, a_k], \quad \textit{for homogeneous } a_1, \cdots, a_k \in F. \tag{16}$$

我们称 $\{l_k\}^{+\infty}{}_{k=1}$ 为 V-数据 $(L, F, \mathcal{P}, \Delta)$ 的高阶导出括号。

设 $\mathfrak{g}$ 为一个向量空间。我们考虑分次向量空间

$$C^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \oplus_{n\geq 0} C^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \oplus_{n\geq 0}\mathrm{Hom}(\underbrace{\otimes^2\mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes^2 \mathfrak{g}}_{n} \otimes \mathfrak{g}, \mathfrak{g}).$$

定理 命题 3.7. ([21]) 配备分次括号的分次向量空间 $C^*(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ *et*

$$[P, Q]_{3\mathrm{Leib}} = P \circ Q - (-1)^{pq} Q \circ P, \quad \forall P \in C^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}), Q \in C^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}),$$

是一个分次李代数，其中 $P \circ Q \in C^{p+q}(g, g)$ 定义为

$$\begin{aligned}
&(P \circ Q)(\mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_{p+q}, x)\\
=\ & \sum_{k=1}^{p}(-1)^{(k-1)q} \sum_{\sigma \in S(k-1,q)} (-1)^{\sigma} P\Big(\mathfrak{x}_{\sigma(1)}, \cdots, \mathfrak{x}_{\sigma(k-1)}, Q(\mathfrak{x}_{\sigma(k)}, \cdots, \mathfrak{x}_{\sigma(k+q-1)}, x_{k+q}) \otimes y_{k+q},\\
& \mathfrak{x}_{k+q+1}, \cdots, \mathfrak{x}_{p+q}, x\Big)\\
&+ \sum_{k=1}^{p}(-1)^{(k-1)q} \sum_{\sigma \in S(k-1,q)} (-1)^{\sigma} P\Big(\mathfrak{x}_{\sigma(1)}, \cdots, \mathfrak{x}_{\sigma(k-1)}, x_{k+q} \otimes Q(\mathfrak{x}_{\sigma(k)}, \cdots, \mathfrak{x}_{\sigma(k+q-1)}, y_{k+q}),\\
& \mathfrak{x}_{k+q+1}, \cdots, \mathfrak{x}_{p+q}, x\Big)\\
&+ \sum_{\sigma \in S(p,q)} (-1)^{pq}(-1)^{\sigma} P\Big(\mathfrak{x}_{\sigma(1)}, \cdots, \mathfrak{x}_{\sigma(p)}, Q(\mathfrak{x}_{\sigma(p+1)}, \cdots, \mathfrak{x}_{\sigma(p+q)}, x)\Big),
\end{aligned}$$

对所有的 $X_i = x_i \otimes y_i \in \otimes^2 g$、$i = 1, 2, \cdots, p+q$ 和 $x \in g$。

注 3.8. 对于 $\pi \in \mathrm{Hom}(\otimes^3 g, g)$，我们有

$$\begin{aligned}
[\pi, \pi]_{3\mathrm{Leib}}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, x) &= 2(\pi \circ \pi)(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, x)\\
&= 2\Big(\pi(\pi(x_1, y_1, x_2), y_2, x) + \pi(x_2, \pi(x_1, y_1, y_2), x)\\
&\quad -\pi(x_1, y_1, \pi(x_2, y_2, x)) + \pi(x_2, y_2, \pi(x_1, y_1, x))\Big).
\end{aligned}$$

因此，π 是 3-Leibniz 代数结构，当且仅当 $[\pi, \pi]_{3\mathrm{Leib}} = 0$，即 π 是分次李代数 $(C^*(g, g), [\cdot, \cdot]_{3\mathrm{Leib}})$的 Maurer-Cartan 元。

设 $(V; \rho)$ 是 3-Lie 代数 $(g, [\cdot, \cdot, \cdot]_g)$ 的一个表示。为方便起见，我们用 $\mu : \wedge^3 g \to g$ 表示 3-李括号 $[\cdot, \cdot, \cdot]_g$。下文中，我们用 $\mu \boxplus \rho$ 表示 $\mathrm{Hom}(\otimes^3(g \oplus V), g \oplus V)$ 中由下式给出的元素

$$(\mu \boxplus \rho)(x + u, y + v, z + w) = [x, y, z]_g + \rho(x, y)w, \tag{17}$$

对任意 $x, y, z \in g$，$u, v, w \in V$。注意，右侧恰好是命题 2.4 中给出的半半直积 3-Leibniz 代数结构。因此，根据评注 3.8，我们有

$$[\mu \boxplus \rho, \mu \boxplus \rho]_{3\mathrm{Leib}} = 0.$$

引理 3.9。设 $T : V \to g$ 是 3-Lie 代数 $(g, [\cdot, \cdot, \cdot]_g)$ 上关于表示 $(V; \rho)$ 的嵌入张量。对任意 $x, y, z \in g$, $u, v, w \in V$，有

$$\begin{aligned}
&[\mu \boxplus \rho, T]_{3\mathrm{Leib}}(x + u, y + v, z + w)\\
=\ & [Tu, y, z]_g + [x, Tv, z]_g + [x, y, Tw]_g - T(\rho(x, y)w) + \rho(Tu, y)w + \rho(x, Tv)w;\\
&[[\mu \boxplus \rho, T]_{3\mathrm{Leib}}, T]_{3\mathrm{Leib}}(x + u, y + v, z + w)\\
=\ & 2\Big([Tu, Tv, z]_g + [Tu, y, Tw]_g + [x, Tv, Tw]_g - T(\rho(Tu, y)w + \rho(x, Tv)w) + \rho(Tu, Tv)w\Big).
\end{aligned}$$

证明。由直接计算可得。 □

命题 3.10。设 $(V; \rho)$ 是 3-Lie 代数 $(g, [\cdot, \cdot, \cdot]_g)$ 的一个表示。那么我们有如下 V-数据 $(L, F, \mathcal{P}, \Delta)$:

- 分次李代数 $(L, [\cdot, \cdot])$ 由 $(C^*(g \oplus V, g \oplus V), [\cdot, \cdot]_{3\text{莱布}})$ 给出;

- 阿贝尔分次李子代数 F 由

$$F = C^*(V,\mathfrak{g}) = \oplus_{n\geq 0} C^n(V,\mathfrak{g}) = \oplus_{n\geq 0}\mathrm{Hom}(\underbrace{\otimes^2 V\otimes\cdots\otimes^2 V}_{n}\otimes V,\mathfrak{g});$$

- $\mathcal{P}$: L $\to$ L 是到子空间 F 的投影;
- $\Delta = \mu \boxplus \rho$。

因此，我们得到一个 Lie 3-代数 ($C^*(V,g),\{\cdot,\cdot,\cdot\}$)，其中三线性括号运算

$$\{\cdot,\cdot,\cdot\} : C^p(V,\mathfrak{g})\times C^q(V,\mathfrak{g})\times C^r(V,\mathfrak{g}) \longrightarrow C^{p+q+r+1}(V,\mathfrak{g})$$

定义为

$$\{P,Q,R\} = [[[\mu\boxplus\rho,P]_{3\mathrm{Leib}},Q]_{3\mathrm{Leib}},R]_{3\mathrm{Leib}}, \tag{18}$$

对所有 P $\in C^p(V,g)$、Q $\in C^q(V,g)$ 和 R $\in C^r(V,g)$ 均成立。

证明。由定理3.6，$(F,\{l_k\}^{+\infty}\ k=1)$ 是一个 L_∞-代数，其中 l_k 由 (16) 给出。对于所有 P $\in C^p(V,g)$、Q $\in C^q(V,g)$ 和 R $\in C^r(V,g)$，由引理 3.9 可得

$$[\mu\boxplus\rho,P]_{3\mathrm{Leib}} \in \ker(\mathcal{P}),$$
$$[[\mu\boxplus\rho,P]_{3\mathrm{Leib}},Q]_{3\mathrm{Leib}} \in \ker(\mathcal{P}).$$

类似地，我们可推出当 $k \geq 4$ 时 $l_k = 0$。也就是说，分次向量空间 $C^*(V,g)$ 是一个 Lie 3-代数，其三线性括号运算为 $\{\cdot,\cdot,\cdot\}$，其他映射均为平凡的。□

定理 3.11. 设 (V; ρ) 是 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ 的一个表示。那么，Lie 3-代数 ($C^*(V,g),\{\cdot,\cdot,\cdot\}$) 的 Maurer-Cartan 元恰好是关于表示 (V; ρ) 的 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ 上的嵌入张量。

证明。 对于一个零次元$T : V \to \mathfrak{g}$，由（18），可得

$$\begin{aligned}
&\{T,T,T\}(u,v,w)\\
=\ &[[[\mu\boxplus\rho,T]_{3\mathrm{Leib}},T]_{3\mathrm{Leib}},T]_{3\mathrm{Leib}}(u,v,w)\\
=\ &[[\mu\boxplus\rho,T]_{3\mathrm{Leib}},T]_{3\mathrm{Leib}}(Tu,v,w)+[[\mu\boxplus\rho,T]_{3\mathrm{Leib}},T]_{3\mathrm{Leib}}(u,Tv,w)\\
&+[[\mu\boxplus\rho,T]_{3\mathrm{Leib}},T]_{3\mathrm{Leib}}(u,v,Tw)-T[[\mu\boxplus\rho,T]_{3\mathrm{Leib}},T]_{3\mathrm{Leib}}(u,v,w)\\
=\ &6([Tu,Tv,Tw]_\mathfrak{g}-T(\rho(Tu,Tv)w),
\end{aligned}$$

这表明，线性映射 T $\in$ Hom(V, g) 是 Lie 3-代数 ($C^*(V,g),\{\cdot,\cdot,\cdot\}$) 的 Maurer-Cartan 元，当且仅当 T 是 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ 关于表示 (V; ρ) 的嵌入张量。□

命题3.12. 设 (V; ρ) 是 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ 的一个表示。则分次向量空间 $C^*(V,g)$ 带有如下扭曲的 L_∞- 代数结构：

$$l_1^T(P) = \frac{1}{2}\{T,T,P\}, \tag{19}$$
$$l_2^T(P,Q) = \{T,P,Q\}, \tag{20}$$
$$l_3^T(P,Q,R) = \{P,Q,R\}, \tag{21}$$
$$l_k^T = 0,\quad k\geq 4, \tag{22}$$

其中 P $\in C^p(V,g)$、Q $\in C^q(V,g)$ 且 R $\in C^r(V,g)$。

证明。 由于 T 是 Lie 3-代数 $(C^*(V,\mathfrak{g}),\{\cdot,\cdot,\cdot\})$，根据引理 3.4，结论成立。

□

定理 3.13. 设 $T: V \to \mathfrak{g}$ 是 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 上关于表示 $(V;\rho)$ 的嵌入张量。那么，对于线性映射 $T': V \to \mathfrak{g}$，$T + T'$ 是嵌入张量，当且仅当 T' 是扭曲 L_∞-代数 $(C^*(V,\mathfrak{g}), l_1^T, l_2^T, l_3^T)$ 的 Maurer-Cartan 元，也就是说，T' 满足 Maurer-Cartan 方程：

$$l_1^T(T') + \frac{1}{2}l_2^T(T',T') + \frac{1}{3!}l_3^T(T',T',T') = 0.$$

证明。 根据定理 3.11，$T + T'$ 是嵌入张量，当且仅当

$$\frac{1}{3!}\{T+T', T+T', T+T'\} = 0.$$

根据 $\{T、T、T\} = 0$，上述等式等价于

$$\frac{1}{2}\{T,T,T'\} + \frac{1}{2}\{T,T',T'\} + \frac{1}{6}\{T',T',T'\} = 0,$$

这意味着 $l_1^T(T') + \frac{1}{2}l_2^T(T',T') + \frac{1}{3!}l_3^T(T',T',T') = 0$。也就是说，$T'$ 是扭曲 L_∞-代数 $(C^*(V,\mathfrak{g}), l_1^T, l_2^T, l_3^T)$ 的 Maurer-Cartan 元。□

4. 嵌入张量的上同调

本节首先回顾有关 3-Leibniz 代数 $(\mathcal{L},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathcal{L}})$ 的表示和上同调的一些基本结果。我们构造 3-Leibniz 代数 $(V;[\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ 在向量空间 $\mathfrak{g}$ 上的一个表示，并定义 3-Lie 代数上嵌入张量的上同调。

定义 4.1. 3-Leibniz 代数 $(\mathcal{L},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathcal{L}})$ 的一个表示是一个四元组 $(V; l, m, r)$，其中 V 是一个向量空间，$l, m, r: \otimes^2\mathcal{L} \to gl(V)$ 是线性映射，使得对所有 $x_i \in \mathcal{L}$，$i = 1,\cdots,4$，以下等式成立：

$$l(x_1,x_2)l(x_3,x_4) = l([x_1,x_2,x_3]_{\mathcal{L}},x_4) + l(x_3,[x_1,x_2,x_4]_{\mathcal{L}}) + l(x_3,x_4)l(x_1,x_2), \tag{23}$$

$$l(x_1,x_2)m(x_3,x_4) = m([x_1,x_2,x_3]_{\mathcal{L}},x_4) + m(x_3,[x_1,x_2,x_4]_{\mathcal{L}}) + m(x_3,x_4)l(x_1,x_2), \tag{24}$$

$$l(x_1,x_2)r(x_3,x_4) = r([x_1,x_2,x_3]_{\mathcal{L}},x_4) + r(x_3,[x_1,x_2,x_4]_{\mathcal{L}}) + r(x_3,x_4)l(x_1,x_2), \tag{25}$$

$$m(x_1,[x_2,x_3,x_4]_{\mathcal{L}}) = r(x_3,x_4)m(x_1,x_2) + m(x_2,x_4)m(x_1,x_3) + l(x_2,x_3)m(x_1,x_4), \tag{26}$$

$$r(x_1,[x_2,x_3,x_4]_{\mathcal{L}}) = r(x_3,x_4)r(x_1,x_2) + m(x_2,x_4)r(x_1,x_3) + l(x_2,x_3)r(x_1,x_4). \tag{27}$$

3-Leibniz 代数 $(\mathcal{L},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathcal{L}})$ 上取值于表示 $(V; l, m, r)$ 的系数中的 n-余链是一个线性映射

$$f: \underbrace{((\otimes^2\mathcal{L})\otimes\cdots\otimes(\otimes^2\mathcal{L}))}_{n-1}\otimes\mathcal{L} \longrightarrow V, \quad (n \geq 1).$$

记 n-余链空间为 $C^n_{3\text{ Leib}}(\mathcal{L};V)$。余边界算子 $\partial: C^n_{3\text{ Leib}}(\mathcal{L};V) \to C^{n+1}_{3\text{ Leib}}(\mathcal{L};V)$ 定义如下：

$$\begin{aligned}&(\partial f)(X_1,X_2,\cdots,X_n,z)\\ =&\sum_{1\leq j<k\leq n}(-1)^j f(X_1,\cdots,\hat{X_j},\cdots,X_{k-1},[x_j,y_j,x_k]_{\mathcal{L}}\otimes y_k,X_{k+1},\cdots,X_n,z)\end{aligned}$$

$$+\sum_{1\le j<k\le n}(-1)^j f(X_1,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{k-1},x_k\otimes[x_j,y_j,y_k]_{\mathcal{L}},X_{k+1},\cdots,X_n,z)$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\Big((-1)^j f(X_1,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_n,[X_j,z]_{\mathcal{L}})+(-1)^{j+1}l(X_j)f(X_1,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_n,z)\Big)$$
$$+(-1)^{n+1}\Big(m(x_n,z)f(X_1,\cdots,X_{n-1},y_n)+r(y_n,z)f(X_1,\cdots,X_{n-1},x_n)\Big),$$

其中 $X_i=x_i\otimes y_i\in\otimes^2\mathcal{L}$，$i=1,2,\cdots,n$ 和 $z\in\mathcal{L}$。文献 [5, 26] 中已证明 $\partial\circ\partial=0$。因此，$(\oplus_{n=1}^{+\infty}\mathrm{C}^n_{3\,\mathrm{Leib}}(\mathcal{L};\mathrm{V}),\partial)$ 是一个上链复形。

定义 4.2. 3-Leibniz 代数 $(\mathcal{L},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathcal{L}})$ 在系数取 V 时的上同调，是上链复形 $(\oplus_{n=1}^{+\infty}\mathrm{C}^n_{3\,\mathrm{Leib}}(\mathcal{L};\mathrm{V}),\partial)$ 的上同调。我们将 n-上闭链的集合记为 $\mathrm{Z}^n_{3\,\mathrm{Leib}}(\mathcal{L};\mathrm{V})$，将 n-上边界的集合记为 $\mathrm{B}^n_{3\,\mathrm{Leib}}(\mathcal{L};\mathrm{V})$，并将第 n 个上同调群记为

$$H^n_{3\mathrm{Leib}}(\mathcal{L};V)=Z^n_{3\mathrm{Leib}}(\mathcal{L};V)/B^n_{3\mathrm{Leib}}(\mathcal{L};V). \tag{28}$$

引理 4.3. 设 $\mathrm{T}:\mathrm{V}\to\mathrm{g}$ 是 3-Lie 代数 $(\mathrm{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathrm{g}})$ 上关于表示 $(\mathrm{V};\rho)$ 的嵌入张量。定义线性映射 l_T，m_T, r_T: $\otimes^2\mathrm{V}\longrightarrow\mathrm{gl}(\mathrm{g})$，如下:

$$l_T(u,v)(x) := [Tu,Tv,x]_{\mathrm{g}}, \tag{29}$$
$$m_T(u,v)(x) := [Tu,x,Tv]_{\mathrm{g}}-T(\rho(Tu,x)v), \tag{30}$$
$$r_T := -m_T, \tag{31}$$

对所有 $\mathrm{u},\mathrm{v}\in\mathrm{V}$、$\mathrm{x}\in\mathrm{g}$，$(\mathrm{g};\mathrm{l}_T,\mathrm{m}_T,\mathrm{r}_T)$ 是 3-Leibniz 代数 $(\mathrm{V},[\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ 的一个表示。证明: 对所有 $\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2,\mathrm{u}_3,\mathrm{u}_4\in\mathrm{V}$ 和 $\mathrm{x}\in\mathrm{g}$，由 (1) 可得

$$\begin{aligned}
&(l_T([u_1,u_2,u_3]_T,u_4)+l_T(u_3,[u_1,u_2,u_4]_T)+l_T(u_3,u_4)l_T(u_1,u_2))(x)\\
=\;&[T[u_1,u_2,u_3]_T,Tu_4,x]_{\mathrm{g}}+[Tu_3,T[u_1,u_2,u_4]_T,x]_{\mathrm{g}}+[Tu_3,Tu_4,[Tu_1,Tu_2,x]_{\mathrm{g}}]_{\mathrm{g}}\\
=\;&[[Tu_1,Tu_2,Tu_3]_{\mathrm{g}},Tu_4,x]_{\mathrm{g}}+[Tu_3,[Tu_1,Tu_2,Tu_4]_{\mathrm{g}},x]_{\mathrm{g}}+[Tu_3,Tu_4,[Tu_1,Tu_2,x]_{\mathrm{g}}]_{\mathrm{g}}\\
=\;&[Tu_1,Tu_2,[Tu_3,Tu_4,x]_{\mathrm{g}}]_{\mathrm{g}}\\
=\;&l_T(u_1,u_2)([Tu_3,Tu_4,x]_{\mathrm{g}})\\
=\;&l_T(u_1,u_2)l_T(u_3,u_4)(x),
\end{aligned}$$

这意味着23）成立。

由式（1）、（2）、（7）和命题 2.7，对所有 $u_1,u_2,u_3,u_4\in V$ 和 $x\in\mathrm{g}$，有

$$\begin{aligned}
&m_T(u_3,u_4)l_T(u_1,u_2)(x)+m_T([u_1,u_2,u_3]_T,u_4)(x)+m_T(u_3,[u_1,u_2,u_4]_T)(x)\\
=\;&m_T(u_3,u_4)([Tu_1,Tu_2,x]_{\mathrm{g}})+[T[u_1,u_2,u_3]_T,x,Tu_4]_{\mathrm{g}}-T(\rho(T[u_1,u_2,u_3]_T,x)u_4)\\
&+[Tu_3,x,T[u_1,u_2,u_4]_T]_{\mathrm{g}}-T(\rho(Tu_3,x)([u_1,u_2,u_4]_T))\\
=\;&[Tu_3,[Tu_1,Tu_2,x]_{\mathrm{g}},Tu_4]_{\mathrm{g}}-T(\rho(Tu_3,[Tu_1,Tu_2,x]_{\mathrm{g}})u_4)+[[Tu_1,Tu_2,Tu_3]_{\mathrm{g}},x,Tu_4]_{\mathrm{g}}\\
&-T(\rho([Tu_1,Tu_2,Tu_3]_{\mathrm{g}},x)u_4)+[Tu_3,x,[Tu_1,Tu_2,Tu_4]_{\mathrm{g}}]_{\mathrm{g}}-T(\rho(Tu_3,x)\rho(Tu_1,Tu_2)u_4)\\
=\;&[Tu_1,Tu_2,[Tu_3,x,Tu_4]_{\mathrm{g}}]_{\mathrm{g}}-T(\rho(Tu_1,Tu_2)\rho(Tu_3,x)u_4)\\
=\;&[Tu_1,Tu_2,[Tu_3,x,Tu_4]_{\mathrm{g}}]_{\mathrm{g}}-[Tu_1,Tu_2,T(\rho(Tu_3,x)u_4)]_{\mathrm{g}}\\
=\;&l_T(u_1,u_2)([Tu_3,x,Tu_4]_{\mathrm{g}}-T(\rho(Tu_3,x)u_4))\\
=\;&l_T(u_1,u_2)m_T(u_3,u_4)(x),
\end{aligned}$$

这意味着式（24）成立。类似地，我们可以证明式（25）成立。

对于所有 $u_1,u_2,u_3,u_4 \in V$ 和 $x \in \mathfrak{g}$，我们得到

$$\begin{aligned}
& r_T(u_3,u_4)m_T(u_1,u_2)(x) + m_T(u_2,u_4)m_T(u_1,u_3)(x) + l_T(u_2,u_3)m_T(u_1,u_4)(x)\\
=\ & r_T(u_3,u_4)([Tu_1,x,Tu_2]_{\mathfrak{g}} - T(\rho(Tu_1,x)u_2)) + m_T(u_2,u_4)([Tu_1,x,Tu_3]_{\mathfrak{g}} - T(\rho(Tu_1,x)u_3))\\
& + l_T(u_2,u_3)([Tu_1,x,Tu_4]_{\mathfrak{g}} - T(\rho(Tu_1,x)u_4))\\
=\ & [[Tu_1,x,Tu_2]_{\mathfrak{g}},Tu_3,Tu_4]_{\mathfrak{g}} - T(\rho([Tu_1,x,Tu_2]_{\mathfrak{g}},Tu_3)u_4) - [T(\rho(Tu_1,x)u_2),Tu_3,Tu_4]_{\mathfrak{g}}\\
& + T(\rho(T(\rho(Tu_1,x)u_2),Tu_3)u_4) + [Tu_2,[Tu_1,x,Tu_3]_{\mathfrak{g}},Tu_4]_{\mathfrak{g}} - T(\rho(Tu_2,[Tu_1,x,Tu_3]_{\mathfrak{g}})u_4)\\
& - [Tu_2,T(\rho(Tu_1,x)u_3),Tu_4]_{\mathfrak{g}} + T(\rho(Tu_2,T(\rho(Tu_1,x)u_3))u_4) + [Tu_2,Tu_3,[Tu_1,x,Tu_4]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}}\\
& - [Tu_2,Tu_3,T(\rho(Tu_1,x)u_4)]_{\mathfrak{g}}\\
=\ & [[Tu_1,x,Tu_2]_{\mathfrak{g}},Tu_3,Tu_4]_{\mathfrak{g}} + [Tu_2,[Tu_1,x,Tu_3]_{\mathfrak{g}},Tu_4]_{\mathfrak{g}} + [Tu_2,Tu_3,[Tu_1,x,Tu_4]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}}\\
& - T(\rho(Tu_2,[Tu_1,x,Tu_3]_{\mathfrak{g}})u_4) - T(\rho([Tu_1,x,Tu_2]_{\mathfrak{g}},Tu_3)u_4) - [Tu_2,Tu_3,T(\rho(Tu_1,x)u_4)]_{\mathfrak{g}}\\
=\ & [Tu_1,x,[Tu_2,Tu_3,Tu_4]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}} - T(\rho(Tu_2,[Tu_1,x,Tu_3]_{\mathfrak{g}})u_4) - T(\rho([Tu_1,x,Tu_2]_{\mathfrak{g}},Tu_3)u_4)\\
& - T(\rho(Tu_2,Tu_3)\rho(Tu_1,x)u_4)\\
=\ & [Tu_1,x,[Tu_2,Tu_3,Tu_4]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}} - T(\rho(Tu_1,x)\rho(Tu_2,Tu_3)u_4)\\
=\ & [Tu_1,x,T[u_2,u_3,u_4]_T]_{\mathfrak{g}} - T(\rho(Tu_1,x)([u_2,u_3,u_4]_T))\\
=\ & m_T(u_1,[u_2,u_3,u_4]_T)(x),
\end{aligned}$$

这表明（26）成立。类似地，我们可以证明（27）成立。因此，$(\mathfrak{g};\ l_T,\ m_T,\ r_T)$ 是 3-Leibniz 代数 $(V,\ [\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ 的一个表示。□

令 $\partial_T : C^n_{3\text{-Leib}}(V;\mathfrak{g}) \to C^{n+1}_{3\text{-Leib}}(V;\mathfrak{g}), (n \geq 1)$ 为带有表示 $(\mathfrak{g};\ l_T、m_T、r_T)$ 的 3-Leibniz 代数 $(V,\ [\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ 的余边界算子。更确切地说，对于所有 $\theta \in \mathrm{Hom}((\otimes^2 V)\otimes\cdots\otimes(\otimes^2 V)\otimes V,\mathfrak{g})$，$U_i = u_i \otimes v_i \in \otimes^2 V$，$i = 1,2,\cdots,n$ 且 $w \in V$，我们有

$$\begin{aligned}
(32)\quad & \partial_T\theta(U_1,U_2,\cdots,U_n,w)\\
=\ & \sum_{1\leq j<k\leq n}(-1)^j\theta(U_1,\cdots,\hat{U}_j,\cdots,U_{k-1},[u_j,v_j,u_k]_T\otimes v_k,U_{k+1},\cdots,U_n,w)\\
& + \sum_{1\leq j<k\leq n}(-1)^j\theta(U_1,\cdots,\hat{U}_j,\cdots,U_{k-1},u_k\otimes[u_j,v_j,v_k]_T,U_{k+1},\cdots,U_n,w)\\
& + \sum_{j=1}^{n}\Big((-1)^j\theta(U_1,\cdots,\hat{U}_j,\cdots,U_n,[U_j,w]_T) + (-1)^{j+1}l_T(U_j)\theta(U_1,\cdots,\hat{U}_j,\cdots,U_n,w)\Big)\\
& + (-1)^{n+1}\Big(m_T(u_n,w)\theta(U_1,\cdots,U_{n-1},v_n) + r_T(v_n,w)\theta(U_1,\cdots,U_{n-1},u_n)\Big).
\end{aligned}$$

显然，$\theta \in \mathrm{Hom}(V,\mathfrak{g})$ 是闭的，当且仅当

$$\begin{aligned}
& [Tu,Tv,\theta w]_{\mathfrak{g}} + [\theta u,Tv,Tw]_{\mathfrak{g}} + [Tu,\theta v,Tw]_{\mathfrak{g}}\\
=\ & T(\rho(\theta u,Tv)w) + T(\rho(Tu,\theta v)w) + \theta(\rho(Tu,Tv)w).
\end{aligned}$$

对于任意 $x \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$、$v \in V$，定义 $\delta(x): V \longrightarrow \mathfrak{g}$ 为

$$(33)\qquad \delta(\mathfrak{x})v = T\rho(\mathfrak{x})v - [\mathfrak{x},Tv]_{\mathfrak{g}}.$$

命题4.4. 设 T 是 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ 上关于表示 $(V; \rho)$ 的嵌入张量。则 $\delta(\mathfrak{X})$ 是 3-Leibniz 代数 $(V, [\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ 上的一个 1-余循环，其系数取于 $(\mathfrak{g}; l_T, m_T, r_T)$。

证明。对于 任意 $u,v,w \in V$，由（1）、（2）以及 T 是嵌入张量这一事实可得

$$\begin{aligned}
(\partial_T\delta(\mathfrak{X}))(u,v,w) &= -\delta(\mathfrak{X})([u,v,w]_T) + [Tu, Tv, \delta(\mathfrak{X})w]_\mathfrak{g} + [\delta(\mathfrak{X})u, Tv, Tw]_\mathfrak{g} \\
&\quad -T(\rho(\delta(\mathfrak{X})u, Tv)w) + [Tu, \delta(\mathfrak{X})v, Tw]_\mathfrak{g} - T(\rho(Tu, \delta(\mathfrak{X})v)w) \\
&= -T\rho(\mathfrak{X})([u,v,w]_T) + [\mathfrak{X}, T[u,v,w]_T]_\mathfrak{g} + [Tu, Tv, T\rho(\mathfrak{X})w]_\mathfrak{g} \\
&\quad -[Tu, Tv, [\mathfrak{X}, Tw]_\mathfrak{g}]_\mathfrak{g} + [T\rho(\mathfrak{X})u, Tv, Tw]_\mathfrak{g} - [[\mathfrak{X}, Tu]_\mathfrak{g}, Tv, Tw]_\mathfrak{g} \\
&\quad -T(\rho(T\rho(\mathfrak{X})u, Tv)w) + T(\rho([\mathfrak{X}, Tu]_\mathfrak{g}, Tv)w) + [Tu, T\rho(\mathfrak{X})v, Tw]_\mathfrak{g} \\
&\quad -[Tu, [\mathfrak{X}, Tv]_\mathfrak{g}, Tw]_\mathfrak{g} - T(\rho(Tu, T\rho(\mathfrak{X})v)w) + T(\rho(Tu, [\mathfrak{X}, Tv]_\mathfrak{g})w) \\
&= -T(\rho(\mathfrak{X})\rho(Tu, Tv)w) + T(\rho(Tu, Tv)\rho(\mathfrak{X})w) + T(\rho(T\rho(\mathfrak{X})u, Tv)w) \\
&\quad -T(\rho(T\rho(\mathfrak{X})u, Tv)w) + T(\rho([\mathfrak{X}, Tu]_\mathfrak{g}, Tv)w) + T(\rho(Tu, T\rho(\mathfrak{X})v)w) \\
&\quad -T(\rho(Tu, T\rho(\mathfrak{X})v)w) + T(\rho(Tu, [\mathfrak{X}, Tv]_\mathfrak{g})w) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

因此，我们推得 $\partial_T\delta(\mathrm{X}) = 0$。 □

现在，我们定义 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ 上关于表示 $(V;\rho)$ 的嵌入张量的上同调理论。

设 T 是 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ 上关于表示 $(V;\rho)$ 的嵌入张量。定义 k-余链集合如下：

$$\mathfrak{C}_T^k(V;\mathfrak{g}) = \begin{cases} \mathfrak{C}^{k-1}_{3\mathrm{Leib}}(V;\mathfrak{g}), & k \geq 2, \\ \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}, & k = 1. \end{cases}$$

定义 $\mathrm{d}^\mathsf{T}: \mathrm{C}_T^k(\mathrm{V};\mathrm{g}) \to \mathrm{C}_T^{k+1}(\mathrm{V};\mathrm{g})$ 为

$$\mathrm{d}^\mathsf{T} = \begin{cases} \partial_T, & k \geq 2, \\ \delta, & k = 1. \end{cases}$$

定理4.5. $(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathrm{C}_T^k(\mathrm{V};\mathrm{g}), \mathrm{d}^\mathsf{T})$ 是一个上链复形。

证明。 由命题 4.4 以及如下事实可直接得出： ∂_T 它是 3-Leibniz 代数 $(V, [\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ 的相应余边界算子，其系数取自表示 $(\mathfrak{g}; l_T, m_T, r_T)$。□

定义4.6. 上链复形 $(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathrm{C}_T^k(\mathrm{V};\mathrm{g}), \mathrm{d}^\mathsf{T})$ 的上同调定义为嵌入张量 T 的上同调。记 k-余循环集合为 $\mathcal{Z}^k(\mathrm{T})$，k-余边界集合为 $\mathcal{B}^k(\mathrm{T})$。嵌入张量 T 的第k上同调群记作

$$\mathcal{H}^k(T) = \mathcal{Z}^k(T)/\mathcal{B}^k(T), \quad k \geq 1.$$

在本节末尾，我们给出由 Maurer-Cartan 元 T定义的微分 l_1^T（由19）构造，该元属于 Lie 3-代数（C,*V,g），$\{\cdot,\cdot,\cdot\}$与嵌入张量 T的余边界算子 d之间的关系。

定理 4.7。设 T 是 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ 上关于表示 $(V;\rho)$ 的嵌入张量。那么有

$$\mathrm{d}^{\mathsf{T}}\theta = (-1)^{n-1} l_1^T \theta, \quad \forall \theta \in \mathrm{Hom}(\underbrace{(\otimes^2 V)\otimes\cdots\otimes(\otimes^2 V)}_{n-1}\otimes V, \mathfrak{g}), n = 1, 2, \cdots. \tag{34}$$

证明。对于 al $1\, U_i = u_i \otimes v_i \in \otimes^2 V, i = 1,2,\cdots,n$ 以及$w \in V$，根据引理3.9 和（19），可得

$$\begin{aligned}
& 2l_1^T\theta(U_1, U_2, \cdots, U_n, w)\\
=\ & \{T, T, \theta\}(U_1, U_2, \cdots, U_n, w)\\
=\ & [[[\mu \boxplus \rho, T]_{3\mathsf{Leib}}, T]_{3\mathsf{Leib}}, \theta]_{3\mathsf{Leib}}(U_1, U_2, \cdots, U_n, w)\\
=\ & [[\mu \boxplus \rho, T]_{3\mathsf{Leib}}, T]_{3\mathsf{Leib}}(\theta(U_1, \cdots, U_{n-1}, u_n)\otimes v_n, w)\\
& +[[\mu \boxplus \rho, T]_{3\mathsf{Leib}}, T]_{3\mathsf{Leib}}(u_n \otimes \theta(U_1, \cdots, U_{n-1}, v_n), w)\\
& + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-1}(-1)^{i-1}[[\mu \boxplus \rho, T]_{3\mathsf{Leib}}, T]_{3\mathsf{Leib}}(U_i, \theta(U_1, \cdots, \hat{U}_i, \cdots, U_n, w))\\
& -(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\theta(U_1, \cdots, \hat{U}_i, \cdots, U_k, [[\mu \boxplus \rho, T]_{3\mathsf{Leib}}, T]_{3\mathsf{Leib}}(U_i, u_{k+1})\otimes v_{k+1},\\
& U_{k+2}, \cdots, U_n, w)\\
& -(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\theta(U_1, \cdots, \hat{U}_i, \cdots, U_k, u_{k+1}\otimes [[\mu \boxplus \rho, T]_{3\mathsf{Leib}}, T]_{3\mathsf{Leib}}(U_i, v_{k+1}),\\
& U_{k+2}, \cdots, U_n, w)\\
& -(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\theta(U_1, \cdots, \hat{U}_i, \cdots, U_n, [[\mu \boxplus \rho, T]_{3\mathsf{Leib}}, T]_{3\mathsf{Leib}}(U_i, w))\\
& = 2(-1)^{n-1}\mathrm{d}^{\mathsf{T}}\theta,
\end{aligned}$$

这意味着 $\mathrm{d}^{\mathsf{T}}\theta = (-1)^{n-1} l_1^T \theta$。证明完毕。 □

5. 嵌入张量的变形

本节中，我们研究关于表示 $(V;\ \rho)$ 的 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ 上嵌入张量的形式变形，并证明：如果 3-Lie 代数上的一个嵌入张量的两个形式变形等价，则它们的无穷小变形属于同一个上同调类。此外，我们还研究 3-Lie 代数上嵌入张量的一个 n 阶变形能否延拓为 n + 1 阶变形。

5.1. 3-Lie 代数上嵌入张量的形式变形。令 $\mathbb{K}[[t]]$ 为关于变量 t 的幂级数环。设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ 是 $\mathbb{K}$ 上的 3-Lie 代数，并令 $V[[t]]$ 表示系数属于 V 的关于 t 的形式幂级数向量空间。则 $\mathfrak{g}[[t]]$ 上存在一个关于环 $\mathbb{K}[[t]]$ 的 3-Lie 代数结构，其定义为

$$\Big[\sum_{i\geq 0} x_i t^i, \sum_{j\geq 0} y_j t^j, \sum_{k\geq 0} z_k t^k\Big] := \sum_{s\geq 0}\sum_{i+j+k=s}[x_i, y_j, z_k]_\mathfrak{g} t^s, \quad \forall x_i, y_j, z_k \in \mathfrak{g}.$$

对于 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ 的任意表示 $(V; \rho)$，$\mathfrak{g}[[t]]$ 在 $\mathbb{K}[[t]]$-模 $\mathbb{V}[[t]]$，上有一个自然作用，其定义为

$$\rho(\sum_{i\geq 0} x_i t^i, \sum_{j\geq 0} y_j t^j)(\sum_{k\geq 0} v_k t^k) = \sum_{s\geq 0}\sum_{i+j+k=s} \rho(x_i, y_j)v_k t^s, \quad \forall x_i, y_j \in \mathfrak{g}, v_k \in V.$$

考虑一个幂级数

$$T_t = \sum_{i\geq 0} \tau_i t^i, \quad \tau_i \in \mathrm{Hom}_\mathbb{K}(V, \mathfrak{g}),$$

即，$T_t \in \mathrm{Hom}_\mathbb{K}(V,\mathfrak{g})[[t]]$。将其扩展为一个从 $\mathbb{V}[[t]]$ 到$\mathfrak{g}[[t]]$ 的 $\mathbb{K}[[t]]$-模映射，仍记为T_t。

定义 5.1. 设 T 是关于表示 $(V;\rho)$ 的 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ 上的一个嵌入张量。若一个幂级数

$$T_t = \sum_{i\geq 0} \tau_i t^i, \quad \tau_i \in \mathrm{Hom}_\mathbb{K}(V, \mathfrak{g}),$$

其中 $\tau_0 = T$ 满足

$$[T_t u, T_t v, T_t w]_\mathfrak{g} = T_t(\rho(T_t u, T_t v)w), \quad \forall u, v, w \in V, \tag{35}$$

则称 T_t 为嵌入张量 T 的形式变形。

设 T 是 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ 上关于表示 $(V; \rho)$ 的嵌入张量，且 T_t 是一个形式变形。对于任意 $u, v, w \in V$，我们有以下方程：

$$\sum_{s\geq 0}\sum_{i+j+k=s} [\tau_i u, \tau_j v, \tau_k w]_\mathfrak{g} t^s = \sum_{s\geq 0}\sum_{i+j+k=s} \tau_k(\rho(\tau_i u, \tau_j v)w)t^s. \tag{36}$$

对于$s = 1$, (36) 等价于

$$\begin{aligned} & [Tu, Tv, \tau_1 w]_\mathfrak{g} + [\tau_1 u, Tv, Tw]_\mathfrak{g} + [Tu, \tau_1 v, Tw]_\mathfrak{g} \\ = \ & \tau_1(\rho(Tu, Tv)w) + T(\rho(\tau_1 u, Tv)w) + T(\rho(Tu, \tau_1 v)w). \end{aligned}$$

于是我们得到以下结果。

命题5.2. 设 $T_t = \sum_{i\geq 0} \tau_i t^i$ 是 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ 上关于表示 $(V; \rho)$ 的嵌入张量的形式变形。则 τ_1 是嵌入张量 T 的一个 2-余循环，即 $\mathrm{d}^T\tau_1 = 0$。

定义 5.3. 设 T 是 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ 上关于表示 $(V;\rho)$ 的嵌入张量。则由命题 5.2 给出的 τ_1 称为 T 的形式变形 $T_t = \sum_{i\geq 0} \tau_i t^i$ 的无穷小。

下文将讨论等价形式变形。

定义 5.4. 3-Lie 代数 $T_t = \sum_{i\geq 0} \tau_i t^i$ 上的嵌入张量 $T = \tau_0 = \tilde{\tau}_0$ 以及 $\tilde{T}_t = \sum_{i\geq 0} \tilde{\tau}_i t^i$ 的两个形式变形是等价的，当且仅当存在 $\mathfrak{X} \in \wedge^2\mathfrak{g}$、$\phi_i \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$、$\psi_i \in \mathfrak{gl}(V)$、$i \geq 2$，使得

$$\phi_t = \mathrm{Id}_\mathfrak{g} + t\mathrm{ad}_\mathfrak{X} + \sum_{i\geq 2} t^i\phi_i, \quad \psi_t = \mathrm{Id}_V + t\rho(\mathfrak{X}) + \sum_{i\geq 2} t^i\psi_i, \tag{37}$$

以下条件成立：

$$\phi_t([x,y,z]_\mathfrak{g}) = [\phi_t(x),\phi_t(y),\phi_t(z)]_\mathfrak{g}, \quad \forall x,y,z\in\mathfrak{g}, \tag{38}$$

$$\rho(\phi_t(x),\phi_t(y))\psi_t(u) = \psi_t(\rho(x,y)u), \quad \forall u\in V, \tag{39}$$

$$T_t\circ\psi_t = \phi_t\circ\tilde{T}_t. \tag{40}$$

˜定理 5.5. 设 T_t 和 T_t 是 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ 上关于表示 $(V;\rho)$ 的两个等价形式变形。那么，它们的无穷小变形属于 $\mathcal{H}^2(T)$ 中同一个上同调类。

˜证明. 由 $T_t\circ\psi_t = \phi_t\circ T_t$，我们可推出

$$\tilde{\tau}_1 u = \tau_1 u + T\rho(\mathfrak{X})u - [\mathfrak{X},Tu]_\mathfrak{g} = \tau_1 u + (d^T\mathfrak{X})u,$$

这意味着 $\tilde{\tau}_1$ 和 τ_1 属于同一个上同调类。 □

5.2. 3-Lie 代数上嵌入张量的 n 阶变形。

定义 5.6. 设 $T:V\to\mathfrak{g}$ 是 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ 上关于表示 $(V;\rho)$ 的嵌入张量。若 $T_t = P_{n\,i=0}\tau_i t^i$，其中 $\tau_0 = T$，$\tau_i\in \mathrm{Hom}_\mathbb{K}(V,\mathfrak{g})$，$i = 1,\cdots,n$，则定义一个从 $\mathbb{V}[[t]]/(t^{n+1})$ 到 3-Lie 代数 $\mathfrak{g}[[t]]/(t^{n+1})$ 的 $\mathbb{K}[[t]]/(t^{n+1})$-模映射，并满足

$$[T_t u,T_t v,T_t w]_\mathfrak{g} = T_t\Big(\rho(T_t u,T_t v)w\Big), \quad \forall u,v,w\in V. \tag{41}$$

则称 T_t 为嵌入张量 T 的 n 阶变形。

对于所有 $0\le s\le n$、u、v、$w\in V$，有

$$\sum_{\substack{i+j+k=s\\ 0\le i,j,k\le s}}\Big([\tau_i u,\tau_j v,\tau_k w]_\mathfrak{g} - \tau_k(\rho(\tau_i u,\tau_j v)w)\Big) = 0. \tag{42}$$

定义 5.7. 设 $T_t = P_{n\,i=0}\tau_i t^i$ 是一个 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ 上关于表示 $(V;\rho)$ 的嵌入张量的 n 阶变形。若存在一个 1-上链 $\tau_{n+1}\in\mathrm{Hom}_\mathbb{K}(V,\mathfrak{g})$，使得 $\hat{}T_t = T_t + \tau_{n+1}t^{n+1}$ 是嵌入张量 T 的一个 n 阶变形，则称 T_t 可延拓。

设 $T_t = P_{n\,i=0}\tau_i t^i$ 是 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$ 上关于表示 $(V;\rho)$ 的嵌入张量 T 的 n 阶变形。定义 $\mathrm{Ob}_T\in C^3_T(V;\mathfrak{g})$ 为

$$\mathrm{Ob}_T(u,v,w) = \sum_{\substack{i+j+k=n+1\\ 0\le i,j,k\le n}}\Big([\tau_i u,\tau_j v,\tau_k w]_\mathfrak{g} - \tau_k(\rho(\tau_i u,\tau_j v)w)\Big). \tag{43}$$

于是我们推导出如下命题。

命题 5.8. 使用上述记号，Ob_T 是一个 3-上循环，即 $d^T\mathrm{Ob}_T = 0$。

证明。 根据（18）给出的括号，我们有

$$\begin{aligned}
&\{\tau_i,\tau_j,\tau_k\}(u,v,w)\\
=\ &[[[\mu\boxplus\rho,\tau_i]_{3\mathrm{Leib}},\tau_j]_{3\mathrm{Leib}},\tau_k]_{3\mathrm{Leib}}(u,v,w)\\
=\ &[[\mu\boxplus\rho,\tau_i]_{3\mathrm{Leib}},\tau_j]_{3\mathrm{Leib}}(\tau_k u,v,w) + [[\mu\boxplus\rho,\tau_i]_{3\mathrm{Leib}},\tau_j]_{3\mathrm{Leib}}(u,\tau_k v,w)\\
&+[[\mu\boxplus\rho,\tau_i]_{3\mathrm{Leib}},\tau_j]_{3\mathrm{Leib}}(u,v,\tau_k w) - \tau_k[[\mu\boxplus\rho,\tau_i]_{3\mathrm{Leib}},\tau_j]_{3\mathrm{Leib}}(u,v,w)\\
=\ &[\mu\boxplus\rho,\tau_i]_{3\mathrm{Leib}}(\tau_k u,\tau_j v,w) + [\mu\boxplus\rho,\tau_i]_{3\mathrm{Leib}}(\tau_k u,v,\tau_j w) - \tau_j[\mu\boxplus\rho,\tau_i]_{3\mathrm{Leib}}(\tau_k u,v,w)
\end{aligned}$$

$+[\mu \boxplus \rho, \tau_i]_{3\text{Leib}}(\tau_j u, \tau_k v, w) + [\mu \boxplus \rho, \tau_i]_{3\text{Leib}}(u, \tau_k v, \tau_j w) - \tau_j[\mu \boxplus \rho, \tau_i]_{3\text{Leib}}(u, \tau_k v, w) + [\mu \boxplus \rho, \tau_i]_{3\text{Leib}}(\tau_j u, v, \tau_k w) + [\mu \boxplus \rho, \tau_i]_{3\text{Leib}}(u, \tau_j v, \tau_k w) - \tau_j[\mu \boxplus \rho, \tau_i]_{3\text{Leib}}(u, v, \tau_k w) - \tau_k[\mu \boxplus \rho, \tau_i]_{3\text{Leib}}(\tau_j u, v, w) - \tau_k[\mu \boxplus \rho, \tau_i]_{3\text{Leib}}(u, \tau_j v, w) - \tau_k[\mu \boxplus \rho, \tau_i]_{3\text{Leib}}(u, v, \tau_j w) + \tau_k\tau_j[\mu \boxplus \rho, \tau_i]_{3\text{Leib}}(u, v, w) = [\tau_k u, \tau_j v, \tau_i w]_\mathfrak{g} - \tau_i\rho(\tau_k u, \tau_j v)w + [\tau_k u, \tau_i v, \tau_j w]_\mathfrak{g} - \tau_j\rho(\tau_k u, \tau_i v)w + [\tau_j u, \tau_k v, \tau_i w]_\mathfrak{g} - \tau_i\rho(\tau_j u, \tau_k v)w - \tau_j\rho(\tau_i u, \tau_k v)w + [\tau_j u, \tau_i v, \tau_k w]_\mathfrak{g} + [\tau_i u, \tau_j v, \tau_k w]_\mathfrak{g} - \tau_k\rho(\tau_j u, \tau_i v)w - \tau_k\rho(\tau_i u, \tau_j v)w + [\tau_i u, \tau_k v, \tau_j w]_\mathfrak{g}.$

这给出

$$\text{(44)} \qquad \mathrm{Ob}_T = \frac{1}{6}\sum_{\substack{i+j+k=n+1\\0\le i,j,k\le n}} \{\tau_i, \tau_j, \tau_k\} = \frac{1}{6}\sum_{\substack{i+j+k=n+1\\1\le i,j,k\le n}} \{\tau_i, \tau_j, \tau_k\} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i+j=n+1\\1\le i,j\le n}} \{T, \tau_i, \tau_j\}.$$

由于T_t是嵌入张量n阶变形，T，式（42）等价于

$$\text{(45)} \qquad \begin{aligned} -\frac{1}{2}\{T, T, \tau_s\} &= \frac{1}{6}\sum_{\substack{i+j+k=s\\0\le i,j,k\le s-1}} \{\tau_i, \tau_j, \tau_k\} \\ &= \frac{1}{6}\sum_{\substack{i+j+k=s\\1\le i,j,k\le s-1}} \{\tau_i, \tau_j, \tau_k\} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i+j=s\\1\le i,j\le s-1}} \{T, \tau_i, \tau_j\}, \quad 0 \le s \le n. \end{aligned}$$

由定理 4.7和（19），可得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^T\mathrm{Ob}_T &= -\frac{1}{2}\{T, T, \mathrm{Ob}_T\} \\ &= -\frac{1}{12}\sum_{\substack{i+j+k=n+1\\1\le i,j,k\le n}} \{T, T, \{\tau_i, \tau_j, \tau_k\}\} - \frac{1}{4}\sum_{\substack{i+j=n+1\\1\le i,j\le n}} \{T, T, \{T, \tau_i, \tau_j\}\} \\ &= -\frac{1}{12}\sum_{\substack{i+j+k=n+1\\1\le i,j,k\le n}} \{\{\tau_i, \tau_j, \tau_k\}, T, T\} - \frac{1}{4}\sum_{\substack{i+j=n+1\\1\le i,j\le n}} \{\{T, \tau_i, \tau_j\}, T, T\} \\ &= \frac{1}{6}\sum_{\substack{i+j+k=n+1\\1\le i,j,k\le n}} \Big(\{\{\tau_i, \tau_j, T\}, \tau_k, T\} + \{\{\tau_i, \tau_k, T\}, \tau_j, T\} + \{\{\tau_j, \tau_k, T\}, \tau_i, T\}\Big) \\ &\quad + \frac{1}{12}\sum_{\substack{i+j+k=n+1\\1\le i,j,k\le n}} \Big(\{\{\tau_i, T, T\}, \tau_j, \tau_k\} + \{\{\tau_j, T, T\}, \tau_i, \tau_k\} + \{\{\tau_k, T, T\}, \tau_i, \tau_j\}\Big) \\ &\quad + \frac{1}{4}\sum_{\substack{i+j=n+1\\1\le i,j\le n}} \Big(\{\{T, T, \tau_i\}, \tau_j, T\} + \{\{T, T, \tau_j\}, \tau_i, T\}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\substack{i+j+k=n+1\\1\le i,j,k\le n}} \{\{\tau_i, \tau_j, T\}, \tau_k, T\} + \frac{1}{4}\sum_{\substack{i+j+k=n+1\\1\le i,j,k\le n}} \{\{\tau_i, T, T\}, \tau_j, \tau_k\} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i+j=n+1\\1\le i,j\le n}} \{\{T, T, \tau_i\}, \tau_j, T\} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\substack{i+j+k=n+1\\1\le i,j,k\le n}} \{\{\tau_i, \tau_j, T\}, \tau_k, T\} - \frac{1}{12}\sum_{\substack{i'+i''+i'''+j+k=n+1\\1\le i',i'',i''',j,k\le n}} \{\{\tau_{i'}, \tau_{i''}, \tau_{i'''}\}, \tau_j, \tau_k\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}\sum_{\substack{i'+i''+j+k=n+1\\1\le i',i'',j,k\le n}}\{\{T,\tau_{i'},\tau_{i''}\},\tau_j,\tau_k\}-\frac{1}{6}\sum_{\substack{i'+i''+i'''+j=n+1\\1\le i',i'',i''',j\le n}}\{\{\tau_{i'},\tau_{i''},\tau_{i'''}\},\tau_j,T\}\\
&-\frac{1}{2}\sum_{\substack{i'+i''+j=n+1\\1\le i',i'',j\le n}}\{\{T,\tau_{i'},\tau_{i''}\},\tau_j,T\}\\
=\;&-\frac{1}{12}\sum_{\substack{i'+i''+i'''+j+k=n+1\\1\le i',i'',i''',j,k\le n}}\{\{\tau_{i'},\tau_{i''},\tau_{i'''}\},\tau_j,\tau_k\}-\frac{1}{4}\sum_{\substack{i'+i''+j+k=n+1\\1\le i',i'',j,k\le n}}\{\{T,\tau_{i'},\tau_{i''}\},\tau_j,\tau_k\}\\
&-\frac{1}{6}\sum_{\substack{i'+i''+i'''+j=n+1\\1\le i',i'',i''',j\le n}}\{\{\tau_{i'},\tau_{i''},\tau_{i'''}\},\tau_j,T\}\\
=\;&-\frac{1}{4}\sum_{\substack{i'+i''+j+k=n+1\\1\le i',i'',j,k\le n}}\{\{T,\tau_{i'},\tau_{i''}\},\tau_j,\tau_k\}-\frac{1}{6}\sum_{\substack{i'+i''+i'''+j=n+1\\1\le i',i'',i''',j\le n}}\{\{\tau_{i'},\tau_{i''},\tau_{i'''}\},\tau_j,T\}\\
=\;&-\frac{1}{12}\sum_{\substack{i'+i''+j+k=n+1\\1\le i',i'',j,k\le n}}\Big(\{\{T,\tau_{i'},\tau_{i''}\},\tau_j,\tau_k\}+\{\{\tau_{i'},T,\tau_{i''}\},\tau_j,\tau_k\}+\{\{\tau_{i'},\tau_{i''},T\},\tau_j,\tau_k\}\Big)\\
&-\frac{1}{12}\sum_{\substack{i'+i''+i'''+j=n+1\\1\le i',i'',i''',j\le n}}\Big(\{\{\tau_{i'},\tau_{i''},\tau_{i'''}\},\tau_j,T\}+\{\{\tau_{i'},\tau_{i''},\tau_{i'''}\},T,\tau_j\}\Big)\\
=\;&0.
\end{aligned}
$$

由此，我们得到 3-上链 Ob_{T} 是一个 3-上循环。 □

定义5.9. 设 $\mathrm{T}_t = \mathrm{P}_{n\ i=0}\,\tau_i \mathrm{t}^i$ 是关于表示 (V; ρ) 的 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 上嵌入张量的 n阶变形。上同调类 $[\mathsf{Ob}_{\mathsf{T}}] \in \mathcal{H}^3(\mathrm{T})$ 称为 T_t可延拓的障碍类。

定理5.10. 设 $\mathrm{T}_t = \mathrm{P}_{n\ i=0}\,\tau_i \mathrm{t}^i$ 是关于表示 (V; ρ) 的 3-Lie 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 上嵌入张量的 n阶变形。那么，当且仅当障碍 $[\mathsf{Ob}_{\mathsf{T}}]$ 是平凡的时，T_t 才是可延拓的。

证明. 假设嵌入张量 T 的 n阶变形 T_t 可延拓为 n阶 + 1 变形，则有

$$\sum_{i+j+k=n+1}([\tau_i u,\tau_j v,\tau_k w]_{\mathfrak{g}}-\tau_k(\rho(\tau_i u,\tau_j v)w))=0,$$

这意味着

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i+j+k=n+1}([\tau_i u,\tau_j v,\tau_k w]_{\mathfrak{g}}-\tau_k(\rho(\tau_i u,\tau_j v)w))\\
=\;&-\tau_{n+1}(\rho(Tu,Tv)w)+[Tu,Tv,\tau_{n+1}w]_{\mathfrak{g}}+[\tau_{n+1}u,Tv,Tw]_{\mathfrak{g}}-T(\rho(\tau_{n+1}u,Tv)w)\\
&+[Tu,\tau_{n+1}v,Tw]_{\mathfrak{g}}-T(\rho(Tu,\tau_{n+1}v)w).
\end{aligned}
$$

即$\mathsf{Ob}_{\mathsf{T}} = \mathrm{d}^{\mathsf{T}}\tau_{n+1}$，因此障碍类 $[\mathsf{Ob}_{\mathsf{T}}]$ 是平凡的。

反过来，若障碍类 $[\mathrm{Ob}_T]$ 是平凡的，设 $\mathrm{Ob}_T = \mathrm{d}^T\tau_{n+1}$，其中线性映射 $\tau_{n+1} \in \mathrm{Hom}(V, g)$，令 $\hat{}T_t = T_t + \tau_{n+1}t^{n+1}$，则 $\hat{}T_t$ 满足式（45），对于 $0 \le s \le n + 1$。因此，$\hat{}T_t$ 是一个 $n + 1$ 阶变形，这意味着 T_t 是可延拓的。□

推论5.11. 设 T 是 3-Lie 代数 $(g, [\cdot,\cdot,\cdot]_g)$ 上关于表示 $(V; \rho)$ 的嵌入张量。若 $\mathcal{H}^3(T) = 0$，则 $\mathcal{Z}^2(T)$ 中的每个 2-余循环都是嵌入张量 T 的某个形式变形的无穷小。

参考文献

[1] M. Aguiar，预泊松代数，《数学物理快报》54（2000），263-277。1[2] C. Bai、L. Guo 和 Y. Sheng，3-Lie代数的双代数、经典 Yang-Baxter 方程与 Manin三元组，《理论与数学物理进展》23（2019），27-74。2[3] R. Bai、L. Guo、J. Li 和 Y. Wu，Rota-Baxter 3-Lie代数，《数学物理杂志》54（2013），063504，共14页。2[4] E. A. Bergshoeff、M. de Roo 和 O. Hohm，多重 M2膜与嵌入张量，《经典与量子引力》25（2008），142001，共10页。1[5] J. M. Casas、J. -L. Loday 和 T. Pirashvili，Leibniz n-代数，《数学论坛》14（2002），189-207。2, 3, 11[6] J. A. de Azc´arraga 和 J. M. Izquierdo，n元代数：综述及其应用，《物理学杂志 A：数学与理论》43（2010），293001。2[7] P. de Medeiros、J. Figueroa-O'Farrill、E. M´endez-Escobar 和 P. Ritter，度量3-代数的李代数起源，《数学物理通讯》290（2009），871-902。2[8] J. Figueroa-O'Farrill，3-代数的变形，《数学物理杂志》50（2009），113514，共27页。2[9] V. T. Filippov，n-Lie 代数，《西伯利亚数学杂志》26（1985），126-140。2, 3[10] E. Getzler，幂零 L_∞-代数的李理论，《数学年刊》（第二辑）170（2009），271-301。7[11] P. Hanlon 和 M. Wachs，关于 Lie k-代数，《数学进展》113（1995），206-236。6[12] Sh. M. Kasymov，关于 n-Lie 代数理论，《代数与逻辑》26（1987），277-297。3[13] A. Kotov 和 T. Strobl，嵌入张量、Leibniz-Loday代数及其高阶规范理论，《数学物理通讯》376（2020），235-258。1[14] T. Lada 和 J. Stasheff，面向物理学家的 SH Lie代数导论，《国际理论物理学杂志》32（1993），1087-1103。6[15] A. Makhlouf，关于 n-Lie 代数的变形，载于《非结合与非交换代数及算子理论》，Springer 数学与统计学论文集，160，Springer，Cham，（2016），55-81。2[16] Y. Masahito，八元数、G_2 和广义 Lie 3-代数，《物理快报 B》670（2008），215-219。2[17] Y. Nambu，广义哈密顿动力学，《物理评论 D》7（1973），2405-2412。2[18] H. Nicolai 和 H. Samtleben，三维最大规范超引力，《物理评论快报》86（2001），1686-1689。1[19] J. Pei、C. Bai、L. Guo 和 X. Ni，二元运算子的复制、Koszul对偶、Manin积与平均算子，《代数与组合学新趋势》（2020），317-353。2[20] J. Pei 和 L. Guo，平均代数、Schr¨oder 数、有根树与运算子，《代数与组合学杂志》42（2015），73-109。2[21] M. Rotkiewicz，n-Lie 代数的上同调环，《数学文摘》20（2005），219-232。2, 7[22] Y. Sheng、R. Tang 和 C. Zhu，嵌入张量与 Lie-Leibniz三元组的控制 L_∞-代数、上同调与同伦，《数学物理通讯》386（2021），269-304。2[23] Y. Sheng 和 R. Tang，3-Lie 代数上的辛结构、乘积结构与复结构，《代数杂志》508（2018），256-300。2[24] M. Schlessinger 和 J. Stasheff，切上同调与变形理论的李代数结构，《纯粹与应用代数杂志》38（1985），313-322。6[25] J. Stasheff，微分分次Lie代数、拟Hopf代数与高阶同伦代数，载于《量子群》（列宁格勒，1990），120-137，数学讲义，1510，Springer，柏林，（1992）。6[26] L. A. Takhtajan，Chevalley-Eilenberg复形的高阶类似物与 n-代数的变形理论，《圣彼得堡数学杂志》6（1995），429-438。11

[27] R. Tang、S. Hou 和 Y. Sheng，3-Lie 代数及3-Lie 代数上相对 Rota-Baxter 算子的变形，《代数杂志》**567**（2021），37-62。2[28] Th. Voronov，高阶导出括号与同伦代数，《纯粹与应用代数杂志》**202**（2005），133-153。7[29] S. Zheng、L. Guo 和 M. Rosenkranz，多项式代数上的 Rota-Baxter 算子、积分与平均算子，《太平洋数学杂志》**275**（2015），481-507。2[30] Y. Zhou、Y. Li 和 Y. Sheng，3-Lie_∞-代数与3-Lie 2-代数，《代数及其应用杂志》**16**（2017），1750171，共20页。5

吉林大学数学系，中国吉林省长春市 130012，电子邮箱：
hmy21@mails.jlu.edu.cn

吉林大学数学系，中国吉林省长春市 130012，电子邮箱：
houshuai19@mails.jlu.edu.cn

吉林大学数学系，中国吉林省长春市 130012，电子邮箱：
songln@jlu.edu.cn

广西科技大学理学院，中国柳州市 545006，电子邮箱：zhouyanqiunihao@163.com