arXiv:2302.08795v2 [math.ST] 3 Apr 2023

2023年4月4日

时间序列结构变化的加权检验统计量功效

HEROLD DEHLING、KATA VUK 和 MARTIN WENDLER

Abstract. 我们研究一些常见变点检验的检验功效如何随变点位置变化。检验统计量是加权U统计量的最大值，其中累积和检验和Wilcoxon变点检验是特殊例子。我们研究局部备择假设下的检验功效，同时改变变点的位置和变化幅度。我们量化检验的加权版本在变化发生于时间区间开头或结尾附近时以何种方式具有更高的检验功效，同时在应对中心位置的变化时检验功效有所降低。

1. Introduction

在本文中，我们将比较权函数变化时一些标准变点检验的检验功效。我们将考察两类备择假设：一类是观测期中心发生跳跃，另一类是非常早或非常晚发生跳跃。根据变点经验法则，非常早和非常晚发生的变化更容易被观测期边界附近递增的权函数所检测。本文旨在通过精确的数学结果和模拟，对这一问题进行深入探讨。为此，我们将考察能够反映观测期边界附近变点现象的局部备择假设。我们的结果表明，最优权函数取决于变点向观测时间边界趋近的速率。

我们研究至多存在一次变化的模型，并假设数据由信号加噪声模型生成

$$X_i = \mu_i + \xi_i,\ i \geq 1, \tag{1}$$

其中 $(\mu_i)_{i\geq 1}$ 是一个未知信号，且 $(\xi_i)_{i\geq 1}$ 是一个均值为零的独立同分布过程。基于观测值 $X_1, \ldots, X_n$，我们希望检验以下假设

$$H:\ \mu_1 = \ldots = \mu_n$$

即在观测期 $\{1, \ldots, n\}$ 内位置没有变化；与之相对的备择假设是，某个未知时刻 k^*发生了变化，即

$$A:\ \mu_1 = \ldots = \mu_{k^*} \neq \mu_{k^*+1} = \ldots = \mu_n,\ \text{for some } k^* \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

我们将具体考察这样的备择假设：变化的位置 k^* 以及变化的幅度 $\Delta = \mu_{k^*+1} - \mu_{k^*}$都允许随样本量变化。因此，严格来说，我们的模型是一个三角阵列，其中信号由 $(\mu_{n,i})_{1\leq i\leq n, n\geq 1}$ 给出。我们研究基于 U-过程

关键词与短语：加权变点检验、时间序列、检验功效、U统计量、局部备择。

定义的检验统计量

$$\max_{1\le k<n} \frac{1}{n^{3/2}\left(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\right)^{\gamma}} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n} h(X_i, X_j),$$

其中，$0 \le \gamma < \frac{1}{2}$ 为调节参数，$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 为核函数。我们考虑如下类型的核:

$$h(x, y) = g(y - x),$$

其中，g 为奇函数。这类核函数涵盖了许多检验统计量，包括累积和检验和 Wilcoxon 检验。参数 γ 决定了观测期边界附近权重的大小。γ 越大，边界处的权重就越高。极限情形 $\gamma = \frac{1}{2}$ 较为特殊，因为此时检验统计量的渐近分布为极值分布。取值 $\gamma = 0$ 时，检验为非加权版本。

基于核函数 $h(x, y)$ 的 U-过程检验统计量的渐近分布已由多位作者研究，研究对象既包括独立同分布数据，也包括存在序列相关的数据。对于独立同分布数据，相关理论总结于 Cs¨org˝o 和 Horv´ath（1997）的经典专著中；该书还结合累积和检验讨论了相关数据。对于短程依赖数据以及基于一般 U-统计量的检验，Dehling等（2015）研究了 $\gamma = 0$ 的情形，而 Dehling等（2022）则讨论了特殊的加权情形 $\gamma = \frac{1}{2}$。关于变点检验的大多数研究都聚焦于无变化原假设下检验统计量的分布。对于独立同分布数据，Szyszkowicz（1991）研究了用于检测分布变化的非加权 U-统计量过程在相邻备择下的性质，其中变化点位于观测期的中心。Ferger（1994）同样针对独立同分布数据，研究了基于反对称 U统计量的非加权检验在局部备择下的检验功效，并允许变化点的位置和跳跃幅度随样本量变化，包括跳跃可能出现在观测期边界附近的情形。对于长程依赖过程，Dehling等（2013）和 Dehling等（2017）研究了 Wilcoxon 检验统计量在原假设和备择假设下的渐近分布。Horv´ath 等（2021）研究了加权函数型CUSUM过程的范数，并推导了无变化假设下以及协方差发生变化时局部备择下的渐近分布。Robbins等（2011）考虑了用于检测早期变化的加权版本的累积和检验，并通过模拟研究比较了各种检验。Horv´ath 等（2020）研究了短程依赖数据下非加权累积和检验在局部备择下的检验功效。Horv´ath 等还研究了所谓的 R´enyi 变点检验的检验功效；这类累积和检验在观测期末端采用了更大的权重。关于加权和非加权 U统计量过程，Ra˘ckauskas 和 Wendler（2020）研究了流行性变点，Berkes等（2009）则研究了线性过程协方差结构均值的变化。Gombay（2000）比较了基于 U统计量的变点检验在在线和离线情形下的检验功效，并描述了这些检验在局部备择下的大样本行为。然而，这些讨论并未涵盖大小为 $O(n^{-1/2})$ 的相邻备择变化。在一项蒙特卡洛模拟研究中，Xie等（2014）考察了变点位置如何影响基于 Wilcoxon 的 Pettitt检验的检验能力。

本文研究变化点处于n^{κ}尺度上的变化，考察 $\kappa \in$ 的不同取值（$0, 1]$）。这样，当 $\kappa = 1$ 时，变化发生在观测期的中间；而 $0 < \kappa < 1$ 则对应非常早期的变化。我们研究

固定大小跳跃的情形，以及跳跃幅度随样本量增加而减小的情形。除了比较不同检验的功效函数外，我们还研究功效函数与包络功效的关系。包络功效定义为：针对固定备择（k, Δ）检验无变化假设时能够达到的最大检验功效，其中 k 表示变化的位置， Δ 表示变化的幅度。

2. Preliminary remarks and definitions

在下一节介绍主要结果之前，我们先引入一些记号。我们考虑信号加噪声模型（1），并检验假设

$$H:\ \mu_1 = \ldots = \mu_n$$

相对于备择假设

$$A:\ \mu_1 = \ldots = \mu_{k^*} \neq \mu_{k^*+1} = \ldots = \mu_n,\ \text{for some } k_n^* \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

接下来的各节将讨论两种不同类型的备择假设。

“固定时间比例后的微小变化”一节讨论局部备择，其中变化时间与样本量成正比，而跳变高度随着样本量增加而减小。我们将此备择假设称为 A_1 ，并更精确地定义为

$$A_1:\ \mu_1 = \ldots = \mu_{k_n^*} \neq \mu_{k_n^*+1} = \ldots = \mu_n,\ \text{with } k_n^* = [\tau^* n] \text{ and } \Delta_n = \mu_{k_n^*+1} - \mu_{k_n^*} = \frac{c}{\sqrt{n}},$$

其中 $\tau^* \in (0,1)$，且 c 是一个常数。

在“固定高度的早期变化”一节中，我们考虑另一种备择假设：跳变高度保持恒定，而变化时间逐渐接近观测范围的边界。我们将这种备择假设建模如下

$$A_2 : \mu_1 = \ldots = \mu_{k_n^*} \neq \mu_{k_n^*+1} = \ldots = \mu_n,\ \text{with } k_n^* \approx cn^\kappa,\ \text{meaning that } \frac{k_n^*}{cn^\kappa} \to 1,$$
$$\text{and } \Delta_n = \mu_{k_n^*+1} - \mu_{k_n^*} \equiv \Delta,$$

其中 c 是一个常数，参数 κ 定义为

$$\kappa = \frac{1-2\gamma}{2(1-\gamma)},\ \gamma \in [0, \tfrac{1}{2}).$$

注意，根据定义， $\kappa \in (0, \frac{1}{2}]$.

简言之，相应的模型可写为

$$X_i = \begin{cases} \mu + \xi_i & \text{for } i \le k_n^* \\ \mu + \Delta_n + \xi_i & \text{for } i \ge k_n^* + 1, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $(\xi_i)_{\ge 1}$ 是一个均值为零的独立同分布过程，且 k_n^* 和 Δ_n 的选取方式与 A_1 或 A_2 中相同。

注释1. 在 A_2 中对 κ 的特定选择会使备择假设下的极限分布非平凡。

为了检验 H 与 A_i、 $i \in \{1,2\}$，我们使用检验统计量

$$G_n^\gamma(k) := \frac{1}{n^{3/2}\left(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\right)^\gamma} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} g(X_j - X_i), \tag{3}$$

其中 $\gamma \in [0, 1/2)$，且 g 是奇函数，即 $g(-x) = -g(x)$。注意，情形$\gamma = 0$ 指的是非加权检验统计量。我们确定备择假设 A_1 和 A_2下检验统计量的极限分布。在这一过程中，根据 $k \leq k_n^*$ 还是 $k \geq k_n^*$，会出现略有不同的项。为简单起见，我们将这些项合并为一个函数。我们定义 $\phi_n\colon \{1, \dots, n\} \to \mathbb{N}$ 为

$$\phi_n(k) := \begin{cases} k(n - k_n^*) & \text{for } k \leq k_n^* \\ k_n^*(n-k) & \text{for } k \geq k_n^*, \end{cases}$$

并类似地，连续版本 $\phi_{\tau^*}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ by

$$\phi_{\tau^*}(\lambda) = \begin{cases} \lambda(1-\tau^*) & \text{for } \lambda \leq \tau^* \\ \tau^*(1-\lambda) & \text{for } \lambda \geq \tau^*. \end{cases}$$

为便于后文使用，我们用 $\{W(\lambda)\ 0 \leq \lambda \leq 1\}$ 表示维纳过程，用 $\{W^{(0)}(\lambda)\ 0 \leq \lambda \leq 1\}$ 表示布朗桥过程。

3. Small changes after fixed proportion of a sample

本节我们在备择假设 A_1 下建立 $\max_{1 \leq k < n} G_n^\gamma(k)$ 的渐近分布，即 $k_n^* = [\tau^* n]$ 和 $\Delta_n = \frac{c}{\sqrt{n}}$ 的情形。对于特殊的累积和核函数和 Wilcoxon 核函数，结果分别陈述于推论 3.1 和推论 3.2。

定理 1. 我们考虑模型 (2) 在 A_1 下的情形。假设 $g(\xi_2 - \xi_1)$ 具有有限二阶矩。此外，假设 $\mathrm{Var}(h_1(\xi_1)) > 0$，且 $c_g = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} u(\Delta_n)$ 存在。那么，对于 $0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$ 且当 $n \to \infty$ 时，

$$\max_{1 \leq k < n} G_n^\gamma(k) \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \frac{1}{(\lambda(1-\lambda))^\gamma} [\sigma W^{(0)}(\lambda) + c_g \phi_{\tau^*}(\lambda)],$$

其中 $\sigma^2 = \mathrm{IE}(g_1^2(\xi_1)) > 0$ 和

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \mathbb{E}[g(\xi - x)] - \mathbb{E}[g(\xi - \eta)], \\ u(\Delta_n) &= \mathbb{E}[g(\xi - \eta + \Delta_n) - g(\xi - \eta)], \\ h_1(x) &= \mathbb{E}[g(\xi - x + \Delta_n) - g(\xi - x)] - u(\Delta_n), \end{aligned}$$

其中 ξ 和 η 相互独立，且与 ξ_1服从相同的分布。

注 2. (i) h_1 和 u 由对核$h(x, y) = g(y - x + \Delta_n) - g(y - x)$应用 Hoeffding 分解得到。更多细节见第 6 节定理 1 的证明。

(ii) 对于 $c = 0$，我们得到平稳性原假设下的极限。为了计算渐近临界值，我们需要确定以下分布的分位数:

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \frac{1}{(\lambda(1-\lambda))^\gamma} W^{(0)}(\lambda).$$

α分位数 ， $\alpha \in (0.01, 0.05, 0.1)$，对于 γ的各种取值，列于表 1 中 .

定理 1 涵盖 CUSUM 和 Wilcoxon 检验统计量。选取 $g(x) = x$ 可得到 CUSUM 检验统计量，并满足相关假设。我们有 $u(\Delta_n) = E[\Delta_n] = \Delta_n$ 和 $c_g = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\Delta_n = c$，因为 $\Delta_n = \frac{c}{\sqrt{n}}$。此外，

$$h_1(x) = \mathbb{E}[g(\xi - x + \Delta_n) - g(\xi - x)] - u(\Delta_n) = \mathbb{E}[\xi - x + \Delta_n - (\xi - x)] - \Delta_n = 0.$$

γ \ α	0.1	0.05	0.01
0	1.05	1.20	1.51
0.1	1.24	1.41	1.72
0.2	1.45	1.63	2.05
0.3	1.75	1.96	2.40
0.4	2.10	2.31	2.83

TABLE 1. α-不同参数 γ 下 $\sup_{0\le\lambda\le1} \frac{1}{((1-\lambda))^\gamma} W^{(0)}(\lambda)$ 的分位数，基于 10,000 次重复。

因此，我们可以推导出加权 CUSUM 检验统计量的以下推论 .

推论3.1. 在定理 1 的假设下，有

$$\max_{1\le k<n} \frac{1}{n^{3/2}\left(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\right)^\gamma} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n} (X_j - X_i) \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0\le\lambda\le1} \frac{1}{(\lambda(1-\lambda))^\gamma} \left[\sigma W^{(0)}(\lambda) + c\phi_{\tau^*}(\lambda)\right],$$

其中 $\sigma^2 = 方差(\xi_1) < \infty$。

要得到 Wilcoxon 检验统计量，取 $g(x) = 1_{\{0\le x\}} - \frac{1}{2}$。那么

$$\begin{aligned} u(\Delta_n) = \mathbb{E}[1_{\{\eta-\Delta_n\le\xi\}} - 1_{\{\eta\le\xi\}}] = \mathbb{E}[1_{\{\eta-\Delta_n<\xi\le\eta\}}] = P(\eta-\Delta_n<\xi\le\eta) \\ = \int_{\mathbb{R}} (F(y) - F(y-\Delta_n))dF(y) \approx -\Delta_n \int_{\mathbb{R}} f^2(y)dy, \end{aligned}$$

其中， F 是 $\xi.$ 的分布函数， f 是其密度函数。这得到 $c_g = c\int_{\mathbb{R}} f^2(y)dy.$ 此外，

$$\begin{aligned} |h_1(x)| &= |\mathbb{E}[1_{\{0\le\xi-x+\Delta_n\}} - 1_{\{0\le\xi-x\}}] - u(\Delta_n)| = |\mathbb{P}(x-\Delta_n<\xi\le x) - u(\Delta_n)| \\ &= |F(x) - F(x-\Delta_n) - u(\Delta_n)| = \left|\Delta_n \frac{F(x)-F(x-\Delta_n)}{\Delta_n} - u(\Delta_n)\right| \approx |\Delta_n f(x) - u(\Delta_n)| \\ &= \left|\Delta_n\Big(\int_{\mathbb{R}} f^2(y)dy - f(x)\Big)\right| \le |c\Delta_n|, \end{aligned}$$

其中，如果密度有界，则 c 是有限常数。因此，$\mathrm{Var}(h_1(\xi_1)) \to 0$。由于所有必要的假设均已满足，我们得出以下推论。

推论3.2. 假设 ξ_1 具有有界密度。在定理 1 的假设下，有

$$\begin{aligned} \max_{1\le k<n} \frac{1}{n^{3/2}\left(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\right)^\gamma} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n} \left(1_{\{X_i\le X_j\}} - \frac{1}{2}\right) \\ \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0\le\lambda\le1} \frac{1}{(\lambda(1-\lambda))^\gamma} \left[\frac{1}{\sqrt{12}} W^{(0)}(\lambda) + c\phi_{\tau^*}(\lambda)\int_{\mathbb{R}} f^2(y)dy\right]. \end{aligned}$$

4. Early change with fixed height

现在我们考虑备择假设 A_2，即跳变高度保持不变，而变化时间逐渐接近观测范围边界的情形。我们将说明， γ 的选择会影响能够检测到变点的尺度。

首先，我们考虑 $\gamma = 0$ 的情形，即归一化序列为 $\frac{1}{n^{3/2}}$ 、因而不依赖于 k 的情形。对于 $\gamma = 0$ ，我们得到 $\kappa = 1/2$，这对应于变点发生在时刻 $k_n^* \approx c\sqrt{n}$ 的备择假设。

定理 2. 我们在 A_2 下考虑模型 (2)。假设 $g(\xi_2 - \xi_1)$ 具有有限二阶矩。此外，假设 $\mathrm{Var}(h_1(\xi_1)) < \infty$。那么，对于 $\gamma = 0$ 且当 $n \to \infty$ 时，

$$\max_{1\le k<n} |G_n^0(k)| \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0\le\lambda\le 1} \Big|\sigma W^{(0)}(\lambda) + c(1-\lambda)u(\Delta)\Big|,$$

其中 σ 、 $u(\Delta_n)$ 和 $h_1(\xi_1)$ 的定义与定理 1 中相同，但 $\Delta_n \equiv \Delta$. 除外

对于累积和核，我们有 $u(\Delta) = \Delta$ ，且 $\mathrm{Var}(h_1(\xi_1)) = 0$。对于 Wilcoxon 核，我们得到 $u(\Delta) = \mathrm{IP}(0 \le \xi_2 - \xi_1 \le \Delta)$，且 $\mathrm{Var}(h_1(\xi_1)) \to 0$。因此，我们可以推导出以下推论。

推论 4.1。在定理 2 的假设下，有

$$\max_{1\le k<n} \frac{1}{n^{3/2}} \Big| \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} (X_j - X_i) \Big| \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0\le\lambda\le 1} |\sigma W^{(0)}(\lambda) + c(1-\lambda)\Delta|,$$

其中 $\sigma^2 = 方差(\xi_1) < \infty$。

推论 4.2。在定理 2 的假设下，有

$$\max_{1\le k<n} \frac{1}{n^{3/2}} \Big| \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} \Big(1_{\{X_i \le X_j\}} - \frac{1}{2}\Big) \Big| \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0\le\lambda\le 1} \Big| \frac{1}{12} W^{(0)}(\lambda) + c(1-\lambda)\mathbb{P}(0 \le \xi_2 - \xi_1 \le \Delta) \Big|.$$

备注 3。（i）当 $c = 0$，即当 $k_n^*/\sqrt{n} \to 0$ 时，备择假设下检验统计量的分布渐近地与原假设下相同，因此检验无法检测出此类备择假设。该检验渐近地仅具有平凡功效α，与显著性水平相同。

（ii）当且仅当 $\lim_{n\to\infty} \frac{k_n^*}{\sqrt{n}} = \infty$ 时，该检验是一致检验。

（iii）在此意义下，当希望获得一致检验时，$k_n \approx c\sqrt{n}$ 是变化的临界时间。根据数值 $c > 0$，检验功效渐近地可能趋于 α（显著性水平）与 1 之间的任意值。这是因为 $\sup |\sigma W^{(0)}(\lambda)|$ 的分布是连续的，并且对于 $c \to c'$ ，有

$$\sup_{0\le\lambda\le 1} \Big|\sigma W^{(0)}(\lambda) + c(1-\lambda)u(\Delta)\Big| \to \sup_{0\le\lambda\le 1} \Big|\sigma W^{(0)}(\lambda) + c'(1-\lambda)u(\Delta)\Big|$$

在 $\mathcal{D}[0,1]$ 中。因此，对于 $c \to c'$,

$$\mathbb{P}_{(c)}\big(\max_{1\le k<n} |G_n^0(k)| > q_\alpha\big) \to \mathbb{P}_{(c')}\big(\max_{1\le k<n} |G_n^0(k)| > q_\alpha\big),$$

其中， q_α 是取决于渐近显著性水平 α的临界值。对于 $c = 0$ ，我们有 $\mathrm{IP}_{(0)}\big(\max_{1\le k<n} |G_n^0(k)| > q_\alpha\big) = \alpha$ ，而对于足够大的 c ， $\mathrm{IP}_{(c)}\big(\max_{1\le k<n} |G_n^0(k)| > q_\alpha\big) = 1.$

由于映射

$$c \mapsto \mathbb{P}_{(c)}\big(\max_{1\le k<n} |G_n^0(k)| > q_\alpha\big)$$

是连续的，取值范围为 α 到 1。

现在，我们考虑 $\gamma \in (0, 1/2)$ 的情形，即归一化序列依赖于 k 的情形。在备择假设 A_2 下，我们确定检验统计量 $\max_{1\le k\le n} G_n^\gamma(k)$ 的渐近分布。

定理 3. 我们考虑满足 A_2 的模型 (2)。假设 $g(\xi_2 - \xi_1)$ 具有有限二阶矩。那么，对于 $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ 且当 $n \to \infty$ 时，

$$\max_{1\le k<n} |G_n^\gamma(k)| \xrightarrow{\mathcal{D}} \max\left\{c^{1-\gamma}u(\Delta), \sup_{0\le\lambda\le 1} \frac{\sigma}{(\lambda(1-\lambda))^\gamma}|W^{(0)}(\lambda)|\right\},$$

其中 σ 和 $u(\Delta)$ 的定义与定理 1 中相同，但 $\Delta_n \equiv \Delta$. 除外

对于累积和和 Wilcoxon 核的特殊情形，我们得到以下推论。

推论 4.3。在定理 3 的假设下，我们得到

$$\max_{1\le k<n} \frac{1}{n^{3/2}\big(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\big)^\gamma}\Big|\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n}(X_j - X_i)\Big| \xrightarrow{\mathcal{D}} \max\left(c^{1-\gamma}\Delta, \sup_{0\le\lambda\le 1} \frac{\sigma}{(\lambda(1-\lambda))^\gamma}|W^{(0)}(\lambda)|\right),$$

其中 $\sigma^2 = 方差(\xi_1) < \infty$。

推论 4.4。在定理 3 的假设下，我们得到

$$\max_{1\le k<n} \frac{1}{n^{3/2}\big(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\big)^\gamma}\Big|\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n}\Big(1_{\{X_i\le X_j\}} - \frac{1}{2}\Big)$$
$$\xrightarrow{\mathcal{D}} \max\left(c^{1-\gamma}\mathbb{P}(0 \le \xi_2 - \xi_1 \le \Delta), \sup_{0\le\lambda\le 1} \frac{1}{12}\frac{1}{(\lambda(1-\lambda))^\gamma}|W^{(0)}(\lambda)|\right).$$

在下一个定理中，我们将确定关于 k_n^*/n^κ 极限行为的条件，这些条件可保证检验统计量 $\max_{1\le k<n} |G_n^\gamma(k)|$具有相合性。我们将看到，局部备择假设下极限分布的特殊形式会导致渐近功效表现出一种特殊行为。

定理 4。采用以下检验统计量的变点检验

$$\max_{1\le k<n} |G_n^\gamma(k)|$$

当 $\liminf_{n\to\infty} k_n^*/n^\kappa > (q_\alpha/u(\Delta))^{1/(1-\gamma)}$ 时具有相合性，其中 q_α 是取决于渐近显著性水平 α的临界值。相反，当 $\limsup_{n\to\infty} k_n^*/n^\kappa < (q_\alpha/u(\Delta))^{1/(1-\gamma)}$ 时，该检验渐近地仅具有平凡功效 α 。

证明。首先注意到 为了达到渐近大小 α，我们必须选择 q_α ，使得 t

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le\lambda\le 1} \frac{1}{(\lambda(1-\lambda))^\gamma}|W^{(0)}(\lambda)| > q_\alpha\right) = \alpha.$$

我们将证明，对于任意子级数，都存在一个子子级数 $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$，使得 $\max_{1\le k<n} |G_{n_j}^\gamma(k)| > q_\alpha$ 的概率分别收敛到 1 和 α。因为

对于任意子子级数，极限都相同，因此我们可以得出，$\max_{1\le k<n}|G_n^\gamma(k)|>q_\alpha$ 的概率分别收敛到 1 和 α。如果 $\liminf_{n\to\infty} k_n^*/n^\kappa > (q_\alpha/u(\Delta))^{1/(1-\gamma)}$，我们可以选择子子级数，使得 $k_{n_j}^* \approx c\cdot {n_j}^\kappa$ 且 $c > (q_\alpha/u(\Delta))^{1/(1-\gamma)}$，$c<\infty$，因此$c^{1-\gamma}u(\Delta) > q_\alpha$。所以，根据定理 3，我们知道检验统计量的极限分布由以下分布给出

$$\max\left(c^{1-\gamma}u(\Delta),\ \sup_{0\le\lambda\le 1}\frac{1}{(\lambda(1-\lambda))^\gamma}|W^{(0)}(\lambda)|\right),$$

其以概率 1 超过临界值 q_α。

为证明另一种情形，注意到若 $\limsup_{n\to\infty} k_n^*/n^\kappa < (q_\alpha/u(\Delta))^{1/(1-\gamma)}$，则存在一个子子级数，使得对于某个 $c<(q_\alpha/u(\Delta))^{1/(1-\gamma)}$ 有 $k_{n_j}^* \approx c\cdot {n_j}^\kappa$，因此 $c^{1-\gamma}u(\Delta) < q_\alpha$，并且对于极限分布，有

$$\mathbb{P}\left(\max\left(c^{1-\gamma}u(\Delta),\ \sup_{0\le\lambda\le 1}\frac{1}{(\lambda(1-\lambda))^\gamma}|W^{(0)}(\lambda)|\right) > q_\alpha\right) = \alpha.$$

□

注 4。值得注意的是，对于 $\gamma\in(0,1/2)$，渐近功效要么为 α，要么为 1；这不同于 $\gamma=0$ 的情形，后者的渐近功效可以取区间 $(\alpha,1)$ 内的任意值。

4.1. 包络功效函数。本节中，我们计算正态数据变点问题的包络功效函数。我们确定在备择假设中任意点 (k,Δ)、$1\le k\le n-1$、$\Delta\in\mathbb{R}$ 处使检验功效最大的检验。为简便起见，我们关注 $\Delta>0$ 时的情形，并假设方差已知。根据奈曼–皮尔逊基本引理，对于无变化假设与时刻 k 发生大小为 Δ 的变化这一备择假设，最强的显著性水平为 α 的检验会在以下量取较大值时拒绝该假设：

$$T_k := \frac{1}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right)}}\left(\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}X_i - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}X_i\right),$$

具体而言，当 $T_k\ge z_{1-\alpha}$时，其中 $z_{1-\alpha}$ 是标准正态分布的（$1-\alpha$）分位数。在备择假设（k,Δ）下，检验统计量 T_k 服从均值为 $\Delta\sqrt{k_{(n-k)\ n\sigma^2}}$、方差为 1 的正态分布。因此，检验功效为

$$\mathbb{P}_{(k,\Delta)}(T_k\ge z_{1-\alpha}) = 1-\Phi\left(z_{1-\alpha}-\Delta\sqrt{\frac{k(n-k)}{n\sigma^2}}\right),$$

其中 Φ表示标准正态密度函数。该函数定义了包络功效函数，即针对平稳性假设的任意水平为 α 的检验所能达到的最大检验功效。

5. Simulation study

本节通过模拟比较不同 γ 值下 CUSUM 检验统计量的检验功效。首先，我们考察第一个备择假设 A_1 下的情形，并生成 $n=1000$ 个相互独立的标准正态分布观测值，其中有一个变点，出现在时间段的某个比例 $\tau\in$（0，1）之后。我们考察三种不同的跳变高度，即 $\Delta=\frac{5}{\sqrt{n}}$、$\frac{7}{\sqrt{n}}$、$\frac{9}{\sqrt{n}}$.。图 1 中展示了经检验水平校正的功效函数，以及

适当的包络　　络功效函数，已绘出。显然，对于发生在　　r

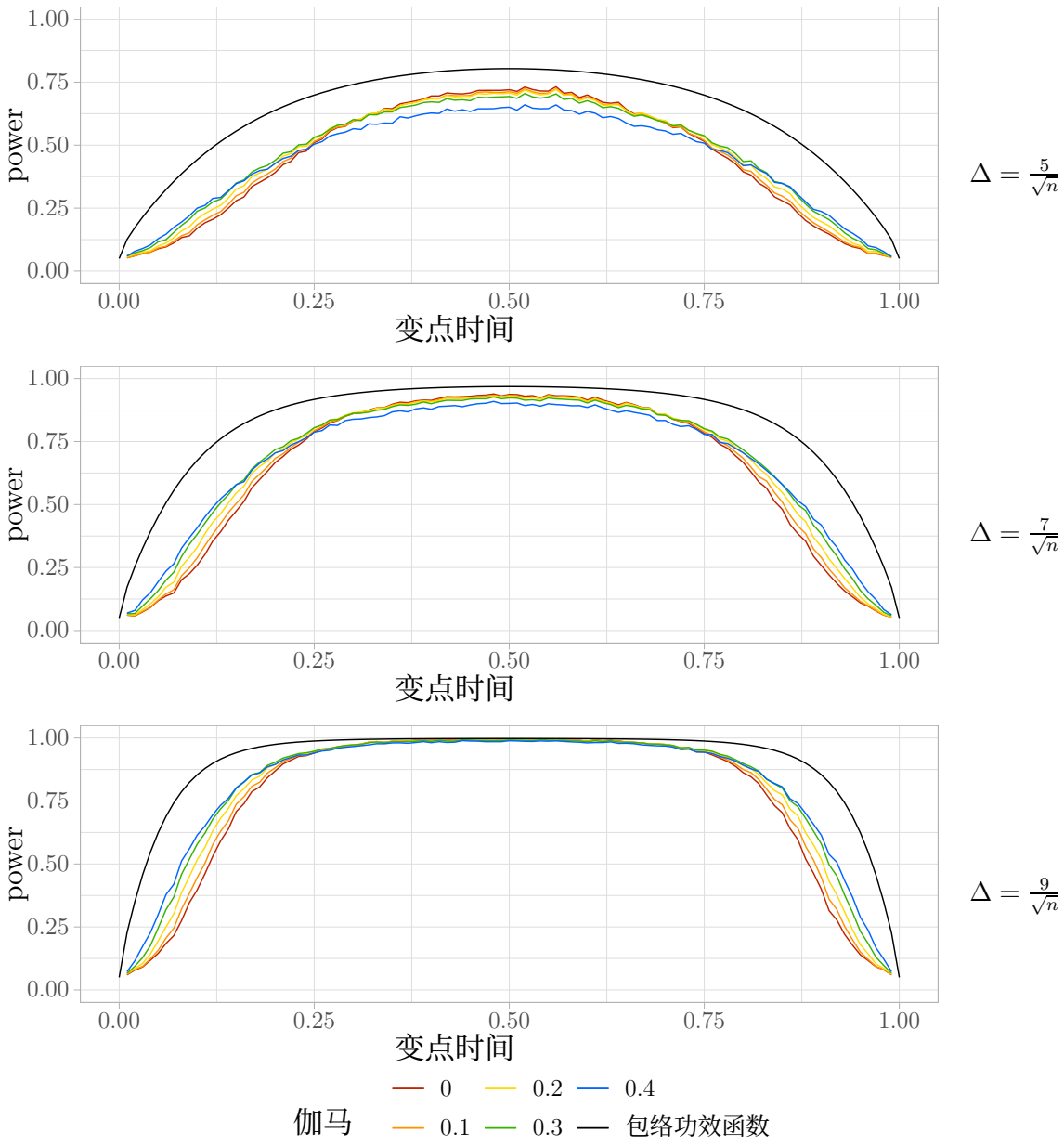

FIGURE 1. CUSUM检验统计量和包络功效函数的尺寸校正功效。模拟基于 $n = 1000$ 标准正态分布观测值，共运行 5000 次。

当变点出现在时间段的开头或结尾时，γ 越大，检验功效越高。如果变点出现在时间段的中间附近，则较小的 γ 对应更高的检验功效。关于跳变高度，可以明显看出，在每个时间点，跳跃幅度越大，检验功效越高。对于不同的 γ，跳跃幅度较大且变化发生在时间段中间时，检验功效的差异会减小。对于 $\Delta = \frac{9}{\sqrt{n}}$，且变化发生在中间时，所有 γ 的检验功效几乎相同。与发生在时间段边界附近的变点不同，

区间。在这种情况下，随着跳变幅度增大，不同 γ 值对应的检验功效差异会略微增大。

图2中的曲线显示了最强水平为 $\alpha = 0.05$ 的检验与加权累积和检验的检验功效差异。跳变幅度越大，边界处的差异越大，而时间段中间的差异越小。对于 $\Delta = \frac{9}{\sqrt{n}}$ 以及发生在中间的变化，检验功效差异几乎为零，也就是说，对于所有 γ，累积和检验几乎都能达到经验功效。例如，观察图2中间的图，我们可以看到，对于发生在中间的变化，当 $\gamma = 0.4$ 时检验功效损失最大。对于发生在边界处的变化，当 $\gamma = 0$ 时检验功效损失最大。

表2总结了总体功效的比较。我们计算了累积和检验相对于最强水平为 $\alpha = 0.05$ 的检验所能达到的检验功效（百分比）。具体而言，我们考察了图 1 中曲线下面积，并假设黑色曲线（包络功效函数）下的面积对应 100% 的检验功效。与前文一样，我们考察了不同的跳变幅度 $\Delta = \frac{5}{\sqrt{n}}$、 $\frac{7}{\sqrt{n}}$、 $\frac{9}{\sqrt{n}}$。例如，我们来看 $\Delta = \frac{5}{\sqrt{n}}$. 的总体功效。最强检验的检验功效为 100%，而当 $\gamma = 0.2$ 时，累积和检验的检验功效为 74.13%，略高于所有其他 γ。对于 $\Delta = \frac{7}{\sqrt{n}}$ 和 $\Delta = \frac{9}{\sqrt{n}}$，当 $\gamma = 0.4$ 时，累积和检验的总体功效最高。

Δ_n \ γ	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$\frac{5}{\sqrt{n}}$	72.30%	72.71%	74.13%	74.75%	71.53%
$\frac{7}{\sqrt{n}}$	78.97%	79.86%	81.45%	82.65%	81.22%
$\frac{9}{\sqrt{n}}$	83.98%	85.14%	86.87%	88.52%	89.22%

TABLE 2. 不同参数值 γ 和不同偏移幅度 Δ_n下的总体功效与包络功效比较。模拟基于 $n = 1000$个相互独立的标准正态分布观测值，并进行了 5000 次运行。

在图3中，我们模拟了备择假设 A_2下的情形，即 $k_n^* \approx cn^\kappa$且 $\Delta_n \equiv \Delta$。模拟分别基于 $n = 5000$ （第一幅图）和 $n = 20000$ （第二幅图）个标准正态分布观测值，在时间 $k_n^* = [cn^{2/7}]$ 处存在固定偏移幅度 $\Delta = 1$， $0 < c < 4.3866$。也就是说，我们考察了非常早期发生的跳跃，即在较小样本中，经过 $k_n^* = 1$、2、.....、50 个观测值后发生，样本量为 $n = 5000$；在较大样本中，经过 k_n^* =1、2、.....、74 个观测值后发生，样本量为 $n = 20000$。这分别位于数据的前 1% 和 0.37% 范围内。我们比较了不同 γ取值下加权累积和检验的功效函数。在我们的模型中，所选的 $\kappa = 2/7$ 对应于 $\gamma = 0.3$。当 γ较小时，检验功效趋于显著性水平 $\alpha = 0.5$；当 γ较大时，检验功效趋于 1。

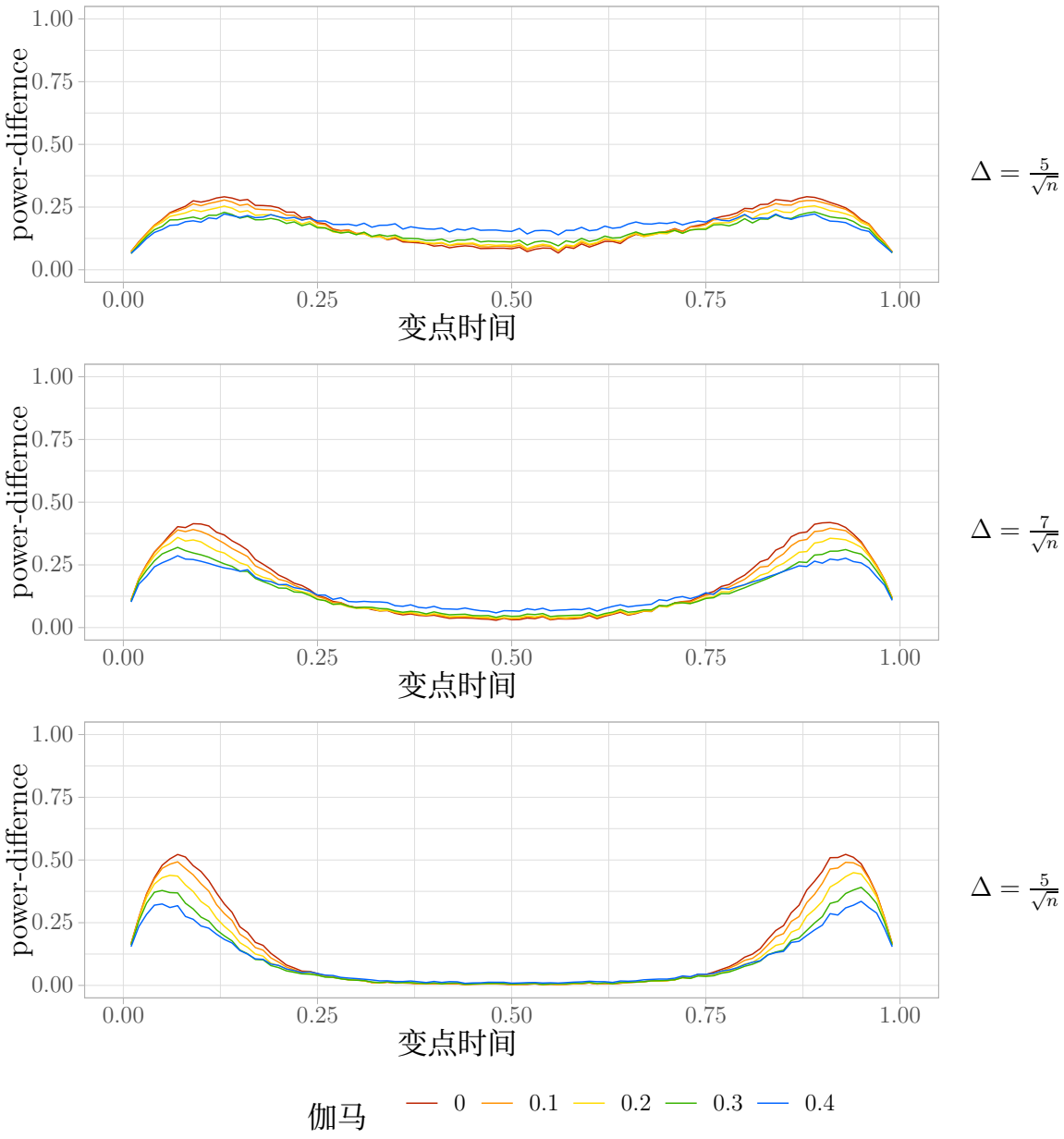

FIGURE 2. 功效差异：将累积和检验统计量与包络功效进行比较。模拟基于 $n = 1000$ 标准正态分布观测值，共运行 5000 次。

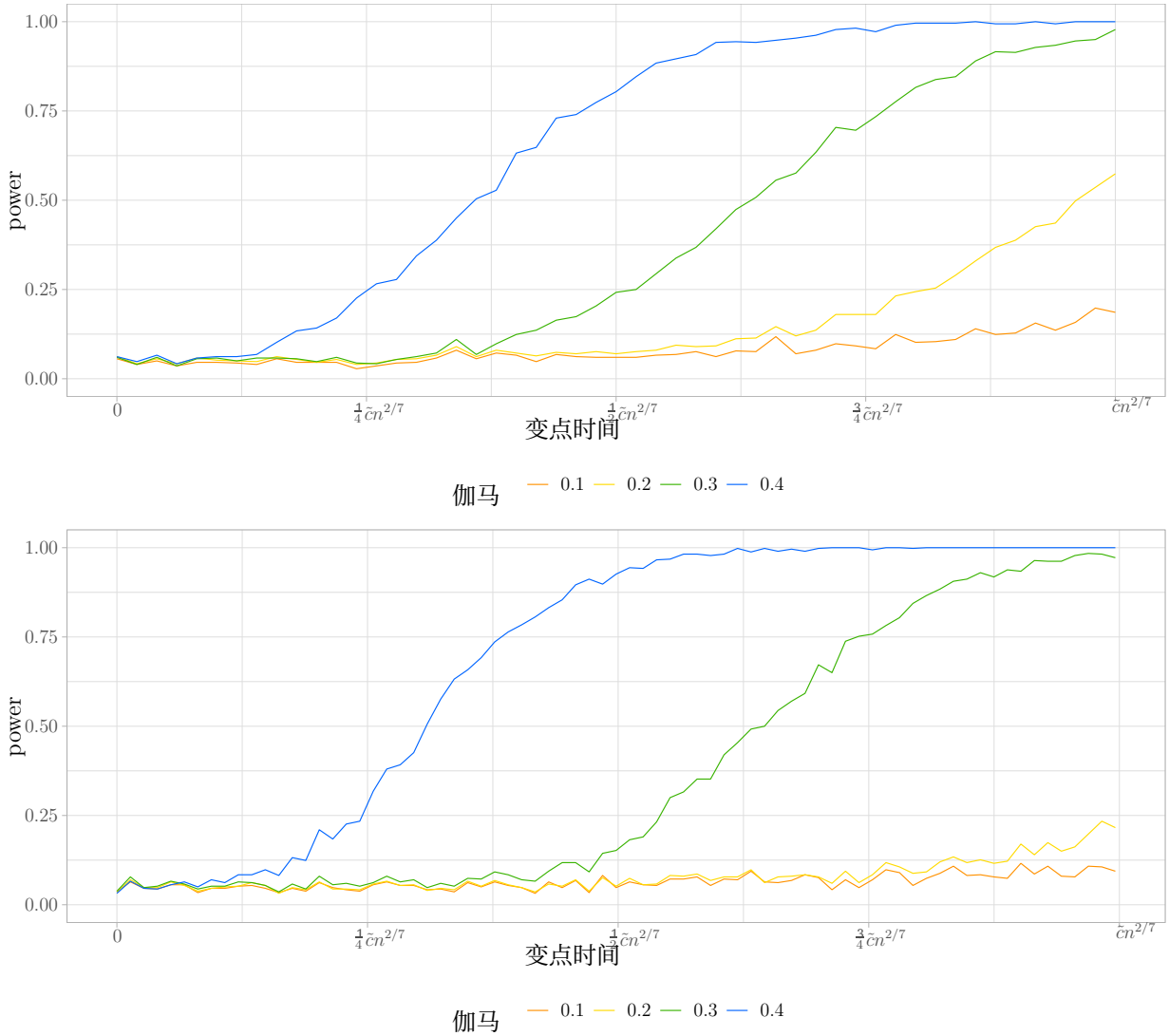

FIGURE 3. 在时间 $k_n^* = [cn^{2/7}]$发生大小为 $\Delta = 1$ 的变化时，针对 $n = 5000$（上图）和 $n = 20000$（下图）标准正态分布观测值的加权 CUSUM 检验的尺寸校正功效，其中 $c = \tau\tilde{c} = \tau\frac{50}{5000^{2/7}}$、 $0 \leq \tau \leq 1$。模拟基于 500 次运行。

6. Proofs

6.1. 定理 1 的证明。

我们回顾一些定义和假设。假设 $(\xi_i)_{i\geq 1}$ 是一个独立同分布过程，且观测值为

$$X_i = \begin{cases} \mu + \xi_i & \text{for } i \leq k_n^* \\ \mu + \Delta_n + \xi_i & \text{for } i \geq k_n^* + 1, \end{cases} \tag{4}$$

其中 μ 是一个未知常数，且 $k_n^* = [n\tau^*]$ 对某个 $\tau^* \in [0,1]$ 成立，并且 $\Delta_n = \frac{c}{\sqrt{n}}$。我们考虑一种形式为 $g(y-x)$ 的核，其中 g 是一个奇函数，即 $g(-x) = -g(x)$。我们考虑该过程

$$G_n^\gamma(k) = \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\right)^\gamma} \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} g(X_j - X_i).$$

由 (4)，我们得到以下分解

$$\begin{aligned} G_n^\gamma(k) &= \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\right)^\gamma} \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} g(\xi_j - \xi_i) \\ &\quad + \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\right)^\gamma} \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} \big(g(X_j - X_i) - g(\xi_j - \xi_i)\big) \\ &= \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\right)^\gamma} \big(I_n(k) + J_n(k)\big), \end{aligned}$$

其中，过程 $I_n(k)$ 和 $J_n(k)$ 定义如下

$$\begin{aligned} I_n(k) &= \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} g(\xi_j - \xi_i) \\ J_n(k) &= \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} \big(g(X_j - X_i) - g(\xi_j - \xi_i)\big). \end{aligned}$$

现在我们分别分析这两个过程。对于 $I_n(k)$，根据双样本 U 统计量的加权函数型中心极限定理，我们得到

$$\left(\frac{1}{(\lambda(1-\lambda))^\gamma} I_n([n\lambda])\right)_{0\leq\lambda\leq 1} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(\frac{\sigma}{(\lambda(1-\lambda))^\gamma} W^{(0)}(\lambda)\right)_{0\leq\lambda\leq 1,} \tag{5}$$

参见 Cs¨org˝o 和 Horv´ath（1997年）中的定理 2.11。我们将分两步分析 $J_n(k)$ 的极限行为，并将其表述为两个独立的引理。

引理 6.1。在定理 1 的条件下

$$\max_{1\leq k<n} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\right)^\gamma} \big|J_n(k) - \mathbb{E}(J_n(k))\big| \xrightarrow{P} 0. \tag{6}$$

引理 6.2。在定理 1 的条件下

$$\max_{1\le k<n} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\right)^{\gamma}} \left|\mathbb{E}(J_n(k)) - c_g \phi_{\tau^*}(\frac{k}{n})\right| \longrightarrow 0, \tag{7}$$

其中 $c_g = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, u(\Delta_n)$.

引理 6.1 的证明。注意，根据过程 $(X_i)_{i\ge 1}$ 的定义，我们得到

$$g(X_j - X_i) = \begin{cases} g(\xi_j - \xi_i) & \text{for } 1 \le i,\ j \le k_n^* \text{ or } k_n^*+1 \le i,\ j \le n \\ g(\xi_j - \xi_i + \Delta_n) & \text{for } 1 \le i \le k_n^*,\ k_n^*+1 \le j \le n. \end{cases} \tag{8}$$

因此我们得到

$$J_n(k) = \begin{cases} \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k_n^*+1}^{n} [g(\xi_j - \xi_i + \Delta_n) - g(\xi_j - \xi_i)] & \text{for } k \le k_n^* \\ \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^{k_n^*} \sum_{j=k+1}^{n} [g(\xi_j - \xi_i + \Delta_n) - g(\xi_j - \xi_i)] & \text{for } k \ge k_n^*+1. \end{cases} \tag{9}$$

对核应用 Hoeffding 分解后,

$$h(x,y) = g(y - x + \Delta_n) - g(y - x),$$

我们得到

$$\begin{aligned} u(\Delta_n) &= \mathbb{E}(h(\xi,\eta)) = \mathbb{E}[g(\eta - \xi + \Delta_n) - g(\eta - \xi)] \\ h_1(x) &= \mathbb{E}(h(x,\eta)) - u(\Delta_n) = \mathbb{E}[g(\eta - x + \Delta_n) - g(\eta - x)] - u(\Delta_n) \\ h_2(y) &= \mathbb{E}(h(\xi,y)) - u(\Delta_n) = \mathbb{E}[g(y - \xi + \Delta_n) - g(y - \xi)] - u(\Delta_n) \\ \psi(x,y) &= h(x,y) - u(\Delta_n) - h_1(x) - h_2(y), \end{aligned}$$

其中， ξ 和 η 是两个与 ξ_1同分布的独立随机变量。注意，根据定义,

$$h(\xi_i, \xi_j) = u(\Delta_n) + h_1(\xi_i) + h_2(\xi_j) + \psi(\xi_i, \xi_j)$$

并且右侧的所有项彼此不相关。因此，对于 $k \le k_n^*$，我们得到

$$\begin{aligned} J_n(k) - \mathbb{E}(J_n(k)) &= \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k_n^*+1}^{n} [h_1(\xi_i) + h_2(\xi_j)] + \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k_n^*+1}^{n} \psi(\xi_i, \xi_j) \\ &= \frac{n - k_n^*}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^{k} h_1(\xi_i) + \frac{k}{n^{3/2}} \sum_{i=k_n^*}^{n} h_2(\xi_i) + \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k_n^*+1}^{n} \psi(\xi_i, \xi_j) \end{aligned} \tag{10}$$

现在我们将分别分析右侧的三个项。对于第一项，利用 $k_n^* = [n\tau^*]$，可得

$$\max_{1\le k\le k_n^*} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\right)^{\gamma}} \frac{n - k_n^*}{n^{3/2}} \Big|\sum_{i=1}^{k} h_1(\xi_i)\Big| \le (1-\tau^*)^{-\gamma} n^{\gamma - \frac{1}{2}} \max_{1\le k\le k_n^*} \frac{1}{k^{\gamma}} \Big|\sum_{i=1}^{k} h_1(\xi_i)\Big|.$$

注意到 $(k^\gamma)_{1\le k\le k_n^*}$ 是一个递增序列，因此我们可以应用 H´ajek-R´enyi 不等式，得到

$$\begin{aligned}
&P\big(\max_{1\le k\le k_n^*}\frac{1}{\big(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\big)^\gamma}\frac{n-k_n^*}{n^{3/2}}\big|\sum_{i=1}^{k}h_1(\xi_i)\big|\ge\epsilon\big)\\
&\le P\big(\max_{1\le k\le k_n^*}\frac{1}{k^\gamma}\big|\sum_{i=1}^{k}h_1(\xi_i)\big|\ge\epsilon(1-\tau^*)^\gamma n^{1/2-\gamma}\big)\\
&\le\frac{1}{\epsilon^2(1-\tau^*)^{2\gamma}n^{1-2\gamma}}\sum_{j=1}^{k_n^*}\frac{1}{j^{2\gamma}}\mathrm{Var}(h_1(\xi))\\
&\le C\,\mathrm{Var}(h_1(\xi)).
\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时，该式收敛于零，因为方差$(h_1(\xi))\to 0$.关于（10）右侧的第二项，我们得到

$$\begin{aligned}
\max_{1\le k\le k_n^*}\frac{1}{\big(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\big)^\gamma}\frac{k}{n^{3/2}}\big|\sum_{i=k_n^*+1}^{n}h_1(\xi_i)\big|&\le\frac{k^{1-\gamma}n^\gamma}{(1-\tau^*)^\gamma n^{3/2}}\big|\sum_{i=k_n^*+1}^{n}h_1(\xi_i)\big|\\
&\le\frac{(\tau^*)^{1-\gamma}}{(1-\tau^*)^\gamma}\frac{1}{n^{1/2}}\big|\sum_{i=k_n^*+1}^{n}h_1(\xi_i)\big|.
\end{aligned}$$

因此，利用切比雪夫不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
P\big(\max_{1\le k\le k_n^*}\frac{1}{\big(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\big)^\gamma}\frac{k}{n^{3/2}}\big|\sum_{i=k_n^*+1}^{n}h_1(\xi_i)\big|\ge\epsilon\big)&\le P\big(\big|\sum_{i=k_n^*+1}^{n}h_1(\xi_i)\big|\ge C\epsilon n^{1/2}\big)\\
&\le\frac{1}{C^2\epsilon^2 n}\mathrm{Var}\big(\sum_{i=k_n^*+1}^{n}h_2(\xi_i)\big)\le C\,\mathrm{Var}(h_2(\xi_1)),
\end{aligned}$$

其中，方差$(h_2(\xi_1))\to 0.$
关于（10）右侧的第三项，过程

$$\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k_n^*+1}^{n}\psi(\xi_i,\xi_j)\Big)_{1\le k\le k_n^*}$$

是关于滤过 $\mathcal{F}_k=\sigma(\xi_1,\dots,\dots\xi_k,\xi_{k_n^*+1},\dots,\xi_n)$ 的鞅。显然，$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k_n^*+1}^{n}\psi(\xi_i,\xi_j)$ 适应于 $\mathcal{F}_k$。此外，对于 $m>k$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=k_n^*+1}^{n}\psi(\xi_i,\xi_j)\Big|\mathcal{F}_k\Big)&=\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k_n^*+1}^{n}\psi(\xi_i,\xi_j)\Big|\mathcal{F}_k\Big)+\mathbb{E}\Big(\sum_{i=k+1}^{m}\sum_{j=k_n^*+1}^{n}\psi(\xi_i,\xi_j)\Big|\mathcal{F}_k\Big)\\
&=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k_n^*+1}^{n}\psi(\xi_i,\xi_j),
\end{aligned}$$

由于 $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k_n^*+1}^{n}\psi(\xi_i,\xi_j)$ 是 $\mathcal{F}_k$-可测的，且

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{i=k+1}^{m}\sum_{j=k_n^*+1}^{n}\psi(\xi_i,\xi_j)\Big|\mathcal{F}_k\Big)=\sum_{i=k+1}^{m}\sum_{j=k_n^*+1}^{n}\mathbb{E}(\psi(\xi_i,\xi_j)|\mathcal{F}_k)=\sum_{i=k+1}^{m}\sum_{j=k_n^*+1}^{n}\mathbb{E}(\psi(\xi_i,\xi_j)|\xi_j)=0,$$

由于 ψ 是退化的，即 $\mathbb{E}(\psi(\xi_1,x))=0$，所以最后一个等式成立。此外，我们得到 $(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n}))^\gamma \geq n^{-\gamma}(1-\frac{k_n^*}{n}) \geq (1-\tau^*)n^{-\gamma}$，因此

$$\frac{1}{\big(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\big)^\gamma n^{3/2}}\leq Cn^{\gamma-3/2}.$$

因此，利用 Doob最大不等式，我们最终得到

$$\begin{aligned}
&P\Big(\max_{1\leq k\leq k_n^*}\frac{1}{\big(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\big)^\gamma n^{3/2}}\Big|\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k_n^*+1}^{n}\psi(\xi_i,\xi_j)\Big|\geq\epsilon\Big)\\
&\quad\leq P\Big(\max_{1\leq k\leq k_n^*}Cn^{\gamma-3/2}\Big|\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k_n^*+1}^{n}\psi(\xi_i,\xi_j)\Big|\geq\epsilon\Big)\\
&\quad\leq P\Big(\max_{1\leq k\leq k_n^*}\Big|\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k_n^*+1}^{n}\psi(\xi_i,\xi_j)\Big|\geq C\epsilon n^{3/2-\gamma}\Big)\\
&\quad\leq \frac{1}{C\epsilon^2 n^{3-2\gamma}}\mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k_n^*+1}^{n}\psi(\xi_i,\xi_j)\Big)\\
&\quad\leq Cn^{2\gamma-3}k_n^*(n-k_n^*)\mathrm{Var}(\psi(\xi_1,\xi_2))\leq Cn^{2\gamma-1}\mathrm{Var}(\psi(\xi_1,\xi_2))
\end{aligned}$$

由于 $\gamma<1/2$，当 $n\to\infty$ 时，右端趋于零。因此我们证明了 $\max_{1\leq k\leq k_n^*}\frac{1}{(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n}))^\gamma}|J_n(k)-\mathbb{E}J_n(k)|\to 0$。以类似方式，我们可以证明 $\max_{k_n^*\leq k<n}\frac{1}{(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n}))^\gamma}|J_n(k)-\mathbb{E}J_n(k)|\to 0$。□

引理 6.2 的证明。注意到

$$\mathbb{E}(J_n(k))=\begin{cases}k(n-k_n^*)\frac{1}{n^{3/2}}u(\Delta_n) & \text{for } k\leq k_n^*\\ k_n^*(n-k)\frac{1}{n^{3/2}}u(\Delta_n) & \text{for } k\geq k_n^*.\end{cases}\tag{11}$$

根据 $\phi_n(k)$和 $\phi_{\tau^*}(\lambda)$的定义，我们得到

$$\mathbb{E}(J_n(k))=\phi_n(k)\frac{1}{n^{3/2}}u(\Delta_n)=\phi_{\tau^*}(\frac{k}{n})\sqrt{n}\,u(\Delta_n).$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
&\max_{1\le k<n}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\right)^{\gamma}}\left|\mathbb{E}(J_n(k))-c_g\,\phi_{\tau^*}(\frac{k}{n})\right|\\
=&\max_{1\le k<n}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\right)^{\gamma}}\left|\sqrt{n}\;u(\Delta_n)\,\phi_{\tau^*}(\frac{k}{n})-c_g\,\phi_{\tau^*}(\frac{k}{n})\right|\\
\le&\max_{1\le k<n}\frac{1}{\left(\phi_{\tau^*}(\frac{k}{n})\right)^{\gamma}}\left|\sqrt{n}\;u(\Delta_n)\,\phi_{\tau^*}(\frac{k}{n})-c_g\,\phi_{\tau^*}(\frac{k}{n})\right|\\
=&\max_{1\le k<n}\left(\phi_{\tau^*}(\frac{k}{n})\right)^{1-\gamma}\left|\sqrt{n}\;u(\Delta_n)-c_g\right|\\
=&\left(\phi_{\tau^*}(\tau^*)\right)^{1-\gamma}\left|\sqrt{n}\;u(\Delta_n)-c_g\right|.
\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时，这收敛于零，因为 $c_g=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}u(\Delta_n)$。 □

根据这两个引理，我们可以推导出 $J_n(k)$的极限行为。结合 5，我们可以得出定理的结论。□

6.2. 定理 2 的证明。

令 $I_n(k)$、 $J_n(k)$ 和 $u(\Delta)$ 如定理 1 的证明中所定义。设

$$\begin{aligned}
Z_n&:=\max_{1\le k<n}|I_n(k)+J_n(k)|,\\
Z_{n,m}&:=\max\left\{\max_{k\le n/m}|J_n(k)|,\max_{k>n/m}|I_n(k)+J_n(k)|\right\},\\
Z_{(m)}&:=\max\left\{|cu(\Delta)|,\sup_{\lambda>1/m}|\sigma W^{(0)}(\lambda)+c(1-\lambda)u(\Delta)|\right\},\\
Z&:=\sup_{0\le\lambda\le1}|\sigma W^{(0)}(\lambda)+c(1-\lambda)u(\Delta)|.
\end{aligned}$$

思路是证明

$$Z_{n,m}\xrightarrow{\mathcal{D}}Z_{(m)},\ \text{as } n\to\infty, \tag{12}$$

$$Z_{(m)}\xrightarrow{\mathcal{D}}Z,\ \text{as } m\to\infty, \tag{13}$$

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty}P(|Z_{n,m}-Z_n|\ge\varepsilon)=0, \tag{14}$$

并根据 Billingsley 三角定理（Billingsley（1999）中的定理 3.2）推导出当 $n\to\infty$ 时 $Z_n\xrightarrow{\mathcal{D}}Z$ 的收敛性。

首先，我们证明 (12)。由引理 6.3 可知，$\max_{1\le k<n}|J_n(k)-\mathrm{IE}(J_n(k))|\xrightarrow{\mathcal{P}}0$。因此，为证明 $\max_{k\le n/m}|J_n(k)|\to|cu(\Delta)|$，只需证明 $\max_{k\le n/m}|\mathrm{IE}(J_n(k))|\to|cu(\Delta)|$。如引理 6.2 的证明所示，我们有

$$\psi_n(k):=\mathbb{E}(J_n(k))=\frac{\phi_n(k)}{n^{3/2}}u(\Delta)=\begin{cases}\frac{k(n-c\sqrt{n})}{n^{3/2}}u(\Delta) & \text{for } k\le k_n^*=c\sqrt{n}\\ \frac{c\sqrt{n}(n-k)}{n^{3/2}}u(\Delta) & \text{for } k\ge k_n^*=c\sqrt{n}.\end{cases}$$

由于 $\psi_n(k)$ 对 $k \le k_n^*$ 单调递增、对 $k \ge k_n^*$ 单调递减，因此它在 $k = k_n^* = c\sqrt{n}$ 处取得最大值。我们得到

$$\psi_n(k_n^*) = \frac{c\sqrt{n}(n - c\sqrt{n})}{n^{3/2}} u(\Delta) = c\big(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\big) u(\Delta) \longrightarrow cu(\Delta), \text{ as } n \to \infty.$$

因此，当 $\frac{n}{m} > c\sqrt{n}$ n 足够大时，我们得到

$$\max_{k \le n/m} |\mathbb{E}(J_n(k))| = |\psi_n(k_n^*)| \longrightarrow cu(\Delta), \text{ as } n \to \infty.$$

此外，我们有

$$\sup_{\lambda > 1/m} \big|\mathbb{E}(J_n(\lambda n)) - c(1-\lambda)u(\Delta)\big| = \sup_{\lambda > 1/m} \Big|\frac{c\sqrt{n}(n - \lambda n)}{n^{3/2}} u(\Delta) - c(1-\lambda)u(\Delta)\Big| = 0.$$

合 并结合双样本 U 统计量的函数型中心极限定理，即 .

$$\Big(I_n([\lambda n])\Big)_{0 \le \lambda \le 1} \xrightarrow{\mathcal{D}} \Big(\sigma W^{(0)}([\lambda n])\Big)_{0 \le \lambda \le 1},$$

我们可以推出过程 $(I_n([\lambda n]) + J_n([\lambda n]))_{(\lambda \in [1/m, 1])}$ 弱收敛于 $(\sigma W_{(0)}(\lambda) + c(1-\lambda)u(\Delta))_{\lambda \in [1/m, 1]}$. 因此我们可以得出结论（12）。由 $(\sigma W^{(0)}(\lambda) + c(1-\lambda)u(\Delta))_{0 \le \lambda \le 1}$ 的连续性，并且由于

$$\max\{|cu(\Delta)|, \sup_{0 \le \lambda \le 1} |\sigma W^{(0)}(\lambda) + c(1-\lambda)u(\Delta)|\} = \sup_{0 \le \lambda \le 1} |\sigma W^{(0)}(\lambda) + c(1-\lambda)u(\Delta)|,$$

我们可以推导出（13）。对于（14），注意到 $|Z_{n,\ m} - Z_n| \le \max_{k \le n/m} |I_n(k)|$ 以及

$$\max_{k \le n/m} |I_n(k)| \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{\lambda < 1/m} |\sigma W^0(\lambda)|.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned} \lim_{m \to \infty} \limsup_{n \to \infty} P(|Z_{n,m} - Z_n| \ge \epsilon) &\le \lim_{m \to \infty} \limsup_{n \to \infty} P\Big(\max_{k \le n/m} |I_n(k)| \ge \epsilon\Big) \\ &\le \lim_{m \to \infty} P\Big(\sup_{\lambda < 1/m} |\sigma W^{(0)}(\lambda)| \ge \epsilon\Big) = 0 \end{aligned}$$

在最后一步中。 □

6.3. 定理 3 的证明。

定义

$$I_n^\gamma(k) := \frac{1}{\big(\frac{k}{n}(1 - \frac{k}{n})\big)^\gamma} I_n(k),$$
$$J_n^\gamma(k) := \frac{1}{\big(\frac{k}{n}(1 - \frac{k}{n})\big)^\gamma} J_n(k),$$

其中 $I_n(k)$ 和 $J_n(k)$ 的定义与定理 1 的证明中相同。于是 $G_n^\gamma(k) = I_n^\gamma(k)+J_n^\gamma(k)$。我们沿用定理 2 证明中的类似方法，并定义

$$
\begin{aligned}
Z_n^\gamma &:= \max_{1\le k<n} |I_n^\gamma(k) + J_n^\gamma(k)|,\\
Z_{n,m}^\gamma &:= \max\left\{ \max_{k\le n/m} |J_n^\gamma(k)|, \max_{k>n/m} |I_n^\gamma(k) + J_n^\gamma(k)| \right\},\\
Z_{(m)}^\gamma &:= \max\left\{ c^{1-\gamma}u(\Delta), \sup_{1/m\le\lambda\le 1} \frac{\sigma}{(\lambda(1-\lambda))^\gamma}\big|W^{(0)}(\lambda)\big| \right\}\\
Z^\gamma &:= \max\left\{ c^{1-\gamma}u(\Delta), \sup_{0\le\lambda\le 1} \frac{\sigma}{(\lambda(1-\lambda))^\gamma}\big|W^{(0)}(\lambda)\big| \right\}.
\end{aligned}
$$

为证明 $Z_n^\gamma \xrightarrow{\mathcal{D}} Z^\gamma$ 对于 $n\to\infty$ 成立，我们证明

$$Z_{n,m}^\gamma \xrightarrow{\mathcal{D}} Z_{(m)}^\gamma, \text{ as } n\to\infty, \tag{15}$$

$$Z_{(m)}^\gamma \xrightarrow{\mathcal{D}} Z^\gamma, \text{ as } m\to\infty, \tag{16}$$

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P(|Z_{n,m}^\gamma - Z_n^\gamma|\ge\varepsilon) = 0. \tag{17}$$

首先，我们证明 (15)。由引理 6.3 可知，对于 $n\to\infty$，$\max_{1\le k<n} |\mathbb{E}(J_n^\gamma(k)) - J_n^\gamma(k)| \to 0$. 因此，为了证明 $\max_{k\le n/m}|J_n^\gamma(k)| \to c^{1-\gamma}u(\Delta)$，只需证明 $\max_{k\le n/m}|\mathbb{E}(J_n^\gamma(k))| \to c^{1-\gamma}u(\Delta)$。利用 $k_n^* = cn^\kappa$，我们得到

$$\mathbb{E}(J_n(k)) = \frac{\phi_n(k)}{n^{3/2}}u(\Delta) = \begin{cases} \frac{k(n-cn^\kappa)}{n^{3/2}}u(\Delta) & \text{for } k\le k_n^* = cn^\kappa \\ \frac{cn^\kappa(n-k)}{n^{3/2}}u(\Delta) & \text{for } k\ge k_n^* = cn^\kappa. \end{cases}$$

定义 $\psi_n^\gamma(k) := \mathbb{E}(J_n^\gamma(k)) = \frac{1}{(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n}))^\gamma}\mathbb{E}(J_n(k)) = \frac{n^{2\gamma}}{k^\gamma(n-k)^\gamma}\mathbb{E}(J_n(k))$。于是有

$$\psi_n^\gamma(k) = \begin{cases} \frac{k^{1-\gamma}}{(n-k)^\gamma}\, n^{2\gamma-1/2}(1-cn^{\kappa-1})u(\Delta) & \text{for } k\le k_n^* = cn^\kappa \\ \frac{(n-k)^{1-\gamma}}{k^\gamma}\, cn^{2\gamma+\kappa-3/2}u(\Delta) & \text{for } k\ge k_n^* = cn^\kappa. \end{cases} \tag{18}$$

$\psi_n^\gamma(k)$ 在 $k\le k_n^*$ 上单调递增，在 $k\ge k_n^*$ 上单调递减，即它在 $k = k_n^* \approx cn^\kappa$ 处取最大值，并且

$$\psi_n^\gamma(cn^\kappa) = (1-cn^{\kappa-1})^{1-\gamma}\, c^{1-\gamma}\, n^{\gamma+\kappa-\kappa\gamma-1/2}u(\Delta) = (1-cn^{\kappa-1})^{1-\gamma}\, c^{1-\gamma}u(\Delta) \longrightarrow c^{1-\gamma}u(\Delta),$$

如 $\gamma+\kappa-\kappa\gamma-1/2 = 0$ 和 $\kappa-1<0$。对于足够大的 n，使得 $\frac{n}{m} > cn^\kappa = k_n^*$，根据 (18) 中 $\psi_n^\gamma(k) = \mathbb{E}(J_n^\gamma(k))$ 的定义，我们得到，对于 $n\to\infty$,

$$\max_{k<n/m}\big|\psi_n^\gamma(k)\big| = \big|\psi_n^\gamma(k_n^*)\big| \longrightarrow c^{1-\gamma}u(\Delta), \tag{19}$$

(20)

$$\max_{k\ge n/m}\big|\psi_n^\gamma(k)\big| = \psi_n\Big(\frac{n}{m}\Big) = \frac{(n-\frac{n}{m})^{1-\gamma}}{(\frac{n}{m})^\gamma}cn^{2\gamma+\kappa-3/2}u(\Delta) = c\big(1-\frac{1}{m}\big)^{1-\gamma}m^\gamma n^{\kappa-\frac{1}{2}}u(\Delta) \longrightarrow 0.$$

根据 Cs¨org¨o 等人（2008 年）的定理 3，我们可以推导出

$$\max_{k>n/m}\big|I_n^\gamma(k)\big| \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{1/m\le\lambda\le 1}\frac{1}{(\lambda(1-\lambda))^\gamma}|W^{(0)}(\lambda)|, \text{ as } n\to\infty.$$

结合式（19）、（20）和引理 6.3，可推出式（15）。此外，由过程 $(W^{(0)}(\lambda)/(\lambda(1-\lambda))^{\gamma})_{0\le\lambda\le1}$ 的连续性可得式（16）。剩下需要证明式（17）。为此，注意到

$$\left|Z^{\gamma}_{n,m} - Z^{\gamma}_{n}\right| \le \max_{k\ge n/m}\left|I^{\gamma}_{n}(k)\right| + \max_{k\le n/m}\left|J^{\gamma}_{n}(k)\right|.$$

根据式 (20)，第一个加项趋于零。利用 Cs¨org˝o 等人（2008）的定理 3，存在一列布朗桥 $W^{(n)}$，使得

$$\begin{aligned}
&P\Big(\Big|\max_{l\le n/m}\left|I^{\gamma}_{n}(l)\right| - \sup_{\lambda\le 1/m}\frac{1}{(\lambda(1-\lambda))^{\gamma}}|W^{(n)}(\lambda)|\Big| > \frac{\varepsilon}{2}\Big)\\
\le& P\Big(\sup_{\lambda\le 1/m}\Big|I^{\gamma}_{n}([n\lambda]) - \frac{1}{(\lambda(1-\lambda))^{\gamma}}W^{(n)}(\lambda)\Big| > \frac{\varepsilon}{2}\Big) \longrightarrow 0, \text{ as } n\to\infty.
\end{aligned}$$

因此，我们可以得出

$$\limsup_{n\to\infty} P\left(|Z^{\gamma}_{n,m} - Z^{\gamma}_{n}| > \varepsilon\right) \le \limsup_{n\to\infty} P\left(\sup_{\lambda\le 1/m}\frac{1}{(\lambda(1-\lambda))^{\gamma}}|W^{(n)}(\lambda)| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow{m\to\infty} 0,$$

因为 $W_{(n)}$ 与 $W^{(1)}$ 具有相同的分布，并且

$$\sup_{\lambda\le 1/m}\frac{1}{(\lambda(1-\lambda))^{\gamma}}|W^{(1)}(\lambda)|) \xrightarrow{m\to\infty} 0$$

几乎必然成立。 □

引理 6.3. 在定理 2 和定理 3 的条件下，对于 $0 \le \gamma < 1/2$，有

$$\max_{1\le k<n}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\right)^{\gamma}}|J_n(k) - \mathbb{E}(J_n(k))| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0, \ as\ n\to\infty,$$

其中 $J_n(k)$ 的定义与引理 6.1 的证明中相同。

引理 6.3 的证明。与引理 6.1 的证明一样，我们通过 Hoeffding 分解将核 $h(x,y) = g(y-x+\Delta) - g(y-x)$ 进行分解。于是，对于 $k \le k^*_n$，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\left(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\right)^{\gamma}}\left(J_n(k) - \mathbb{E}(J_n(k))\right)\\
=&\frac{1}{\left(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\right)^{\gamma}}\Big(\frac{n-k^*_n}{n^{3/2}}\sum_{i=1}^{k}h_1(\xi_i) + \frac{k}{n^{3/2}}\sum_{i=k^*_n+1}^{n}h_2(\xi_i) + \frac{1}{n^{3/2}}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k^*_n+1}^{n}\Psi(\xi_i,\xi_j)\Big).
\end{aligned}$$

我们证明，右侧每一项的最大值都依概率收敛于零，当 n 趋于无穷大时。回顾 $k^*_n \approx cn^{\kappa}$，$\kappa = \frac{1-2\gamma}{2}$ $(1-\gamma)$ 和 $0 < \gamma < \frac{1}{2}$，即 $0 < \kappa < \frac{1}{2}$.

关于第一项，我们得到

$$\max_{1\le k\le k_n^*}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\right)^{\gamma}}\frac{n-k_n^*}{n^{3/2}}\Big|\sum_{i=1}^{k}h_1(\xi_i)\Big|$$

$$=\max_{1\le k\le k_n^*}\frac{1}{\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\gamma}}\frac{n^{\gamma}}{k^{\gamma}}\frac{(n-cn^{\kappa})}{n^{3/2}}\Big|\sum_{i=1}^{k}h_1(\xi_i)\Big|=\max_{1\le k\le k_n^*}\frac{n^{\gamma}}{\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\gamma}}\frac{(1-cn^{\kappa-1})}{\sqrt{n}}\frac{1}{k^{\gamma}}\Big|\sum_{i=1}^{k}h_1(\xi_i)\Big|$$

$$\le\frac{n^{\gamma}}{\left(1-\frac{k_n^*}{n}\right)^{\gamma}}\frac{(1-cn^{\kappa-1})}{\sqrt{n}}\max_{1\le k\le k_n^*}\frac{1}{k^{\gamma}}\Big|\sum_{i=1}^{k}h_1(\xi_i)\Big|=(1-cn^{\kappa-1})^{1-\gamma}\,n^{\gamma-1/2}\max_{1\le k\le k_n^*}\frac{1}{k^{\gamma}}\Big|\sum_{i=1}^{k}h_1(\xi_i)\Big|.$$

由于 $((1/k)^{\gamma})_{1\le k\le k_n^*}$ 递减，我们可以应用 H´ajek-R´enyi 不等式，得到

$$\begin{aligned}&P\Big(\max_{1\le k\le k_n^*}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\right)^{\gamma}}\frac{n-k_n^*}{n^{3/2}}\Big|\sum_{i=1}^{k}h_1(\xi_i)\Big|\ge\varepsilon\Big)\\ \le&P\Big(\max_{1\le k\le k_n^*}\frac{1}{k^{\gamma}}\Big|\sum_{i=1}^{k}h_1(\xi_i)\Big|\ge\varepsilon(1-cn^{\kappa-1})^{\gamma-1}\,n^{1/2-\gamma}\Big)\\ \le&\frac{1}{\varepsilon^2(1-cn^{\kappa-1})^{2\gamma-2}\,n^{1-2\gamma}}\sum_{i=1}^{k_n^*}\frac{1}{i^{2\gamma}}\mathrm{Var}(h_1(\xi_i)).\end{aligned}$$

由于 $(\xi_i)_{i\ge1}$ 同分布，且 $\sum_{i=1}^{k_n^*}\frac{1}{i^{2\gamma}}\le\int_0^{k_n^*}\frac{1}{x^{2\gamma}}dx$，我们有

$$\sum_{i=1}^{k_n^*}\frac{1}{i^{2\gamma}}\mathrm{Var}(h_1(\xi_i))\le\mathrm{Var}(h_1(\xi_1))\int_0^{k_n^*}\frac{1}{x^{2\gamma}}dx=\mathrm{Var}(h_1(\xi_1))(k_n^*)^{-2\gamma+1}=\mathrm{Var}(h_1(\xi_1))(cn^{\kappa})^{-2\gamma+1},$$

其中 $\mathrm{Var}(h_1(\xi_1))$ 为常数。因此，

$$\begin{aligned}&P\Big(\max_{1\le k\le k_n^*}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\right)^{\gamma}}\frac{n-k_n^*}{n^{3/2}}\Big|\sum_{i=1}^{k}h_1(\xi_i)\Big|\ge\varepsilon\Big)\\ \le&\frac{(cn^{\kappa})^{-2\gamma+1}}{\varepsilon^2(1-cn^{\kappa-1})^{2\gamma-2}\,n^{1-2\gamma}}\mathrm{Var}(h_1(\xi_1))\\ =&\frac{c^{-2\gamma+1}}{\varepsilon^2}\frac{1}{(1-cn^{\kappa-1})^{2\gamma-2}\,n^{2\gamma\kappa-\kappa-2\gamma+1}}\mathrm{Var}(h_1(\xi_1))\longrightarrow0,\ \text{as } n\to\infty,\end{aligned}$$

由于根据我们对 κ 的选择，有 $\kappa-1<0$ 和 $2\gamma\kappa-\kappa-2\gamma+1=\frac{1}{2}\frac{1}{(\gamma-1)}+1>0$ 对于$0<\gamma<1/2$。对于第二项，我们有

$$\begin{aligned}&\max_{1\le k\le k_n^*}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\right)^{\gamma}}\frac{k}{n^{3/2}}\Big|\sum_{i=k_n^*+1}^{n}h_2(\xi_i)\Big|\le\frac{(k_n^*)^{1-\gamma}n^{\gamma}}{\left(1-\frac{k_n^*}{n}\right)^{\gamma}n^{3/2}}\Big|\sum_{i=k_n^*+1}^{n}h_2(\xi_i)\Big|\\ =&\frac{(cn^{\kappa})^{1-\gamma}n^{\gamma}}{(1-cn^{\kappa-1})^{\gamma}n^{3/2}}\Big|\sum_{i=k_n^*+1}^{n}h_2(\xi_i)\Big|=\frac{(cn^{\kappa})^{1-\gamma}}{(1-cn^{\kappa-1})^{\gamma}n^{3/2-\gamma}}\Big|\sum_{i=k_n^*+1}^{n}h_2(\xi_i)\Big|.\end{aligned}$$

根据切比雪夫不等式，我们得到

$$
\begin{aligned}
&P\Big(\max_{1\le k\le k_n^*}\frac{1}{\big(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\big)^\gamma}\frac{k}{n^{3/2}}\Big|\sum_{i=k_n^*+1}^{n}h_2(\xi_i)\Big|\ge\varepsilon\Big)\\
\le&P\Big(\Big|\sum_{i=k_n^*+1}^{n}h_2(\xi_i)\Big|\ge\varepsilon\frac{(1-cn^{\kappa-1})^\gamma n^{3/2-\gamma}}{(cn^\kappa)^{1-\gamma}}\Big)\le\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{(cn^\kappa)^{2-2\gamma}}{(1-cn^{\kappa-1})^{2\gamma}n^{3-2\gamma}}\mathrm{Var}\Big(\sum_{i=k_n^*+1}^{n}h_2(\xi_i)\Big)\\
=&\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{(cn^\kappa)^{2-2\gamma}(n-k_n^*)}{(1-cn^{\kappa-1})^{2\gamma}n^{3-2\gamma}}\mathrm{Var}(h_2(\xi_1))=\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{(cn^\kappa)^{2-2\gamma}\,n(1-cn^{\kappa-1})}{(1-cn^{\kappa-1})^{2\gamma}n^{3-2\gamma}}\mathrm{Var}(h_2(\xi_1))\\
=&\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{(cn^\kappa)^{2-2\gamma}}{n^{2-2\gamma}}(1-cn^{\kappa-1})^{1-2\gamma}\mathrm{Var}(h_2(\xi_1))=\frac{1}{\varepsilon^2}(cn^{\kappa-1})^{2-2\gamma}(1-cn^{\kappa-1})^{1-2\gamma}\mathrm{Var}(h_2(\xi_1)).
\end{aligned}
$$

当 $n\to\infty$ 时，该式收敛于零，因为 $\mathrm{Var}(h_2(\xi_i))$ 是常数，且 $(\kappa-1)(2-2\gamma)=-1<0$。对于第三项，我们采用与引理 6.1 的证明中类似的论证。这里有 $(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n}))^\gamma\ge n^{-\gamma}(1-\frac{k_n^*}{n})^\gamma=(1-cn^{\kappa-1})^\gamma n^{-\gamma}$，因此

$$
\frac{1}{\big(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\big)^\gamma n^{3/2}}\le\frac{n^{\gamma-3/2}}{(1-cn^{\kappa-1})^\gamma}.
$$

应用 Doob最大不等式，可得

$$
\begin{aligned}
&P\Big(\max_{1\le k\le k_n^*}\frac{1}{\big(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\big)^\gamma n^{3/2}}\Big|\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k_n^*}^{n}\Psi(\xi_i,\xi_j)\Big|\ge\varepsilon\Big)\\
\le&P\Big(\max_{1\le k\le k_n^*}\frac{n^{\gamma-3/2}}{(1-cn^{\kappa-1})^\gamma}\Big|\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k_n^*}^{n}\Psi(\xi_i,\xi_j)\Big|\ge\varepsilon\Big)\\
\le&P\Big(\max_{1\le k\le k_n^*}\Big|\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k_n^*}^{n}\Psi(\xi_i,\xi_j)\Big|\ge\varepsilon\frac{(1-cn^{\kappa-1})^\gamma}{n^{\gamma-3/2}}\Big)\le\frac{n^{2\gamma-3}}{\varepsilon^2(1-cn^{\kappa-1})^{2\gamma}}\mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^{k_n^*}\sum_{j=k_n^*}^{n}\Psi(\xi_i,\xi_j)\Big)\\
=&\frac{n^{2\gamma-3}}{\varepsilon^2(1-cn^{\kappa-1})^{2\gamma}}k_n^*(n-k_n^*)\mathrm{Var}(\Psi(\xi_1,\xi_2))=\frac{n^{2\gamma-3}\,cn^{\kappa+1}(1-cn^{\kappa-1})}{\varepsilon^2(1-cn^{\kappa-1})^{2\gamma}}\mathrm{Var}(\Psi(\xi_1,\xi_2))\\
=&\frac{c}{\varepsilon^2}(1-cn^{\kappa-1})^{1-2\gamma}\,n^{2\gamma+\kappa-2}\mathrm{Var}(\Psi(\xi_1,\xi_2))\longrightarrow 0,
\end{aligned}
$$

for $n\to\infty$，因为 $2\gamma+\kappa-2<0$ 和 $\kappa-1<0$。综上，我们已经证明了 t

$$
\max_{1\le k\le k_n^*}\frac{1}{(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n}))^\gamma}|J_n(k)-\mathbb{E}J_n(k)|\to 0.
$$

以类似的方式，我们证明 $\max_{k_n^*\le k<n}$ – $^{1}_{(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n}))^\gamma}|J_n(k)-\mathbb{E}J_n(k)|\to 0$。对于 $k_n^*\le k\le n-1$，我们有 $J_n(k)=\frac{1}{n^{3/2}}\sum_{i=1}^{k_n^*}\sum_{j=k+1}^{n}h(\xi_i,\xi_j)$，并且

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\big(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\big)^\gamma}\big(J_n(k)-\mathbb{E}(J_n(k))\big)\\
=&\frac{1}{\big(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\big)^\gamma n^{3/2}}\Big((n-k)\sum_{i=1}^{k_n^*}h_1(\xi_i)+k_n^*\sum_{i=k+1}^{n}h_2(\xi_i)+\sum_{i=1}^{k_n^*}\sum_{j=k+1}^{n}\Psi(\xi_i,\xi_j)\Big).
\end{aligned}
$$

关于第一项的系数，我们得到，对于 $k_n^* \le k \le n-$ 1

$$\frac{1}{\left(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\right)^\gamma n^{3/2}}(n-k) = \frac{n^\gamma}{k^\gamma}\frac{n^\gamma}{(n-k)^\gamma}\frac{1}{n^{3/2}}(n-k) = \frac{n^{2\gamma-3/2}}{k^\gamma}(n-k)^{1-\gamma}$$
$$\le \frac{n^{2\gamma-3/2}}{(k_n^*)^\gamma}n^{1-\gamma} = \frac{n^{2\gamma-3/2}}{(cn^\kappa)^\gamma}n^{1-\gamma} = \frac{1}{c^\gamma}n^{\gamma-\kappa\gamma-1/2}.$$

因此，结合切比雪夫不等式，我们得到

$$\mathbb{P}\Big(\max_{k_n^*\le k<n}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\right)^\gamma n^{3/2}}(n-k)\Big|\sum_{i=1}^{k_n^*}h_1(\xi_i)\Big|\ge\varepsilon\Big) \le \mathbb{P}\Big(\frac{1}{c^\gamma}n^{\gamma-\kappa\gamma-1/2}\Big|\sum_{i=1}^{k_n^*}h_1(\xi_i)\Big|\ge\varepsilon\Big)$$
$$\le \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{c^{2\gamma}}n^{2\gamma-2\kappa\gamma-1}\mathrm{Var}\Big(\Big|\sum_{i=1}^{k_n^*}h_1(\xi_i)\Big|\Big) = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{c^{2\gamma}}n^{2\gamma-2\kappa\gamma-1}k_n^*\mathrm{Var}(h_1(\xi_1))$$
$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{c^{2\gamma-1}}n^{2\gamma-2\kappa\gamma-1+\kappa}\mathrm{Var}(h_1(\xi_1)).$$

当 $n\to\infty$ 时，此项收敛于零；当 $\gamma<1/2$ 时， $2\gamma-2\kappa\gamma-1+\kappa<0$，且 $\kappa<1$。关于第二项和第三项，注意到当 $k_n^*\le k\le n-1$ 时

$$\Big(\frac{k}{n}\big(1-\frac{k}{n}\big)\Big)^\gamma \ge \Big(\frac{k_n^*}{n}\cdot\frac{1}{n}\Big)^\gamma = c^\gamma n^{\kappa\gamma-2\gamma}$$

因此

$$\frac{1}{\left(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\right)^\gamma n^{3/2}} \le \frac{1}{c^\gamma n^{\kappa\gamma-2\gamma}n^{3/2}} = \frac{1}{c^\gamma}n^{2\gamma-\kappa\gamma-3/2}. \tag{21}$$

于是，根据柯尔莫哥洛夫最大不等式，我们得到

$$\mathbb{P}\Big(\max_{k_n^*\le k<n}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\right)^\gamma n^{3/2}}k_n^*\Big|\sum_{i=k+1}^{n}h_2(\xi_i)\Big|\ge\varepsilon\Big)$$
$$\le \mathbb{P}\Big(\max_{k_n^*\le k<n}\frac{1}{c^\gamma}n^{2\gamma-\kappa\gamma-3/2}k_n^*\Big|\sum_{i=k+1}^{n}h_2(\xi_i)\Big|\ge\varepsilon\Big)$$
$$= \mathbb{P}\Big(\max_{k_n^*\le k<n}c^{1-\gamma}n^{2\gamma-\kappa\gamma-3/2+\kappa}\Big|\sum_{i=k+1}^{n}h_2(\xi_i)\Big|\ge\varepsilon\Big)$$
$$= \mathbb{P}\Big(\max_{1\le k\le n-k_n^*}c^{1-\gamma}n^{2\gamma-\kappa\gamma-3/2+\kappa}\Big|\sum_{i=1}^{k}h_2(\xi_i)\Big|\ge\varepsilon\Big)$$
$$\le \frac{1}{\varepsilon^2}c^{2-2\gamma}\,n^{4\gamma-2\kappa\gamma-3+2\kappa}\mathrm{Var}\Big(\Big|\sum_{i=1}^{n-k_n^*}h_2(\xi_i)\Big|\Big)$$
$$= \frac{1}{\varepsilon^2}c^{2-2\gamma}\,n^{4\gamma-2\kappa\gamma-3+2\kappa}(n-k_n^*)\mathrm{Var}(h_2(\xi_1))$$
$$= \frac{1}{\varepsilon^2}c^{2-2\gamma}(1-cn^{\kappa-1})\,n^{4\gamma-2\kappa\gamma-2+2\kappa}\mathrm{Var}(h_2(\xi_1)).$$

当 $\gamma < 1/2$时，对于 $n \to \infty$，随着 $4\gamma - 2\kappa\gamma - 2 + 2\kappa < 0$，该式收敛于零。关于最后一项，我们利用(21)和Doob最大不等式得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\max_{k_n^* \le k < n} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\right)^\gamma n^{3/2}} \Big| \sum_{i=1}^{k_n^*} \sum_{j=k+1}^{n} \Psi(\xi_i, \xi_j) \Big| \ge \varepsilon \Big) \\
\le &\mathbb{P}\Big(\max_{k_n^* \le k < n} \frac{1}{c^\gamma} n^{2\gamma - \kappa\gamma - 3/2} \Big| \sum_{i=1}^{k_n^*} \sum_{j=k+1}^{n} \Psi(\xi_i, \xi_j) \Big| \ge \varepsilon \Big) \\
= &\mathbb{P}\Big(\max_{1 \le k < n - k_n^*} \frac{1}{c^\gamma} n^{2\gamma - \kappa\gamma - 3/2} \Big| \sum_{i=1}^{k_n^*} \sum_{j=1}^{k} \Psi(\xi_i, \xi_{k_n^*+j}) \Big| \ge \varepsilon \Big) \\
\le &\frac{1}{\varepsilon^2 c^{2\gamma}} n^{4\gamma - 2\kappa\gamma - 3} \mathrm{Var} \Big| \sum_{i=1}^{k_n^*} \sum_{j=1}^{n-k_n^*} \Psi(\xi_i, \xi_{k_n^*+j}) \Big| \\
= &\frac{1}{\varepsilon^2 c^{2\gamma}} n^{4\gamma - 2\kappa\gamma - 3} k_n^* (n - k_n^*) \mathrm{Var}(\Psi(\xi_1, \xi_{k_n^*+1})) \\
= &\frac{1}{\varepsilon^2 c^{2\gamma}} n^{4\gamma - 2\kappa\gamma - 3} c n^\kappa (n - c n^\kappa) \mathrm{Var}(\Psi(\xi_1, \xi_{k_n^*+1})) \\
= &\frac{1}{\varepsilon^2 c^{2\gamma - 1}} (1 - c n^{\kappa - 1}) n^{4\gamma - 2\kappa\gamma - 2 + \kappa} \mathrm{Var}(\Psi(\xi_1, \xi_{k_n^*+1})).
\end{aligned}$$

当 $\gamma < 1/2$时，随着 $4\gamma - 2\kappa\gamma - 2 + \kappa < 0$，该式对 $n \to \infty$趋于零。 □

7. Auxiliary results from the literature

引理 7.1（H´ajek 和 R´enyi（1955年））。设 $\{\varepsilon_i,\ 1 \le i \le n\}$ 为具有有限二阶矩的独立随机变量，$\{b_i,\ i \ge 1\}$ 为正的递减实数序列。则对任意 $\alpha > 0$

$$P\Big(\max_{1 \le k \le n} b_k \Big| \sum_{i=1}^{k} (\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)) \Big| \ge \alpha \Big) \le \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(\varepsilon_i) b_i^2$$

References

I. Berkes、E. Gombay 和 L. Horv´ath。线性过程协方差结构变化的检验。Statist. Plann. Inference，139(6)：2044–2063，2009年。

P. Billingsley。《概率测度的收敛》。Wiley概率与统计丛书：概率与统计。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，第二版，1999年。ISBN 0-471-19745-9。doi：10.1002/9780470316962。URLhttps://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1700749。Wiley-Interscience出版物。

M. Cs¨org˝o 和 L. Horv´ath。《变点分析中的极限定理》。Wiley概率与统计丛书。John Wiley & Sons, Ltd.，奇切斯特，1997年。ISBN0-471-95522- 1。URL https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=2743035。

M. Cs¨org˝o、B. Szyszkowicz 和 Q. Wang。变点问题中学生化U型过程的渐近性质。Acta Math. Hungar.，121(4):333–357，2008年。

H. Dehling、A. Rooch 和 M. Taqqu。长程依赖数据的非参数变点检验。《Scandinavian Journal of Statistics》，40(1)：153–173，2013年。

H. Dehling、R. Fried、I. Garcia 和 M. Wendler。基于双样本 U 统计量的依赖情形下的变点检测。载于 D. Dawson、R. Kulik、M. Ould Haye、B. Szyszkow- icz 和 Y. Zhao（编），《随机过程中的渐近定律与方法》，第76卷，第195–220页。Springer，纽约，NY，2015年。H. Dehling、A. Rooch 和 M. Taqqu。长程依赖数据变点检验的检验功效。《电子统计学杂志》，11(1)：2168–2198，2017年。H. Dehling、K. Vuk 和 M. Wendler。基于加权两样本U统计量的变点检测。《电子统计学杂志》，16(1)：862–891，2022年。D. Ferger。非参数变点检验的检验功效。《计量学》，41(1)：277–292，1994年。E. Gombay。变点问题与序贯变点检测中 U 统计量的比较。《匈牙利数学期刊》，41：157–166，2000年。J. H´ajek 和 A. R´enyi。Kolmogorov不等式的一般化。《匈牙利数学学报》，6(3-4)：281–283，1955年。L. Horv´ath、C. Miller 和 G. Rice。R´enyi型的一类新变点检验统计量。《商业与经济统计学杂志》，38(3)：570–579，2020年。L. Horv´ath、G. Rice 和 Y. Zhao。协方差函数的变点分析：一种加权累积和方法。《多元分析杂志》，第104877页，2021年。A. Ra˘ckauskas 和 M. Wendler。H¨older空间中U过程的收敛及其在变化区段稳健检测中的应用。《统计学论文》，61(4)：1409–1435，2020年。M. Robbins、C. Gallagher、R. Lund 和 A. Aue。相关数据中的均值变化检验。《时间序列分析杂志》，32(5)：498–511，2011年。B. Szyszkowicz。变点问题与相邻备择。《统计学与概率通讯》，11(4)：299–308，1991年。H. Xie、D. Li 和 L. Xiong。通过蒙特卡罗模拟探究 Pettitt 方法检测变化点的能力。《随机环境研究与风险评估》，28：1643–1655，2014年。Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum, Universitätsstrasse 150, 44780 Bochu

M,

Germany电子邮箱地址：herold.dehling@ruhr-uni-bochum.deFakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum, Universitätsstrasse 150, 44780 Bochu

M,

Germany电子邮箱地址：kata.vuk@ruhr-uni-bochum.deInstitut für Mathematische Stochastik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Uni-versitätsplatz 2, 39106 Magdeburg, Germany电子邮箱地址：martin.wendler@ovgu.de