arXiv:2302.08874v1 [math.LO] 17 Feb 2023

度量不动点理论与部分不完全归纳性

D ´AVID FERNANDEZ-DUQUE、PAUL SHAFER、HENRY TOWSNER 和 KEITA YOKOYAMA

Abstract. 我们证明，Priess-Crampe 与 Ribenboim 不动点定理可在 RCA_0 中证明。此外，我们证明，对于贝尔函数和博雷尔函数，Caristi 不动点定理等价于超限最左路径原理；该原理严格介于 ATR_0 与 Π^1_1-CA_0 之间。我们还展示了 Caristi 定理的若干弱化版本，它们分别等价于 WKL_0 和 ACA_0。

1. Introduction引言

度量不动点定理指出，在某些条件下，函数 $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 从一个度量空间映射到其自身，具有一个不动点；也就是说，存在一个 $x_* \in \mathcal{X}$，使得 $f(x_*) = x_*$。这类定理在几何学、偏微分方程等领域有许多应用，其中函数 f 通常是连续的。

有一个不要求 f 连续性的不动点定理，即 Caristi 不动点定理 [1]。相反，函数 f 由一个非负下半连续函数「控制」。具体而言，该定理适用于我们称为「Caristi 系统」的对象。按照惯例，我们用记号将度量空间（$\mathcal{X}$，d）与 $\mathcal{X}$视为相同。回顾一下，V：若 $x_n \to x$，则 $\mathcal{X} \to \mathbb{R}$是下半连续的，当且仅当 $V(x) \leq \liminf_{n\to\infty} V(x_n)$。

定义 1.1。Caristi 系统是一个三元组（$\mathcal{X}$，f，V），其中 $\mathcal{X}$是完备度量空间，$f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$是任意的，$V\colon \mathcal{X} \to [0,\infty)$是下半连续的，并且对所有 $x \in \mathcal{X}$，$d(x, f(x)) \leq V(x) - V(f(x))$。

定理 1.2（Caristi [1]）。每个 Caristi 系统（$\mathcal{X}$，f）都有不动点；也就是说，存在 $x_* \in \mathcal{X}$使得 $f(x_*) = x_*$。

Caristi 定理在度量不动点理论中有各种应用和推广 [6,7]。我们把 $V\colon \mathcal{X} \to [0,\infty)$ 看作一个“势函数”，应用 f 后它会减小；直观地说，经过足够多次应用 f 后，势函数不再减少，我们便到达一个不动点。在 Caristi 的原始证明中，f 会被超限迭代，但使用 Ekeland 变分原理即可避免这一点。

定理 1.3（Ekeland [3]）。设 $\mathcal{X}$ 是一个完备度量空间，且 $V\colon \mathcal{X} \to [0,\infty)$ 是下半连续的。那么存在一个 $x_* \in \mathcal{X}$，使得对所有 $x \in \mathcal{X}$，若 $d(x_*, x) \leq V(x_*) - V(x)$，则 $x = x_*$。

我们称这样的 x_* 为 V的临界点。注意到，任何 V的临界点也将是 f的不动点，这是由假设 $d(x_*, f(x_*)) \leq V(x_*) - V(f(x_*))$ 得出的，因此可以从定理 1.3 推出定理 1.2。不过请注意，Ekeland 定理等价于 Π^1_1-CA_0，，因此超限方法仍然“隐藏在幕后” [4]。

另一个最初通过无穷方法证明的不动点定理（其表述明确调用了 Zorn引理）是 Priess-Crampe 与 Ribenboim 定理，该定理研究球完备超度量空间。此结果部分受到逻辑程序设计 [10]的启发，近期也应用于非良基证明的割消去 [12]。

定义 1.4. 度量空间 $\mathcal{X}$若满足：对于所有 $x, y, z \in \mathcal{X}$，$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$，则称为超度量空间。若每当 $\langle \overline{B}_{\rho_i}(x_i)\rangle_{i\in\mathbb{N}}$是一个递减的闭球序列时，都有 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \overline{B}_{\rho_i}(x_i) \neq \varnothing$，则称$\mathcal{X}$为球完备。

A fu函数 $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$若满足：对于所有 $x \neq y \in \mathcal{X}$, $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$，则称为严格压缩。

定理 1.5（Priess-Crampe 与 Ribenboim [11]）。设 $\mathcal{X}$ 是球完备超度量空间，且 $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 是严格压缩的。那么，f 有唯一不动点。

Key words and phrases. 可计算性理论、逆向数学、二阶算术、不动点定理、变分原理。

我们的目标是从逆向数学的角度确定 Priess-Crampe 与 Ribenboim 定理和 Caristi 定理的强度。

对于 Caristi 定理，为了处理“任意的” f，我们考虑 f 为贝尔或博雷尔的情形，因为这些是可以在二阶算术中轻易编码的广泛类别。这些类别上的 Caristi 定理严格介于 ATR_0 和 Π^1_1-CA_0, 之间，实际上等价于 Towsner [14]引入的超限最左路径原理理论。这表明，超限方法无法完全避免。然而，逆向数学需要相当复杂的$\mathcal{X}$ 和 f：Caristi 定理之所以需要如此强的理论，只是因为它涵盖了相当一般空间上的这类复杂函数。

如果我们将 $\mathcal{X}$ 或 f 限制为更好的例子，Caristi 定理就更容易证明。Peng 和 Yamazaki [9]也研究了 f 和 V 均为连续的情形；这一情形很有趣，因为它已经可以被视为巴拿赫不动点定理 [6]的一种推广。利用我们此前关于 Ekeland 变分原理 [4], 的逆向数学研究，我们将这一处理推广到下半连续的 V。正如我们将看到的，当 $\mathcal{X}$ 是紧致的且两个函数均连续时，Caristi 定理的弱化版本等价于 WKL_0；而当紧致性 [9] 或连续性被去除（但不能两者同时去除）时，则等价于 ACA_0。

关于 Priess-Crampe 与 Ribenboim 定理，令人惊讶的是，它或许已经能在 RCA_0 中证明。我们通过给出一个新的构造性证明来说明这一点。

2. Subsystems of second-order arithmetic

我们将在 [13] 所述的二阶算术子系统中进行讨论。语言是经过扩充的皮亚诺算术语言，其中加入了表示自然数集的变量，并允许对这些变量进行量化。我们用Δ^0_0 表示所有公式构成的集合，其中可以含有集合参数，但不出现二阶量词，且所有一阶量词均有界；照例定义类 Σ^e_n 和 Π^e_n，其中 n表示交替的一阶量词（对于 $e=0$）或二阶量词（对于 $e=1$）的个数（详情见例如 [13]）。

我们用记号 $\langle x_0, \dots, x_n\rangle$ 表示以标准方式编码的自然数序列。照例，可以用数对集合表示自然数上的二元关系和函数；对于二元关系 R，$|R|$ 表示 R的定义域与陪域的并集。[1] 所有有限自然数序列构成的集合记为 $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$。对于 σ、$\tau \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$，若 σ 是 τ的初始段，则记作 $\sigma \sqsubseteq \tau$；若 σ是 τ的真初始段，则记作 $\sigma \sqsubset \tau$，并令 $\downarrow\sigma = \{\tau \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : \tau \sqsubseteq \sigma\}$。若 Λ：$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$且 $n \in \mathbb{N}$，则用 $\Lambda \upharpoonright n$ 表示有限序列 $\langle \Lambda(i)\rangle_{i<n}$；注意，当 $n=0$时，该序列为空。对于集合 $X \subseteq \mathbb{N}$，我们用 $X \upharpoonright n$ 表示有限序列 $\lambda_X \upharpoonright n$，其中 λ_X 是 X的特征函数。我们通过定义 $\sigma \sqsubset \Lambda$（当某个 n满足 $\sigma = \Lambda \upharpoonright n$ 时），扩展 $\sqsubset$ 的用法。序列的连接记作 $\frown$。若 X、$Y \subseteq \mathbb{N}$，则 $X \oplus Y$是 $\{2n : n \in X\} \cup \{2n+1 : n \in Y\}$，即 X 与 Y的图灵并。

我们将树表示为 $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ 的子集，并且在 $\sqsubseteq$ 下向下封闭。二叉树就是 $\{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ 的子集中的树。无限序列 Λ 是 T 中的一条路径，当且仅当对每个 n，都有 $\Lambda \upharpoonright n \in T$；$[T]$ 表示经过 T 的路径类。

如果 $\prec$ 是 $\mathbb{N}$ 的某个子集上的良序，那么 ot($\prec$) 表示 $\prec$的序数型。此外，若 $X \subseteq \mathbb{N}^2$ 是一个有序对集合，且 $\alpha \in |\prec|$，我们将 X_α 记作 $\{x \in \mathbb{N} : \langle x, \alpha\rangle \in X\}$，并将 $X_{\prec\alpha}$ 记作所有满足 $\beta \prec \alpha$ 的 $\langle n, \beta\rangle \in X$ 的集合，其中 $X_{\preccurlyeq\alpha}$ 的定义类似。沿着 $\prec$ 的超限递归可以在二阶算术中如下定义。

定义 2.1（[13, 第五章]）。设 $\theta(x, Y, \vec{z}, \vec{Z})$ 是任意公式。我们将 $H_\theta(\prec, Y, \vec{z}, \vec{Z})$ 定义为这样一个公式：它断言，对于每个 $\alpha \in |\prec|$, $Y_\alpha = \{x : \theta(x, Y_{\prec\alpha}, \vec{z}, \vec{Z})\}$，并且对于 $\alpha \notin |\prec|$, $Y_\alpha = \varnothing$。当 $\vec{z}, \vec{Z}$ 的含义可由上下文明确时，我们可以将 $H_\theta(\prec, Y)$ 记作.....。

我们可以选择 θ，使得对于任意参数 Y、$\vec{z}$、$\vec{Z}$，集合 $\{x : \theta(x, Y, \vec{z}, \vec{Z})\}$ 是相对于 Y、Z 的一个通用 $\vec{}$ $\vec{}$可计算枚举集——也就是说，对于任意 Y、$\vec{z}$、Z，任何相对于 Y、$\vec{Z}$ 可计算枚举的集合，都等于某个截面 $\{x : \theta(\langle e, x\rangle, Y, \vec{z}, \vec{Z})\}$。在这种情况下，$\theta$ 的选择只关系到编码细节，因此我们略去它。

定义 2.2. 对于一个固定的 θ_*，若对任意参数 Y、$\vec{z}$、$\vec{Z}$，集合 $\{x : \theta_*(x, Y, \vec{z}, \vec{Z})\}$ 是相对于 Y、Z 的通用可计算枚举集，我们就用 H 代替 H_{θ_*}。

[1] 在 RCA_0 中，$|R|$ 可能不是一个集合，但我们总能找到一个同构关系 R'，使得 $|R'|$ 是一个集合。

这足以定义逆向数学中的“五大系统”理论：RCA_0 包含算术的基本公理，以及针对 Σ^0_1 可定义谓词的归纳公理和针对 Δ^0_1 可定义谓词的概括公理；WKL_0 在 RCA_0 的基础上加入形式化的弱柯尼希引理；ACA_0 则包含针对算术公式的概括公理。接着，ATR_0 保证，只要 $\prec$ 是良序，就存在唯一的 Y，使得 $H(\prec, Y, \vec{z}, \vec{Z})$ 成立；最后，Π^1_1-CA_0 以针对 Π^1_1 公式的概括公理作为公理。我们按强度严格递增的顺序提到了这些理论，不过，在 ATR_0 与 Π^1_1-CA_0 之间，还有一个鲜为人知的理论，由第三位作者提出 [14]。

定义 2.3。当 $\prec$ 是线性序时，我们称 $\prec$ 为后继序，如果它有一个极大元 x，并定义其前驱序 $\prec^- = \prec \restriction (|\prec| \setminus \{x\})$。当 $\prec$ 是良序时，我们称 W 为 $\Sigma^Z_\prec$，如果满足以下条件之一：(a) $\prec$ 是后继序，且 W 在唯一的 Y 中是可计算枚举的：$= Y \oplus Z$，使得 $H(\prec^-, Y, Z)$ 成立；或（b）$\prec$ 不是后继序，且 W 在 $\bar{Y}$ 中是可计算的：$= Y \oplus Z$，使得 $H(\prec, Y, Z)$ 成立。[2]

TLPP_0 定义为 RCA_0 加上 TLPP（超限最左路径原理）公理。当 Λ 和 Γ 是无限序列时，如果存在某个 n 使得 $\Gamma \restriction n = \Lambda \restriction n$ 且 $\Gamma(n) < \Lambda(n)$，我们记作 $\Gamma < \Lambda$。那么，TLPP 是对以下陈述的形式化：每当 $T \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ 是一棵具有无限路径的树，且 $\prec$ 是良序时，就存在一条经过 T 的路径 Λ，使得不存在一条经过 T、并且 $\Sigma^{\Lambda\oplus T}_\prec$ 且 $\Gamma < \Lambda$ 的路径 Γ。我们称 Λ 为 T 的相对化 $\prec$-最左路径；若上下文已明确 $\prec$、T，则简称相对化最左路径。关于这些及其他二阶算术子系统的详细论述，见 [13, 14]。以下两个对 TLPP_0 的刻画将会用到；其证明只是对 [8] 中证明的相对化。

引理 2.4（RCA_0）。以下各项等价：

(1) 树形拉姆齐原理$_0$。 (2) 每当 $\langle T_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个树序列，且 $\prec$ 是一个良序时，都存在一对集合 Z_0, Z_1，使得 $n \in Z_0$ 当且仅当存在一条经过 T_n 的路径，且该路径是 $\Sigma^{Z_0\oplus Z_1\oplus\langle T_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}}_\prec$。 (3) 对于任意参数 $\vec{Z}$、任意良序 $\prec$以及任意 Σ^0_2 公式 ϕ，都存在集合 X_0, X_1，使得$x \in X_0$ 当且仅当对于每个 Y，只要它是 $\Sigma^{X_0\oplus X_1\oplus Z}_\prec$，就有 $\phi(x, Y, \vec{Z})$成立。

证明。为证明 1 推出 2，设给定 $\langle T_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$。我们定义一棵将这些树交织在一起的单一树 T：首先定义$T'_n = \{\langle 0\rangle^\frown\sigma : \sigma \in T_n\} \cup \{\sigma : \forall i < |\sigma|\ \sigma(i) = 1\}$（也就是说，在 T_n中所有路径的右侧添加一条单一的无限路径），然后取 $T = \{\sigma : \forall\langle i, n\rangle < |\sigma|\ \langle\sigma(\langle 0, n\rangle), \ldots, \sigma(\langle i, n\rangle)\rangle \in T'_n\}$。根据树形拉姆齐原理$_0$，令 Λ 为 T'的一条相对化最左路径，并令 $Z = \{n : \Lambda(\langle 0, n\rangle) = 0\}$。

如果 $n \in Z$，那么存在一条可由 Λ 计算出的、经过 T_n 的路径。如果 $n \notin Z$ 且 Γ 是一条经过 T_n 的 $\Sigma^{Z\oplus\Lambda\oplus\langle T_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}}_\prec$，那么我们可以通过令 $\Lambda'(\langle 0, n\rangle) = 0$、$\Lambda'(\langle i+1, n\rangle) = \Gamma(i)$，以及对 $m \neq n$ 令 $\Lambda'(\langle i, m\rangle) = \Lambda(\langle i, m\rangle)$，来修改 Λ。但是，$\Lambda' < \Lambda$ 且 Λ' 是 $\Sigma^{\Lambda\oplus\langle T_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}}_\prec$，这与 Λ 的选取相矛盾。

接下来我们证明 2 蕴含 3。根据范式定理，写成 $\phi(x, Y, \vec{Z}) \equiv \neg\forall w\exists z\ \psi(w, z, x, Y \restriction z, \vec{Z})$。对于每个 x，令 T_x 为如下定义的树：当且仅当对所有 $i \leq j < |\sigma|$，$\sigma(i) \sqsubseteq \sigma(j) \in 2^{\mathbb{N}}$，$i \leq |\sigma(i)|$ 且 $\exists z \leq |\sigma(i)|\ \psi(i, z, x, \sigma(i) \restriction z, \vec{Z})$ 成立时，$\sigma \in T_x$。

我们扩展找到集合，以编码 $\vec{Z}$，使得 $x \in S_0$ 当且仅当存在一条经过 T_x 且为 $\Sigma^{S_0\oplus S_1\oplus\langle T_x\rangle_{x\in\mathbb{N}}\oplus\vec{Z}}_\prec$ 的路径。S_0 的补集 $\overline{S_0}$ 就是所需的集合。如果 $x \notin \overline{S_0}$，那么存在一条经过 T_x 且为 $\Sigma^{S_0\oplus S_1\oplus\langle T_x\rangle_{x\in\mathbb{N}}\oplus\vec{Z}}_\prec$ 的路径 Λ。由于 $\langle T_x\rangle_{x\in\mathbb{N}}$ 可由 $\vec{Z}$ 计算得到，这条路径是 $\Sigma^{\overline{S_0}\oplus S_1\oplus\vec{Z}}_\prec$ 且 $Y = \{i : \Lambda(i)(i) = 1\}$ 见证了 $\forall w\exists z\ \psi(w, z, x, Y \restriction z, \vec{Z})$。另一方面，如果存在一个 Y，使得 x 满足 $\forall w\exists z\psi(w, z, x, Y \restriction z, \vec{Z})$，且 Y 是 $\Sigma^{\overline{S_0}\oplus S_1\oplus Z}_\prec$，那么由 $\Lambda(i) = Y \restriction z_i$ 定义的函数 Λ，其中 z_i 是满足 $\psi(i, z, x, Y \restriction z, \vec{Z})$ 的最小 $z > i$，便是一条经过 T_x 且为 $\Sigma^{S_0\oplus S_1\oplus\langle T_x\rangle_{x\in\mathbb{N}}\oplus\vec{Z}}_\prec$ 的路径，因此 $x \notin \overline{S_0}$。

为证明 3 蕴含 1，设 T 是一棵具有无限路径 P 的树，并设 $\prec$ 是一个良序。令 $\phi(\sigma, Y, T)$ 为一个公式，当且仅当 Y 不是经过 $T_\sigma = \{\tau \in T$ 的路径时成立：$\sigma \sqsubseteq \tau\}$。由 3，取 X_0 和 X_1，使得 $\sigma \in X_0$ 当且仅当不存在这样的 Y：它是 $\Sigma^{X_0\oplus X_1\oplus T\oplus P}_\prec$，且是经过 T 并延伸 σ 的路径。现在从 X_0 递归计算一条路径 Λ，令 $\Lambda(n)$ 为满足 $(\Lambda \restriction n)^\frown\langle i\rangle \notin X_0$ 的最小 i。由于 $P \restriction 1 \notin X_0$，$\Lambda(0)$ 有定义。若某个 $n \geq 1$ 对应的 $\Lambda \restriction n$ 有定义，则 $\Lambda \restriction n \notin X_0$，因此存在一条经过 T 并延伸 $\Lambda \restriction n$ 的 $\Sigma^{X_0\oplus X_1\oplus T\oplus P}_\prec$ 路径 Y。于是 $Y \restriction (n+1) \notin X_0$，这意味着 $\Lambda(n)$ 有定义，从而 $\Lambda \restriction (n+1)$ 有定义。因此，Λ 是经过 T 的一条路径。现在反设

[2]请注意，我们的记号在最低层存在一处不规则性：即，W 为 $\Sigma^Z_\emptyset$ 意味着 W 为Δ^Z_1而非Σ^Z_0，其含义是 W 由 Z通过一个有界公式定义。

存在一条经过 T 且满足 $\Gamma < \Lambda$ 的 $\Sigma^{\Lambda\oplus T}_{\prec}$ 路径 Γ，从而导出矛盾。取 n 使得 $\Gamma \upharpoonright n = \Lambda \upharpoonright n$ 且 $\Gamma(n) < \Lambda(n)$。那么 $\Gamma \upharpoonright (n+1) \notin X_0$，因为 Γ 是 $\Sigma^{\Lambda\oplus T}_{\prec}$，因此 $\Sigma^{X_0\oplus X_1\oplus T\oplus P}_{\prec}$。这与 $\Lambda(n)$ 的定义矛盾，因为 $(\Lambda \upharpoonright n)^\frown\langle\Gamma(n)\rangle = \Gamma \upharpoonright (n+1) \notin X_0$，但 $\Gamma(n) < \Lambda(n)$。□

(iii) 的非相对化版本——存在一个集合 X，使得 $x \in X$ 当且仅当对于每个 Y，$\phi(x, Y, \vec{Z})$ 都成立——有时称为非谓词定义（因为集合 Y 可能就是 X 本身，或是由 X 定义出来的某个对象）。相对化版本称为部分非预测性，因为我们只考虑那些以有限方式由 X 定义的 Y。

3. Baire and Borel functions

二阶算术作为数学基础系统的吸引力之一，在于它足以发展数学分析的很大一部分，尤其是在处理可分度量空间时。不过，这需要一些编码机制。本节将回顾这些机制，并确立全文通用的记号。

定义 3.1（RCA_0；见 [13, 定义 II.5.1]）。在 RCA_0 中，完备可分度量空间 $\mathcal{X} = X$（的代码）定义为一个非空集合 $X \subseteq \mathbb{N}$，以及一个实数序列 $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$，满足 $d(a,a) = 0$，$d(a,b) = d(b,a) \geq 0$，并且对于所有 $a, b, c \in X$，都有 $d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c)$。$X$ 的一个点是由 X 中元素组成的序列 $x = \langle x_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$，满足对于所有 $i \leq j$，$d(x_i, x_j) \leq 2^{-i}$。我们用 $x \in \widehat{X}$ 表示 x 是 $\widehat{X}$ 的一个点。我们定义 $d(x,y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$，这在 RCA_0 中可以证明存在。

如果存在一个点序列证明 $\mathcal{X}$ 是全有界的 $\mathcal{X}$，我们就称空间 [13, 是紧致的3]定义 III.2.$_0$。就我们的目的而言，只需指出，RCA $[0,1]$ 证明了 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 和康托空间在此意义下都是紧致的。这里，康托空间是 d，其中 $\Lambda(\Lambda' = 2^{-n})$ n 取使得 $\Lambda(n) \neq \Lambda'(n)$ 的最小 d，而当不存在这样的 Λ 时，$\Lambda'(=0, n)$ $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$。贝尔空间的定义类似，但点集为 $\mathbb{Q}^{>0}$；注意，贝尔空间并不紧致。在下面的定义中，$\{q \in \mathbb{Q}$ 表示 $q > 0\}$：。

^定义 3.2（RCA_0；参见 [13, 定义 II.5.1]）。设 X 为完备可分度量空间。有理开球 $B_r(a)$ 的（代码）是有序对 $\langle a, r\rangle$，其中 $a \in X$ 且 $r \in \mathbb{Q}^{>0}$。我们定义 $B_r(a) \Subset B_q(b)$，当且仅当 $d(a, b) + r < q$；并定义 $B_r(a) \Subseteq B_q(b)$，当且仅当 $d(a, b) + r \leq q$。

我们指出，$B_r(a) \Subseteq B_q(b)$ 蕴含 $B_r(a) \subseteq B_q(b)$（在通常的集合论意义上），但反向未必成立（例如，考虑 $\mathcal{X}$ 是单点集的情况）。

在二阶算术的背景下形式化 Caristi 定理，一项挑战在于该定理适用于任意函数 f，原则上这需要进行三阶量化。为此，我们将研究一类相当宽泛、但仍可形式化为二阶对象的函数：贝尔函数和博雷尔函数。为统一表述并尽量减少编码方面的问题，我们将度量空间上的所有函数都视为贝尔函数或博雷尔函数的特例；但在文献中，连续函数或下半连续函数通常并非以这种方式编码。附录 A 讨论了我们的编码与更标准编码之间的关系。

逆向数学中关于博雷尔集的一般理论已经相当成熟，例如 [13, 15]，但对博雷尔函数的研究则较少。

定义 3.3。当 $\mathcal{X}$ 是一个完备可分度量空间时，回顾一下，博雷尔编码（即 $\mathcal{X}$ 的 Borel 子集的代码）是一个序列树 S，满足：(a) S 中不存在无限路径；(b) 恰有一个 n 使得 $\langle n\rangle \in S$；(c) 任意叶节点 $\sigma \in S$ 都具有 $\tau^\frown\langle B_r(a)\rangle$ 的形式，其中 $a \in X$ 且 $r \in \mathbb{Q}^{>0}$。

我们将这样的树视为对一个博雷尔集的编码。事实上，树中的每个节点都会递归地编码一个博雷尔集 $U_S(\sigma)$，定义如下：

- 当 $\sigma = \upsilon^\frown\langle B_r(a)\rangle$ 是一个叶节点时，$U_S(\sigma) = B_r(a)$，
- 当 $\sigma = \upsilon^\frown\langle n\rangle$ 中的 n 为奇数时，$U_S(\sigma) = \bigcup\{U_S(\sigma^\frown\langle k\rangle) : \sigma^\frown\langle k\rangle \in S\}$，
- 当 $\sigma = \upsilon^\frown\langle n\rangle$ 为偶数时，$U_S(\sigma) = \bigcap\{U_S(\sigma^\frown\langle k\rangle) : \sigma^\frown\langle k\rangle \in S\}$，
- 当 $\sigma = \langle\rangle$ 时，$U_S(\sigma) = U_S(\langle n\rangle)$，其中 n 是唯一满足 $\langle n\rangle \in S$ 的值。

特别是，开集可以表示为开球的并集，因此可以通过博雷尔编码表示。滥用记号时，我们将 $x \in S$ 作为 $x \in U_S(\langle\rangle)$ 的缩写。请注意，后者并不是

二阶算术的公式，不过，在 ATR_0, 中，我们可以判定编码的博雷尔集中的隶属关系，这是一条定理（参见 [13, 引理 V.3.3 和定义 V.3.4]）。

引理 3.4（ATR_0）。若 $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{X}$ 中的点序列，且 $\langle S_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ 是博雷尔编码序列，那么 $\{n : x_n \in U_{S_n}(\langle\rangle)\}$ 存在。

我们需要讨论博雷尔函数。我们将博雷尔函数编码为这样一种函数：每个基本开集的原像都由博雷尔编码给出。

定义 3.5。设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 为度量空间，Υ 为一个对博雷尔编码序列$\langle \Upsilon_{\langle a,\ r\rangle} : \langle a,\ r\rangle \in Y \times \mathbb{Q}_{>0}\rangle$进行编码的集合。将 $\Upsilon(B_r(a))$记作 $U_{\Upsilon_{\langle a,\ r\rangle}(\langle\rangle)}$。

如果对于所有来自 $\mathcal{Y}$的基本开球 B、B'，均满足：(i) 若 $B \subseteq B'$，则 $\Upsilon(B) \subseteq \Upsilon(B')$；(ii) 若 $B \cap B' = \varnothing$，则 $\Upsilon(B) \cap \Upsilon(B) = \varnothing$，我们称 Υ 是从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{Y}$ 的博雷尔函数（的编码）。

集合 Υ 编码了部分函数 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$，其中 $x \in \mathrm{dom}(f)$ 当且仅当存在唯一的元素$f(x) = y \in \mathcal{Y}$，使得对于每个包含 y 的球 B，$x \in \Upsilon(B)$。

回顾一下，树 T 的克莱尼–布劳威尔序，记作 $\mathrm{KB}(T)$，是 T 的一种线性化；在 ACA_0，中可以证明，当 T 良基时，该序仍然良基（例如参见 [13]）。当 f 是由 Υ 编码的博雷尔函数时，f 的复杂度记作 $\|f\|$，为 $\mathrm{KB}(\{\langle n\rangle^\frown\sigma : \sigma \in \Upsilon_n\})$。

特别地，连续函数可以编码为博雷尔函数，其中每个开球的原像都是开集。

引理 3.6（ATR_0）。设 Υ 是从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{Y}$ 的博雷尔函数的一个代码。那么，对于任意 $x \in \mathcal{X}$，x 在 f 下的像存在且为 $\Sigma^{x\oplus\Upsilon}_{\|f\|}$。

证明。集合 $B_r(a)$ 的求值函数满足 $x \in f^{-1}(B_r(a))$ 为 $\Sigma^{x\oplus\Upsilon}_{\|f\|}$。因此，我们可以通过取 y_i为满足 $x \in f^{-1}(B_{2^{-i-1}}(a))$ 的最小 a来定义一个近似，随后序列 $\langle y_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ 收敛到 $f(x)$。□

我们通常不谈编码，而是谈函数 f：说 f 是可编码的，只是说对于每个 $B_r(a)$，集合 $f^{-1}(B_r(a))$ 都由一个博雷尔编码给出，并且这些编码在 a, r 中是一致呈现的。

定义 3.7。部分贝尔函数的一个（编码）是一个良基树 Ξ，其每个叶节点都标记着一个部分连续函数（的编码），且每个非叶节点对于每个$i \in \mathbb{N}$都有一个延伸。

对于任意 x 和任意 $\sigma \in \Xi$，值 $f_{\Xi,\sigma}(x)$ 若存在，则递归定义如下：

- 若 σ 是一个标记为 f 的叶节点，则 $f_{\Xi,\ \sigma}(x) = f(x)$,
- 若 σ 不是叶节点，且存在某个 n 使得 $f_{\Xi,\ \sigma^\frown\langle n\rangle}(x)$ 不存在，则 $f_{\Xi,\ \sigma}(x)$ 不存在,
- 若 σ 不是叶节点，且对所有 n，$f_{\Xi,\ \sigma^\frown\langle n\rangle}(x)$ 都存在，则如果极限存在，$f_{\Xi,\ \sigma}(x) = \lim_{n\to\infty} f_{\Xi,\ \sigma^\frown\langle n\rangle}(x)$；否则它不存在。

我们用 $f_\Xi(x)$ 表示 $f_{\Xi,\ \langle\rangle}(x)$，并称 f 为贝尔函数，如果它由一个部分贝尔函数的代码给出，且对每个 x，$f(x)$ 都存在。

在 ATR_0 中可以证明，每个贝尔函数都是博雷尔函数；反过来，在零维空间中这一结论也成立，包括康托空间和贝尔空间；详情请见附录 A。

势函数（即非负下半连续函数）可以表示为连续函数的递增极限，因此也是 Baire 1 类函数。为此，我们使用以下引理（它无法在二阶算术中形式化）。

引理 3.8. 若 $\mathcal{X}$ 是任意度量空间，且 V 是 $\mathcal{X}$ 上的势函数，则存在一个连续函数的逐点递增序列 V_n: $\mathcal{X} \to [0,\infty)$，使得 $V = \lim_{n\to\infty} V_n$。

证明思路。容易验证，连续函数的递增极限是下半连续的。反过来，给定 $\alpha \geq 0$，定义 V 的 α-包络，记作 $V_{(\alpha)}$，如下：$V_{(\alpha)}(x) = \inf_{y\in\mathcal{X}} \big(V(y) + \alpha d(x,y)\big)$。接着不难验证，$(V_{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个逐点收敛到 V 的递增连续函数序列。□

因此，在二阶算术中，我们将势函数定义为第一类贝尔函数，且它是逐点单调连续函数 V_n 的极限（即 $V_n(x) \leq V_m(x)$，若 $n \leq m$）。如果 V_n 是 V 的 n-包络，我们就称 V 被包络。注意，即使在 $\alpha = 0$ 的情况下，$V_{(\alpha)}$ 仍然定义良好；此时我们得到 $V_{(0)} = \inf V$，因此被包络的势函数存在下确界。正如我们将看到的，从连续包络中还能提取更多信息。

这种编码机制足以将 Caristi 定理形式化，不过我们先来关注 Priess-Crampe 定理，它只涉及连续函数。

4. An elementary proof of the Priess-Crampe & Ribenboim theorem

回顾一下，定理 1.5 指出，若 $\mathcal{X}$ 是球完备超度量空间，且 $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 是严格压缩的，那么 f 有唯一不动点。利用上述编码机制，可以在二阶算术中表述此定理。对于球完备性，令 $\overline{B}_\rho(x)$ 表示满足以下条件的 $y \in \mathcal{X}$ 类：对于给定的 $x \in \mathcal{X}$ 和 $\rho > 0$，$d(x,y) \leq \rho$。由于 $\mathcal{X}$ 是超度量空间，我们用 $\overline{B}_\rho(x) \trianglelefteq \overline{B}_\delta(y)$ 表示 $\max\{d(x,y)\ \rho\} \leq \delta$，并注意到 $\overline{B}_\rho(x) \trianglelefteq \overline{B}_\delta(y)$ 蕴含 $\overline{B}_\rho(x) \subseteq \overline{B}_\delta(y)$。那么，若对于任意由闭球构成的序列 $\langle \overline{B}_{\rho_i}(x_i)\rangle_{i\in\mathbb{N}}$，只要对所有 i 都有 $\overline{B}_{\rho_i}(x_i) \trianglerighteq \overline{B}_{\rho_{i+1}}(x_{i+1})$，便存在一个 $x \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \overline{B}_{\rho_i}(x_i)$，则称 $\mathcal{X}$ 球完备。由此得到以下结果。

定理 4.1。Priess-Crampe 与 Ribenboim 定理可在 RCA_0 中证明。

证明。由 f 是严格压缩映射这一假设，很容易推出唯一性，因此我们着重证明存在性。

令 $X, \mathcal{X}$ 并令 $\langle a_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ 枚举 X，其中每个 a_i 都出现无限多次。定义 $\rho(x) = d(x, f(x))$。我们断言存在一个序列 $\langle b_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$，使得对所有 i，都有 $\rho(b_i) \geq \rho(b_{i+1})$，并且 $b_i \to \inf \rho$，当 $i \to \infty$ 时成立（其含义是：对所有 $x \in \mathcal{X}$ 和 $\varepsilon > 0$，都存在一个 i，使得 $\rho(b_i) < \rho(x) + \varepsilon$）。如下构造序列 $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$。注意，$\rho(x) < \rho(y)$ 是一个 Σ^0_1 语句，我们可以将其表示为 $\exists z \phi(x,y,z)$。令 $b_0 = a_0$；若存在一个 $z < i$，可证明 $\rho(a_{i+1}) < \rho(b_i)$（也就是说，$\phi(a_{i+1}, b_i, z)$ 成立），则递归地定义 $b_{i+1} = a_{i+1}$；否则定义 $b_{i+1} = b_i$。不难验证，序列 $\langle b_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ 满足所需性质。

令 $\rho_i = \rho$ 对每个 i 都成立。我们证明，对于所有 i，都有 $\overline{B}_{\rho_i}(b_i) \trianglerighteq \overline{B}_{\rho_{i+1}}(b_{i+1})$。为此，注意到 at

$$\begin{aligned} d(b_i, b_{i+1}) &\leq \max\{d(b_i, f(b_i)), d(f(b_i), f(b_{i+1})), d(b_{i+1}, f(b_{i+1}))\} \\ &= \max\{\rho_i, d(f(b_i), f(b_{i+1})), \rho_{i+1}\} = \rho_i. \end{aligned}$$

最后一个等式成立，是因为 f是严格压缩的，因此 $d(f(b_i)\ f(b_{i+1})) < d(b_i, b_{i+1})$。所以必有 $\max\{\rho_i, d(f(b_i)\ f(b_{i+1}))\ \rho_{i+1}\} = \max\{\rho_i, \rho_{i+1}\} = \rho_i$。由此可得 $\max\{d(b_i, b_{i+1})\ \rho_{i+1}\} \leq \rho_i$，因此 $\overline{B}_{\rho_i}(b_i) \trianglerighteq \overline{B}_{\rho_{i+1}}(b_{i+1})$。

由球完备性，存在一个 $x_* \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \overline{B}_{\rho_i}(b_i)$。于是，对于所有 i，都有 $\rho(x_*) \leq \rho_i$，因为

$$d(x_*, f(x_*)) \leq \max\{d(x_*, b_i), d(b_i, f(b_i)), d(f(b_i), f(x_*))\} = \max\{d(x_*, b_i), \rho_i\} = \rho_i,$$

因为 $x \in \overline{B}_{\rho_i}(b_i)$ 且 f是严格压缩的。如果 $\rho(x_*) > 0$，那么 $d(x_*, f(x_*)) > d(f(x_*)\ f^2(x_*)) = \rho(f(x_*))$，这与 $\lim_{i\to\infty} \rho(b_i) = \inf \rho$ 的事实矛盾。我们得出 $d(x_*, f(x_*)) = 0$。□

5. The Caristi theorem in the Big Five

本节研究可在 WKL_0 和 ACA_0中证明的 Caristi 定理的弱化形式。Caristi 定理可由 Ekeland 变分原理直接推出，因此我们首先回顾 [4]中关于后者逆向数学的主要结果。特别地，Ekeland 变分原理可在 Π^1_1-CA_0, 中导出，从而为 Caristi 定理确立了一个上界。Ekeland 变分原理也有可在 WKL_0 和 ACA_0中导出的自然弱化形式。

定义 5.1. 给定编码度量空间的可定义类 $\mathfrak{X}$ 以及编码势函数的可定义类 $\mathfrak{V}$，针对 $\mathcal{X} \in \mathfrak{X}$ 和 $V \in \mathfrak{V}$ 的（形式化）Ekeland 变分原理是如下陈述：若 $\mathcal{X} \in \mathfrak{X}$ 是一个编码的可分完备度量空间，且 $V \in \mathfrak{V}$ 是一个编码势函数，则存在 $x_* \in \mathcal{X}$，使得对于所有 $x \in \mathcal{X}$，若 $d(x_*, x) \leq V(x_*) - V(x)$，则 $x = x_*$。

除非另有说明，我们假设 $\mathfrak{X}$ 是所有编码的完备可分度量空间构成的类，$\mathfrak{V}$ 是所有编码势函数构成的类。

以下结论在 [4], 中得到证明，事实上，所有条目都可以反向推导。

定理 5.2. 埃克兰变分原理成立：

(i) (WKL_0) 对于紧致 $\mathcal{X}$ 且连续 V。(ii) (ACA_0) 对于紧致 $\mathcal{X}$ 或连续 V。
(iii) (Π^1_1-CA_0) 对于所有度量空间组成的类，且势函数任意。

所有这些结果都可以逆推，不过我们不会用到这一点。我们指出，[4] 对势函数（即下半连续函数）采用了不同的表述，但在 RCA_0 上二者等价（见附录 A）。对于不连续情形，可利用包络函数将其归约为连续情形，从而得到以下 [4, 引理 8.1]。

引理 5.3（RCA_0）。设 V 为任意势函数，且 $\alpha > 1$ 满足 $V_{(\alpha)}$ 存在。则 $V_{(\alpha)}$ 的任意临界点 x_* 也是 V 的临界点，并且 $V_{(\alpha)}(x_*) = V(x_*)$。

现在，我们可以陈述卡里斯蒂不动点定理的形式化表述，并在二阶算术的标准系统中证明该定理及其弱化版本。

定义 5.4。Caristi 系统是一个三元组（$\mathcal{X}$，f，V），其中 $\mathcal{X}$ 是一个编码的完备可分度量空间，$f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 是一个编码的贝尔函数或博雷尔函数，而 $V\colon \mathcal{X} \to [0,\infty)$ 是一个编码的势函数。

给定可定义的 $\mathfrak{X}$ 完备可分度量空间类，以及 $\mathfrak{F}$、$\mathfrak{V}$ 函数类，其中 $\mathfrak{F}$ 的元素是形如 f 的博雷尔函数或贝尔函数：$\mathcal{X} \to \mathcal{X}$，而 $\mathfrak{V}$ 的元素是形如 V 的势函数：$\mathcal{X} \to [0,\infty)$，则对于 $\mathcal{X} \in \mathfrak{X}$、$f \in \mathfrak{F}$ 和 $V \in \mathfrak{V}$，（形式化的）卡里斯蒂不动点定理（CFP）表述为：如果（$\mathcal{X}$、f、V）是一个卡里斯蒂系统，且其元素属于上述类，那么存在 $x_* \in \mathcal{X}$ 使得 $x_* = f(x_*)$。

未特别说明时，我们假设 $\mathfrak{X}$ 是所有编码的可分完备度量空间的类，$\mathfrak{F}$ 是所有贝尔函数或博雷尔函数的类，而 $\mathfrak{V}$ 是所有编码势函数的类。

下面是定理 5.2 的一个推论，利用了埃克兰变分原理蕴含卡里斯蒂定理这一事实。

命题 5.5。当以下条件成立时，CFP 成立：
(i) (WKL_0) $\mathcal{X}$ 是紧致的，且 V 是连续的。(ii) (ACA_0) $\mathcal{X}$ 是紧致的，f 是连续的，或 V 是连续的。(iii) (Π^1_1-CA_0) 总是成立。

证明。大多数结论可由定理 5.2 以及 V 的每个临界点都是 f 的不动点这一事实得到。例外是 (ii) 中 f 连续的情形，但 Peng 和 Yamazaki [9], 本身就是经典巴拿赫不动点定理证明的一个版本，因此在此背景下同样适用。

设 $\langle \mathcal{X}、f、V\rangle$ 是一个 Caristi 系统，其中 f 是连续的，并且 $x_0 \in \mathcal{X}$。递归地定义序列 x_n，令其由 $x_{n+1} = f(x)$ 给出；利用 f 的连续性，该序列可在 ACA_0 中直接得到。同样，由 $v_n = V(x_n)$ 给出的序列也存在，因为 ACA_0 能够一致地计算上确界。由于 $d(x_n, f(x_n)) \le V(x_n) - V(f(x_n)) = V(x_n) - V(x_{n+1})$，我们必有 $V(x_{n+1}) \le V(x_n)$，因此 $\langle v_n\rangle_{n=0}^{\infty}$ 是一个递减的实数序列，从而是柯西序列。不等式 $d(x_n, x_m) \le V(x_n) - V(x_m)$ 对 $m > n$ 成立，这意味着 $\langle x_n\rangle_{x=0}^{\infty}$ 也是柯西序列，因此它具有一个极限，记为 x_∞。由 f 的连续性以及 x_n 的定义可知，$x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x_\infty)$，所以确实，$x_\infty$ 是 f 的不动点。□

在本文余下部分中，我们将证明，除 (iii) 外，这些结论的逆命题均成立。（请注意，根据我们对 Caristi 系统的定义，(iii) 中的函数必须是贝尔或博雷尔函数。）

命题 5.6。对于 $\mathcal{X} = 2^{\mathbb{N}}$，若 f 和 V 均连续，则在 RCA_0 上可推出 WKL_0。

证明。我们在 RCA_0 上证明其逆否命题。假设 WKL_0 不成立，取一个没有无限路径的无限二叉树 $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$。我们定义连续函数 $f\colon 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ 和 $V\colon 2^{\mathbb{N}} \to [0,3]$，使得 $(2^{\mathbb{N}}, f, V)$ 构成一个没有不动点的 Caristi 系统。我们的 V 是这样一个势函数：它取自证明“定义在 $2^{\mathbb{N}}$ 上的连续势函数满足 Ekeland 变分原理”可推出 $_0$ 的证明，即命题 9.1]。

与命题 9.1], 的证明一样，令 $T^\circ = \{\sigma \in T\colon \sigma^\frown 0,\ \sigma^\frown 1 \notin T\}$ 为 T 的叶节点集合。集合 T° 是无限的，因为 T 是无限的，却没有路径。对每个 $\sigma \in T^\circ$，令

$$A_\sigma = \{i < |\sigma| : \neg(\exists \tau \in T)(|\tau| = |\sigma| + 1 \wedge \tau \sqsupseteq (\sigma \upharpoonright i)^\frown(1 - \sigma(i))\}.$$

对于每个 $\sigma \in 2^{<\mathbb{N}}$，令 $\tilde{\sigma} \in 2^{<\mathbb{N}}$ 为长度为 $2|\sigma|$ 的序列，其中 $\tilde{\sigma}(2i) = 0$ 且 $\tilde{\sigma}(2i+1) = \sigma(i)$ 对所有 $i < |\sigma|$ 均成立。定义 $\tilde{T} = \{\tilde{\sigma}\colon \sigma \in T\}$，$\tilde{T}^\circ = \{\tilde{\sigma}\colon \sigma \in T^\circ\}$，以及

$$S = \{\tau \in 2^{<\mathbb{N}} : (\forall \sigma \in T)(|\sigma| \le |\tau| \to \tau \not\sqsubseteq \tilde{\sigma}) \wedge (\exists \sigma \in T)(|\sigma| \le |\tau| \wedge \tau \upharpoonright (|\tau| - 1) \sqsubset \tilde{\sigma})\}.$$

˜集合 S 由最短二进制序列构成，这些序列在到达 T°的元素˜ ˜之前偏离 T。$T^\circ \cup S$的元素两两不可比较，且 T没有无限路径这一事实意味着，对于每个 $x \in 2^{\mathbb{N}}$，都存在一个 $\sigma \in \tilde{T}^\circ \cup S$，使得 $\sigma \sqsubseteq x$。定义连续函数$V\colon\ 2^{\mathbb{N}} \to [0,3]$ 如下

$$V(x) = \begin{cases} 2 - \sum_{i \in A_\sigma} 2^{-2i} & \text{if } x \sqsupseteq \tilde{\sigma} \text{ for a } \sigma \in T^\circ \\ 3 & \text{if } x \sqsupseteq \tau \text{ for a } \tau \in S. \end{cases}$$

根据引理 3.8 和 3.9]，可以获得一个用于 V 的代码。

在定义 f 之前，注意到对于任意 $\sigma \in T^\circ$，存在一个 $\tau \in T$，满足 $|\tau| = |\sigma| + 1$，因为T 是无限的。这样的 τ 不会扩展 σ，因为 σ 是一个叶节点，因此存在一个 $i < |\sigma|$，使得$\tau \sqsupseteq (\sigma \restriction i)^\frown(1 - \sigma(i))$。于是存在一个 $i < |\sigma|$，满足 $i \notin A_\sigma$。给定 $\sigma \in T^\circ$，令 i_σ 为满足 $i_\sigma < |\sigma|$ 和 $i_\sigma \notin A_\sigma$ 的最大者，并令 σ_+ 为 T° 中按字典序排列的第一个元素，满足 $|\sigma_+| > |\sigma|$和 $\sigma_+ \sqsupseteq (\sigma \restriction i_\sigma)^\frown(1 - \sigma(i_\sigma))$。则 $i_\sigma \in A_{\sigma_+}$，因为任何满足 $\tau \sqsupseteq (\sigma_+ \restriction i_\sigma)^\frown(1 - \sigma_+(i_\sigma))$ 的 $\tau \in T$ 都满足 $\tau \sqsupseteq \sigma \restriction (i_\sigma + 1)$，因而根据 i_σ 的极大性也满足 $|\tau| \leq |\sigma| < |\sigma_+|$。此外，如果 $i < i_\sigma$ 和 $i \in A_\sigma$，那么 $i \in A_{\sigma_+}$ 也成立，因为 $\sigma_+ \restriction i_\sigma = \sigma \restriction i_\sigma$ 和 $|\sigma| < |\sigma_+|$。

固定第一个 $\eta \in T^\circ$。定义连续函数 $f\colon\ 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$，它遵循 V，如下所示

$$f(x) = \begin{cases} \tilde{\sigma}_+^\frown 0^{\mathbb{N}} & \text{if } x \sqsupseteq \tilde{\sigma} \text{ for a } \sigma \in T^\circ \\ \tilde{\eta}^\frown 0^{\mathbb{N}} & \text{if } x \sqsupseteq \tau \text{ for a } \tau \in S. \end{cases}$$

同样，利用引理 3.8 和 3.9]，可以得到 f 的一个代码。函数 f 没有不动点。然而，$(2^{\mathbb{N}}, f, V)$ 是一个 Caristi 系统。令 $x \in 2^{\mathbb{N}}$。若对于某个 $\sigma \in T^\circ$，$x \sqsupseteq \tilde{\sigma}$，则 $d(x, f(x)) = 2^{-2i_\sigma - 1}$，并且

$$\begin{aligned} V(x) - V(f(x)) &= \sum_{i \in A_{\sigma_+}} 2^{-2i} - \sum_{i \in A_\sigma} 2^{-2i} \geq 2^{-2i_\sigma} - \sum_{\substack{i \in A_\sigma \\ i > i_\sigma}} 2^{-2i} \\ &\geq 2^{-2i_\sigma} - 2^{-2i_\sigma - 1} = 2^{-2i_\sigma - 1} = d(x, f(x)), \end{aligned}$$

其中，第一个不等式是因为 $i_\sigma \in A_{\sigma_+} \setminus A_\sigma$，并且因为 $i \in A_\sigma \to i \in A_{\sigma_+}$ 对于 $i < i_\sigma$ 成立。若改为对于某个 $\tau \in S$，$x \sqsupseteq \tau$，则

$$V(x) - V(f(x)) = 1 + \sum_{i \in A_\eta} 2^{-2i} \geq d(x, f(x)).$$

T因此，$(2^{\mathbb{N}}, f, V)$ 是一个没有不动点的 Caristi 系统，证明至此完成 f. □

Peng 和 Yamazaki [9] 证明了 ACA_0 等价于连续 f 和 V 的 CFP。我们进一步强化这一结果，证明可以假设 $\mathcal{X}$ 是贝尔空间。

命题 5.7. $\mathcal{X} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 的 CFP，以及 f 和 V 连续，蕴含 RCA_0上的 ACA_0 .

证明。我们在 RCA_0上证明其逆否命题。假设 ACA_0 不成立，并设 $h\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是一个单射，其值域不能作为一个集合存在。设 $T \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ 是由 h 按照定理 III.7.2]中证明 K¨onig 引理蕴含 ACA_0 的证明所构造的树。这个 T 是所有满足 $(\forall m < |\sigma|)(\forall n < |\sigma|)(h(m) = n \leftrightarrow \sigma(n) = m + 1)$ 且 $(\forall n < |\sigma|)(\sigma(n) > 0 \to h(\sigma(n) - 1) = n)$ 的 $\sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ 所组成的集合。由于 h 的值域不能作为一个集合存在，树 T 没有无限路径。我们定义连续的 $f\colon\ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$和 $V\colon\ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to [0,3]$，使得 $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, f, V)$ 是一个没有不动点的 Caristi 系统。

对每个 $\sigma \in T$，按如下方式赋予一个满足 $|\sigma_+| > |\sigma|$ 和 $\{n < |\sigma_+| \text{ 的 } \sigma_+ \in T\colon\ \sigma_+(n) > 0\} \supseteq \{n < |\sigma|\colon\ \sigma(n) > 0\}$。给定 $\sigma \in T$，令 $k = \max\{|\sigma|, \max\{\sigma(n)\colon\ n < |\sigma|\}\}$。令 X为有限集 $X = \{h(m)\colon\ m \leq k\}$，并令 σ_+ 为长度为 $k+1$ 的序列，其中对于 $n \leq k$

$$\sigma_+(n) = \begin{cases} m + 1 & \text{if } n \in X \text{ and } h(m) = n \\ 0 & \text{if } n \notin X. \end{cases}$$

于是 $\sigma_+ \in T$。此外，若 $n < |\sigma|$ 且 $\sigma(n) > 0$，则 $\sigma(n) \leq k$，因此 $h(\sigma(n) - 1) = n \in X$，从而 $\sigma_+(n) = \sigma(n) > 0$。

定义连续的 $f\colon\ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$和 $V\colon\ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to [0,3]$ 如下，利用 [4, 引理 3.8 和 3.9] 获得这些编码。给定 $x \in \mathbb{N}$，令 $\sigma \sqsubseteq x$ 为满足 $\sigma \in T$的最长初始段；这样的初始段确实存在

因为 x 不是穿过 T的路径。令

$$V(x) = 1 + 2^{-|\sigma|+1} - \sum_{\substack{n<|\sigma| \\ \sigma(n)>0}} 2^{-n} \qquad f(x) = \sigma_+{}^\frown 0^{\mathbb{N}}.$$

注意到 $f(x) \neq x$ 因为 $\sigma_+ \in T$但 $x \restriction |\sigma_+| \notin T$由于 $|\sigma_+| > |\sigma|$。因此， f 没有不动点。要证明 $d(x, f(x)) \leq V(x) - V(f(x))$，首先注意，满足 $\tau \in T$ 的最长初始段 $\tau \sqsubseteq f(x)$ 具有形式 $\tau = \sigma_+{}^\frown 0^\ell$ ，其中某个 ℓ ，因为 $\sigma_+ \in T$。因此

$$V(f(x)) = 1 + 2^{-|\tau|+1} - \sum_{\substack{n<|\tau| \\ \tau(n)>0}} 2^{-n} \leq 1 + 2^{-|\sigma_+|+1} - \sum_{\substack{n<|\sigma_+| \\ \sigma_+(n)>0}} 2^{-n}$$

因为 $|\sigma_+| \leq |\tau|$ 且 $\{n < |\sigma_+| : \sigma_+(n) > 0\} = \{n < |\tau| : \tau(n) > 0\}$。因此

$$\begin{aligned} V(x) - V(f(x)) &\geq 2^{-|\sigma|+1} - 2^{-|\sigma_+|+1} + \sum_{\substack{n<|\sigma_+| \\ \sigma_+(n)>0}} 2^{-n} - \sum_{\substack{n<|\sigma| \\ \sigma(n)>0}} 2^{-n} \\ &\geq 2^{-|\sigma|} + \sum_{\substack{n<|\sigma_+| \\ \sigma_+(n)>0}} 2^{-n} - \sum_{\substack{n<|\sigma| \\ \sigma(n)>0}} 2^{-n}, \end{aligned}$$

wher第二个不等式是因为 $|\sigma| < |\sigma_+|$。如果 $\sigma \sqsubseteq \sigma_+$，那么 $d(x, f(x)) = 2^{-|\sigma|}$，所以

$$d(x, f(x)) = 2^{-|\sigma|} \leq 2^{-|\sigma|} + \sum_{\substack{n<|\sigma_+| \\ \sigma_+(n)>0}} 2^{-n} - \sum_{\substack{n<|\sigma| \\ \sigma(n)>0}} 2^{-n} \leq V(x) - V(f(x)),$$

其中第一个不等式成立是因为 $\{n < |\sigma_+| : \sigma_+(n) > 0\} \supseteq \{n < |\sigma| : \sigma(n) > 0\}$。若 $\sigma \not\sqsubseteq \sigma_+$，则令 $j < |\sigma|$ 为满足 $\sigma(j) \neq \sigma_+(j)$ 的最小值。必有 $\sigma(j) = 0$ 且 $\sigma_+(j) > 0$ ，因为若$\sigma(j) > 0$，那么 $\sigma_+(j) > 0$ 也成立，此时 $\sigma(j) = \sigma_+(j)$，因为 σ 和 σ_+ 都属于 T。因此

$$2^{-j} \leq \sum_{\substack{n<|\sigma_+| \\ \sigma_+(n)>0}} 2^{-n} - \sum_{\substack{n<|\sigma| \\ \sigma(n)>0}} 2^{-n}$$

因为 $\sigma_+(j) > 0$， $\sigma(j) = 0$，并且 $\{n < |\sigma_+| : \sigma_+(n) > 0\} \supseteq \{n < |\sigma| : \sigma(n) > 0\}$。因此

$$d(x, f(x)) = 2^{-j} \leq 2^{-|\sigma|} + \sum_{\substack{n<|\sigma_+| \\ \sigma_+(n)>0}} 2^{-n} - \sum_{\substack{n<|\sigma| \\ \sigma(n)>0}} 2^{-n} \leq V(x) - V(f(x)).$$

因此，在两种情况下都有 $d(x, f(x)) \leq V(x) - V(f(x))$。因此，$(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, f, V)$ 是一个没有不动点的 Caristi 系统，证明至此完成。□

P命题 5.8. 对于 $[0, 1]$ ，Baire 1 f 类的 CFP 蕴含 RCA_0 上的 ACA_0 。

证明。我们在 RCA_0 中工作，并证明逆否命题。在 RCA_0，上，ACA_0 等价于单调收敛定理（见 [13, 定理 III.2.2]）。事实上，考察 [13, 定理 III.2.2]，的证明可知，ACA_0 等价于命题 “ 自然数集 $[0, 1]$ 中每个严格递增的有理数序列都有上确界”。因此，设 $\langle c_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $[0, 1]$ 中一个没有上确界的严格递增有理数序列，并定义一个 Caristi 系统 $\langle [0, 1], f, V \rangle$，其函数属于 Baire 1 类 f，但没有不动点。

首先定义 V。令 $V_n \colon [0, 1] \to [0, 2]$ 为一个分段线性函数，使得对于 $x \leq c_n$， $V_n(x) = 2$；对于 $x \geq c_{n+1}$， $V_n(x) = x$，并且 V_n 在 $[c_n, c_{n+1}]$ 上线性递减。令 $V = \lim_{n\to\infty} V_n$。显然，函数 V_n 在 n 上连续且递增，因此 V 是一个势函数，并且不难看出

$$V(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } \exists n(x < c_n) \\ x & \text{otherwise.} \end{cases}$$

现在我们定义 f，证明 $([0, 1], f, V)$ 是一个 Caristi 系统，并证明 f 没有不动点。定义一个分段线性函数序列 $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ $f_n \colon [0, 1] \to [0, 1]$ 如下。对于每个 n，首先求出序列 $\langle q_i^n \rangle_{i\leq n+2}$，其中

- $q_0^n = 1$;
- 对于每个 $i \leq n$， q_{i+1}^n 是区间（c_n， q_i^n）中代码最小的有理数;

- $q^n_{n+2} = c_n$。

现在定义 f_n 使得

- 对于 $i \leq n$，f_n 在 $[q^n_{i+1}, q^n_i]$ 上是线性的，满足 $f(q^n_{i+1}) = q^n_{i+2}$ 且 $f(q^n_i) = q^n_{i+1}$；
- f_n 在 $[q^n_{n+2}, q^n_{n+1}]$ 上是线性的，满足 $f(q^n_{n+2}) = 1$ 且 $f(q^n_{n+1}) = q^n_{n+2}$；
- f_n 在 $[0, q^n_{n+2}]$上恒为 1。

我们证明，对每个 $x \in [0,1]$，$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在，$d(x, f(x)) \leq V(x) - V(f(x))$，并且 $f(x) \neq x$。令 $x \in [0,1]$。首先假设存在一个 n_0使得 $x < c_{n_0}$。在这种情况下，对所有 $n \geq n_0$，$f_n(x) = 1$，因此 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$。于是 $f(x) = 1 \neq x$。此外，$d(x, f(x)) \leq 1 = 2 - 1 = V(x) - V(f(x))$。

现在设 $\forall n(c_n \leq x)$。由于 x 不是 $\langle c_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$的上确界，因此存在一个有理数 v 使得$v \leq x$ 且 $\forall n(c_n \leq v)$成立。于是，根据作为 Π^0_1 最小数原理的 $\mathrm{I}\Sigma^0_1$，存在这样一个 v，其编码最小。同样，存在一个有理数 u，其编码最小，并且满足 $u < v$ 和 $\forall n(c_n \leq u)$。令 Q 为由有理数 $\geq u$ 组成的有限集，其中这些有理数的编码不超过 u的编码。令 $\langle q_i\rangle_{i\leq m}$ 为取自 $Q \cup \{1\}$ 中元素的最长序列，其中 $q_0 = 1$，并且对于每个 $i < m$，q_{i+1} 是$[0, q_i$中的元素）$\cap Q$，其编码最小。注意到 $q_m = u$ 且 $q_{m-1} = v$。现在，根据 u的选取，令$n_0 \geq m$ 足够大，使得对于每个有理数 $p \in [0, u)$，其编码小于 u的编码，都有 $p \leq c_{n_0}$。于是，$n \geq n_0$ 蕴含 $(\forall i \leq m)(q^n_i = q_i)$。因此，由于 $x \in [q_{m-1}, q_{m-2}]$，$n \geq n_0$ 蕴含 $f_n(x) = \frac{q_{m-1}-q_m}{q_{m-2}-q_{m-1}}(x - q_{m-1}) + q_m$。所以 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{q_{m-1}-q_m}{q_{m-2}-q_{m-1}}$ $(x - q_{m-1}) + q_m$。由此我们得到 $q_m \leq f(x) < x$。因此，$\forall n(c_n \leq q_m \leq f(x))$，因为 $q_m = u$。所以 $V(x) = x$ 且$V(f(x)) = f(x)$，于是 $d(x, f(x)) = x - f(x) = V(x) - V(f(x))$。

我们现在已经定义了一个势函数 $V\colon [0,1] \to [0,\infty)$和一个第一类贝尔函数 $f\colon [0,1] \to [0,1]$，使得（$[0,1]$，f，V）是一个 Caristi 系统，但 f没有不动点。这就完成了证明。□

现在让我们汇总一下目前得到的一些结果：

定理 5.9（RCA_0）。以下各项等价：

（a）WKL_0；（b）连续 V 和紧致 $\mathcal{X}$的 CFP；（c）康托空间上的连续 f、V 的 CFP。

证明。（a）蕴含（b）是命题 5.5，（c）是（b）的特殊情形，而（c）蕴含（a）是命题5.6。□

定理 5.10（RCA_0）。以下各项等价：

(a) ACA_0；(b) 对任一 f 或 V 连续函数成立的 CFP；(c) 对紧致 $\mathcal{X}$成立的 CFP；(d) 对定义在 $[0,1]$上的贝尔类 1 f 成立的 CFP；(e) 对贝尔空间上的连续 f、V 成立的 CFP。

证明。命题 5.5 表明 (a) 推出 (b) 和 (c)。(d) 是 (c) 的一种情形，而 (e) 是 (b) 的一种情形。(d) 推出 (a) 即命题 5.8，(e) 推出 (a) 即命题 5.7。□

我们指出，对于紧致 $\mathcal{X}$、连续 f和任意 V，CFP 的强度尚未确定；不过，根据上述结果，它必定介于 WKL_0 与 ACA_0之间。

6. Caristi's theorem and the TLPP

本节将证明不受限制的 CFP 等价于树形拉姆齐原理$_0$；请回忆我们在第 2 节中对后者的定义。

我们首先在树形拉姆齐原理$_0$中证明 Caristi 定理。我们从一个可在树形拉姆齐原理$_0$中证明的 Ekeland 变分原理的“相对化”版本推导出该定理。其思想是，对于一个势函数 V，我们可以找到一个势函数V'，它在超算术可定义点（带有适当参数）上与 V相同，并且 V'具有一个临界点。下文中，我们令 $\mathcal{X}^Y_\preceq$表示 $\mathcal{X}$的所有 $\Sigma^Y_\preceq$点所组成的集合。

定义 6.1. 设 $\mathcal{X}$是一个完备可分度量空间，V是定义在 $\mathcal{X}$上的势函数。设 $Z \subseteq \mathbb{N}$。V的一个 $\Sigma^Z_\preceq$ 相对化是一个势函数 $V' = \lim_{n\to\infty} V'_n$，其贝尔代码在某个集合上是算术的

W并且对每个$x \in \mathcal{X}_{\prec}^{W\oplus Z}$和 $n > 0$,

$$V_n'(x) = \inf_{y\in\mathcal{X}_{\prec}^{W\oplus Z}}(V(y) + nd(x,y)). \tag{1}$$

我们称 W 为 V'的参数。

粗略地说， V' 表示 V 的一个“平滑化”版本，其中忽略了高复杂度点处的不连续性。

引理 6.2（树形拉姆齐原理$_0$）。对于每个势函数 V 和每个集合 Z，都存在一个 $\Sigma_{\prec}^{Z}$ 相对化的 V。

证明。固定 Z 和 V。注意，对于任意集合 W，由 (1) 定义的函数 $V_{n-1}'(x)$ 是一致连续的（在有定义时），因为对于 x、x'、$y \in \mathcal{X}$，有

$$|(V(y) + nd(x,y)) - (V(y) + nd(x',y))| \le nd(x,x'),$$

因此 $|V_n'(x) - V'(x')| \le nd(x,x')$。此外，显然只要 $n \le m$，就有 $V_n'(x) \le V_m'(x)$，因为对于所有 x、y，都有 $nd(x,y) \le md(x,y)$。剩下要证明的是，$\lim_{n\to\infty} V_n'$ 具有一个由连续函数构成的序列作为 Baire 代码。

设 $\mathcal{X}$ 为完备可分度量空间，$V\colon \mathcal{X} \to [0,\infty)$ 为势函数，且 Z 为任意集合。性质 $c < V(y)+nd(a,y)$ 是 Σ_1^0，因此使用树形拉姆齐原理 $_0$ 的形式，即引理 2.4 第 3 项，可得集合 Δ 和 Y，使得对于 $x \in X$，$(a,c,n) \in \Delta$ 当且仅当对所有 $y \in \mathcal{X}_{\prec}^{\Delta\oplus Y\oplus Z}$，$c < V(y) + nd(a,y)$。令 $W := \Delta \oplus Y$，并用 $\mathcal{X}'$ 表示 $\mathcal{X}_{\prec}^{W\oplus Z}$。

由 Δ，我们可以算术定义一个代码 Υ_n，对应于 V_n'。我们将 $\mathbb{R}$ 中的开球表示为区间 (c,d)。接着，如果存在 c', d' 使得 $c < c' < d' < d$，且对所有 $b \in B_r$，$a(\cap X)$ $V_n'(b) \in (c',d')$，就将 $B_r(a)$ 枚举为 $\Upsilon_n((c,d))$。我们验证，这样定义的 Υ_n 满足定义 3.5，并编码所需的函数 V_n'。

对于条目 (i)，显然，如果 $(c_0,d_0) \subseteq (c_1,d_1)$，且 $B_r(a)$ 通过 (c',d') 属于 $\Upsilon_n((c_0,d_0))$，那么同一个子区间就见证了 $B_r(a)$ 属于 $\Upsilon_n((c_1,d_1))$。对于条目 (ii)，如果 $\Upsilon_n((c_0,d_0)) \cap \Upsilon_n((c_1,d_1)) \neq \varnothing$，由于这些集合是开集，且 X 稠密，我们可以找到 $a \in \Upsilon_n((c_0,d_0)) \cap \Upsilon_n((c_1,d_1)) \cap X$，这意味着 $V_n'(a) \in (c_0,d_0) \cap (c_1,d_1)$，因此这两个区间必相交。

剩下需要验证的是， Υ_n 确实对 (1) 中所需的函数 V_n' 进行了编码。令 $x \in \mathcal{X}$，并写作$x = \lim_{i\to\infty} x_i$，其中 $x_i \in X$。由一致连续性可知，(1) 所给出的值 $V_n'(x)$ 是 $\lim_{i\to\infty} V_n'(x_i)$，其在 ACA_0 中作为实数存在。现在，假设 (c,d) 是一个包含 $V_n'(x)$ 的区间，并令 c', d' 满足 $c < c' < V_n'(x) < d' < d$。由于 V_n' 连续，当 δ 足够小时，我们看到 $V_n'[B_\delta(x)] \subseteq (c',d')$。令 $a \in X$ 满足 $d(a,x) < \delta/2$，从而 $x \in B_{\delta/2}(a) \subseteq B_\delta(x)$。于是$V_n'[B_{\delta/2}(a)] \subseteq (c',d')$，因此 $V_n'[B_{\delta/2}(a)]$ 被枚举于 $\Upsilon_n((c,d))$ 和 $x \in \Upsilon_n((c,d))$ 中。由于 c，d 是任意的，我们看到 x 根据 Υ_n 位于所编码函数的定义域中，而 $V_n'(x)$ 确实是赋予 x的值。□

考察复杂度不太高的点时，我们希望 V' 与 V 本质上看起来相同。下面的引理将这一点精确表述出来。

引理 6.3. 设 V 是定义在 $\mathcal{X}$ 上的势函数，且 $V' = \lim_{n\to\infty} V_n'$ 是 V 的一个 $\Sigma_{\prec}^{Z}$ 相对化。那么，对每个 $x \in \mathcal{X}'$，都有 $V(x) = V'(x)$。

证明。设 $x \in \mathcal{X}'$。根据 V_n' 的定义，我们看到可以将 y 实例化为 x，从而得到 $V_n'(x) \le V(x) + nd(x,x) = V(x)$，因此 $V'(x) \le V(x)$。

为了证明 $V(x) \le V'(x)$，我们证明对所有有理数 $\varepsilon > 0$，都有 $V(x) \le V'(x) + \varepsilon$。只需证明，对所有 $\varepsilon > 0$，都存在一个 n，使得 $V(x) \le V_n'(x) + \varepsilon$。

由于 V 是下半连续的，取 δ 使得 $d(x,y) < \delta$ 意味着 $V(y) \ge V(x) - \varepsilon$。选择 n 使得 $n\delta > V(x)$。于是，对于每个 $y \in \mathcal{X}'$，都有 $V(x) \le V(y) + nd(x,y) + \varepsilon$：若 $d(x,y) < \delta$，这是因为根据我们对 δ 的选择，$V(x) \le V(y) + \varepsilon$；否则，根据我们对 n 的选择，$V(x) \le n\delta \le nd(x,y)$。由此可得 $V(x) \le V_n'(y) + \varepsilon$，正如所需。□

如前所述， V' 旨在作为 V 的一个版本，其中高复杂度不连续点被去除。下面将对此作出精确定义。

引理 6.4. 设 $V\colon \mathcal{X} \to [0,\infty)$ 是任意一个势函数，且 V' a $\Sigma_{\prec}^{Z}$-相对化 of V。若 $x \in \mathcal{X}$ and$\varepsilon > 0$, 则存在 $y \in \mathcal{X}'$ such that $d(x,y) < \varepsilon$ and $V'(y) < V'(x) + \varepsilon$。

证明。反设 $x \in \mathcal{X}$and $\varepsilon > 0$are such that $V'(y) \geq V'(x)+\varepsilon$whenever$y \in \mathcal{X}'$is such that $d(x,y) < \varepsilon$。

取 $n > {}^{V'(x)}/_{\varepsilon} + 1$，并任取 $y \in \mathcal{X}'$。若 $d(x,y) < \varepsilon$，

$$V'(y) + nd(x,y) \geq V'(y) \geq V'(x) + \varepsilon,$$

而若 $d(x,y) \geq \varepsilon$，根据我们对 n 的选择可知

$$V'(y) + nd(x,y) \geq n\varepsilon > ({}^{V'(x)}/_{\varepsilon} + 1)\varepsilon = V'(x) + \varepsilon.$$

但由引理 6.3，$V(y) = V'(y)$，因此我们得出，对所有 $y \in \mathcal{X}'$，$V(y) + nd(x,y) \geq V'(x) + \varepsilon$。由 (1) 得到 $V'_n(x) > V'(x) + \varepsilon$，这与 $V'_n(x) \leq V'(x)$ 矛盾。□

由此，我们可以证明 V' 确实是被包络的。

引理 6.5（RCA_0）。设 V 是定义在 $\mathcal{X}$ 上的势函数，且 $V' = \lim_{n\to\infty} V'_n$ 是 $\Sigma^Z_\prec$ 对 V 的相对化。那么，对所有 n，$V'_n(x) = V'_{(n)}(x)$。

证明。固定 $x \in \mathcal{X}$。首先证明对任意的 $y \in \mathcal{X}$，$V'_n(x) \leq V'(y) + nd(x,y)$。令 $\varepsilon > 0$。根据引理 6.4，取 $y' \in \mathcal{X}'$，使得 $d(y,y') < {}^{\varepsilon}/_{2(n+1)}$ 且 $V'(y') < V'(y) + {}^{\varepsilon}/_{2}$。于是，

$$\begin{aligned} V'_n(x) &\leq V(y') + nd(x,y') && \text{根据 } V'_n \text{ 的定义，} \\ &= V'(y') + nd(x,y') && \text{由于 } y' \in \mathcal{X}', \\ &< V'(y) + nd(x,y) + \varepsilon && \text{根据我们对 } y' \text{ 的选择。} \end{aligned}$$

由于 ε 是任意的，$V'_n(x) \leq V'(y) + nd(x,y)$。

最后验证，若 $\varepsilon > 0$，则存在 $y \in \mathcal{X}$ 使得 $V'_n(x) + \varepsilon > V'(y) + nd(x,y)$。根据定义，$V'_n(x) = \inf_{y\in\mathcal{X}'}(V(y) + nd(x,y))$，因此我们可以选取 $y \in \mathcal{X}'$，使得 $V'_n(x) + \varepsilon > V(y) + nd(x,y)$。由于 $y \in \mathcal{X}'$，$V'(y) = V(y)$，于是

$$V'_n(x) + \varepsilon > V'(y) + nd(x,y),$$

如所要求。□

根据定理 5.2 和引理 5.3，ACA_0 证明所有被包络的势函数都有临界点，因此我们得到如下结论。

推论 6.6（ACA_0）。每个带参数 W 的相对化都有一个在 $W \oplus Z$ 中算术可定义的临界点（因此，当 $|\prec|$ 为无限集时，该临界点也是 $\Sigma^{W\oplus Z}_\prec$）。

有了这一点，我们可以为贝尔函数或博雷尔函数证明 Caristi 定理。

命题 6.7（树形拉姆齐原理$_0$）。对于任意下半连续势函数 V 以及任意贝尔函数或博雷尔函数 f，Caristi 不动点定理成立。

证明。由于树形拉姆齐原理$_0$ 扩展了 $\mathrm{ATR}_{0,}$，我们可以应用引理 A.5，得到每个贝尔函数都是博雷尔函数，因此不妨假设 f 是博雷尔函数。

设 $\mathcal{X}$ 为完备可分度量空间，设 $\Phi \subseteq \mathbb{N}\times X\times\mathbb{Q}^{>0}\times\mathbb{Q}$code 为 $\mathcal{X}$ 上的下半连续势函数，并设 f 为由 Υ 编码的类 ot($\prec$) 博雷尔函数；不妨假设 ot($\prec$) 是无限的。根据引理 6.2，V 具有带参数 W 的 $\Sigma^\Upsilon_\prec$ 相对化 V'；根据推论 6.6，V' 具有一个在 $W \oplus \Upsilon$ 中算术的临界点 x_*。由于树形拉姆齐原理$_0$ 扩展了 $\mathrm{ATR}_{0,}$，我们可以使用引理 3.6 来看出 $f(x_*)$ 是 $\Sigma^{W\oplus\Upsilon}_\prec$。我们有 $d(x_*, f(x_*)) \leq V(x_*) - V(f(x_*))$；又由于 $V(f(x_*)) = V'(f(x_*))$，$V(x_*) = V'(x_*)$，且 x_* 是 V' 的临界点，这就意味着 $x_* = f(x_*)$，正如所要求的那样。□

我们的下一个目标是证明，关于贝尔/博雷尔函数的卡里斯蒂不动点定理等价于 RCA_0 上的树形拉姆齐原理$_0$。作为第一步，我们证明，在 Baire 层次中相当低的阶段就已经可以证明 ATR_0。

定理 6.8。在 $\mathrm{RCA}_{0,}$ 上，Baire 类-1 f 的 Caristi 定理蕴含 ATR_0。

证明。由于连续函数的 Caristi 定理蕴含 $\mathrm{ACA}_{0,}$，我们可以在 ACA_0 上进行论证。回顾一下，公式 H 描述了关于 $\theta_*(n,Y)$ 的超限递归，该递归定义了相对于 Y 的通用可计算枚举集。在这里，我们可以放心地使用参数 $Y \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$，而非 $2^\mathbb{N}$ 的一个元素。根据范式定理，我们将 $\theta_*(n,Y)$ 写为 $\equiv \exists m\, \theta_0(m,n,Y\restriction m)$。

接下来，我们将模拟在 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上的超限递归。设 $\prec$ 是 $\mathbb{N}$ 上的良序。我们将通过 Δ^0_1-超限递归构造树序列 $\langle T_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}\rangle$；这一递归由 ACA_0 推出（见 [2,5]）。给定 $\alpha \in \mathbb{N}$ 和 $\langle T_\beta \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : \beta \prec \alpha\rangle$，我们令 $T^\alpha = \bigoplus_{\beta\prec\alpha} T_\beta := \{\sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} :$ 对于任意 $\beta < |\sigma|$，$\sigma_\beta \in T_\beta$，若 $\beta \prec \alpha$，则 σ_β 是由 0 组成的序列；否则为 $\}$，其中 $\sigma_i \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ 是 $\sigma_i(x) = \sigma(\langle x, i\rangle)$，若 $\langle x,$ 则 $i\rangle < |\sigma|$。（这里，定义域 $\mathbb{N}$ 可通过配对函数与 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 等同。不失一般性，我们可以假设 $\langle x,i\rangle \geq i$，其含义见 $\mathbb{N}$。）

接下来，我们从 T^α 构造 T_α。这里，值域 $\mathbb{N}$ 可以与 $\{0,1\}\times\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ 等同；对于给定的 $n = \langle s, \tau\rangle \in \mathbb{N}$，我们记 $s = (n)_0$ 和 $\tau = (n)'$。（这里的想法是，第二个坐标编码一条路径 $g \in [T^\alpha]$，第一个坐标则编码 g 的图灵跳跃。）接着，我们如下定义 T_α：$\sigma \in T_\alpha$ 若

- 对任意 $s < |\sigma|$，$s \leq |(\sigma(s))'|$ 和 $(\sigma(s))' \in T^\alpha$，
- 对任意 $t < s < |\sigma|$，$(\sigma(t))' \sqsubset (\sigma(s))'$，
- 对任意 $s < |\sigma|$，$(\sigma(s))_0 = 0 \to (\forall m \leq |(\sigma(|\sigma|-1))'|)\neg\theta_0(m, s, (\sigma(|\sigma|-1))' \upharpoonright m)$，并且
- 对任意 $s < |\sigma|$，$(\sigma(s))_0 = 1 \to (\exists m \leq |(\sigma(s))'|)\theta_0(m, s, (\sigma(s))' \upharpoonright m)$。

现在，令 $\langle T_\alpha \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} :\ \alpha \in \mathbb{N}\rangle$ 为超限递归的结果。若 $g \in [T_\alpha]$ 对某个$\alpha \in \mathbb{N}$成立，我们令 $(g)' := \bigcup\{(g(s))' :\ s \in \mathbb{N}\}$ 且 $(g)_0 := \{g : (g(s))_0 = 1\}$，则 $(g)' \in T^\alpha$ 且 $(g)_0 = \{n :\ \theta_*(n, (g)')\}$。此外，令 $f_\beta := ((g)')_\beta = \bigcup\{((g(s))')_\beta :$ 对 $\beta \prec \alpha,\ s \in \mathbb{N}\}$，且 $f_\alpha = g_0$。那么，根据定义，对于任意 $\beta \preccurlyeq \alpha$，我们有 $f_\beta \in [T_\beta]$。现在，通过对 α 作算术超限归纳，我们可以验证 f_β 计算出一个集合 Y^β，使得对于任意 $\beta \preccurlyeq \alpha$，$H_\theta(\prec_\beta, Y^\beta)$，其中 $\prec_\gamma$ 是 $\prec$ 在定义域 $\{\gamma' \in \mathbb{N} :\ \gamma' \prec \gamma\}$上的限制。因此，若 $\hat{}f \in [\bigoplus_{\alpha\in\mathbb{N}} T_\alpha]$，则对于任意 $\hat{}\alpha \in \mathbb{N}$，$(\hat{}f)_\alpha \in [T_\alpha]$，于是 f 计算出一个集合 Y，使得 $H(\prec, Y)$。

最后，我们构造一个 Caristi 系统，使其不动点成为 $\bigoplus_{\alpha\in\mathbb{N}} T_\alpha$ 的一条路径。我们定义势函数 V：$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to [0,\infty)$，令 $V(f) = \sum\{2^{-\alpha} : (f)_\alpha \notin [T_\alpha], \alpha \in \mathbb{N}\}$；由此在 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上定义了一个可在 ACA_0 ([4], 中与引理 A.4 一起证明的总势函数。我们将构造一个 Baire 1 类函数F：$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，它沿着 V“下降”。对于每个 $s \in \mathbb{N}$，我们将如下定义一个连续函数F_s：$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$。给定 $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，令 $I_{f,s} := \{\alpha < s : (f\upharpoonright s)_\alpha \notin T_\alpha, \alpha \in \mathbb{N}\}$。如果 $I_{f,s} = \varnothing$，则令 $F_s(f) = f_\emptyset$。否则，令 β_s 为 I_f 中按 $\prec$-最小的元素。若 $\gamma \neq \beta_s$，则置 $(F_s(f))_\gamma = (f)_\gamma$；并将 $(F_s(f))_{\beta_s}$ 定义为由（f^{β_s} 的 s-近似）计算出的 T_{β_s} 的一条路径的 s-近似：$= \bigoplus_{\gamma\prec\beta_s} f_\gamma$。（注意，根据定义，$f^{\beta_s}\upharpoonright s \in T^{\beta_s}$。）更正式地，我们如下定义 $h = (F_s(f))_{\beta_s}$：对于 $t < s$，归纳定义 $h(t)$，令其为 $h(t) = (0, f^{\beta_s}\upharpoonright \bar{t})$，如果 $(\forall m \leq s)\neg\theta_0(m, t, f^{\beta_s}\upharpoonright m)$ 且 $\bar{t} = \max\{t\} \cup \{|(h(t'))'| :\ t' < t\}$；如果 $\bar{t}$ 是满足 $(\exists m \leq u)\theta_0(m, t, f^{\beta_s}\upharpoonright m)$ 且 $u \geq \max\{t\} \cup \{|(h(t'))'| :\ t' < t\}$ 的最小 $u \leq s$，则令其为 $h(t) = (1, f^{\beta_s}\upharpoonright \bar{t})$；并对 $t \geq s$ 置 $h(t) = 0$。不难验证，这样的 F_s 是连续的。

$\hat{}$若 $f \in [\bigoplus_{\alpha\in\mathbb{N}} T_\alpha]$，则对任意 $s \in \mathbb{N}$，$F_s(f) = f$。否则，令 β 为满足 $\hat{}(f)_\alpha \notin [T_\alpha]$ 的 $\prec$-最小的 α。于是，当 s 足够大时，$\beta_s = \beta$。因此，$g = \lim_{s\to\infty} F_s(f)$ 存在，并且对任意 $\gamma \neq \hat{}\beta$，$(g)_\gamma = (f)_\gamma$，且 $(g)^\hat{}_\beta \in [T^\hat{}_\beta]$。此外，我们有 $d(f,g) \leq 2^{-\hat{}\beta} \leq V(f) - V(g)$。因此，$F = \lim_{s\to\infty} F_s$ 存在，$(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, F, V)$ 构成一个 Caristi 系统，其不动点是 $\bigoplus_{\alpha\in\mathbb{N}} T_\alpha$ 的一条路径。□

问题 6.9. ATR_0 中能否证明贝尔第 1 f 类的 Caristi 定理?

定理 6.10 (RCA_0)。以下命题等价:

(1) TLPP_0,; (2) 对贝尔 f 的 CFP; (
3) 对博雷尔 f 的 CFP; 以及 (4) 在贝
尔空间上对博雷尔 f 的 CFP。

证明。由命题 6.7，第一个命题推出第三个命题。此外，第一个命题也推出第二个命题，因为 TLPP_0 蕴含 ATR_0，因此由引理 A.5 可知，每个贝尔函数都是博雷尔函数。为证明第二个命题推出第四个命题，由定理 6.8 可知，第二个命题蕴含 ATR_0,，因此根据引理 A.7，它蕴含每个从 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 到自身的博雷尔函数都是贝尔函数，故第四个命题成立。

为了完成这一循环，还需证明第四条蕴含第一条。根据定理 5.10 和 6.8，我们可以在 ATR_0 中进行论证。利用引理 2.4，我们将证明其等价形式：给定一个树序列 $\langle T_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ 和一个良序 $\prec$，我们将得到一对集合 Z_0, Z_1，使得 $n \in Z_0$ 当且仅当存在一条穿过 T_n 的路径，该路径是 $\Sigma^{Z_0\oplus Z_1\oplus\langle T_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}}_\prec$。为此，我们定义 V：$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to [0,\infty)$ by$V(f) = \sum\{2^{-i} : (f)_i \notin [T_i]\}$，如定理 6.8 的证明所示。

我们希望定义一个博雷尔函数 $F\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，令 $F(f)$ 搜寻一个 g，它是 f 为 V 的临界点这一说法的反例，而且其复杂度不会比 f 高出太多。令 $\prec'$ 为 $\prec$ 的后继序。然后选取部分可计算函数的一个一致枚举 $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$；给定 f，令 Y_f 为满足 $H(\prec', Y_f, f \oplus \langle T_n\rangle_{n\in\mathbb{N}})$ 的集合。于是，对于每个满足 $\psi_e^{Y_f}$ 为全函数的 e，我们可以令 $g_e = \psi_e^{Y_f}$。我们希望选取 $F(f)$ 为 g_e，其中 e 是满足 $0 < d(f, g_e) \leq V(f) - V(g_e)$ 的最小值（如果存在这样的 e）；否则取 f。

我们需要验证 F 是博雷尔集。只需证明，对于任意有限序列 $\sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$，满足存在 e 使得 $\psi_e^{Y_f}$ 存在且满足 $\sigma \sqsubset g_e$ 和 $0 < d(f, g_e) \leq V(f) - V(g_e)$ 的 f 所构成的集合是博雷尔集。

关键一步是将 Y_f 的构造转化为关于博雷尔集的陈述。我们对 $\alpha \in |\prec'|$ 进行递归，证明满足 $m \in (Y_f)_\alpha$ 的 f 所构成的集合是博雷尔集：当 α 最小时，$m \in (Y_f)_\alpha$ 当且仅当 $\theta_*(m, \varnothing, f \oplus \langle T_n\rangle_{n\in\mathbb{N}})$；并且由于 θ_* 是 Σ^0_1，这样的 f 构成的集合是开集，即所有能够见证这一点的初始段之并。

假设对于所有 m，满足 $m \in (Y_f)_{\prec\alpha}$ 的 f 构成的集合都是博雷尔集。那么，当且仅当 $\theta_*(m, (Y_f)_{\prec\alpha}, f \oplus \langle T_n\rangle_{n\in\mathbb{N}})$ 时，$m \in (Y_f)_\alpha$。这是一些集合的并；根据递归，这些集合是博雷尔集与开集的交，因此本身也是博雷尔集。特别地，对于每个 e，满足 $\psi_e^{Y_f}$ 的 f 构成的集合是博雷尔集。

满足 $V(f) < q$ 的 f 构成的集合显然是博雷尔集。由于对于任意 i 和 j，满足 $\psi_e^{Y_f}(i) = j$ 的 f 构成的集合都是博雷尔集，因此对于任意有理数 q，满足 $0 < d(f, g_e) < q$ 的 f 构成的集合也是博雷尔集，满足 $V(g_e) < q$ 的 f 构成的集合亦然。于是，满足 $0 < d(f, g_e) \leq V(f) - V(g_e)$ 的 f 构成的集合，恰好是这样一个集合：其中每一对 q, q' 若满足 $V(f) < q$ 且 $V(g_e) \geq q'$，则 $0 < d(f, g_e) < q - q'$。该集合也属于博雷尔集。

因此，函数 F 是博雷尔函数。根据博雷尔函数的 CFP，存在 F 的一个不动点 f_*，因此 $F(f_*) = f_*$。令 $X = \{\beta : (f_*)_\beta \in [T_\beta]\}$。显然，若 $\beta \in X$，则 T_β 有一条路径。反过来，假设 $\beta \notin X$，并反设 T_β 有一条路径 h，且该路径是 $\Sigma^{X\oplus f_*\oplus\langle T_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}}_{\prec}$。那么我们可以定义 $g(\langle\gamma, n\rangle)$：当 $\gamma = \beta$ 时取 $h(n)$，否则取 $f_*(\langle\gamma, n\rangle)$，因此 g 是 $\Sigma^{X\oplus f_*\oplus\langle T_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}}_{\prec}$，从而$\Sigma^{f_*\oplus\langle T_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}}_{\prec'}$。由此可知，存在某个 e 使得 $g = g_e$。

此外，$0 < d(f_*, g) \leq 2^{-\langle\beta,\ 0\rangle} \leq 2^{-\beta} = V(f_*) - V(g)$，这意味着对于满足 $0 < d(f_*, g_{e_0}) \leq V(f_*) - V(g_{e_0})$ 的最小e_0，有 $F(f_*) = g_{e_0}$，因此必有 $F(f_*) \neq f_*$，这就产生了矛盾。因此，X 和 f_* 是所需的见证。□

Appendix A. Remarks on Function Codes

为了在形式化 Caristi 定理时保持一定的普遍性，我们的阐述以贝尔编码和博雷尔编码为基础。本附录将说明这些编码彼此之间以及它们与文献中使用的其他编码之间的关系。

首先，我们回顾一下例如 [13] 中使用的连续函数的标准编码。

定义 A.1（RCA_0；[13, 定义 II.6.1]）。设 $\mathcal{X} = X$ 和 $\mathcal{Y} = Y$ 为完备可分度量空间。连续部分函数 $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 由满足以下性质的集合 $\Phi \subseteq \mathbb{N} \times X \times \mathbb{Q}^{>0} \times Y \times \mathbb{Q}^{>0}$ 编码。记 $B_r(a) \overset{\Phi}{\to} B_q(b)$ 表示 $\exists n(\langle n, a, r, b, q\rangle \in \Phi)$。那么，对于所有 a、$a' \in X$，所有 q、$q' \in \mathbb{Q}$，以及所有 r、$r' \in \mathbb{Q}^{>0}$、Φ，均应满足：

(CF 1) 若 $B_r(a) \overset{\Phi}{\to} B_q(b)$ 且 $B_r(a) \overset{\Phi}{\to} B_{q'}(b')$，则 $d(b, b') \leq q + q'$；
(CF 2) 若 $B_r(a) \overset{\Phi}{\to} B_q(b)$ 且 $B_{r'}(a') \Subset B_r(a)$，则 $B_{r'}(a') \overset{\Phi}{\to} B_q(b)$；
(CF 3) 若 $B_r(a) \overset{\Phi}{\to} B_q(b)$ 且 $B_q(b) \Subset B_{q'}(b')$，则 $B_r(a) \overset{\Phi}{\to} B_{q'}(b')$。

点 $x \in \mathcal{X}$ 属于由 Φ 编码的函数 f 的定义域，当且仅当对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $B_r(a) \overset{\Phi}{\to} B_s(b)$，使得 $d(x, a) < r$ 且 $s < \varepsilon$。若 $x \in \mathsf{dom}(f)$，则我们将值 $f(x)$ 定义为唯一的点 $y \in \mathcal{Y}$，使得对于所有满足 $d(x, a) < r$ 的 $B_r(a) \overset{\Phi}{\to} B_s(b)$，都有 $d(y, b) \leq s$。

引理 A.2（RCA_0）。设 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$为度量空间。函数 $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$当且仅当能够被编码为一个博雷尔函数，且每个开球的原像都是开集时，才能在定义 A.1 的意义下被编码为连续函数。

证明概要。若 Φ 是连续函数 f 的代码，而 $B_s(b)$ 是 $\mathcal{Y}$ 中的任意开球，我们可以通过枚举 $B_r(a)$ 来枚举 $f^{-1}[B_s(b)]$，只要 $B_r(a) \overset{\Phi}{\to} B_{s'}(b')$，其中 $d_{\mathcal{Y}}(b, b') + s' < s$（后者是

所必需的，因为 $B_r(a) \overset{\Phi}{\to} B_{s'}(b')$ 只能保证 $B_r(a) \subseteq f^{-1}[\overline{B_s(b)}]$ 。反之，若 Ψ 是 f 的博雷尔编码，我们注意到，对于 $B_s(b) \subseteq \mathcal{Y}$， $f^{-1}[B_s(b)]$ 以 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{r_i}(a_i)$ 的形式表示。因此，当 $a = a_i$ 且对于某个 i 有 $r = r_i$ 时，我们枚举 $B_r(a) \overset{\Phi}{\to} B_s(b)$。□

事实上，引理 A.2 的证明是有效的，因为存在（可在 RCA_0 中证明的） Δ^0_1公式，它们定义了用于这些编码转换的图灵泛函，因此，任何一种方式的函数编码序列都可以转换为另一种方式的编码序列。

[4] 的结果最初是针对以下下半连续函数编码提出的，但正如我们将看到的，它与我们对这些函数的贝尔表示等价。

定义 A.3（RCA_0； [4, 定义 4.1]）。设 $\mathcal{X}$ 为一个完备可分度量空间。下半连续部分函数 $V\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ 由满足以下性质的集合 $\Psi \subseteq \mathbb{N} \times X \times \mathbb{Q}^{>0} \times \mathbb{Q}$ 编码。令 $B_r(a) \overset{\Psi}{\rightharpoonup} q$ 表示 $\exists n(\langle n, a, r, q\rangle \in \Psi)$。则 Ψ 必须满足：对所有a、 $a' \in X$，所有 q、 $q' \in \mathbb{Q}$，以及所有 r、 $r' \in \mathbb{Q}^{>0}$，

（LSC 1）如果 $B_r(a) \overset{\Psi}{\rightharpoonup} q$ 且 $B_{r'}(a') \Subset B_r(a)$，那么 $B_{r'}(a') \overset{\Psi}{\rightharpoonup} q$；而（LSC 2）如果 $B_r(a) \overset{\Psi}{\rightharpoonup} q$ 且 $q' < q$，那么 $B_r(a) \overset{\Psi}{\rightharpoonup} q'$。

点 $x \in \mathcal{X}$ 属于由 Ψ 编码的函数 V 的定义域，当且仅当

$$y = \sup\{q \in \mathbb{Q} : (\exists\langle a, r\rangle \in X \times \mathbb{Q}^{>0})(B_r(a) \overset{\Psi}{\rightharpoonup} q \wedge d(x, a) < r)\}$$

存在，此时 $V(x) = y$。如果 V 的陪域为 $[0, \infty)$ （也就是说，对于每个 a， $B_r(a) \overset{\Psi}{\rightharpoonup} 0$），我们称 V 为势函数。

设 $\mathcal{X}$ 是一个完备可分度量空间。定义 A.3 背后的想法是， Ψ 枚举满足以下性质的配对 $\langle B_r(a) [q, \infty)\rangle$：如果 V 是由 Ψ 编码的函数，且 x 属于 $B_r(a) \cap \mathrm{dom}(V)$，那么 $V(x)$ 就属于 $[q, \infty)$。

引理 A.4.

(1) 在 RCA_0，中可证明：函数 f 具有定义 A.3 所给出的下半连续代码，当且仅当它是连续函数的逐点递增极限。(2) 在 Π^1_1-CA_0，中可证明：对于每个势函数 f 和每个 $\alpha > 0$， f 的 α-包络存在。

证明概要。第二个结论已在 [4]，中证明，因此我们聚焦于第一个结论。首先，我们近似开球的示性函数 $\chi_{B_r}(a)$；对于 $\varepsilon \in \in(0, 1)$，定义 $\chi_\varepsilon(x)$：若 $x \in B_{r(1-\varepsilon)}(a)$，则取 1；若 $x \notin B_r(a)$，则取 0；否则取 $\chi_\varepsilon(x) = 1/\varepsilon - d(a,x)/\varepsilon r$。然后，若定义 $\chi^n_{B_r}(a) := \chi_{2^{-n-1}}$，显然当 $n \to \infty$ 时，$\chi^n_{B_r}(a) \to \chi_{B_r}(a)$。若 $\langle\langle B_i, q_i\rangle : i < m\rangle$ 是由开球和正有理数组成的数对的元组，我们也可以类似地用 $\max_{i<m} q_i\chi^n_{B_i}$ 近似 $\max_{i<m} q_i\chi_{B_i}$。若将一个下半连续代码 Ψ 枚举为 $\{\langle B_i, q_i\rangle : i \in \mathbb{N}\}$，则可以通过对 V 作对角近似 $\max_{i<n} q_i\chi^n_{B_i}$，进而近似由 Ψ 编码的函数 V。

反过来，若 $V = \lim_{n\to\infty} V_n$，其中 $\langle V_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ 逐点递增，我们可以通过以下方式为V定义一个代码：若存在 n 使得对所有 $x \in B$， $V_n(x) > q$，则令 $B \overset{\Psi}{\rightharpoonup} q$；此代码可从 V_n的连续代码中提取。□

引理 A.5（ATR_0）。每个贝尔函数都是博雷尔函数。

证明。设 $f = f_\Xi$ 是由 Ξ 编码的贝尔函数。只需证明，对于所有 $B_r(a)$，原像 $f^{-1}[B_r(a)]$ 都是博雷尔集，且这一构造是一致的。我们对 Ξ 进行递归来证明这一点。 f 连续时的情形由引理 A.2 给出，因此我们假设情况并非如此。

假设我们有 $f = \lim_{n\to\infty} f_n$，且每个 f_n 都是一个博雷尔函数。那么我们可以令

$$f^{-1}[B_r(a)] = \bigcup_{r'<r} \bigcup_{n} \bigcap_{m\geq n} f_m^{-1}[B_{r'}(a)].$$

□

一般而言，并非每个博雷尔函数都是贝尔函数，但对于许多特定空间，这一结论确实成立。不过，对于零维空间，它确实成立；零维空间是指具有由既开又闭的球构成的基的空间。

引理 A.6（ATR_0）。如果 $\mathcal{X}$ 是零维的，那么从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathbb{N}$ 的每个博雷尔函数都是贝尔函数。

在开始证明之前，先稍微细化一下定义会有所帮助。令 $\mathcal{A}$ 为由 $\mathcal{X}$ 的基本闭开集生成的代数——也就是说，由基本闭开集经过取补集、有限并和有限交生成的集合族。我们可以选择一种编码方式，用自然数来编码 $\mathcal{A}$ 的元素。

接下来，我们对博雷尔编码的概念稍作修改。首先，我们将范围限制在这样的编码：各层在并集与交之间交替——也就是说，具有形式 $\bigcup_n \bigcap_m \bigcup_p \cdots$。通过压缩奇偶性相同的连续数字段，我们可以轻松地从不具备这一性质的编码得到具备该性质的编码。例如，当 $\sigma^\frown\langle 2n\rangle \in S$ 不是叶节点时，我们可以将该节点替换为如下形式的节点

$$\sigma^\frown\langle 2\langle 2n, 2m_1, \ldots, 2m_k\rangle\rangle$$

使得 $\sigma^\frown\langle 2n、\ 2m_1、\ \ldots\ldots、\ 2m_k\rangle \in S$，同样地，也可以将连续的奇数段转换为单个奇数。

其次，我们要求顶层为并集——也就是说，除非 S 仅包含一个叶节点，否则我们要求唯一的 n 满足 $\langle n\rangle \in S$ 为奇数。这很容易实现，因为如果 S 不具备这一性质，我们就将其替换为 $\{\langle 1\rangle^\frown\sigma :\ \sigma \in S\}$。

最后，我们允许叶节点标记为 $\mathcal{A}$ 中的元素；这不会改变哪些集合是博雷尔集，不过可能会略微降低复杂度。为证明之便，我们将这些称为干净的博雷尔编码。注意，由于叶节点标记为 $\mathcal{A}$ 中的元素，干净的博雷尔编码并不完全是博雷尔编码。尽管如此，博雷尔编码的基本性质对于干净的博雷尔编码同样成立，证明也无需作任何改动。

干净的博雷尔编码的优点在于，我们可以轻松地取有限并和交，而不改变复杂度；取补集时，复杂度至多增加一（因为需要在根部额外添加一个平凡的并集步骤）。

引理 A.6 的证明。我们假设 f 已作为一个规范博雷尔函数给出——也就是说，f 的代码为我们提供了对每个 n，一个 $f^{-1}(n)$ 的干净博雷尔编码。

我们将定义一棵良基树 U，并为每个节点 $\sigma \in U$ 定义一个规范博雷尔函数 f_σ。此外，我们还需要为所用的博雷尔编码给出某种序数界，以确保随着我们沿着 U 前往更大的节点，编码会逐渐变得更简单；我们采用的方法效率不高，但相对容易描述。取一棵将所有 f 的博雷尔编码合并起来的树——也就是说，这棵树 Υ 的分支由 $\mathbb{N}$ 编号，而在每个 n 上方，都有 $f^{-1}(n)$ 的博雷尔编码 S^n。那么 Υ 是一棵良基树。

对于每个 σ 和每个 n，我们将有一个赋值 π^n_σ，从编码 $f_\sigma^{-1}(n)$ 的树 S^n_σ 到 Υ，使得若 $\tau \sqsubset \tau'$，则 $\pi^n_\sigma(\tau') <_{\mathrm{KB}(\Upsilon)} \pi^n_\sigma(\tau)$。我们有 $\langle\rangle \in U$ 和 $f_{\langle\rangle} = f$。映射 $\pi^n_{\langle\rangle}$ 是将 S^n 包含到 Υ 中的包含映射。

如果对于每个 n，$f_\sigma^{-1}(n)$ 都表示为 $\mathcal{A}$ 的一个元素（也就是说，$f_\sigma^{-1}(n)$ 的干净的博雷尔编码只是一个标记着 $\mathcal{A}$ 的单独叶节点），那么 σ 就是 U 的一个叶节点。

否则，我们将定义一个函数序列 $f_{\sigma^\frown\langle s\rangle}$，使得 $\lim_{s\to\infty} f_{\sigma^\frown\langle s\rangle} = f_\sigma$。如果任意 $f_\sigma^{-1}(n) = B \in \mathcal{A}$，我们可以将其替换为 $f_\sigma^{-1}(n) = \bigcup_{i=1}^1 B$，因此我们假设对于所有 n，$f_\sigma^{-1}(n) = \bigcup_i S^n_i$。假设以下两种情况之一成立：$\{\pi^n_\sigma(\langle\rangle) :\ n \in \mathbb{N}\}$ 没有最大元素，或者对于任意 i，$S^n_i \in \mathcal{A}$ $n \in \mathbb{N}$。那么我们定义

$$f^{-1}_{\sigma^\frown\langle s\rangle}(n) = \bigcup_{i\le s} S^n_i$$

对于 $n < s$，

$$f^{-1}_{\sigma^\frown\langle s\rangle}(s) = \bigcap_{n<s}\bigcap_{i\le s} \overline{S^n_i}$$

并且 $f^{-1}_{\sigma^\frown\langle s\rangle}(n) = \varnothing$ 对于 $n > s$。于是显然 $\lim_{s\to\infty} f_{\sigma^\frown\langle s\rangle} = f_\sigma$。函数 $\pi^n_{\sigma^\frown\langle s\rangle}$可以通过尽可能沿用 π^n_σ 的定义，以显而易见的方式定义；而在$\pi^n_{\sigma^\frown\langle s\rangle}$中，将额外的层映射到后继节点。特别地，$\sup_n \pi^n_{\sigma^\frown\langle s\rangle}(\langle\rangle) < \sup_n \pi^n_\sigma(\langle\rangle)$。

否则，$\{\pi^n_\sigma(\langle\rangle) :\ n \in \mathbb{N}\}$ 有最大元素，并且至少有一个 $f_\sigma^{-1}(n)$ 具有 $\bigcup_i \bigcap_j S^n_{i,j}$ 的形式；那么，同样地，我们可以假设每个 $f_\sigma^{-1}(n)$ 都具有这种形式（通过用 $\bigcup_i \bigcap_{j=1}^1 B_i$替换 $\bigcup_i B_i$）。对于每个 s 和 n，我们设

$$f^{-1}_{\sigma^\frown\langle s\rangle}(n) = \bigcup_{t_1}\left[\bigcap_{m\le s} S^n_{t_1,m} \cap \bigcap_{\langle u_0,u_1\rangle<\langle n,t_1\rangle}\bigcup_{m\le s}\overline{S^{u_0}_{u_1,m}}\right].$$

也就是说，通过寻找满足 $x \in \bigcap_{m\le s} S^n_{t_1,m}$ 的最小数对 $\langle n, t_1\rangle$ 来选取 $f_{\sigma^\frown\langle s\rangle}(x)$。显然，这样的数对 $\langle n, t_1\rangle$ 存在且唯一，因此 $f_{\sigma^\frown\langle s\rangle}$ 也定义了一个唯一的博雷尔函数。由于对每个 x，都存在一个 n，使得对于某些 t_1, $x \in \bigcap_m S^n_{t_1,m}$，存在足够大的有限 s，使得$s \notin \bigcup_{\langle u_0,u_1\rangle<\langle n,t_1\rangle} \bigcap_{m\le s} S^{u_0}_{u_1,m}$，因此 $f_{\sigma^\frown\langle s\rangle}(x) = f_\sigma(x)$；特别地，函数 $f_{\sigma^\frown\langle s\rangle}$逐点收敛到 f_σ。

我们需要定义这些函数 $\pi^n_{\sigma^\frown\langle s\rangle}$，并且必须稍加谨慎，以确保 $\sup_n \pi^n_{\sigma^\frown\langle s\rangle}(\langle\rangle) < \sup_n \pi^n_\sigma(\langle\rangle)$。为简单起见，假设每个 $S^n_{t_1,m} = \bigcup_j S^n_{t_1,m,j}$。（对于不满足此条件的情形，$S^n_{t_1,m} \in \mathcal{A}$，编码方式类似但更简单。）于是，对每个 t_1,

$$\bigcap_{m\le s} S^n_{t_1,m} \cap \bigcap_{\langle u_0,u_1\rangle<\langle n,t_1\rangle} \bigcup_{m\le s} \overline{S^{u_0}_{u_1,m}} = \bigcup_{j_1,\dots,j_s} \left[\bigcap_{m\le s} S^n_{t_1,m,j_m} \cap \bigcap_{\langle u_0,u_1\rangle<\langle n,t_1\rangle} \bigcup_{m\le s} \overline{S^{u_0}_{u_1,m}} \right],$$

利用干净博雷尔编码在有限并与交下的封闭性，并集的内部是一个单独的干净博雷尔编码。注意，π^n_σ 将对应于每个 $S^{u_0}_{u_1,m}$（或 $S^n_{t_1,m}$）的节点映射到 $\sup_n \pi^n_{\sigma^\frown\langle s\rangle}(\langle\rangle)$ 下方至少三层的节点（其上必须有一个节点对应 $\bigcap_j$，接着一个节点对应$\bigcup_i$，然后是博雷尔编码的根节点）。通过映射到各层的最大节点，我们可以安排使 $\pi^n_{\sigma^\frown\langle s\rangle}$ 也将此交的根节点映射到 $\sup_n \pi^n_{\sigma^\frown\langle s\rangle}(\langle\rangle)$ 下方至少三层的位置。然后，我们可以将 t_1、j_1、……、j_s 上的并集映射到紧邻其上的一层，并将根节点映射到再上一层。特别地，$\pi^n_{\sigma^\frown\langle s\rangle}(\langle\rangle) + 1 \le \sup_n \pi^n_\sigma(\langle\rangle)$，因此 $\sup_n \pi^n_{\sigma^\frown\langle s\rangle}(\langle\rangle) < \sup_n \pi^n_\sigma(\langle\rangle)$。

由于 $\mathrm{KB}(\Upsilon)$ 是良序的，从 U到 Υ 的映射 $\sigma \mapsto \sup_n \pi^n_\sigma(\langle\rangle)$ 表明 U是良基的。U 的叶节点 σ 是函数，其中每个 $f_\sigma^{-1}(n) \in \mathcal{A}$；并且由于每个开球都是开闭集，$\mathcal{A}$ 的每个元素都是开集，因此 f_σ^{-1}是连续的。我们可以将每个叶节点替换为一个代码，表示 f_σ 作为连续函数，因此我们得到了 f 作为贝尔函数的表示。□

引理 A.7 (ATR_0)。从 $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ 到其自身的每个博雷尔函数都是贝尔函数。

证明。首先，给定一个由 Υ编码的博雷尔函数 f，令 $f'\colon \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 为如下函数：它将$\langle \Lambda, n\rangle$ 映射到 $f(\Lambda)$ 的第 n 个位置。我们将 $\mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 视为一个度量空间，其中 $d(\langle\Lambda, n\rangle, \langle\Lambda', n'\rangle) = 2$当且仅当 $n \ne n'$且 $d(\langle\Lambda, n\rangle, \langle\Lambda', n\rangle) = d(\Lambda, \Lambda') \le 1$。那么 f'也是博雷尔函数：a的原像是所有满足 $n \in \mathbb{N}$ 且存在 $\sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ 使得 $\sigma(n) = a$ 的集合 ${}^{U\Upsilon_{\langle\sigma, 2^{-|\sigma|}\rangle}} \times \{n\}$ 的并集。

根据前述引理，f'也是贝尔函数。取（连续的）叶节点f'_σ：$\mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，我们可以定义 f_σ：$\mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$，使得 $f_\sigma(\Lambda) = \langle f'_\sigma(\langle\Lambda, n\rangle)$：$n \in \mathbb{N}\rangle$。这个函数仍然连续，并且保持$f'_\sigma$ 序列的极限，因此同一棵树给出了 f 作为贝尔函数的表示。□

Funding

Fern´andez-Duque 获得了 FWO-FWF 主导机构资助项目 G030620N（FWO）/I4513N（FWF）的支持。Shafer 获得了弗兰德斯科学研究基金会的 Pegasus 项目、约翰·邓普顿基金会资助项目 ID 60842「直觉主义的新曙光：数学与哲学进展」以及 EPSRC 资助项目 EP/T031476/1「一般拓扑学的逆向数学」的支持。本文所表达的观点仅代表作者本人，并不一定反映约翰·邓普顿基金会的观点。Towsner 获得了 NSF 资助项目 DMS-2054379 的部分支持。Yokoyama 获得了 JSPS KAKENHI 资助项目 19K03601 和 21KK0045 的部分支持。

Acknowledgments

David Fern´andez-Duque 谨向 Carlos Bosch Giral、C´esar LuisGarc´ıa Garc´ıa、Claudia G´omez Wulschner、Rigoberto Vera Mendoza 以及 ITAM 分析学研讨会的其他与会者致谢，感谢他们向他介绍 Caristi 定理，并进行了许多富有成效的讨论。

References

[1] J. Caristi, *Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions*, 《美国数学会汇刊》215（1976），241–251。[2] D. Dzhafarov、S. Flood、R. Solomon 和 L. Westrick, *Effectiveness for the dual Ramsey theorem*, 《圣母大学形式逻辑杂志》62（2021），第3期，455–490。[3] I. Ekeland, *On the variational principle*, 《数学分析与应用杂志》47（1974），第2期，324–353。

[4] D. Fern´andez-Duque, P. Shafer, 和 K. Yokoyama, *Ekeland's variational principle in weak and strong systems of arithmetic*, **26**, 2020, 68, Selecta Mathematica（）, 第 期。[5] A. Freund, *What is effective transfinite recursion in reverse mathematics?*, **66**, 2020, 4, 479–483, MLQ Math. Log. Q.（）, 第 – 期。[6] F. Khojasteh、E. Karapinar 和 H. Khandani, *Some applications of Caristi's fixed point theorem in metric spaces*, Fixed Point Theory and Applications 16（2016）, 第 1 期。[7] W. A. Kirk, *Transfinite methods in metric fixed-point theory*, **2003**, 2003, 5, 311–324, Abstract and Applied Analysis（）, 第 – 期。[8] A. Marcone, *On the logical strength of Nash-Williams' theorem on transfinite sequences*, Logic: from foundations to applications（斯塔福德郡, 1993）, 1996, 第 327–351 页。[9] W. Peng 和 T. Yamazaki, *Two kinds of fixed point theorems and reverse mathematics*, Mathematical Logic Quar- terly 63（2017）, 第 5 期, 454–461。[10] S. Priess-Crampe 和P. Ribenboim, *Ultrametric spaces and logic programming*, The Journal of Logic Programming 42（2000）, 第 2 期, 59–70。[11] , *Ultrametric dynamics*, Illinois J. Math. 55（2011）, 第 1 期, 287–303。[12] Y. Savateev 和 D. S. Shamkanov, *Non-well-founded proofs for the Grzegorczyk modal logic*, Rev. Symb. Log. 14（2021）, 第 1 期, 22–50。[13] S. G. Simpson, *Subsystems of Second Order Arithmetic*, Second, Perspectives in Logic, 剑桥大学出版社, 剑桥; 符号逻辑协会, 波基普西, NY, 2009。[14] H. Towsner, *Partial impredicativity in reverse mathematics*, J. Symbolic Logic 78（2013）, 第 2 期, 459–488。[15] X. Yu, *Riesz representation theorem, Borel measures and subsystems of second-order arithmetic*, Ann. Pure Appl. Logic 59（1993）, 第 1 期, 65–78。

Department of Mathematics WE16, Ghent University, Ghent, Belgium and Institute of ComputerScience, Czech Academy of Sciences, Prague, Czech Republic
Email address: fernandez@cs.cas.cz*URL*: https://users.ugent.be/~dfernnde/

School of Mathematics, University of Leeds, Leeds, UK
Email address: p.e.shafer@leeds.ac.uk*URL*: http://www1.maths.leeds.ac.uk/~matpsh/

Department of Mathematics, University of Pennsylvania, Philadelphia, USA
Email address: htowsner@math.upenn.edu*URL*: https://www.sas.upenn.edu/~htowsner/

Mathematical Institute, Tohoku University, Sendai, Japan*Email address*: keita.yokoyama.c2@tohoku.ac.jp*URL*: http://www.math.tohoku.ac.jp/english/people/yokoyama-e.html