arXiv:2302.08925v1 [math.DG] 17 Feb 2023

等距　离散与光滑 T 曲面的等距变形

IVAN IZMESTIEV、ARVIN RASOULZADEH 和 JONAS TERVOOREN

Abstract. 四边形曲面是由四边形面构成、具有方格网组合结构的多面体曲面。一般的四边形曲面是刚性的。T-多面体是一类可弯曲的四边形曲面，由 Graf 和 Sauer 于 1931年提出。著名的三浦折纸、离散旋转曲面和离散模具曲面，都是 T-多面体的具体实例。我们给出了 T-面体等距变形的显式参数化。T-多面体还有一种光滑对应物，即 T-曲面。对于这类曲面，我们分别给出综合描述和解析描述，二者都与相应的 T-多面体描述相似。我们还对 T-曲面的等距变形进行了参数化，并讨论了其可变形范围。

关键词： 四边形曲面、等距变形、可变形设计、三浦折纸。

1. Introduction

四边形曲面是一种多面体曲面，其四边形面按照方格网的组合方式连接，示例见图 1。对此定义也有一些限制较少的版本，允许四边形弯曲，或允许不同数量的四边形在同一顶点相交；但本文采用上述定义。四边形曲面在自由形态建筑中颇受欢迎，原因有若干。例如，四边形曲面的平均顶点度为四，而非三角剖分曲面的六，这一特点简化了梁连接的制造。设计具有特定形状和局部性质的四边形曲面，会引出有趣而深刻的数学问题。有关主要方面及相关文献的综述，请参阅 Davide Pellis [1]的博士论文。

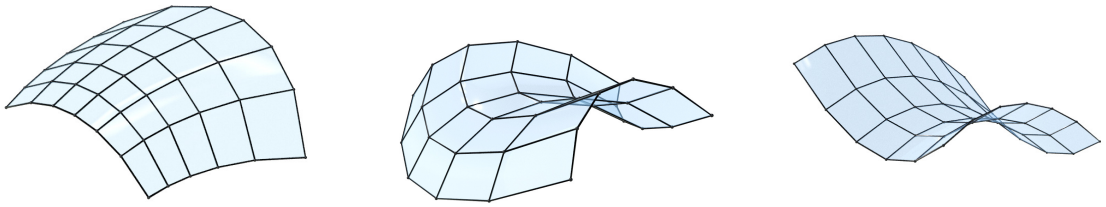

Figure 1. 四边形曲面示例。

一般的四边形曲面是刚性的，也就是说，它无法在每个面都作为刚体运动、同时面与面之间的二面角发生变化的情况下变形。相反，三角剖分曲面通常是柔性的，其自由度数量大致等于边界顶点的数量。柔性四边形曲面十分罕见，通常以一个自由度变形，因此在建筑和工程的可变形设计中颇具吸引力。一个著名的例子是三浦折纸（Miura-ori 或 Miura fold），如图 12 所示；它曾用于日本航天计划的太阳能电池板设计 [2]。过去几十年间，人们提出了三浦折纸的若干种改型， [3, 4, 5]。

近一个世纪前，Graf 和 Sauer [6] 开启了对可动四边形曲面的研究，并描述了两类可动四边形曲面。三浦折纸属于这两类。大约在同一时期，Kokotsakis [7] 研究了一类特殊多面体的柔性和无穷小柔性，这类多面体包括

四边形曲面，并为后者发现了一系列不同于 Graf 和 Sauer 所描述的可动构形。研究可动 3×3 四边形曲面的重要性在于，一个 $m\times n$ 四边形曲面可动，当且仅当其每个 3×3 子曲面都可动。长期以来，描述所有可动 3×3 四边形曲面一直是一个未解问题。Stachel 在 [8] 提出了一种解决这一问题的新方法，随后纳夫拉蒂尔 [9, 10]对其作了进一步发展。第一作者在 [11]给出了完整解答。这一解答涵盖了许多特殊情形，也为可动四边形曲面的应用开辟了广阔前景，但要使 [11] 的抽象结果能够应用于设计，仍有大量工作要做。

本文通过对 T-多面体——Graf 和 Sauer 发现的一类具有柔性的四边形曲面——的变形进行参数化，朝这一方向迈出了第一步 [6, 12]。T-面体的一个性质是其所有面均为梯形，因此名称中含有字母 T。Graf 和 Sauer 通过对一个开放共面多边形进行一系列平行投影，构造性地定义了 T- 多面体。我们从一个描述性定义出发，并证明其与原始定义等价。T-多面体的柔性已在 [6] 中通过一个优雅的几何论证得到证明。在此基础上，我们推导出关于变形参数的 T-面体顶点坐标显式公式。这些公式的初始版本曾被 Kiumars Sharifmoghaddam 用于 Rhino/Grasshopper 插件，以实现 T-多面体的实际设计及其变形的可视化，见 [13]。本文中的公式与 [13] 中的公式不同，因为我们使用了一组略有不同的数据来计算顶点坐标。

多面体曲面可以视为光滑曲面的离散类比，而四边形曲面则代表一种非常特殊的离散化。四边形曲面的网格线所起的作用，类似于参数化光滑曲面上的坐标曲线。四边形的平面性，是坐标网为共轭网这一性质的离散类比。这种类比至少可以追溯到 Peterson [14, §27]，之后由 Graf 和 Sauer [6, 12] 进一步发展。Graf 和 Sauer 也提到了 T-多面体的光滑类比，即我们所称的 T-曲面。与离散情形完全类似，T-曲面可以进行等距变形，使指定的共轭网在变形过程中始终保持共轭。本文将给出 T-曲面的综合描述和解析描述，这两种描述与 T-多面体的相应描述非常相似。我们还将推导 T-多面体等距变形的公式。光滑曲面的等距变形问题是微分几何中的一个古老问题，可追溯至 19 世纪中叶；我们的大多数变形结果并非新发现。不过，我们认为，对所有 T-曲面进行统一研究很有价值，也有助于直接比较多面体情形与光滑情形。

2. T-HEDRA

2.1. **T-多面体与平面T网**。

定义 2.1. 若一个四边形曲面的顶点由映射给出，则称其为T-面体

$$\sigma\colon I\times J\to\mathbb{R}^3,\quad I=\{0,1,\dots,m\},\quad J=\{0,1,\dots,n\},\quad \sigma(i,j)=:\sigma_{ij}$$

且该映射满足以下条件。

(1) 对于每个 $i\in I\setminus\{0\}$ 和 $j\in J\setminus\{0\}$，四边形 $\sigma_{i-1,j-1}\sigma_{i-1,j}\sigma_{ij}\sigma_{i,j-1}$ 共面且不自相交。(2) 每个坐标多边形

$$\sigma_{\bullet j}:=(\sigma_{0j},\sigma_{1j},\dots,\sigma_{mj}),\quad \sigma_{i\bullet}:=(\sigma_{i0},\sigma_{i1},\dots,\sigma_{in})$$

均共面，但不包含在一条直线上。

(3) 记 P_j 为由坐标多边形 $\sigma_{\bullet j}$ 张成的平面，记 Q_i 为由坐标多边形 $\sigma_{i\bullet}$ 张成的平面。则对于所有 $i\in I$ 和 $j\in J$，平面 P_j 与 Q_i 均互相正交。(4) 同一族中的相邻平面彼此不同：$P_j\neq P_{j+1}$, $Q_i\neq Q_{i+1}$。

上述定义并未排除由 σ 产生的多面体曲面自相交。施加这一限制是很自然的，但在等距变形过程中，自相交难以检测，也难以避免。

引理 2.2. 设 $\{P_j\}_{j\in J}$ 和 $\{Q_i\}_{i\in I}$ 是两族平面，使得对所有 i，都有 $P_j \perp Q_i$，且 j . 那么，至少 其中一个族中的所有平面都彼此平行。

证明。假设存在一对不平行的平面 P_j, P_k。那么，每个平面 Q_i 都垂直于 P_j 与 P_k的交线，因此该族 $\{Q_i\}_{i\in I}$ 中的所有平面都彼此平行。□

这个引理 这意味着 T-曲面的面都是梯形，这也解释了该类曲面名称中的字母 T 类四边形曲面。

不失一般性，假设平面 P_j 彼此平行。在这种情况下， P_j 称为 T-曲面的轨迹平面，而 Q_i 称为 T-曲面的轮廓平面。多边形 $\sigma_{i\bullet} \subset Q_i$ 称为轮廓多边形，多边形 $\sigma_{\bullet j} \subset P_j$ 称为 σ的轨迹多边形。参见图 2。

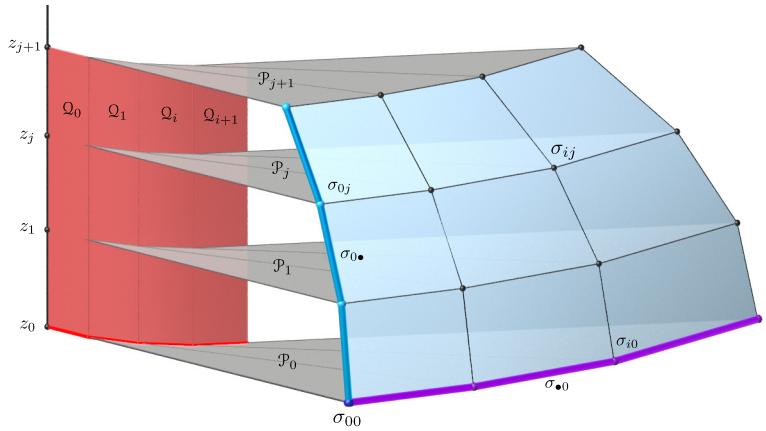

FIGURE 2. 轨迹平面 P_j、轮廓平面 Q_i、轨迹多边形 $\sigma_{\bullet 0}$ 和轮廓多边形 $\sigma_{0\bullet}$。

记 pr: $\mathbb{R}^3 \to P_0$为到平面 P_0的正交投影。复合映射 $\tau = \text{pr} \circ \sigma\colon I \times J \to \mathbb{R}^2$ 称为 σ的地面视图。不失一般性，可以假设平面 P_0 是 xy坐标平面，因此若 $\sigma_{ij} = (x_{ij},\ y_{ij},\ z_{ij})$，则 $\tau_{ij} = (x_{ij},\ y_{ij})$。由于对于固定的 j，所有 σ_{ij} 都属于水平平面 P_j，所以 z_{ij} 的值仅取决于 j，我们将记号改为 z_j : $= z_{ij}$。因此，T-面体 σ 由其地面视图和一组数唯一确定

$$z_0 = 0, z_1, \ldots, z_n, \quad z_{j-1} \neq z_j \text{ for all } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

条件 $z_{j-1} \neq z_j$ 等价于定义 2.1 中的条件 $P_{j-1} \neq P_j$ 。

由于每个轮廓平面 Q_i 都平行于 z轴，因此它投影为一条直线 $L_i \in \mathbb{R}^2$。 σ的每个面都投影为一个梯形，其腰位于两条相邻的直线 L_{i-1} 和 L_i上。也可能发生退化：如果一个面平行于 z轴，那么它的投影就是一条线段，端点分别位于 L_{i-1} 和 L_i上。图 3 展示了一个 T-面体及其地面视图。

定义 2.3. 一个 (共面) T-网 是一个映射

$$\tau\colon I \times J \to \mathbb{R}^2, \quad I = \{0, 1, \ldots, m\}, \quad J = \{0, 1, \ldots, n\}, \quad \tau(i, j) =: \tau_{ij}$$

满足以下条件。

(1) 对于每个 $i \in I$，点 $\tau_{i0}, \tau_{i1}, \ldots, \tau_{in}$ 张成一条直线，我们称之为剖面直线，并记作 L_i。(2) 对于每个 $j \in J$，点 $\tau_{0j}, \tau_{1j}, \ldots, \tau_{mj}$ 不共线。(3) 对于每个 $i \in I \setminus \{0\}$，直线 L_{i-1} 和 L_i 不同。

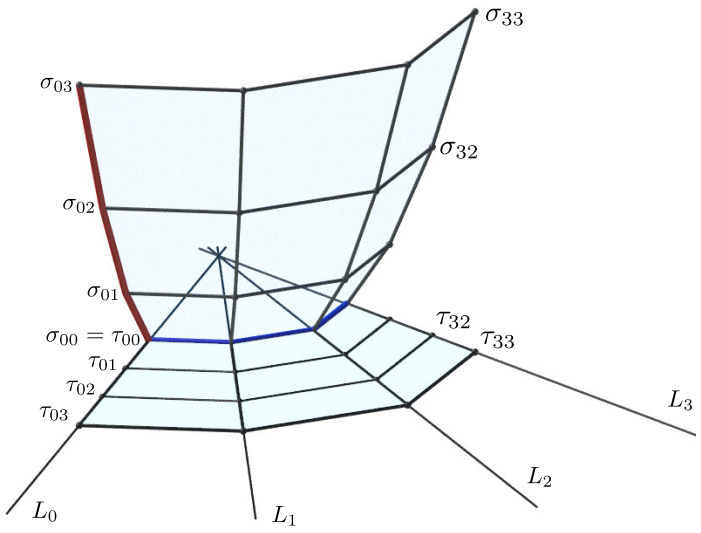

FIGURE 3. 一个 T-面体及其地面视图。

(4) 每个四边形 $\tau_{i-1,j-1}\tau_{i-1,j}\tau_{ij}\tau_{i,j-1}$ 都是一个（非自相交的）梯形，其腰位于直线 L_{i-1} 和 L_i 上。该梯形可能退化为一条线段，其端点分别位于 L_{i-1}和 L_i上。

下面的引理是显然的，参见上述定义之前的讨论。

引理 2.4。每个 *T*-面体的地面视图都是一个 *T*-网。每个 *T*-网 τ 以及一组一般位置的实数 $0 = z_0 \neq z_1 \neq \cdots \neq z_n$ 确定一个 *T*-面体 $\sigma_{ij} = (\tau_{ij}、\ z_j)$，其地面视图为 τ。

z_j 的一般位置条件是，轮廓多边形 $(\tau_{ij},\ z_j)_{j=0}^{n}$ 不包含于同一直线中。

2.2. T-多面体和 T-网的解析描述。设 τ 是某个 T-面体 σ的地面视图。为剖面直线 L_0选定一个定向。根据所有梯形的腰必须以相同方式定向这一规则，它诱导出所有其他剖面直线的定向。对于 $i = 1, \ldots\ldots, m$，选取一条 M_i 直线，使其垂直于腰位于直线 L_{i-1} 和 L_i上的梯形的底边。按照与 L_{i-1} 和 L_i的定向相容的方式对 M_i 定向。对 $i = 1, \ldots\ldots, m$ 引入有向角

$$\begin{aligned} \eta_i = \overrightarrow{\angle}(L_{i-1}, M_i) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \theta_i = \overrightarrow{\angle}(M_i, L_i) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ \varphi_i = \overrightarrow{\angle}(L_0, L_i) = \sum_{\alpha=1}^{i} \eta_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{i} \theta_i, \quad \psi_i = \overrightarrow{\angle}(L_0, M_i) = \sum_{\alpha=1}^{i} \eta_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{i-1} \theta_\alpha. \end{aligned} \tag{2.1}$$

示意图见图 4。

令 JM_i 为直线 M_i 旋转 $\pi/2$。现在，T-网的每条边都带有一个定向，该定向来自 L_i 或 JM_i。我们称之为边的几何定向。每条边还有一个组合定向，即从 $\tau_{i-1,j}$ 到 $\tau_{i,j}$，以及从 $\tau_{i,j-1}$ 到 $\tau_{i,j}$。根据每条边的几何定向与组合定向相同还是相反，为其长度赋予正负号。由此得到两组实数

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \begin{cases} |\tau_{ij} - \tau_{i,j-1}|, & \text{if } \overrightarrow{\tau_{i,j-1}\tau_{ij}} \text{ has the direction of } L_i, \\ -|\tau_{ij} - \tau_{i,j-1}|, & \text{if } \overrightarrow{\tau_{i,j-1}\tau_{ij}} \text{ has the direction opposite to } L_i. \end{cases} \\ g_{ij} &= \begin{cases} |\tau_{ij} - \tau_{i-1,j}|, & \text{if } \overrightarrow{\tau_{i-1,j}\tau_{ij}} \text{ has the direction of } JM_i, \\ -|\tau_{ij} - \tau_{i-1,j}|, & \text{if } \overrightarrow{\tau_{i-1,j}\tau_{ij}} \text{ has the direction opposite to } JM_i. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.2}$$

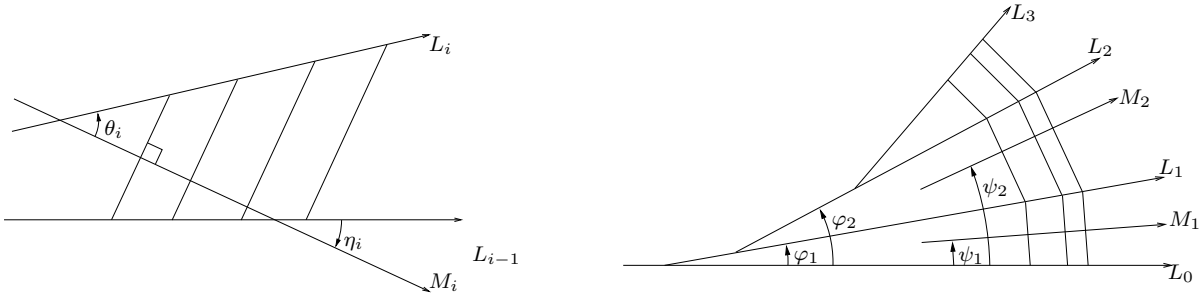

FIGURE 4. T-网中的有向角。

注意，对于每个 j，所有数 $f_{0j},\dots,f_{mj}$的符号都相同：这是因为对直线 L_i的定向选择保持一致。此外，网格四边形不自相交这一条件意味着，对于每个 i，所有数 $g_{i0},\dots,g_{in}$的符号都相同。图 5 展示了一个 2×2T-网，其中 $f_{i2}<0$ 和 $g_{2j}<0$。注意，尽管该网存在自重叠，其提升却不自相交。

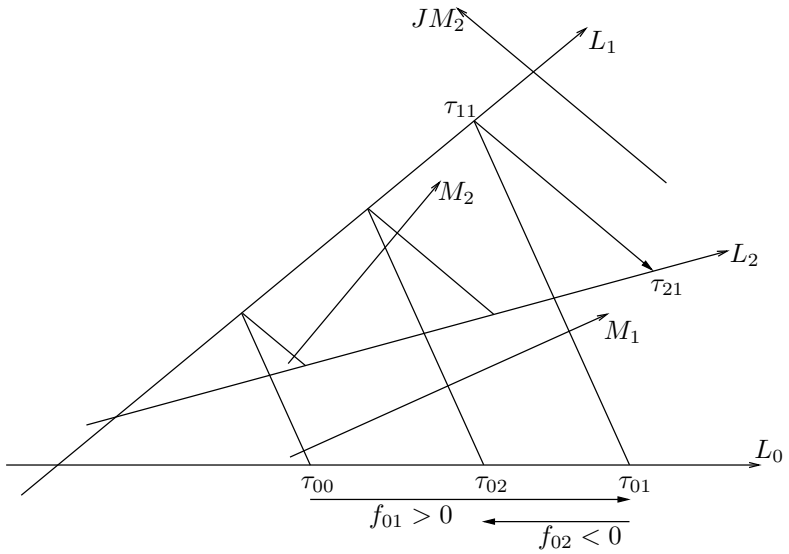

FIGURE 5. 含有一些负边长的 T-网示例。

图6展示了另一个无自交 T-面体示例，其 T-网存在大量自重叠。

定理 2.5。设 σ 为一个 T-面体。选取一个坐标系，使原点位于 σ_{00}，xy-平面位于轨迹平面 P_0中，xz-平面位于轮廓平面 Q_0中。则 σ 各顶点的坐标为

$$\sigma_{ij}=\begin{pmatrix}\tau_{ij}\\ z_j\end{pmatrix},\quad \tau_{ij}=\sum_{\alpha=1}^{i} g_{\alpha 0}\begin{pmatrix}-\sin\psi_\alpha\\ \cos\psi_\alpha\end{pmatrix}+C_iF_j\begin{pmatrix}\cos\varphi_i\\ \sin\varphi_i\end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

其中

$$C_i=\prod_{\alpha=1}^{i} c_\alpha,\quad c_\alpha=\frac{\cos\eta_\alpha}{\cos\theta_\alpha},\quad F_j=\sum_{\beta=1}^{j} f_{0\beta},$$

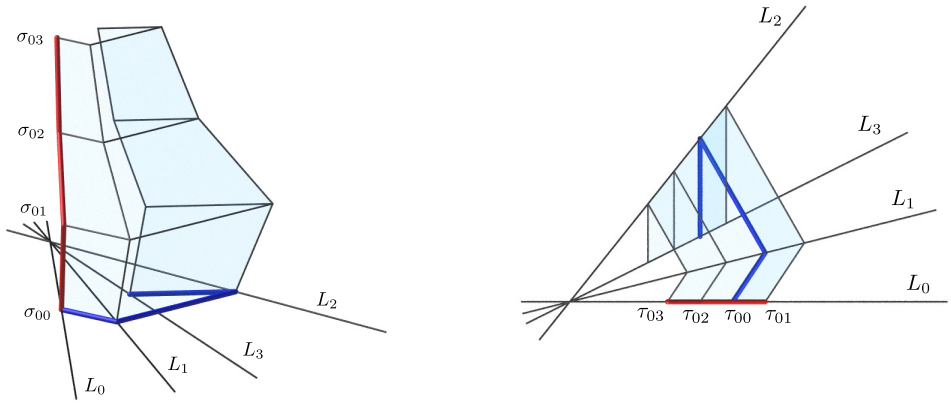

FIGURE 6.无自交T-面体的地面视图可能发生自重叠。

而 $f_{0\beta}, g_{\alpha 0}, \varphi_\alpha, \psi_\alpha, \eta_\alpha, \theta_\alpha$ 定义于（2.1）和（2.2）中。假设直线 $L_0 = P_0 \cap Q_0$ 取向为 x轴的定向。

特别地，T-面体由轮廓多边形 $\sigma_{0\bullet}$、轨迹多边形 $\sigma_{\bullet 0}$ 以及轮廓平面 Q_1、…、Q_m 的方向唯一确定。

反过来，任意一组数据

$$\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \mathbb{R}, \quad \psi_1, \dots, \psi_m \in \mathbb{R},$$
$$f_{01}, \dots, f_{0n} \in \mathbb{R}, \quad g_{10}, \dots, g_{m0} \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$
$$0 = z_0 \neq z_1 \neq \dots \neq z_n \in \mathbb{R}$$

若满足以下条件，则由上述公式确定一个T-曲面：
(1) $\eta_i := \psi_i - \varphi_{i-1} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \theta_i := \varphi_i - \psi_i \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;(2) 对于每个 i，根据公式 (2.2) 由 τ_{ij} 计算得到的数 g_{i0}、…、g_{im} 符号相同；(3) 轮廓多边形和轨迹多边形不包含在同一直线上。

证明。根据引理 2.4，要证明该定理的第一部分，只需证明任意 T-网顶点的坐标由 (2.3) 的第二个公式给出。由定义可知，

$$\tau_{i0} = \sum_{\alpha=1}^{i} g_{\alpha 0} \begin{pmatrix} -\sin\psi_\alpha \\ \cos\psi_\alpha \end{pmatrix}$$

对每个 $i \in I$（包括总和为零时的 $i = 0$），根据 ψ_α 和 $g_{\alpha 0}$ 的定义，见 (2.1) 和 (2.2)。对于每个 $(i,\ j) \in I \times J$，点 τ_{ij} 位于直线 L_i 上，该直线经过点 τ_{i0}，方向为 φ_i。τ_{i0} 到 τ_{ij} 的有向距离为 $\sum_{\beta=1}^{j} f_{i\beta}$。因此，

$$\tau_{ij} = \tau_{i0} + \sum_{\beta=1}^{j} f_{i\beta} \begin{pmatrix} \cos\varphi_i \\ \sin\varphi_i \end{pmatrix}.$$

接下来，注意到对于每个 $i \in I \setminus \{0\}$ 和 $j \in J \setminus \{0\}$，都有

$$f_{i-1,j} \cos\eta_i = f_{ij} \cos\theta_i,$$

因为这两个乘积都等于一个网格梯形的（带符号）高。这意味着

$$f_{ij} = c_i f_{i-1,j} \Rightarrow f_{ij} = C_i f_{0j} \Rightarrow \sum_{\beta=1}^{j} f_{i\beta} = C_i F_j,$$

并且公式 (2.3) 得证。

轮廓多边形 $\sigma_{0\bullet}$ 包含了关于 $z_0, \dots, z_n$ 以及关于 $F_0, \dots, F_n$的信息。轨迹多边形 $\sigma_{\bullet 0}$ 包含了关于 $g_{10}, \dots, g_{m0}$ 以及关于 $\psi_1, \dots, \psi_m$ 的信息。最后，平面 $Q_1, \dots, Q_m$ 的方向包含了关于角度 $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ 的信息。

定理的最后一个陈述可直接由构造得出。 □

2.3. **T-多面体的特殊类别**。

2.3.1. 平移 *T*-多面体。 如果一个 T-面体的所有轮廓平面彼此平行，则称其为平移 *T* 多面体。也就是说，在平移 T-多面体的坐标多边形所张成的两族平面中，同一族内的平面彼此平行，而不同族的平面彼此正交。

由于平移 T-多面体的所有面都是平行四边形，因此这些多面体都是离散平移曲面。下面简要回顾后者的基本性质。

定义 2.6. 如果一个四边形曲面的所有面都是平行四边形，则称其为离散平移曲面。

这种局部刻画可以推广为全局刻画。

引理 *2.7.* </style>四边形曲面 σ 是离散平移曲面，当且仅当

$$\sigma_{ij} + \sigma_{kl} = \sigma_{il} + \sigma_{kj}$$

对所有 i、j、k、l 均成立。

证明。 对于 $k = i+1$ 和 $l = j+1$，这个等式等价于 σ 的所有面都是平行四边形。因此，若该等式成立，则 σ 是离散平移曲面。

反过来，假设

$$\sigma_{ij} + \sigma_{i+1,j+1} = \sigma_{i,j+1} + \sigma_{i+1,j}$$

对所有 i, j。从 $k = i+1$ 开始，对指标 k 作归纳，可证明

$$\sigma_{ij} + \sigma_{k,j+1} = \sigma_{i,j+1} + \sigma_{kj}.$$

于是，对指标 l 作归纳即可得到引理的结论。 □

一种特殊情 形是公式 $\sigma_{ij} = \sigma_{i0} + \sigma_{0j} - \sigma_{00}$，可以作如下解释 .

推论 2.8。 任取离散平移曲面的两个坐标多边形$\sigma_{i\bullet}$ 和 $\sigma_{\bullet j}$，将其中一个沿另一个平移，即可得到该离散平移曲面。

反过来，任何两个具有公共顶点且第一个多边形的边均不与第二个多边形的边平行的多边形，都生成一个离散平移曲面。

下面的定理显而易见。

定理 2.9. 平移 *T*-多面体恰好是具有平面母线（坐标多边形）且这些母线位于正交平面内的离散平移曲面。

为了计算平移 T 多面体的顶点，选取一个坐标系，使原点位于 σ_{00}， xy-平面位于轨迹平面 P_0 中，而 xz- 平面位于轮廓平面 Q_0 中。于是，由于 $\sigma_{ij} = \sigma_{i0} + \sigma_{0j}$，有

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} x_{i0} + x_{0j} \\ y_i \\ z_j \end{pmatrix}, \quad x_{00} = y_0 = z_0 = 0. \tag{2.4}$$

根据第2.2节，平移 T-多面体由条件 $\varphi_i = 0$ 对所有 i 成立来刻画。这意味着 $\theta_i = -\eta_i$ 和 $C_i = 1$ 对所有 i 成立。公式（2.3）可改写为

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} F_j - \sum_{\alpha=1}^{i} g_{\alpha 0} \sin\psi_\alpha \\ \sum_{\alpha=1}^{i} g_{\alpha 0} \cos\psi_\alpha \\ z_j \end{pmatrix},$$

也就是说

$$x_{0j} = F_j, \quad x_{i0} = -\sum_{\alpha=1}^{i} g_{\alpha 0} \sin\psi_\alpha, \quad y_i = \sum_{\alpha=1}^{i} g_{\alpha 0} \cos\psi_\alpha.$$

2.3.2. 离散模制曲面。 离散模制曲面是由等腰梯形构成的 T-多面体。这等价于地面视图中的所有梯形都是等腰梯形，而这又等价于$\theta_i = \eta_i$。这意味着对于所有 i，都有 $\psi_i = \frac{\varphi_{i-1}+\varphi_i}{2}$ 和 $C_i = 1$，并将公式（2.3）简化为

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{ij} \\ z_j \end{pmatrix}, \quad \tau_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{i} g_{\alpha 0} \begin{pmatrix} -\sin\frac{\varphi_{\alpha-1}+\varphi_\alpha}{2} \\ \cos\frac{\varphi_{\alpha-1}+\varphi_\alpha}{2} \end{pmatrix} + F_j \begin{pmatrix} \cos\varphi_i \\ \sin\varphi_i \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

平移 T-多面体和离散模制曲面的一个共同性质是，它们的轮廓多边形彼此全等。与平移 T-多面体类似，一个离散模制曲面由其一个轮廓多边形和一个轨迹多边形唯一确定。

2.3.3. 轴向 *T*-面体。 如果所有轮廓平面都相交于一条直线，则称这条直线为该 T-面体的轴。在相应的 T-网中，所有 L_i 直线都交于一点。

定理2.10。 *T*-曲面 σ 是轴向的，当且仅当

$$\frac{g_{i0}}{g_{10}} = \frac{\sin(\eta_i + \theta_i)\cos\theta_1}{\sin(\eta_1 + \theta_1)\cos\eta_i} C_i \quad for\ all\ i. \tag{2.6}$$

若 σ 是轴向的，则沿直线 L_0 从轴与地平面的交点 P_0 到点 τ_{00} 的有向距离等于 $\frac{g_{10}\text{余弦}\ \eta_1}{\text{正弦}(\eta_1+\theta_1)}$。

证明。 将直线 L_{i-1} 和 L_i 的交点记为 ρ_i （若这两条直线平行，则 $\sin(\eta_i + \theta_i) = 0$，且方程 (2.6) 不可能成立，因为 $g_{i0} \neq 0$）。直线 L_{i-1}、L_i和 L_{i+1}相交于一点，当且仅当 $\rho_i = \rho_{i+1}$。对三角形 $\rho_i\tau_{i-1,\,0}\tau_{i0}$ 和$\rho_{i+1}\tau_{i0}\tau_{i+1,\,0}$ 应用正弦定理，计算 $\rho_i\tau_{i0}$ 和 $\rho_{i+1}\tau_{i0}$ 的有向长度，得到

$$\rho_i = \rho_{i+1} \Leftrightarrow \frac{g_{i0}\cos\eta_i}{\sin(\eta_i + \theta_i)} = \frac{g_{i+1,0}\cos\theta_{i+1}}{\sin(\eta_{i+1} + \theta_{i+1})} \Leftrightarrow \frac{g_{i+1,0}}{g_{i0}} = \frac{\sin(\eta_{i+1} + \theta_{i+1})\cos\eta_i}{\sin(\eta_i + \theta_i)\cos\theta_{i+1}}.$$

若 (2.6) 成立，则后一个方程成立。反过来，若后一个方程对所有i都成立，则通过对 i 作归纳可得 (2.6)。
□

将直线 L_i 的交点选作原点，并通过设置 $\tau_{-1,\,j} = 0$ （对所有 j），将 T-网的范围扩展到 $(\{-1\} \cup I) \times J$。新增轨迹带中的梯形退化为三角形。顶点的坐标可通过在序列f_{01}，……，f_{0n}后添加从原点到顶点 τ_{00}的距离 $f_{00} = \frac{g_{10}\cos\eta_1}{\sin(\eta_1+\theta_1)}$ 来获得，方法是令 $g_{i,\,-1} = 0$（对所有i），并按照定理 2.5 中所述，根据轮廓多边形$\tau_{0\bullet}$ 和退化轨迹多边形$\tau_{\bullet,\,-1}$计算所有顶点的坐标：

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} C_i F_j \cos\varphi_i \\ C_i F_j \sin\varphi_i \\ z_j \end{pmatrix}, \quad C_i = \prod_{\alpha=1}^{i} c_\alpha, \quad c_\alpha = \frac{\cos\eta_\alpha}{\cos\theta_\alpha}, \quad F_j = \sum_{\beta=0}^{j} f_{0\beta}. \tag{2.7}$$

轴向离散成型曲面是离散旋转曲面。其轮廓多边形通过绕轴旋转初始轮廓多边形得到。离散旋转曲面的顶点

由下式给出

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} F_j \cos\varphi_i \\ F_j \sin\varphi_i \\ z_j \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

图7展示了不同类别 T-多面体的地面视图。

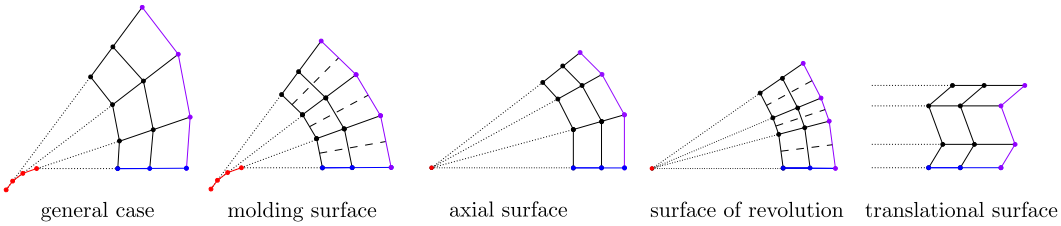

FIGURE 7. 不同类别 T-多面体的地面视图。

3. ISOMETRIC DEFORMATIONS OF T-HEDRA

3.1. 一般 T-多面体的变形。

定理 3.1。 每个 *T*-面体 $\sigma\colon\ I\times J\to\mathbb{R}^3$ 都允许在 *T*-多面体类中进行等距变形。也就是说，存在一个 *T*-多面体的单参数族 $\sigma(t)\colon\ I\times J$ 对于 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ 使得

(1) $\sigma(0)=\sigma$；*(2)* 对每个 $t\in[a,b]$ 以及每个 $i\in I\backslash\{0\}$，$j\in J\backslash\{0\}$ 四边形 $\sigma_{i-1,\,j-1}(t)\sigma_{i,\,j-1}(t)\sigma_{ij}(t)\sigma_{i-1,\,j}(t)$ 与四边形 $\sigma_{i-1,\,j-1}\sigma_{i,\,j-1}\sigma_{ij}\sigma_{i-1,\,j}$ 全等；*(3)* 四边形曲面 $\sigma(t)$、$t\neq 0$ 与四边形曲面 σ 不全等，即不存在 $\mathbb{R}^3$ 的一族等距变换 $\Phi(t)$，使得 $\sigma(t)=\Phi(t)\circ\sigma$。

若 σ 的顶点由(2.3)给出，则 $\sigma(t)$ 的顶点如下：

$$\sigma_{ij}(t)=\begin{pmatrix}\tau_{ij}(t)\\ z_j(t)\end{pmatrix},\quad \tau_{ij}(t)=\sum_{\alpha=1}^{i} g_{\alpha 0}\begin{pmatrix}-\sin\psi_\alpha(t)\\ \cos\psi_\alpha(t)\end{pmatrix}+C_i(t)F_j\begin{pmatrix}\cos\varphi_i(t)\\ \sin\varphi_i(t)\end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

其中

$$\psi_i(t)=\sum_{\alpha=1}^{i}\eta_\alpha(t)+\sum_{\alpha=1}^{i-1}\theta_\alpha(t),\quad \varphi_i(t)=\sum_{\alpha=1}^{i}\eta_\alpha(t)+\sum_{\alpha=1}^{i}\theta_\alpha(t),$$

$$\sin\eta_i(t)=\frac{C_{i-1}}{C_{i-1}(t)}\sin\eta_i,\quad \sin\theta_i(t)=\frac{C_i}{C_i(t)}\sin\theta_i,\quad C_i(t)=\sqrt{C_i^2+t},$$

$$z_j(t)=\sum_{\beta=1}^{j}\operatorname{sign}(\Delta_\beta z)\sqrt{(\Delta_\beta z)^2-t(\Delta_\beta F)^2}.$$

证明。 证明分为两部分。第一部分中，我们表明，T-面体在T-多面体类中的任何等距变形都受到一个极为严格的条件约束。利用这一点，第二部分中我们导出 $\sigma_{ij}(t)$ 的公式。

假设 σ' 是一个与 σ 等距的 T-面体。必要时对 σ' 施加刚体运动，我们可以假设平面 P_0 与 P_0' 重合，从而地面视图 τ 和 τ' 位于同一平面内。σ 或 σ' 中的每个梯形，其底边都平行于地平面。因此，在地面视图中，它会沿着垂直于底边的方向收缩。特别地，τ 和 τ' 中对应的两个梯形，沿着垂直于其底边的方向仅相差一个缩放，见图 8 左图。

i 个 τ 和 τ' 的轮廓带由一叠梯形组成，其腰位于一对直线上。因此，轮廓带中的所有梯形都以相同的因子进行缩放，见图 8 右侧。

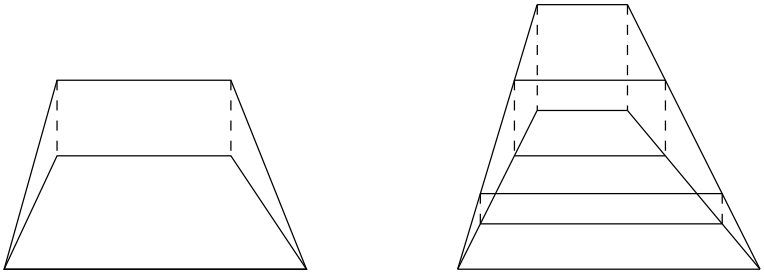

FIGURE 8. 两个等距 T-多面体对应面的地面视图（左），以及对应轮廓带的地面视图（右）。

这引出了 τ'的递归构造。沿直线M_1 的方向，以某个因子缩放 τ 的第一个轮廓带。这会使直线 L_1 上的所有边长都按某个因子 k_1进行缩放。缩放第二个轮廓带，使其对直线 L_1 产生的缩放也采用因子 k_1。然后缩放第三个轮廓带，使 L_2 以相容的方式进行缩放，依此类推。缩放后的轮廓带可以沿缩放后的直线 L_i粘合起来，从而得到一个 T-网 τ'。

上述论证只给出了等距变形后的 T-面体地面视图的一个必要条件。我们还需要证明，变形后的 T-网可以提升为一个与 σ等距的 T-面体。这种提升的可能性可以通过几何方式证明：只要缩放因子与 1 相差不太大，就可以通过改变轨迹平面 P_j 之间的距离来实现轮廓带的缩放。既然无论如何都需要解析描述，我们就来看看公式。回顾第 2.1 节和第 2.2 节中的记号。第 j 个轨迹多边形的竖直分量记为 z_j，因此 $\sigma_{ij} = (\tau_{ij},\ z_j)$。记

$$\Delta_j z = z_j - z_{j-1}, \quad j = 1, \dots, n.$$

于是根据 (2.2)，有

$$|\sigma_{ij} - \sigma_{i,j-1}| = \sqrt{f_{ij}^2 + (\Delta_j z)^2}, \quad |\sigma_{ij} - \sigma_{i-1,j}| = |g_{ij}|.$$

我们的构造 τ' 保持有向长度 g_{ij}不变。因此，接下来需要找到一个序列$\Delta_1 z'$，…，$\Delta_n z'$，使得

$$(f'_{ij})^2 + (\Delta_j z')^2 = f_{ij}^2 + (\Delta_j z)^2 \quad \text{for all } i \in I, j \in J \setminus \{0\}. \tag{3.2}$$

令 k_i 为 L_i, $i \in I$的缩放因子。于是有

$$f'_{ij} = k_i f_{ij}, \quad i \in I, j \in J \setminus \{0\}.$$

解方程 (3.2) 中的 $\Delta_j z'$，得到

$$(\Delta_j z')^2 = (1 - k_i^2) f_{ij}^2 + (\Delta_j z)^2. \tag{3.3}$$

当且仅当乘积 $(1 - k_i^2)f_{ij}^2$ 与 i 无关且右侧非负时，这才有意义。根据图 9 可知，前一个条件确实成立。由勾股定理可得

$$f_{i-1,j}^2 - (f'_{i-1,j})^2 = f_{ij}^2 - (f'_{ij})^2 \Rightarrow (1 - k_{i-1}^2) f_{i-1,j}^2 = (1 - k_i^2) f_{ij}^2.$$

非 对于所有 j，只要将 k_0 选得足够接近，便可确保 $(1 - k_0^2)f_{0j}^2 + h_j^2$ 的负性 1. One has

$$(1 - k_{i-1}^2) f_{i-1,j}^2 = (1 - k_i^2) f_{ij}^2 \ \forall i \Leftrightarrow 1 - k_i^2 = \frac{f_{0j}^2}{f_{ij}^2}(1 - k_0^2) = \frac{1 - k_0^2}{C_i^2}.$$

若选择 $k_0(t) = \sqrt{1+t}$，则 $k_i(t) = \frac{\sqrt{C_i^2+t}}{C_i}$。将直线 L_i 拉伸这一倍数后，公式 (2.3) 中的因子 C_iF_j 将替换为公式 (3.1) 中的因子 $\sqrt{C_i^2+tF_j}$。

还需计算在上述变形下角度 η_i 和 θ_i 如何变化。这可以通过对图 9 应用正弦定理来完成：

$$f_{i-1,j}\sin\eta_i = f'_{i-1,j}\sin\eta'_i, \quad f_{ij}\sin\theta_i = f'_{ij}\sin\theta'_i.$$

由此可得

$$\frac{\sin\eta_i(t)}{\sin\eta_i} = \frac{f_{i-1,j}}{f_{i-1,j}(t)} = \frac{1}{k_{i-1}(t)} = \frac{C_{i-1}}{C_{i-1}(t)}, \quad \frac{\sin\theta_i(t)}{\sin\theta_i} = \frac{f_{ij}}{f_{ij}(t)} = \frac{1}{k_i(t)} = \frac{C_i}{C_i(t)},$$

正如定理中所述。

最后，将所得的 $k_i(t)$ 值代入 (3.3)，得到

$$(\Delta_j z(t))^2 = \left(1 - \frac{C_i^2+t}{C_i^2}\right) f_{ij}^2 + (\Delta_j z)^2 = -\frac{t}{C_i^2}C_i^2 f_{0j}^2 + (\Delta_j z)^2 = (\Delta_j z)^2 - t f_{0j}^2.$$

必须以使 $\Delta_j z(t)$ 随 t 连续变化的方式提取平方根。至此，定理得证。□

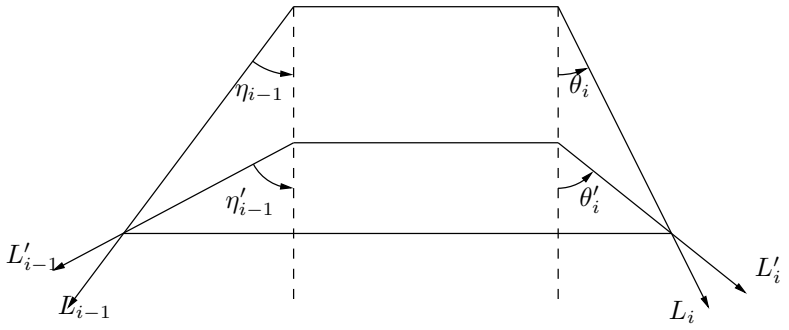

FIGURE 9. 地面视图中的角度和长度变形。

3.2. 平移 T 多面体的变形。对于平移 T 多面体，有

$$C_i = 1 \Rightarrow C_i(t) = \sqrt{1+t}, \quad \psi_i(t) = \eta_i(t), \quad \sin\eta_i(t) = \frac{\sin\eta_i}{\sqrt{1+t}}.$$

结合第 2.3.1 节中的公式，可以将等距变形表示为 x_{i0}，x_{0j}，y_i，z_j 的形式。经过重新参数化 $\sqrt{1+t} \to e^t$ 后，结果看起来更加对称。尽管这是更一般的定理 3.1 的推论，但我们将在下文给出一个简单的直接证明。

定理 3.2。一个顶点为

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} x_{i0} + x_{0j} \\ y_i \\ z_j \end{pmatrix}, \quad x_{00} = y_0 = z_0 = 0$$

允许进行等距变形

$$x_{i0}(t) = e^{-t}x_{i0}, \quad x_{0j}(t) = e^{t}x_{0j},$$
$$y_i(t) = \sum_{\alpha=1}^{i} \operatorname{sign}(\Delta_\alpha y)\sqrt{(\Delta_\alpha y)^2 + (1-e^{-2t})(\Delta_{\alpha 0}x)^2},$$
$$z_j(t) = \sum_{\beta=1}^{j} \operatorname{sign}(\Delta_\beta z)\sqrt{(\Delta_\beta z)^2 + (1-e^{2t})(\Delta_{0\beta}x)^2},$$

其中

$$\Delta_\alpha y = y_\alpha - y_{\alpha-1}, \quad \Delta_\beta z = z_\beta - z_{\beta-1}, \quad \Delta_{\alpha 0}x = x_{\alpha 0} - x_{\alpha-1,0}, \quad \Delta_{0\beta}x = x_{0\beta} - x_{0,\beta-1}.$$

证明。 考虑平移 T 网 $\sigma(t)$ 中由以下向量张成的平行四边形

$$\overrightarrow{\sigma_{i-1,j}(t)\sigma_{ij}(t)} = \begin{pmatrix} e^{-t}\Delta_{i0}x \\ \pm\sqrt{(\Delta_i y)^2 + (1-e^{-2t})(\Delta_{i0}x)^2} \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\overrightarrow{\sigma_{i,j-1}(t)\sigma_{ij}(t)} = \begin{pmatrix} e^{t}\Delta_{0j}x \\ 0 \\ \pm\sqrt{(\Delta_j z)^2 + (1-e^{2t})(\Delta_{0j}x)^2} \end{pmatrix}.$$

这些向量的范数及其内积不依赖于 t。因此， σ 的所有面都作为刚体运动。□

尽管上述定理的证明很直接，但其中的公式并不那么显而易见。通过在 x、 y、 z-数据与 η、 f、 g、 h-数据之间来回转换即可得到这些公式，见第 2.3.1 节末尾。

定理 3.2 中的公式清楚地揭示了平移 T-hedra 可变形的边界。对于 $t < 0$，只要某个被开方数 $(\Delta_i y)^2 + (1-e^{-2t})(\Delta_{i0}x)^2$变为零，变形就会停止。这对应于 $\Delta_i y(t) = 0$，也就是说，第 $(i-1)$ 个和第 i 个轮廓平面重合，且第 i 个轮廓带平行于轮廓平面。类似地，对于 $t > 0$，只要相邻的两个轨迹平面重合，变形就会停止，也就是说，轨迹带平行于轨迹平面。

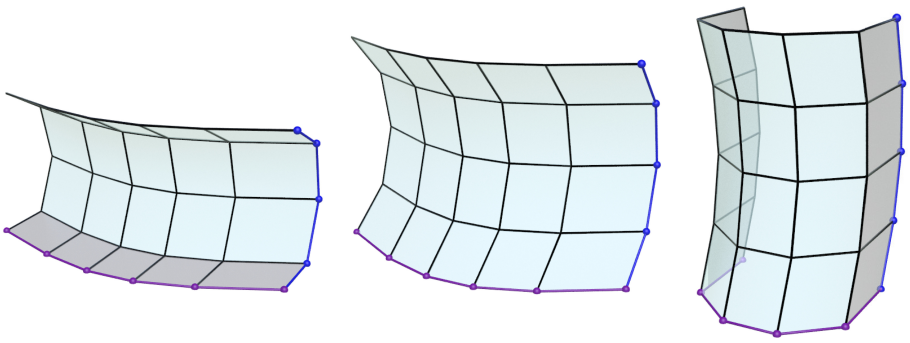

FIGURE 10. 平移 T 多面体的等距变形。左侧的阴影面与轨迹平面平行，右侧的阴影面与轮廓平面平行；它们阻止了进一步的变形。

例 3.3. 三浦折纸是一种平移 T 多面体，可按如下方式构造。将两条平行直线 L_0 和 L_1 之间的带状区域划分为全等的平行四边形。沿直线反射该带状区域

L_1 ，并将 L_0 在此反射下的像记为 L_2，然后沿直线 L_2反射由 L_1 和L_2 围成的带状区域，依此类推。最后，将每隔一个轨迹多边形提升至同一高度，见图 11。

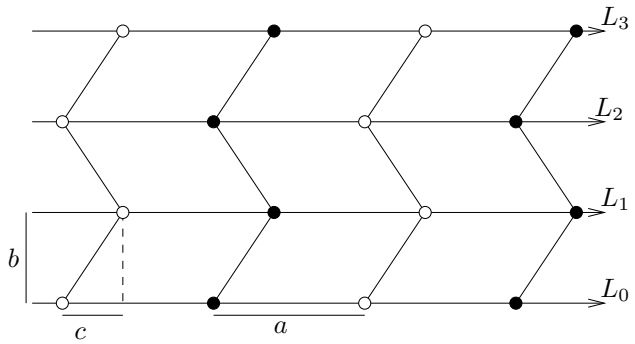

FIGURE 11. 三浦多面体。黑色顶点被提升至高度 d。

所得多面体曲面的顶点坐标为

(3.4)
$$\sigma_{ij}=\begin{pmatrix} x_{i0}+x_{0j}\\ y_i\\ z_j\end{pmatrix},\ x_{0j}=ja,\ y_i=ib,\quad x_{i0}=\begin{cases}0, & \text{if } i\equiv 0 \pmod 2,\\ c, & \text{if } i\equiv 1 \pmod 2\end{cases},z_j=\begin{cases}0, & \text{if } j\equiv 0 \pmod 2,\\ d, & \text{if } j\equiv 1 \pmod 2.\end{cases}$$

三浦多面体具有很强的对称性。若将构造延伸至 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$，则该多面体在平移 $i\mapsto i+2$、 $j\mapsto j+2$，关于直线 L_i 的反射，以及绕轨迹边中点处竖直轴的 180° 旋转下保持不变。因此，该多面体的所有面彼此全等。特别地，每个顶点处的角度为 α， $\pi-\alpha$， $\pi-\alpha$， α。由于

$$\alpha+(\pi-\alpha)+(\pi-\alpha)+\alpha=2\pi,\quad \alpha-(\pi-\alpha)+(\pi-\alpha)-\alpha=0,$$

由此可认为，在等距变形过程中，三浦多面体会达到两个平展位置：一个没有重叠，另一个则有许多重叠。通过分析变形公式可以证实这一点。将 (3.4) 中的数据代入定理 3.2 的公式，可得

$$x_{0j}(t)=ja(t),\ y_i(t)=ib(t),\quad x_{i0}(t)=\begin{cases}0, & \text{if } i\equiv 0 \pmod 2,\\ c(t), & \text{if } i\equiv 1 \pmod 2,\end{cases}\ z_j(t)=\begin{cases}0, & \text{if } j\equiv 0 \pmod 2,\\ d(t), & \text{if } j\equiv 1 \pmod 2,\end{cases}$$

其中

$$a(t)=e^t a,\quad b(t)=\sqrt{b^2+(1-e^{-2t})c^2},\quad c(t)=e^{-t}c,\quad d(t)=\sqrt{d^2+(1-e^{2t})a^2}.$$

该变形如图 12 所示。当 $t=t_+:=\log\frac{\sqrt{a^2+d^2}}{a}>0$ 时，有 $d(t)=0$，多面体展平为一个平行四边形网，如图 11 所示，其中

$$a(t_+)=\sqrt{a^2+d^2},\quad b(t_+)=\sqrt{b^2+\frac{c^2d^2}{a^2+d^2}},\quad c(t_+)=\frac{ac}{\sqrt{a^2+d^2}}.$$

当 $t=t_-:=\log\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$ 时，有 $b(t)=0$，多面体在 xz 平面内展平为一个带有多重重叠的带状区域:

$$a(t_-)=\frac{ac}{\sqrt{b^2+c^2}},\quad c(t_-)=\sqrt{b^2+c^2},\quad d(t_-)=\sqrt{d^2+\frac{a^2b^2}{b^2+c^2}}.$$

将 $d=0$ 代入上述公式，可得到一个平坦三浦折纸图案的等距变形参数化，其度量数据如图 11 所示。

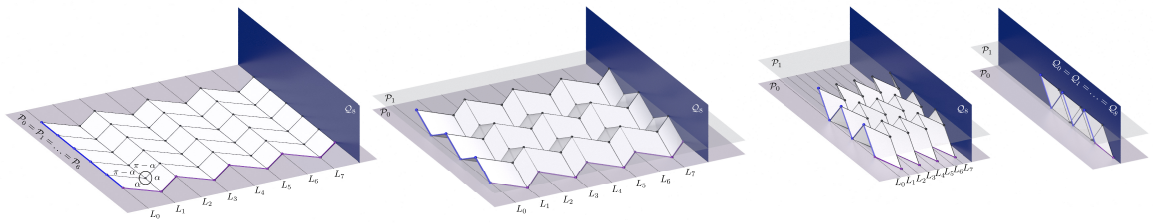

FIGURE 12. 三浦折纸作为平移 T 多面体。

例 3.4. 取 xy-平面上的一个方格网，并将其顶点提升到旋转抛物面上。可以证明，这些正方形提升后成为共面四边形。事实上，所得结果是一个平移 T 多面体。图13展示了这个 T 多面体的一个等距变形。请将其与例 5.3 进行比较。

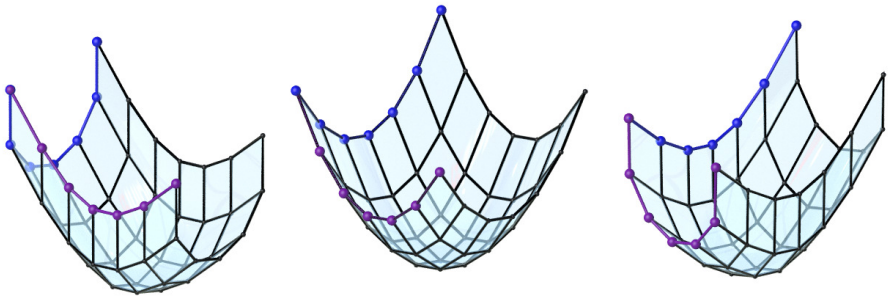

FIGURE 13. 内接于旋转抛物面的平移 T 多面体的等距变形。

3.3. **离散模制曲面的变形。** 对于模制曲面，定理 (3.1) 的公式可简化如下。

定理3.5。 一个具有顶点的离散模制曲面

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{ij} \\ z_j \end{pmatrix}, \quad \tau_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{i} g_{\alpha 0} \begin{pmatrix} -\sin\frac{\varphi_{\alpha-1}+\varphi_\alpha}{2} \\ \cos\frac{\varphi_{\alpha-1}+\varphi_\alpha}{2} \end{pmatrix} + F_j \begin{pmatrix} \cos\varphi_i \\ \sin\varphi_i \end{pmatrix}$$

允许进行等距变形

$$g_{i0}(t) = g_{i0}, \quad F_j(t) = \sqrt{1+t}\ F_j, \quad z_j(t) = \sum_{\beta=1}^{j} \operatorname{sign}(\Delta_\beta z)\sqrt{(\Delta_\beta z)^2 - t(\Delta_\beta F)^2},$$

$$\varphi_i(t) = 2\sum_{\alpha=1}^{i} \eta_\alpha(t), \quad \sin\eta_\alpha(t) = \frac{\sin\eta_\alpha}{\sqrt{1+t}}.$$

3.4. **轴向 T-面体的变形。** 对于轴向 T-面体，定理 3.1 中的公式几乎无法进一步简化。对于离散旋转曲面，则可以做更多简化。

定理3.6. 轴向 T-面体(2.7)存在一种等距变形

$$\sigma_{ij}(t) = \begin{pmatrix} C_i(t)F_j\cos\varphi_i(t) \\ C_i(t)F_j\sin\varphi_i(t) \\ z_j(t) \end{pmatrix},$$

其中

$$\varphi_i(t) = \sum_{\alpha=1}^{i} \eta_\alpha(t) + \sum_{\alpha=1}^{i} \theta_\alpha(t),$$

$$\sin\eta_i(t) = \frac{C_{i-1}}{C_{i-1}(t)}\sin\eta_i, \quad \sin\theta_i(t) = \frac{C_i}{C_i(t)}\sin\theta_i, \quad C_i(t) = \sqrt{C_i^2 + t},$$

$$z_j(t) = \sum_{\beta=1}^{j} \operatorname{sign}(\Delta_\beta z)\sqrt{(\Delta_\beta z)^2 - t(\Delta_\beta F)^2}.$$

轴向 *T*-面体的等距变形示例见图 *14* 上排。

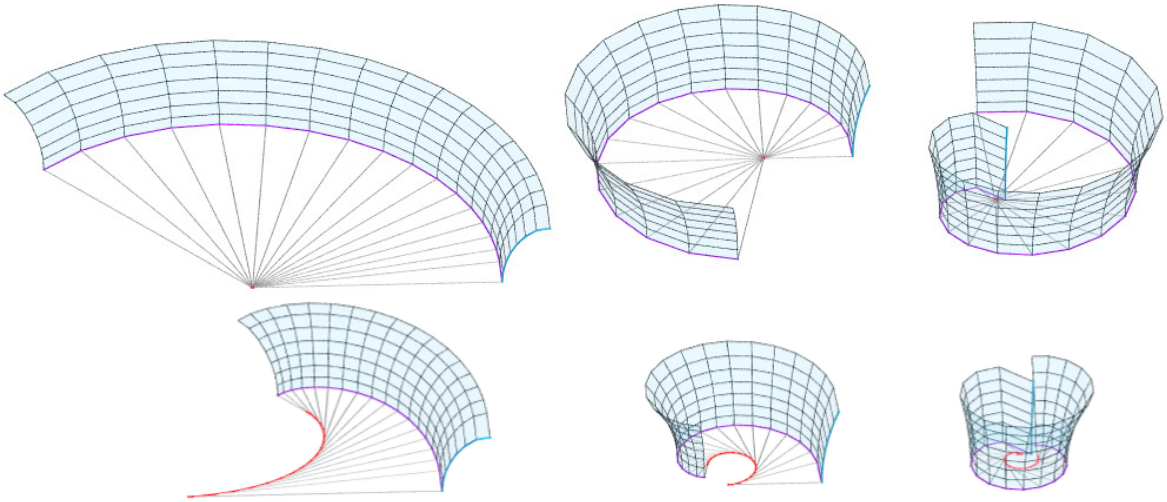

FIGURE 14. 上排：轴向 T-面体的等距变形。下排：一个与上排轴向 T-面体平行的广义 T-面体。变形过程中保持平行性。

离散旋转曲面(2.8) 允许进行等距变形

$$\sigma_{ij}(t) = \begin{pmatrix} F_j(t)\cos\varphi_i(t) \\ F_j(t)\sin\varphi_i(t) \\ z_j(t) \end{pmatrix},$$

其中

$$F_j(t) = \sqrt{1+t}\ F_j, \quad z_j(t) = \sum_{\beta=1}^{j} \operatorname{sign}(\Delta_\beta z)\sqrt{(\Delta_\beta z)^2 - t(\Delta_\beta F)^2},$$

$$\varphi_i(t) = 2\sum_{\alpha=1}^{i} \eta_\alpha(t), \quad \sin\eta_\alpha(t) = \frac{\sin\eta_\alpha}{\sqrt{1+t}}.$$

图 15 展示了内接于旋转抛物面的离散旋转曲面的变形。请将其与图 21 对照。

3.5. **平行 T-面体对**。

定义 3.7. 两个 *T*-多面体 $\sigma, \sigma' \colon\ I \times J \to \mathbb{R}^3$ 若其所有对应的面都平行，则称它们为平行 。

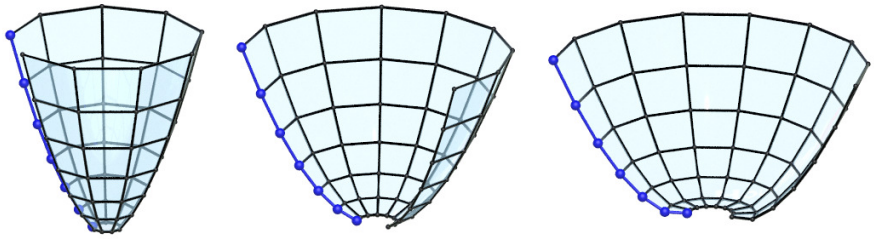

FIGURE 15. 离散旋转抛物面的等距变形。

注意， σ 和 σ' 的所有对应面平行，当且仅当所有对应的边都平行。

引理 *3.8. </style}T*-多面体 σ 和 σ' 平行，当且仅当它们的初始轮廓多边形平行，且直线 L_i、L_i'和 M_i、M_i'分别平行：

$$\sigma_{0\bullet} \parallel \sigma'_{0\bullet}, \text{ that is, } \sigma_{0,j-1}\sigma_{0j} \parallel \sigma'_{0,j-1}\sigma'_{0j} \text{ for all } j, \text{ and } L_i \parallel L_i', M_i \parallel M_i' \text{ for all } i.$$

证明。若 $\sigma \parallel \sigma'$，则它们对应的边互相平行，特别是有 $\sigma_{0\bullet} \parallel \sigma'_{0\bullet}$。此外，$\sigma \parallel \sigma'$意味着 $P_0 \parallel P_0'$ 和 $Q_i \parallel Q_i'$，这意味着 $L_i = P_0 \cap Q_i$平行于 $L_i' = P_0' \cap Q_i'$。最后，直线 M_i 是 P_0 中的一条直线，与所有边 $\sigma_{i-1,j}\sigma_{ij}$正交。由于 $\sigma_{i-1,j}\sigma_{ij} \parallel \sigma'_{i-1,j}\sigma'_{ij}$，可得 $M_i \parallel M_i'$。

反过来，平行性 $L_i \parallel L_i', M_i \parallel M_i'$意味着 σ和σ' 的地面视图是平行的 T-网：$\tau \parallel \tau'$。由此可知，平行性 $\sigma_{0\bullet} \parallel \sigma'_{0\bullet}$ 意味着 σ 的第一个轮廓带的面与 σ'的第一个轮廓带的面平行。这与 $\tau \parallel \tau'$一起推出 $\sigma_{1\bullet} \parallel \sigma'_{1\bullet}$。以同样的方式继续下去，可得 $\sigma \parallel \sigma'$。□

定理 3.9。如果两个 *T*-多面体 σ 和 σ' 平行，那么定理 *3.1* 中描述的它们的等距变形 $\sigma(t)$ 和 $\sigma'(t)$对所有 t 都平行。

证明。根据构造，直线 $L_0(t)$ 和 $L_0'(t)$ 始终与 x轴重合。定理 3.1 的公式表明，$\varphi_i(t) = \varphi_i'(t)$ 且 $\psi_i(t) = \psi_i'(t)$，因此 $L_i(t) \parallel L_i'(t)$ 且 $M_i(t) \parallel M_i'(t)$。根据引理 3.8，只需证明在变形过程中，轮廓多边形 $\sigma_{0\bullet}(t)$ 和 $\sigma'_{0\bullet}(t)$ 始终平行。令

$$k := \frac{\Delta_j z}{\Delta_j F} = \frac{\Delta_j z'}{\Delta_j F'}$$

为直线 L_0 上边 $\sigma_{0,j-1}\sigma_{0j}$ 和 $\sigma'_{0,j-1}\sigma'_{0j}$ 的共同斜率。定理 3.1 的公式表明，在时刻 t，$\sigma_{0\bullet}(t)$ 的第 i 条边的斜率等于

$$\frac{\operatorname{sign}(\Delta_j z)\sqrt{(\Delta_j z)^2 - t(\Delta_j F)^2}}{\sqrt{1+t}\,\Delta_j F} = \operatorname{sign}(k)\frac{\sqrt{k^2 - t}}{\sqrt{1+t}}.$$

计算 $\sigma'_{0\bullet}(t)$ 的第 i 条边的斜率时也会得到相同的值，定理得证。□

注 3.10。可以证明，单连通四边形曲面的柔性仅取决于其各面之间二面角的大小。[8] 中已针对 3×3 四边形曲面证明了这一点，一般情形的证明类似。平行四边形曲面的二面角两两相等，因此定理 3.9 是这一更一般结论的特例。

定理 3.11。设 σ 是一个 *T*-面体，且任意两个相邻的轮廓平面 Q_{i-1} 和 Q_i 均不平行。那么存在一个与 σ 平行的轴向 *T*-面体 σ'。

证明。从几何上看，可以通过平移 σ 的轮廓平面 $Q_2, \dots, Q_m$，使它们经过 Q_0 与 Q_1 的交线，同时保留轮廓多边形 $\sigma_{0\bullet}$，再根据平行条件构造其余部分，从而得到 σ'。

根据平行条件构造 σ' 的其余部分。解析地，对于 σ'，可以采用 σ 的数据 φ, ψ, f, g, z（见定理 2.5），保留 φ, ψ, f 和 z，并调整 g，使关系式 (2.6) 成立。这样，σ' 就是轴向的，具有相同的轮廓 $\sigma_{0\bullet}$，并且 L_i 和 M_i 的直线方向相同。根据引理 3.8，σ' 与 σ 平行。注意，轴向 T- 面体的面绝不会自相交。□

图 14 展示了一个 T-面体（底排）以及与之平行的轴向 T-面体（顶排）的等距变形。

4. T-surfaces

4.1. 定义与基本性质。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个开集。光滑映射 $\sigma\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ 若对于每个 $(u, v) \in \Omega$，向量

$$\sigma_u(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \text{ and } \sigma_v(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$$

线性无关，则称该映射为正则参数曲面。我们不要求 σ 是单射。不过，正则性条件意味着 σ 是局部单射。

定义 4.1。 设 $U = [0, a], V = [0, b] \subset \mathbb{R}$ 是实数轴上的两个区间。若正则参数曲面 $\sigma\colon U \times V \to \mathbb{R}^3$ 的坐标曲线族 $\sigma|_{u=u_0}$ 和 $\sigma|_{v=v_0}$ 对所有 $u_0 \in U$ 和 $v_0 \in V$ 均满足以下条件，则称其为一个T-曲面：

(1) 它们构成一个共轭系，也就是说 $\sigma_{uv} \in$ 张成$\{\sigma_u, \sigma_v\}$ 处处成立于 $U \times V$ 中。(2) 它们各自都是共面的，但不包含直线段。特别地，每条坐标曲线都张成唯一的平面。(3) 将由 $\sigma|_{u=u_0}$ 张成的平面记为 Q_{u_0}，将由 $\sigma|_{v=v_0}$ 张成的平面记为 P_{v_0}。那么对所有的 $u \in U$ 和 $v \in V$，平面 Q_u 与 P_v 都互相正交。(4) 不存在这样的区间 $U' \subset U$，使得所有平面 Q_u、$u \in U'$ 重合。对平面 P_v 也同样如此。

类似于引理 2.2，可以证明至少有一族

$$\{P_v \mid v \in V\}, \quad \{Q_u \mid u \in U\}$$

由平行平面构成。不失一般性，设这些平面为 $\{P_v\}$。在这种情况下，我们称$\{P_v\}$ 为曲面 σ 的轨迹平面，称 $\{Q_u\}$ 为其轮廓平面 。相应地，坐标曲线 $\sigma|_{v=v_0}$ 称为轨迹曲线，而 $\sigma|_{u=u_0}$ 称为 σ 的轮廓曲线 。

示例 4.2。 旋转曲面

$$\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} f(v)\cos u \\ f(v)\sin u \\ g(v) \end{pmatrix}$$

是 T-曲面。轨迹平面与旋转轴正交，轮廓平面经过该轴。轨迹曲线是圆弧，轮廓曲线两两全等。

在下一节中，我们将证明，每个 T-曲面都由一条轮廓曲线生成：使该曲线绕一条可变轴旋转，同时沿垂直于该轴的方向对其进行缩放。如果该轴位于无穷远处，则可得到特殊的平移曲面。

4.2. **T-曲面的解析描述。**

定理 4.3。 在轨迹平面与 xy-平面平行的坐标系中，*T*-曲面的参数化具有以下形式：

$$\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \gamma(u) + f(v)\xi(u) \\ z(v) \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

这里 $\gamma\colon U \to \mathbb{R}^2$ 是一条正则曲线（也就是说，对于所有 $u \in U$，$\dot\gamma(u) \neq 0$），$f\colon V \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数，而 $\xi\colon U \to \mathbb{R}^2$ 是一个满足以下条件的向量场：

(1) $f(0) = 0$（回忆一下，$V = [0, b]$）。*(2)* 函数 f 和 z 局部仿射无关，也就是说，不存在区间 $V' \subset V$ 和实数 λ_1、λ_2、λ_3，使得对于所有 $v \in V'$，$\lambda_1 f(v) + \lambda_2 z(v) + \lambda_3 = 0$。*(3)* 曲线 $v \mapsto (f(v), z(v))$ 是正则的，也就是说，不存在 $v \in V$ 使得 $\dot{f}(v) = \dot{z}(v) = 0$。*(4)* 曲线 γ 不包含直线段。*(5)* 向量 $\xi(u)$ 和 $\dot{\gamma}(u)$ 线性无关（特别是，对于所有 $u \in U$，$\xi(u) \neq 0$）。

(6) 对于所有 $u \in U$，向量 $\xi(u)$ 和 $\dot{\gamma}(u)$ 线性相关，也就是说，对于某个函数 λ，$\xi(u) = \lambda(u)\,\dot{\gamma}(u)$：$U \to \mathbb{R}$。此外，对于所有 $u \in U$ 和 $v \in V$，$f(v)\lambda(u) \neq -1$。

反之，对于满足上述条件的 γ、ξ、f 和 z 的任意选择，曲面 (4.1) 都是 *T*-曲面。

图16展示了公式 (4.1) 中各项的地面视图（即在平面 P_0 上的正交投影）。

注意，将 f 按某个常数放大，同时将 ξ 按同一常数缩小，并不会改变 σ。

证明。我们首先验证，对于满足定理中所列条件的 γ、f、ξ、z，由 (4.1) 给出的每个 σ 都是 T-曲面。计算偏导数：

$$\sigma_u(u,v) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}(u) + f(v)\dot{\xi}(u) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_v(u,v) = \begin{pmatrix} \dot{f}(v)\xi(u) \\ \dot{z}(v) \end{pmatrix}, \quad \sigma_{uv}(u,v) = \begin{pmatrix} \dot{f}(v)\dot{\xi}(u) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

由第六个条件可知，$\sigma_u(u, v) = ((1 + f(v)\lambda(u))\xi(u), 0) \neq 0$。第三个条件与第五个条件共同保证了 $\sigma_v \neq 0$，并且向量 σ_u 和 σ_v 线性无关。因此，σ 是一个正则参数曲面。由于第六个条件，向量 σ_{uv} 和 σ_u 线性相关，因此坐标曲线构成一个共轭系。考虑坐标曲线 $\sigma|_{u=u_0}$ 和 $\sigma|_{v=v_0}$：

$$\sigma(u_0, v) = \begin{pmatrix} \gamma(u_0) + f(v)\xi(u_0) \\ z(v) \end{pmatrix}, \quad \sigma(u, v_0) = \begin{pmatrix} \gamma(u) + f(v_0)\xi(u) \\ z(v_0) \end{pmatrix}.$$

前者包含在一个与向量（$\xi(u_0)$，0）和（0，1）平行的平面内，并且由于第二个条件，不包含任何直线段。后者包含在平面 $z = z(v_0)$ 内，并且不包含任何直线段，因为它的切向量（$\dot{\gamma}(u) + f(v_0)\xi(u)$，0）与曲线 γ 在对应点处的切向量平行；此外，根据第四个条件，它也 γ 不包含任何直线段。综上，轮廓和轨迹平面具有以下形式：

$$Q_{u_0} = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma(u_0) \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \xi(u_0) \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad P_{v_0} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = z(v_0)\}.$$

由此可知，对于每个（u，v）$\in U \times V$，Q_u 都与 P_v 正交。平面 P_v 在某个区间 $V' \subset V$ 上重合，当且仅当函数 z 在该区间上的限制为常数。但这违反了定理中的第二个条件。平面 Q_u 在某个区间 $U' \subset U$ 上重合，当且仅当 ξ 在该区间上具有固定方向，且曲线 γ 与该方向平行。但这样一来，γ 就包含一条直线段，这违反了第四个条件。

现在证明，每个 T-曲面都具有形式为 (4.1) 的参数化，其中 γ，ξ，f，z 满足定理中列出的条件。根据假设，坐标系选取为使轨迹平面 $P_{v_0} \supset \sigma|_{v=v_0}$ 平行于 xy-平面。这意味着

$$\sigma(u, v) = \begin{pmatrix} \tau(u, v) \\ z(v) \end{pmatrix}$$

对于某些光滑映射 $\tau\colon U \times V \to \mathbb{R}^2$ 和 $z\colon V \to \mathbb{R}$，其中 z 根据定义 4.1 的第四个条件处处局部非常值。于是有

$$\sigma_u = \begin{pmatrix} \tau_u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_v = \begin{pmatrix} \tau_v \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \quad \sigma_{uv} = \begin{pmatrix} \tau_{uv} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

根据 T-曲面的定义，有

$$\sigma_{uv} = \lambda\sigma_u + \mu\sigma_v$$

对于某些函数 λ, μ: $U\times V\to\mathbb{R}$。由于 σ_u 和 σ_{uv} 的 z 坐标处处为零，而 σ_v 的 z 坐标在稠密集上非零，因此 μ 恒等于零，于是

$$\sigma_{uv}(u,v)=\lambda(u,v)\sigma_u(u,v). \tag{4.2}$$

现在我们转而讨论 σ 的轮廓平面。每个 Q_u 都与 xy 平面正交。因此，交线 $L_u:=Q_u\cap\{z=0\}$ 同时也是 Q_u 在 xy 平面上的正交投影。由此可知，对于每个 $u_0\in U$，曲线 $\tau|_{u=u_0}$ 都包含在直线 L_{u_0} 中。设 $\xi(u)$ 为平行于直线 L_u 的向量。于是有 $L_u=\{\tau(u,0)+t\xi(u)\mid t\in\mathbb{R}\}$ 且

$$\tau(u,v)=\gamma(u)+f(u,v)\xi(u),\quad \text{where } \gamma(u)=\tau(u,0),\ f(0,v)=0.$$

我们的目标现在是证明 $f(u,v)=h(u)k(v)$，因为这样我们就得到

$$\tau(u,v)=\gamma(u)+f_1(v)\xi_1(u)\quad \text{for } f_1(v)=k(v) \text{ and } \xi_1(u)=h(u)\xi(u).$$

有

$$\tau_u=\dot\gamma+f_u\xi+f\dot\xi,\quad \tau_{uv}=f_{uv}\xi+f_v\dot\xi.$$

方程 (4.2) 等价于 $\tau_{uv}=\lambda\tau_u$，这意味着对于每个 $v\in V$，向量 $\tau_u(u,v)$ 都是向量 $\tau_u(u,0)=\dot\gamma(u)$ 的标量倍。由此可知，对于每个 $(u,v)\in U\times V$，向量

$$f_u\xi+f\dot\xi\quad\text{and}\quad f_{uv}\xi+f_v\dot\xi$$

是 $\dot\gamma$ 的标量倍。特别地，有

$$\det(f_u\xi+f\dot\xi,f_{uv}\xi+f_v\dot\xi)=0\Rightarrow(f_uf_v-ff_{uv})\det(\xi,\dot\xi)=0\quad\text{for all } u,v.$$

如果 $\det(\xi,\xi)=0$ 在某个区间 $U'\subset U$ 上成立，那么向量场 ξ 在此区间上具有固定方向。该方向必定与 $\dot\gamma$ 平行，这意味着 $\gamma|_{U'}$ 为常数，并且所有直线 L_u （$u\in U'$）都重合。这与定义 2.1 中的第四个条件相矛盾。因此，$\det(\xi,\xi)\neq0$ 在 U 的一个稠密子集上成立。由此可得

$$f_uf_v-ff_{uv}=0\quad\text{everywhere in } U\times V.$$

该方程意味着

$$(\log f)_{uv}=0\quad\text{whenever } f\neq0,$$

这反过来意味着，每个 $(u_0,v_0)\in U\times V$，只要 $f(u_0,v_0)\neq0$，就具有一个矩形邻域 $U'\times V'$，使得

$$f(u,v)=h(u)k(v)\quad\text{for all } (u,v)\in U'\times V'.$$

对于固定区间 V'，取满足 f 在 $U'\times V'$ 上不为零的极大区间 U'。那么上述对 f 的因式分解在 $U'\times V'$ 上成立，甚至在该四边形的闭包上也成立。如果 $U'\neq U$，那么根据 U' 的极大性，对于某个 $v_1\in V'$ 以及边界上的某个 u_1，有 $f(u_1,v_1)=0$。由此可得 $h(u_1)=0$。但此时 h，因此 f 在区间 $\{u_1\}\times V'$ 上为零，这意味着坐标曲线 $\sigma|_{u=u_1}$ 包含一个直线区间。因此，$U'=U$。由此可得，V 可以表示为若干闭区间 $V=\cup_{\alpha\in A}V_\alpha$ 的并集，这些闭区间具有互不相交的内部，并且

$$f(u,v)=h_\alpha(u)k_\alpha(v)\quad\text{for all } (u,v)\in U\times V_\alpha$$

其中光滑函数 h_α 处处不为零，光滑函数 k_α 在区间 V_α的端点处为零。因此有

$$\tau_u(u,v)=\dot\gamma(u)+k_\alpha(v)(\dot h_\alpha(u)\xi(u)+h_\alpha(u)\dot\xi(u))$$

并且根据上述结果，对于所有 α 以及所有 u，向量 $h_\alpha(u)\xi(u)+h_\alpha(u)\xi(u)$ 必须是 $\dot\gamma(u)$ 的标量倍。这意味着函数 h_α 彼此成比例。也就是说，存在一族非零实数 $\{\lambda_\alpha\mid\alpha\in A\}$，使得 $h_\alpha=\lambda_\alpha h$ 对于某个函数 h成立。将每个 k_α 替换为 $\lambda_\alpha k_\alpha$，并令 $k(v):=k_\alpha(v)$（其中 $v\in V_\alpha$），可得 $f(u,v)=h(u)k(v)$，且 h处处不为零。由于 f是正则的，h和k均为 C^∞。这证明了 σ具有形式 (4.1)，其中 $\gamma(u)=\sigma(u,0)$，且 $f(0)=0$。定理中所述的性质由 σ 的正则性以及定义 4.1 中的条件推出。□

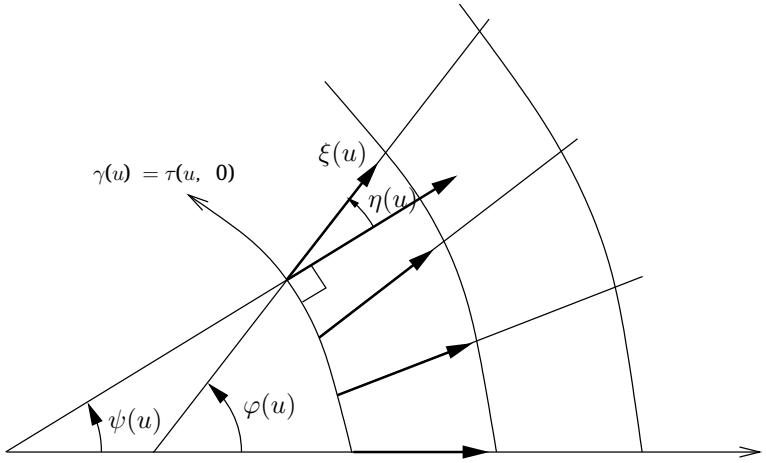

FIGURE 16. 定理 4.3 和引理4.4中 T-曲面的地面视图记号。

引理4.4。设

$$\xi(u) = c(u)\begin{pmatrix}\cos\varphi(u)\\ \sin\varphi(u)\end{pmatrix}.$$

那么，条件 $\xi \parallel \dot\gamma$ 等价于

$$\dot c\cos\eta = c\dot\varphi\sin\eta, \tag{4.3}$$

其中 $\eta(u) = \varphi(u) - \psi(u)$ 表示从曲线 γ 在点 $\gamma(u)$ 处的右法向量到向量 $\xi(u)$的夹角。

证明。记

$$\dot\gamma(u) = g(u)\begin{pmatrix}-\sin\psi(u)\\ \cos\psi(u)\end{pmatrix},$$

使得 $\eta = \varphi - \psi$。计算可得

$$\dot\xi = \dot c\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} + c\dot\varphi\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

由此可得

$$\det\left(\dot\xi, \frac{\dot\gamma}{\|\dot\gamma\|}\right) = \dot c\cos(\varphi-\psi) - c\dot\varphi\sin(\varphi-\psi) = \dot c\cos\eta - c\dot\varphi\sin\eta.$$

因此，条件 $\xi \parallel \dot\gamma$ 等价于 (4.3)。 □

推论 4.5. 一个 *T*-曲面由一条轨迹曲线、一条轮廓曲线，以及给定轨迹曲线上所有点处轮廓曲线的切线唯一确定。

证明. 轮廓曲线 $\sigma|_{u=0}$ 确定了所有 v对应的 $f(v)\xi(0)$ 和 $z(v)$ 的值。轨迹曲线 $\sigma|_{v=0}$ 即曲线 γ；它还确定函数 ψ。所有点 $(u,0)$ 处轮廓曲线的切线确定函数 φ 和 η。最后，方程 (4.3) 推得 $\frac{\dot c}{c} = \dot\varphi\tan\eta$，由此可将 $\|\xi(u)\|$ 计算至一个常数因子：

$$c(u) = c(0)\exp\left(\int_0^u \dot\varphi(w)\tan\eta(w)\,dw\right).$$

虽然 ξ 仅在一个常数因子意义下已知，但 $f(v)\xi(0)$ 的值确定了乘积$f(v)\xi(u)$，而这正是所需的全部信息。
□

4.3. **T-曲面的特殊类别**。

4.3.1. 平移 *T* 曲面。 如果一个 T-曲面的所有轮廓平面彼此平行，则称该曲面为平移型 。轮廓平面的平行性等价于 $\varphi = \text{const}$。于是，方程 (4.3) 表明 $c = \text{const}$，也就是说， ξ 是一个常向量场。将 x-轴置于 P_0 和Q_0的交线上，并缩放 f和 ξ，使得 $\xi = (1,0)$。若 $\gamma(u) = (x(u)\ y(u))$，则有

$$\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \gamma(u) + f(v)\xi \\ z(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u) + f(v) \\ y(u) \\ z(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(v) \\ 0 \\ z(v) \end{pmatrix}.$$

平移 T 曲面是平移曲面的一个子类，由两条任意且处处不平行的空间曲线 γ 和 δ 通过 $\sigma(u,\ v) = \gamma(u) + \delta(v)$ 生成。反过来，平移曲面（更准确地说，其坐标曲线网）构成切比雪夫网的一个子类。切比雪夫网在计算几何中得到了深入研究，并广泛应用于计算机图形学。

4.3.2.模制曲面。模制曲面是具有全等轮廓曲线的非平移 T 曲面，也就是说 $c(u) = \text{恒定}$，而 $\dot{\varphi} \neq 0$。方程 (4.3) 意味着 $\eta = 0$，这表示 ξ 是 γ 的右手单位法向量（同样， ξ 的长度可以通过缩放 f 和 ξ来调整）。因此，模制曲面的参数化形式为

$$\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \gamma(u) + f(v)n(u) \\ z(v) \end{pmatrix}.$$

4.3.3. 轴向 *T* 曲面。如果一个 T 曲面的所有轮廓平面都经过同一条直线，则称该 T 曲面为轴向。这意味着 $\gamma(u) = \lambda(u)\xi(u)$。条件 $\xi \parallel \dot{\gamma}$ 和 $\xi \not\parallel \dot{\gamma}$ 意味着 λ 为常数。因此$\tau(u,\ v) = (\lambda + f(v))\xi(u)$。将记号 f重新指定为函数 $\lambda + f$，即可得到轴向 T 曲面如下的参数化形式：

$$\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} f(v)\xi(u) \\ z(v) \end{pmatrix}.$$

这里，函数 f在 V上不能有零点。定理 4.3 中的第四和第五个条件必须将 γ 替换为 ξ后仍然成立；第六个条件则自动满足。注意，第五个条件的表述是： ξ 是一条不经过原点的正则曲线，并且 $\dot{\varphi}$，即位置向量 ξ方向的导数，处处不为零。方程 (4.3)也自动成立，其中η 表示从 ξ 的右法向量到 ξ的位置向量之间的角。

轴向模制 T-曲面是旋转曲面：

$$\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} f(v)\cos\varphi(u) \\ f(v)\sin\varphi(u) \\ z(v) \end{pmatrix}.$$

5. Isometric deformations of T-surfaces

定义 5.1。 正则参数曲面 $\sigma\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ 的等距变形 是指一族光滑的正则参数曲面

$$\sigma^t\colon \Omega \to \mathbb{R}^3, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon), \quad \sigma^0 = \sigma, \tag{5.1}$$

使得对于每个光滑映射 $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$，曲线 $\sigma \circ \gamma$和 $\sigma^t \circ \gamma$的长度对于所有 t都相等。如果两个 σ^{t_1}、 σ^{t_2} 之间不存在刚体运动关系，我们就称这种等距变形为非平凡的： 不存在等距变换 $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 使得 $\sigma^{t_2} = \Phi \circ \sigma^{t_1}$。

通常会使用较弱版本的非平凡性：存在一个 t，使得 $\sigma^t \neq \Phi \circ \sigma$。如果在 (5.1) 中， t仅在区间 $[0,\varepsilon)$ 或 $(-\varepsilon, 0]$ 内取值，则该变形称为单侧变形。我们将看到这样的例子：在给定的曲面类中，只有单侧变形是可能的。

众所周知，所有对应曲线长度相等这一条件等价于第一基本形式重合：

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^t & F^t \\ F^t & G^t \end{pmatrix},$$

其中

$$E(u,v) = \|\sigma_u(u,v)\|^2, \quad F(u,v) = \langle \sigma_u(u,v), \sigma_v(u,v)\rangle, \quad G(u,v) = \|\sigma_v(u,v)\|^2,$$

并且 E^t, F^t, G^t 也以类似方式定义。

5.1. 平移 T 曲面的变形。 一般平移曲面 $\sigma(u, v) = \gamma(u) + \delta(v)$ 的等距变形在 19 世纪得到了深入研究，参见 [15, 第 26] 节。我们在此推导平移 T 曲面的变形公式，作为预热，然后再将类似方法应用于其他类别的 T 曲面。

定理 5.2。 一个平移 T 曲面

$$\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} x(u) + f(v) \\ y(u) \\ z(v) \end{pmatrix}$$

可以在平移 T 曲面的类别中进行等距变形，前提是 y 和 z 的导数处处不为零。若不失一般性，假设 $x(0) = f(0) = y(0) = z(0) = 0$ 且 $\dot{y} > 0$、$\dot{z} > 0$，则该变形由下式给出

$$\sigma^t(u,v) = \begin{pmatrix} e^t x(u) + e^{-t} f(v) \\ \int_0^u \sqrt{\dot{y}(w)^2 + (1-e^{2t})\dot{x}(w)^2}\, dw \\ \int_0^v \sqrt{\dot{z}(w)^2 + (1-e^{-2t})\dot{f}(w)^2}\, dw. \end{pmatrix}$$

例 5.3。 旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 是一个平移曲面：抛物线 $(u, 0, u^2)$ 沿着抛物线 $(0, v, v^2)$ 平移。该抛物面的相应等距变形如图 17 所示。请将其与例 3.4 进行比较。

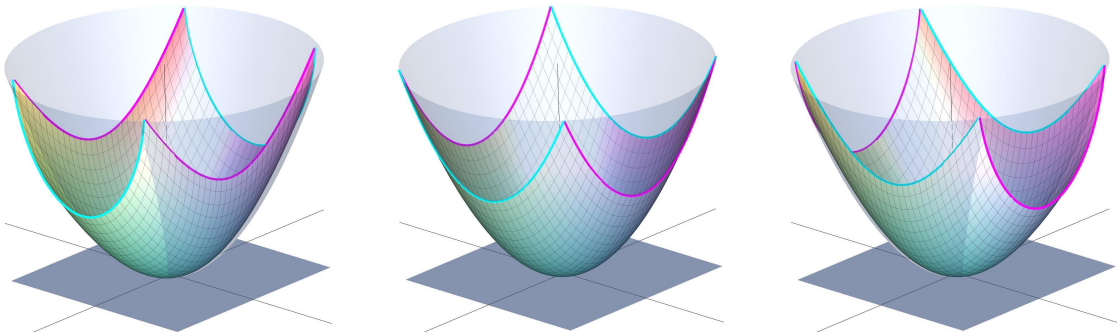

FIGURE 17. 旋转抛物面作为平移曲面的等距变形。

证明。 由偏导数

$$\sigma_u(u,v) = \begin{pmatrix} \dot{x}(u) \\ \dot{y}(u) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_v(u,v) = \begin{pmatrix} \dot{f}(v) \\ 0 \\ \dot{z}(v) \end{pmatrix}$$

计算 σ 的第一基本形式的系数：

$$E = \dot{x}(u)^2 + \dot{y}(u)^2,$$
$$F = \dot{x}(u)\dot{f}(v),$$
$$G = \dot{f}(v)^2 + \dot{z}(v)^2.$$

对于由待求函数 x^t、f^t、y^t、z^t 确定的 σ^t 的第一基本形式，也有类似的公式。可得

$$F^t = F \;\Leftrightarrow\; \dot{x}^t(u)\dot{f}^t(v) = \dot{x}(u)\dot{f}(v) \;\Leftrightarrow\; \frac{\dot{x}^t(u)}{\dot{x}(u)} = \frac{\dot{f}(v)}{\dot{f}^t(v)}.$$

在最后一个等式中，左边与 v 无关，右边与 u 无关。因此，两个表达式都只依赖于 t。于是有

$$F^t = F \;\Leftrightarrow\; \dot{x}^t(u) = k(t)\dot{x}(u),\; \dot{f}^t(v) = \frac{\dot{f}(v)}{k(t)} \text{ for some function } k.$$

由此可得

$$E^t = E \;\Leftrightarrow\; k(t)^2\dot{x}(u)^2 + \dot{y}^t(u)^2 = \dot{x}(u)^2 + \dot{y}(u)^2 \;\Leftrightarrow\; \dot{y}^t(u)^2 = \dot{y}(u)^2 + (1-k(t)^2)\dot{x}(u)^2.$$

当 $\dot{y}(u) = 0$ 且 $k(t) > 1$ 时，右边变为负数。类似地，

$$G^t = G \;\Leftrightarrow\; \frac{\dot{f}(v)^2}{k(t)^2} + \dot{z}^t(v)^2 = \dot{f}(v)^2 + \dot{z}(v)^2 \;\Leftrightarrow\; \dot{z}^t(v)^2 = \dot{z}(v)^2 + (1-k(t)^{-2})\dot{f}(v)^2.$$

这里，当 $\dot{z}(v) = 0$ 且 $k(t) < 1$ 时，右边变为负数。对于双侧等距变形，函数 $k\colon (-\varepsilon,\ \varepsilon) \to \mathbb{R}$ 必须单调，并满足 $k(0) = 1$。因此，只有当 $\dot{y}$ 和 $\dot{z}$ 始终不为零时，变形才存在。可以令 $k(t) = e^t$，由此得到引理中所述的公式。□

如果对于某个 v_0，$\dot{z}(v_0) = 0$，但 $\dot{y}$ 处处不为零，那么定理 5.2 中的公式可给出 $t \in [0, +\infty)$ 的单侧等距变形。然而，如果 v_0 是局部极值，则曲面沿坐标曲线 $v = v_0$ 产生折痕。图 18 展示了一个示例。相反，如果 v_0 是函数 z 的拐点，则对于 $t > 0$，σ^t 保持光滑，见图 19。若对于某个 u_0，$f(u_0) = 0$，也会出现同样的现象。

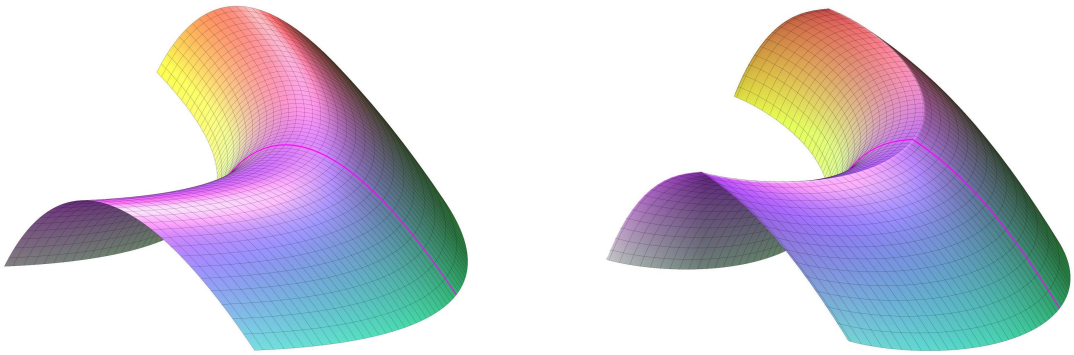

FIGURE 18. 沿一条坐标曲线出现折痕的平移 T 曲面的单侧等距变形。

5.2. **模制曲面的变形。**

定理 5.4. 一个模制曲面

$$\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \gamma(u) + f(v)n(u) \\ z(v) \end{pmatrix}$$

若 z 的导数处处不为零，则可在模制曲面的类别中进行等距变形。若不失一般性地假设 $\gamma(0) = (0、0)$ 且 $\dot{z} > 0$，则该变形具有如下形式

$$\sigma^t(u,v) = \begin{pmatrix} \gamma^t(u) + e^{-t}f(v)n^t(u) \\ z^t(v) \end{pmatrix},$$

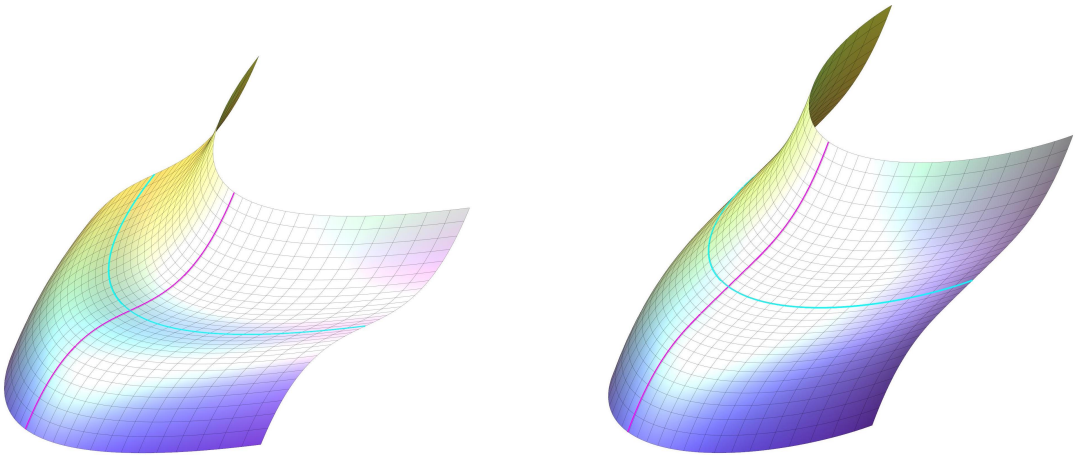

FIGURE 19. 平移 T 曲面的单侧等距变形。

其中

$$\gamma^t(u) = \int_0^u g(w) \begin{pmatrix} -\sin(e^t\psi(w)) \\ \cos(e^t\psi(w)) \end{pmatrix} dw, \quad n^t(u) = \begin{pmatrix} \cos(e^t\psi(u)) \\ \sin(e^t\psi(u)) \end{pmatrix},$$
$$z^t(v) = \int_0^v \sqrt{\dot{z}(w)^2 + (1-e^{-2t})\dot{f}(w)^2}\, dw$$

其中 $g(u)$ 是 $\dot{\gamma}(u)$ 的范数，而 $\psi(u)$ 是 γ的右法向量的方向，换言之，

$$\dot{\gamma}(u) = g(u) \begin{pmatrix} -\sin\psi(u) \\ \cos\psi(u) \end{pmatrix}, \quad n(u) = \begin{pmatrix} \cos\psi(u) \\ \sin\psi(u) \end{pmatrix}.$$

证明。 计算偏导数

$$\sigma_u(u,v) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}(u) + f(v)\dot{n}(u) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(g(u) + f(v)\dot{\psi}(u))\sin\psi(u) \\ (g(u) + f(v)\dot{\psi}(u))\cos\psi(u) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_v(u,v) = \begin{pmatrix} \dot{f}(v)n(u) \\ \dot{z}(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{f}(v)\cos\psi(u) \\ \dot{f}(v)\sin\psi(u) \\ \dot{z}(u) \end{pmatrix}.$$

由此可计算第一基本形式的系数:

$$E = (g(u) + f(v)\dot{\psi}(u))^2, \quad F = 0, \quad G = \dot{f}(v)^2 + \dot{z}(v)^2.$$

对于 σ^t，类似的公式也成立。我们有

$$E^t = E \;\Leftrightarrow\; g^t(u) + f^t(v)\dot{\psi}^t(u) = g(u) + f(v)\dot{\psi}(u).$$

代入 $v = 0$ 可得 $g^t = g$。因此有

$$\frac{f^t(v)}{f(v)} = \frac{\dot{\psi}(u)}{\dot{\psi}^t(u)}.$$

在此方程中，左侧与 u无关，右侧与 v无关。因此，这两个表达式都只依赖于 t 。通过重新参数化该变形，可以假设

$$f^t(v) = e^{-t}f(v), \quad \dot{\psi}^t(u) = e^t\dot{\psi}(u).$$

必要时施加刚体运动，可假设对所有 t都有 $\psi^t(0) = 0$ ，从而

$$\dot{\psi}^t(u) = e^t\dot{\psi}(u) \;\Rightarrow\; \psi^t(u) = e^t\psi(u).$$

于是有

$$\dot{\gamma}^t(u) = g(u) \begin{pmatrix} -\sin(e^t\psi(u)) \\ \cos(e^t\psi(u)) \end{pmatrix}, \quad n^t(u) = \begin{pmatrix} \cos(e^t\psi(u)) \\ \sin(e^t\psi(u)) \end{pmatrix},$$

这就推出了引理中所述的 $\gamma^t(u)$ 和 $n^t(u)$ 的公式（同样，通过刚体运动可以使 $\gamma^t(0) = (0, 0)$ 和 $\psi^t(0) = 0$）。

还需注意到

$$G^t = G \;\Leftrightarrow\; e^{-2t}\dot{f}(v)^2 + \dot{z}^t(v)^2 = \dot{f}(v)^2 + \dot{z}(v)^2 \;\Leftrightarrow\; \dot{z}^t(v)^2 = \dot{z}(v)^2 + (1 - e^{-2t})\dot{f}(v)^2,$$

定理便得证。 □

如果 z 的导数在某些点处为零，那么就存在一种单侧变形，使曲面沿着与 z 的局部极值相对应的轨迹曲线产生折痕，这与图 18 所示的平移 T-曲面的情形类似。

5.3. **轴向 T 曲面的变形**。

定理 5.5. 一个轴向 *T*-曲面

$$\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} f(v)\xi(u) \\ z(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(v)c(u)\cos\varphi(u) \\ f(v)c(u)\sin\varphi(u) \\ z(v) \end{pmatrix}$$

若 z 的导数处处不为零，则可在轴向 *T*-曲面的类别中对其进行等距变形。不失一般性地假设 $\dot{\varphi} > 0$ 和 $\dot{z} > 0$，则该变形具有如下形式

$$\sigma^t(u,v) = \begin{pmatrix} f(v)\sqrt{c(u)^2 + t}\cos\varphi^t(u) \\ f(v)\sqrt{c(u)^2 + t}\sin\varphi^t(u) \\ z^t(v) \end{pmatrix},$$

其中

$$\varphi^t(u) = \int_0^u \frac{\sqrt{c(w)^4\dot{\varphi}(w)^2 + t(c(w)^2\dot{\varphi}(w)^2 + \dot{c}(w)^2)}}{c(w)^2 + t}\,dw = \int_0^u \frac{\dot{\varphi}(w)c(w)\sqrt{c(w)^2 + \frac{t}{\cos^2\eta(w)}}}{c(w)^2 + t}\,dw,$$

$$z^t(v) = \int_0^v \sqrt{\dot{z}(w)^2 - t\dot{f}(w)^2}\,dw,$$

其中 η 表示从 ξ 的右法向量到 ξ 的位置向量之间的夹角。

证明。 通过直接计算，可以验证 σ 和 σ^t 的第一基本形式相等。我们将说明这些公式是如何推导出来的，这也表明，在与 σ 等距的轴向 T-曲面空间中，只有一个自由度。

由偏导数

$$\sigma_u(u,v) = \begin{pmatrix} f(v)\dot{\xi}(u) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_v(u,v) = \begin{pmatrix} \dot{f}(v)\xi(u) \\ \dot{z}(v) \end{pmatrix},$$

可以计算出 σ 的第一基本形式的系数:

$$E = f(v)^2\|\dot{\xi}(u)\|^2,$$
$$F = \dot{f}(v)f(v)\langle\dot{\xi}(u), \xi(u)\rangle,$$
$$G = \dot{f}(v)^2\|\xi(u)\|^2 + \dot{z}(v)^2.$$

对于由待求函数 f^t, c^t, φ^t, z^t 确定的 σ^t 的第一基本形式，也有类似的公式。可得

$$E^t = E \Leftrightarrow f^t(v)\|\dot{\xi}^t(u)\| = f(v)\|\dot{\xi}(u)\| \Leftrightarrow \frac{f^t(v)}{f(v)} = \frac{\|\dot{\xi}(u)\|}{\|\dot{\xi}^t(u)\|}.$$

在最后一个方程中，左端与 v 无关，右端与 u 无关。因此，这两个表达式都只依赖于 t。由于将 f^t 向上缩放并将 ξ^t 向下缩放相同的倍数不会改变 σ^t，可以假设

$$f^t(u) = f(u), \quad \|\dot{\xi}^t(u)\| = \|\dot{\xi}(u)\|.$$

后一个方程等价于

$$(\dot{c}^t)^2 + (c^t)^2(\dot{\varphi}^t)^2 = \dot{c}^2 + c^2\dot{\varphi}^2. \tag{5.2}$$

由于 $f^t = f$，有

$$F^t = F \Leftrightarrow \langle \dot{\xi}^t(u), \xi^t(u)\rangle = \langle \dot{\xi}(u), \xi(u)\rangle \Leftrightarrow \frac{d(c^t(u)^2)}{du} = \frac{d(c(u)^2)}{du}.$$

也就是说，$c^t(u)^2 - c(u)^2$ 必须与 u 无关。通过改变变形参数 t，可以假设

$$c^t(u)^2 = c(u)^2 + t.$$

这意味着

$$c^t = \sqrt{c^2 + t}, \quad \dot{c}^t = \frac{\dot{c}c}{\sqrt{c^2 + t}}.$$

将其代入 (5.2)，并求解所得方程中的 $\dot{\varphi}^t$，得到

$$(\dot{\varphi}^t)^2 = \frac{c^4\dot{\varphi}^2 + t(c^2\dot{\varphi}^2 + \dot{c}^2)}{(c^2 + t)^2}.$$

由于 φ 的导数为正，右侧对于所有充分接近 0 的 t 都保持为正。必要时，将 σ^t 与 $\mathbb{R}^3$ 的一个刚体运动复合，可以假设 $\varphi^t(0) = \varphi(0)$。由此可得 $\varphi^t(u) = \varphi(0) + \int_0^w \dot{\varphi}^t(w)\,dw$，从而得到引理中所述的 φ^t 的第一个公式。利用方程 (4.3) 可以化简此公式，得到 φ^t 的第二个公式。最后，由于 $f^t = f$ 且 $\|\xi^t(u)\|^2 = \|\xi(u)\|^2 + t$，有

$$G^t = G \Leftrightarrow f(v)^2(c(u)^2 + t) + \dot{z}^t(v)^2 = f(v)^2c(u)^2 + \dot{z}(v)^2 \Leftrightarrow \dot{z}^t(v)^2 = \dot{z}(v)^2 - tf(v)^2.$$

经过刚体运动后，$z^t(0) = z(0)$，由此得到定理的最后一个公式。 □

如果 z 的导数在某些点处为零，那么存在一种单侧变形，使曲面沿着对应于 z 局部极值的轨迹曲线产生折痕，这与图 18 所示平移 T 曲面的情况类似。如果 z 没有局部极值而只有拐点，那么在单侧变形过程中它仍保持光滑，见图 20。

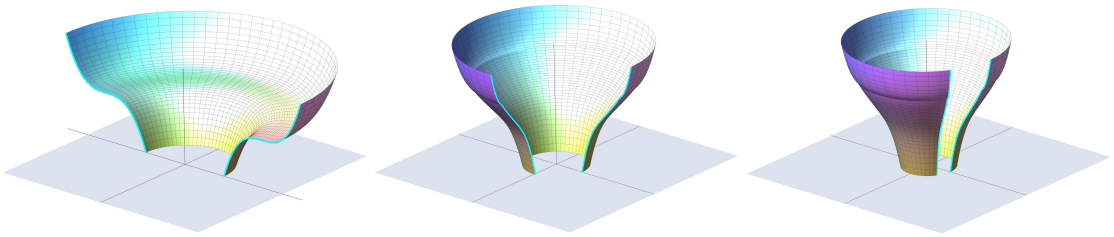

FIGURE 20. 具有一个拐点且该处切线为水平切线的旋转曲面的单侧等距变形。

将定理 5.5 特化到 $c(u) = 1$，即可得到旋转曲面的等距变形公式。

定理 5.6. 旋转曲面

$$\sigma(u, v) = \begin{pmatrix} f(v)\cos\varphi(u) \\ f(v)\sin\varphi(u) \\ z(v) \end{pmatrix}$$

若 z 的导数处处不为零，则该曲面可在旋转曲面类中进行等距变形。若不失一般性地假设 $\dot{\varphi} > 0$ 和 $\dot{z} > 0$，则该变形具有如下形式

$$\sigma^t(u,v) = \begin{pmatrix} f(v)\sqrt{1+t}\cos\frac{\varphi(u)}{\sqrt{1+t}} \\ f(v)\sqrt{1+t}\sin\frac{\varphi(u)}{\sqrt{1+t}} \\ \int_0^v \sqrt{\dot{z}(w)^2 - t\dot{f}(w)^2}\,dw \end{pmatrix}.$$

图 21 展示了抛物面楔形区域的一种等距变形 $z = x^2 + y^2$。将其与图 15 进行比较。

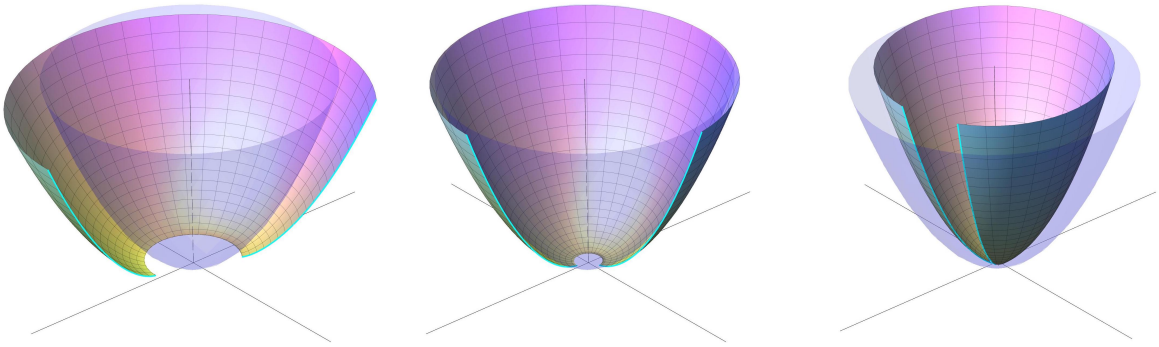

FIGURE 21. 旋转抛物面楔形区域在旋转曲面类中的等距变形。

5.4. **一般 T-曲面的变形。**

定理 5.7。 *T*-曲面

$$\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \gamma(u) + f(v)\xi(u) \\ z(v) \end{pmatrix}, \quad \gamma(u) = \int_0^u g(u)\begin{pmatrix} -\sin\psi(w) \\ \cos\psi(w) \end{pmatrix}, \quad \xi(u) = c(u)\begin{pmatrix} \cos\varphi(u) \\ \sin\varphi(u) \end{pmatrix}$$

当 φ 和 z 的导数处处不为零时，可以在 *T*-曲面类中对其进行等距变形。若不失一般性地假设 $\varphi(0) = z(0) = 0$、$\dot{\varphi} > 0$ 和 $\dot{z} > 0$，则该变形具有如下形式

$$\sigma^t(u,v) = \begin{pmatrix} \gamma^t(u) + f(v)\xi^t(u) \\ z^t(u) \end{pmatrix}, \quad \gamma^t(u) = \int_0^u g(u)\begin{pmatrix} -\sin\psi^t(w) \\ \cos\psi^t(w) \end{pmatrix}, \quad \xi^t(u) = \sqrt{c(u)^2+t}\begin{pmatrix} \cos\varphi^t(u) \\ \sin\varphi^t(u) \end{pmatrix},$$

其中

$$z^t(v) = \int_0^v \operatorname{sign}(\dot{z}(w))\sqrt{\dot{z}(w)^2 - t\dot{f}(w)^2}\,dw,$$

$$\varphi^t(u) = \int_0^u \frac{\dot{\varphi}(w)c(w)\sqrt{c(w)^2 + \frac{t}{\cos^2\eta(w)}}}{c(w)^2+t}\,dw, \quad \textit{where } \eta(w) = \varphi(w) - \psi(w)$$

$$\psi^t(u) = \varphi^t(u) - \eta^t(u), \quad \textit{where } \eta^t(u) = \arctan\frac{c\sin\eta}{\sqrt{c^2\cos^2\eta + t}}.$$

证明。 由偏导数可得:

$$\sigma_u(u,v) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}(u) + f(v)\dot{\xi}(u) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_v = \begin{pmatrix} \dot{f}(v)\xi(u) \\ \dot{z}(v) \end{pmatrix}$$

可计算出第一基本形式的系数:

$$E = \|\sigma_u(u,v)\|^2 = \|\dot\gamma(u) + f(v)\dot\xi(u)\|^2$$
$$F = \langle \sigma_u(u,v), \sigma_v(u,v)\rangle = \langle \dot\gamma(u) + f(v)\dot\xi(u), \dot f(v)\xi(u)\rangle$$
$$G = \|\sigma_v(u,v)\|^2 = (\dot f(v))^2\|\xi(u)\|^2 + (\dot z(v))^2,$$

σ^t也同理。

我们来研究方程 $E^t = E$。代入 $v = 0$ 后得到

$$\|\dot\gamma^t(u)\| = \|\dot\gamma(u)\| \tag{5.3}$$

对所有 t, u。由于 $\dot\gamma(u) \parallel \dot\xi(u)$ 且 $\dot\gamma^t(u) \parallel \dot\xi^t(u)$, 方程 $\|\sigma^t_u(u,\ v)\| = \|\sigma_u(u,\ v)\|$ 等价于 $f^t(v)\|\dot\xi^t(u)\| = f(v)\|\dot\xi(u)\|$。这可改写为

$$\frac{f^t(v)}{f(v)} = \frac{\|\dot\xi(u)\|}{\|\dot\xi^t(u)\|}.$$

由于左边与 u 无关，而右边与 v 无关，因此这两个商等于某个函数 $a(t)$。注意到，将 f^t 缩小、将 ξ^t 放大 $a(t)$ 倍时，参数化 σ^t 不变，由此可得，不失一般性，可以假设

$$f^t(v) = f(v), \quad \|\dot\xi^t(u)\| = \|\dot\xi(u)\| \quad \text{for all } t. \tag{5.4}$$

条件 (5.3) 和 (5.4) 是 $E^t = E$ 的充要条件，即所有轨迹曲线都发生等距变形。

现在来研究方程 $F^t = F$:

$$\langle \dot\gamma^t(u) + f^t(v)\dot\xi^t(u), \dot f^t(v)\xi^t(u)\rangle = \langle \dot\gamma(u) + f(v)\dot\xi(u), \dot f(v)\xi(u)\rangle.$$

由于 $\dot\xi^t(u) \parallel \dot\gamma^t(u)$，且根据 (5.3) 和 (5.4)，这等价于

$$\langle \dot\xi^t(u), \xi^t(u)\rangle = \langle \dot\xi(u), \xi(u)\rangle,$$

这意味着 $\frac{d}{du}\left(\|\xi^t(u)\|^2\right) = \frac{d}{du}\left(\|\xi(u)\|^2\right)$，换言之，差值 $\|\xi^t(u)\|^2 - \|\xi(u)\|^2$ 仅是 t 的函数，与 u 无关。通过参数变换，可以假定

$$\|\xi^t(u)\|^2 = \|\xi(u)\|^2 + t \quad \text{for all } t. \tag{5.5}$$

反过来可知，在假设 (5.3) 和 (5.4) 成立的情况下，方程 (5.5) 不仅是 $F^t = F$ 的必要条件，也是其充分条件。

最后，由 (5.4) 和 (5.5) 得到的方程 $G^t = G$ 具有如下形式

$$(\dot f(v))^2(\|\xi(u)\|^2 + t) + (\dot z^t(v))^2 = (\dot f(v))^2\|\xi(u)\|^2 + (\dot z(v))^2,$$

由此可解出 $\dot z^t(v)$:

$$(\dot z^t(v))^2 = (\dot z(v))^2 - t(\dot f(v))^2$$

在假设 $\dot z > 0$ 下，便得到定理中的公式。

还需推导满足条件 (5.3)、(5.4)、(5.5) 的 γ^t 和 ξ^t 的公式，以及 $\dot\gamma^t(u) \parallel \dot\xi^t(u)$。由于我们有

$$\dot\gamma^t(u) = g^t(u)\begin{pmatrix}-\sin\psi^t(u)\\ \cos\psi^t(u)\end{pmatrix}, \quad \xi^t(u) = c^t(u)\begin{pmatrix}\cos\varphi^t(u)\\ \sin\varphi^t(u)\end{pmatrix},$$

方程 (5.3) 和 (5.5) 简单地表明 $g^t = g$ 和 $c^t = \sqrt{c^2 + t}$。方程 (5.4) 中的第二个方程已在研究轴向 T-曲面的变形时求解，见 (5.2) 及其后续内容。这便得到 φ^t 的公式。将方程 (4.3) 应用于 σ^t，可得

$$\tan\eta^t = \frac{\dot c^t}{c^t\dot\varphi^t} = \frac{\dot c}{\dot\varphi\sqrt{c^2 + \frac{t}{\cos^2\eta}}} = \frac{c\sin\eta}{\sqrt{c^2\cos^2\eta + t}},$$

并且定理得证。 □

5.5. **T-曲面的平行对**。

定义 5.8. 若对于任意$(u, v) \in U \times V$，都有 $\sigma_u(u, v) \parallel \sigma'_u(u, v)$且 $\sigma_v(u, v) \parallel \sigma'_v(u, v)$，则称两个 *T*-曲面 $\sigma, \sigma'\colon \ U \times V \to \mathbb{R}^3$为平行 。

定理 5.9. 设 σ 为由(4.1)给定的一个 *T*-曲面。则存在无穷多个与 σ平行的 *T*-曲面。它们中的每一个均由一对曲线生成，其中一条平行于轨迹曲线 $\sigma|_{v=0}$ ，另一条平行于轮廓曲线 $\sigma|_{u=0}$。

证明。有

$$\sigma(u, 0) = \begin{pmatrix} \gamma(u) \\ z(0) \end{pmatrix}, \quad \sigma(0, v) = \begin{pmatrix} \gamma(0) + f(v)\xi(0) \\ z(v). \end{pmatrix}$$

若 σ' 与 σ平行，则其初始轨迹曲线必须由一条与 γ平行的曲线 γ' 给定，而其初始轮廓曲线则由一条与 $\sigma_{u=0}$平行的曲线 $(\gamma'(0) + f'(v)\xi(0),\ z'(v))$ 给定。另一方面，对于任意满足这些条件的γ'、 f'、 z' ，曲面

$$\sigma'(u, v) = \big(\gamma'(u) + f'(v)\xi(u), z'(v)\big)$$

（只要它是正则的；为此只需注意第六个条件的最后一部分定理 4.3）就与 σ 平行，并且是一个 T-曲面。这两点都由 $\xi \parallel \dot\gamma \parallel \dot\gamma'$得出。□

推论 5.10. 对于每个满足 $\dot\varphi \neq 0$ 的 *T*-曲面，都存在一个与之平行的轴向 *T*-曲面。

证明. 只需令 $\gamma' = \xi$即可。 □

定理 5.11. 如果两个 *T*-曲面平行，那么它们的等距变形仍保持平行 .

证明. 一方面，这是一个更一般定理的特例：如果光滑曲面 σ 和 σ' 具有平行的共轭网，并且 σ 存在一种保持其网不变的等距变形，那么 σ' 也存在一种保持其网不变、且使其与 σ上的网保持平行的等距变形，参见 [12,§10]。

另一方面，这可由我们关于等距变形的公式得出。根据前述定理，只需追踪初始轮廓与轨迹曲线的平行性。对于 σ 和 σ' 的 0-轮廓曲线， f^t 和 z^t 的公式保证了它们始终保持平行。对于 0-轨迹曲线，则应使用 ψ的公式：这些公式仅取决于向量场 ξ，而该向量场是 σ 和 σ'共有的。□

Acknowledgments

第一和第二作者得到奥地利科学基金会 FWF 的 F77 项目资助（SFB“高级计算设计”，子项目 SP7）。此外，作者谨向 Georg Nawratil 和 Kiumars Sharifmoghaddam 致谢，感谢他们参与有益的讨论。

References

[1] D. Pellis，《作为优化建筑自由曲面结构的四边形网格》，博士论文，维也纳工业大学（2019年）。网址 https://repositum.tuwien.at/handle/20.500.12708/14856

[2] K. Miura，《太空大型薄膜的折叠与展开方法》，日本宇宙科学研究所报告 618（1985年）1–9。[3] T. Tachi，《刚性可折叠四边形网格折纸的推广》，国际壳体与空间结构协会期刊 50（162）（2009年）173–179。[4] R. J. Lang，L. Howell，《由角度阵列构成的刚性可折叠四边形网格》，《机构与机器人学期刊》10（2），021004（02 2018年）。[5] F. Feng，X. Dang，R. D. James，P. Plucinsky，《刚性可折叠和平折四边形网格折纸的设计与变形》，《固体力学与物理学期刊》142（2020年）104018。[6] R. Sauer，H. Graf，《关于曲面的弯曲，类比于开放多面片的折弯》，《数学年刊》105（1）（1931年）499–535。[7] A. Kokotsakis，《关于可动多面体》，《数学年刊》107（1）（1933年）627–647。[8] H. Stachel，《Kokotsakis 网格的运动学方法》，《计算机辅助几何设计》27（6）（2010年）428–437。[9] G. Nawratil，《含球面连杆构件的球面四杆机构的可约组合》，《机构与机器理论》46（2011年）725–742。

[10] G. Nawratil，《不含球面连杆构件的球面四杆机构的可约组合》，《机构与机器理论》49（2012年）87–103。[11] I. Izmestiev，《四边形底面可动 Kokotsakis 多面体的分类》，国际数学研究论文集（3）（2017年）715–808。[12] R. Sauer，《差分几何》，施普林格，1970年。[13] K. Sharifmoghaddam，G. Nawratil，A. Rasoulzadeh，J. Tervooren，《利用可动梯形四边曲面进行可变形设计》，载于：IASS 年度研讨会论文集，第2020卷。[14] K. Peterson，《关于曲线与曲面》，A. Lang 书店，莫斯科；Franz Wagner，莱比锡，1868年。[15] A. Voss，《两个曲面的映射与展开》，W. Fr. Meyer，H. Mohrmann，《数学科学百科全书》III，几何学 3，355–440。

Institute of Discrete Mathematics and Geometry, Vienna University of Technology, Wiedner Haupt-strasse 8–10, 1040 Vienna, AUSTRIA*Email address*: izmestiev@dmg.tuwien.ac.at. *Email address*: rasoulzadeh@geometrie.tuwien.ac.at.*Email address*: jtervooren@geometrie.tuwien.ac.at.