arXiv:2302.08977v1 [physics.atom-ph] 17 Feb 2023

利用冷 ^{88}Sr原子实现亚自然线宽超辐射激光

Sofus Laguna Kristensen[1], * Eliot Bohr, [1] Julian Robinson-Tait, [1]Tanya Zelevinsky, [2] Jan W. Thomsen, [1] 以及 J¨org Helge M¨uller[1], †[1]*Niels Bohr Institute, University of Copenhagen, DK-2100 Copenhagen, Denmark*[2]*Department of Physics, Columbia University, 538 West 120th Street, New York, NY 10027-5255, USA*（日期：2023年2月20日）

超辐射激光器工作于坏腔区，此时相干性储存在原子介质的自旋态中，而非腔内电场中。这类激光器利用集体效应维持激光发射，其线宽有望显著低于传统激光器。在此，我们研究了光学腔内超冷 ^{88}Sr原子系综的超辐射激光发射特性。我们将 7.5 kHz 宽的 $^3P_1 \rightarrow {}^1S_0$自旋禁戒跃迁线上的超辐射发射延长至数毫秒，并观察到适合通过精细调节再泵浦速率来模拟连续超辐射激光器性能的稳定参数。在 1.1 ms 的激光发射期间，我们实现了 820 Hz 的激光线宽，几乎比自然线宽低一个数量级。

发射窄频谱的激光器推动了精密测量技术和基础研究的诸多进展。光学原子钟依赖于窄线宽和超稳激光器，其分数不稳定度已达到每 10^{19} [1–6]仅几个数量级的水平。然而，这类激光器需要独立的高精细度腔，而原子钟的稳定度目前受原子探测占空比的限制。降低测量间死时间的方法包括使用多个原子系综填补时间间隔 [7–10], 对原子系综进行非破坏性测量 [11, 12], 或采用传送带方案，连续装载并探测原子 [13]。另一种降低死时间的设想是利用腔与冷原子样品之间的耦合，开展被动式腔辅助非线性光谱测量 [14–16] 以实现激光稳频，但这需要精细调节反馈带宽，并谨慎管理技术噪声。

近来，开发主动式原子钟 [17–21]的研究兴趣日益增长。这种原子钟无需使用独立的高精细度腔来稳定参考激光的短期频率。在主动式原子钟中，相干发射窄跃迁光并耦合至光学腔模式的原子构成频率基准 [22, 23]。在坏腔区运行时，激光发射频率由原子系综的线宽而非腔决定，因此能够显著降低腔镜热噪声导致的激光频率波动；这正是当前先进原子钟的一项限制 [24–26]。

多项研究探讨了脉冲超辐射光[17, 20, 27] ，这些研究依赖单次激发脉冲来产生超辐射脉冲。然而，集体增强发射率本身会产生持续时间短于相应跃迁自然寿命的脉冲，导致发射光呈现傅里叶极限谱特征。开创性工作 [19] 通过对原子进行再泵浦，展示了持续时间延长的超辐射脉冲并在 ^{88}Sr中实现了千赫兹跃迁上的数百 μ秒激光发射。

在这篇快报中，我们提出了一种基于 689 纳米 $^3P_1$, $m_j = 0 \rightarrow {}^1S_0$ 互组合跃迁的激光发射方案，该跃迁的自然线宽为 $\gamma_l = 2\pi \times 7.5$ 千赫。可调节的再泵浦速率使我们能够稳定激光发射参数，并使其频率特性接近真正连续的超辐射激光器。我们将一团自由下落的超冷 ^{88}Sr 原子耦合至低精细度腔，产生超辐射激射脉冲。通过将原子暂存于亚稳态 $^3P_2$ 能级，使可用增益在更长时间内分配，我们实现了稳定激射功率输出，并延长了发射持续时间。采用这一方案，我们将脉冲长度最大化，以分析其频率成分，并实现了超过 1 毫秒的稳态激射，平均输出功率达数个 10^{-9} 瓦。我们将傅里叶极限推至比该跃迁的自然线宽低近一个数量级，并展示了面向未来超辐射原子钟的主动激射方案的可行性。

我们的实验系统由 $N = 4 \times 10^7$ ^{88}经 2 μK冷却的Sr原子组成，冷却过程采用461纳米和689 纳米磁光阱（MOT）阶段。利用偏置磁场将MOT定位，使其与水平放置、腔长为21 cm的光学腔基模重合，如图1（a）所示。该腔的精细度为 10^3,，线宽为 $\kappa = 2\pi \times 780$ kHz，自由光谱范围（FSR）为 $2\pi \times 781$ MHz。反射镜的曲率半径均为9 m，腔模束腰半径为 450 μm。腔长通过锁定在距原子共振一个自由光谱范围的位置来稳定，以确保锁定光不会与原子发生显著相互作用。冷却周期结束时，689 纳米MOT的直径为 100 μm，因此原子系综能够很好地处于TEM00腔模体积内。原子分布在波节和波腹之间，因此与腔模之间具有非均匀耦合， g_0。我们工作在单原子弱耦合区，Purcell因子为 [28] $C = \frac{4g_0^2}{\kappa\gamma_l} = 4.4 \times 10^{-4}$，但处于集体强耦合

—

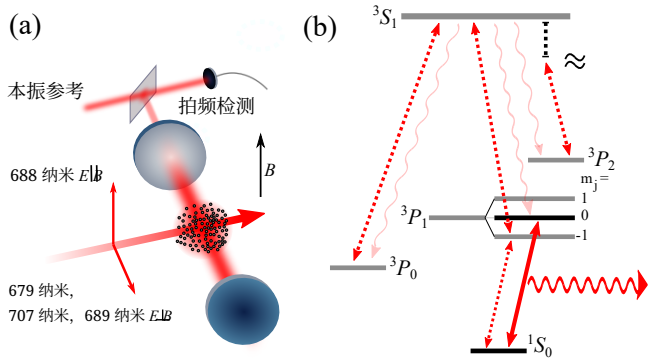


图 1. (a) 实验示意图。波长为 679 纳米、707 纳米、688 纳米和 689 纳米的再泵浦激光束垂直入射到腔中。选择 688 纳米和 689 纳米再泵浦光的偏振，以避免激发或耗尽 $^3P_1$, $m_j = 0$，并限制激光跃迁的光频移。我们将腔发射光与稳定的参考激光进行拍频，以测量发射脉冲的频率稳定性。(b) ^{88}Sr 的能级图，显示了激光发射（实线箭头）、再泵浦（虚线箭头）和自发衰变（波浪箭头）。我们将 707 nm 再泵浦光失谐 $2\pi \times 60$ MHz $\approx 9\gamma_{707}$，以便在激光发射期间将原子捕置在 $^3P_2$。

区， $NC \gg 1$。通过分辨出的正则模劈裂测量得到$\Omega_N = 2\pi \times 5.7$MHz，证实了这一点；该测量表明，集体真空拉比频率超过了系统中其他相关的退相干率：$\Omega_N \gg \kappa,\ \gamma_l$。原子冷却后，我们关闭磁光阱激光束和磁线圈，仅保留一个竖直方向、强度为2 Gauss的偏置磁场。该偏置磁场提供量子化轴，并使 $^3P_1$ 磁子能级中每两个相邻能级之间产生4.2 MHz的劈裂。

开启 4 个再泵浦激光器（图1（b）中的虚线箭头）后，我们以非相干方式布居 $^3P_1$, $m_j = 0$ 从而产生超辐射激光发射。689 纳米再泵浦光的偏振方向垂直于偏置磁场，因此只允许跃迁至 $^3P_1$, $m = \pm 1$ 态，并将失谐设定为只寻址一个态。688 纳米再泵浦光的偏振方向平行于偏置磁场，以驱动 $\Delta m_j = 0$在 $^3P_1$, $m_j = \pm 1$与 $^3S_1$, $m_j = \pm 1$之间的跃迁，同时由于选择定则，不会耗尽上激光能级 $^3P_1$, $m_j = 0$>态。另有两台波长分别为 679 纳米和 707 纳米的再泵浦激光器，用于抑制从 $^3S_1$ 到 $^3P_0$ 和 $^3P_2$ 能级的分支衰变。688 纳米、679 纳米和 707 纳米再泵浦激光器的工作强度都接近相应跃迁的饱和强度。原子必须经由自发衰变到达上激光能级，以确保再泵浦激光与发射光之间不存在任何相干性。任何相干性都可能引入不必要的相位噪声。

所有再泵浦激光器均沿同一方向传播，并垂直于腔轴放置，如图1（a）所示。这确保再泵浦引起的多普勒频移对于沿腔轴发射的光最小，并且使原子系综的多普勒宽度 γ_D 远窄于腔线宽的时间最长（这是主要的展宽因素），因此在整个激光发射过程中，我们都工作在坏腔区 $\kappa/\gamma_D \gg 1$。再泵浦激光器沿同一方向传播，也限制了可变光频移（主要来自 689 纳米和 688 纳米激光器），因为即使云团受到辐射压力而加速，原子仍始终处于再泵浦光束的高斯强度分布范围内。

数值模拟估计，在腔模中每发射一个光子，原子平均会吸收 9 个再泵浦光子，并自发发射 8 个光子。每个激光激发循环中，吸收再泵浦光子所产生的多普勒频移为 ~85 千赫兹，比 γ_l 大一个数量级以上。随着原子受到再泵浦并加速离开腔模，它们经历的 689 nm再泵浦激光频率失谐会在每个再泵浦循环中发生变化。当所有再泵浦激光器均处于共振状态时，由于腔内原子数较高，进入上激光能级的再泵浦速率很高，导致集体增强发射率超过 689 nm再泵浦激光的再泵浦速率 $\Omega_N > \Gamma_{689}$。

再泵浦速率与集体增强发射率之间这种不稳定的平衡，会使集体偶极的振幅随时间振荡，从而导致激光强度呈现尖峰状变化。较高的再泵浦速率会迅速加热云团，并将其推出腔模，导致激光发射仅持续几百个 μs 后便终止。通过仔细调节 707 nm 再泵浦光的失谐，我们可以从输出功率呈振荡状态的不稳定激光工作区，逐渐过渡到稳态激光工作区。

在稳态区间，我们通过将 707 nm再泵浦激光相对于 $^3P_2$, $m_j = 0 \rightarrow {}^3S_1$,$m_j = 0$ 跃迁的失谐调至 $2\pi \times 60$ MHz（约为 707 纳米跃迁线宽 γ_{707} 的 9 倍），降低从 $^3P_2$ 出发的再泵浦速率。这样在激光发射过程中，会有相当一部分原子被俘获在 $^3P_2$ 能级，从而降低原子—腔系统的集体耦合，使发射的输出功率较低但更加稳定。此外，再泵浦引起的原子云团加热和偏转也会减小，因此能够产生更长的激光脉冲。该再泵浦方案可独立调节基态去泵浦。我们可以将 689 nm再泵浦激光的功率降低到与饱和强度相近的量级，从而限制激光跃迁的功率展宽；因为从基态进行再泵浦时，只需强到足以维持激光跃迁上的粒子数反转 Ω_N。

图 2（a）展示了两个激光发射区间。左侧的 y轴和底部 x 轴（红色）显示了707 nm再泵浦光处于共振时的激光发射。在此区间内，我们可实现超过 600 nW 的峰值功率。右侧

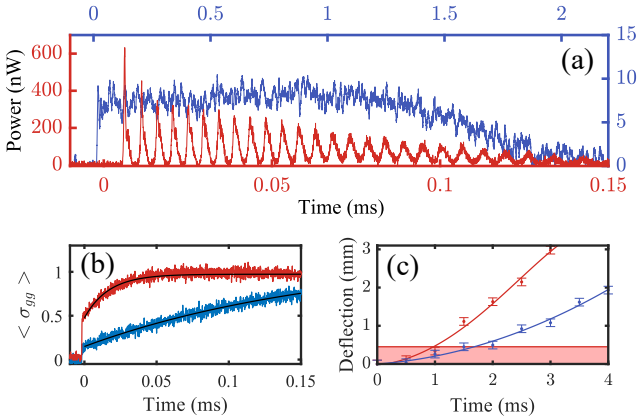


图2. 由再泵浦速率决定的两种不同激光发射区间。(a) 蓝色曲线位于右侧，使用顶部坐标轴，表示一束脉冲；其 707 nm再泵浦激光失谐 $2\pi\times60$ MHz。在这一失谐下，原子被囚禁在 $^3P_2$ 态中数百个 μs，从而产生一束稳定激光强度持续超过 1 ms 的脉冲。相比之下，红色曲线位于左侧，使用底部坐标轴，表示 707 nm再泵浦激光调至共振时的脉冲。该脉冲的峰值输出功率高达 600 nW，但仅持续 100 μs。(b) 在振荡区间（红色）和稳态区间（蓝色）下，再泵浦 100 μs 后立即关闭 689 nm再泵浦激光，随后对基态原子进行荧光测量。指数拟合（黑色）得出特征时间常数分别为 20.4(4) μs（振荡区间）和 190(19) μs（稳态区间）。(c) 在不同飞行时间后对原子进行阴影成像，测量磁光阱原子云的机械偏转。红色阴影区域表示腔的束腰半径。两组不同的数据点分别对应 (a) 中红色和蓝色所示的脉冲。

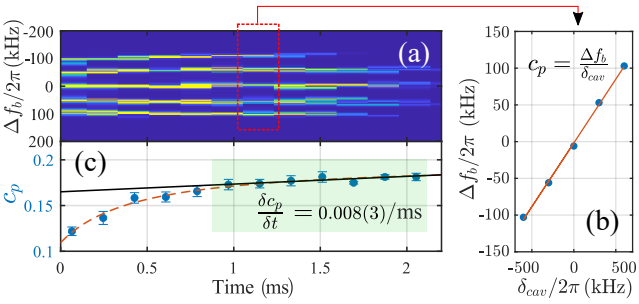


图3。（a）五个具有不同腔失谐 $\delta_{cav}/2\pi$的脉冲的组合频谱图，范围从 -600 千赫兹到600千赫兹，步长为300千赫兹。（b）我们通过对腔偏移与激光频率之间的直线拟合斜率，得到随时间变化的 c_p 。（c）计算得到的腔牵引 c_p（t）。我们观察到一个区域，在 $\Delta t = 1$ 毫秒内， Δc_p（t） $= 0.008$（3）（黑色实线拟合）。

y轴和顶部 x轴（蓝色）显示707 nm再泵浦激光失谐了 $2\pi \times 60$ MHz，这会产生强度较低但持续时间较长的脉冲，并可实现长达1.5 ms的稳态激射。

为量化707 nm再泵浦激光器失谐对布居动力学的影响，我们在图2（b）中比较了两种激光发射区间的再泵浦速率。我们施加所有再泵浦激光器 100 μ秒，随后关闭689 nm再泵浦激光器；由于粒子数反转无法维持，这会终止超辐射发射。紧接着，我们打开461 nm磁光阱光，并通过荧光测量返回基态的原子比例 $\langle\sigma_{gg}\rangle$随时间的变化。

在振荡激光发射区间，我们发现原子返回基态所需的特征时间$\tau = 20.4(4)$ μs，这与 $^3P_1$处的自由空间自然衰减相符。对于稳态区间，时间常数 $\tau = 190(19)$ μs大了一个数量级。我们观察到测量开始时荧光出现阶跃变化。该阶跃使我们得以了解处于基态和激发态的原子数。对于振荡区间，这意味着几乎所有原子要么处于 $^3P_1$， $m_j = 0$ 要么处于基态。对于稳态区间，我们观察到初始时只有 10–15% 的原子处于基态，也就是说，云团中的大多数4×10^7 原子在激光发射期间被储存在 $^3P_2$ 中，随后仅缓慢地再泵浦回较高的激光能级，以维持激光发射。在图2(c) 中，我们测量了两种激光发射区间内光子反冲导致的原子云团实际偏转。红色和蓝色的每组数据点分别对应图2(a) 中所示的区间以及图2(b) 中的再泵浦速率。我们用高阶多项式拟合曲线作为视觉参考。阴影红色区域表示腔腰半径。在稳态区间，再泵浦速率降低，减小了原子的实际偏转，使其能够与腔相互作用更长时间。在此情况下，当云团离开腔模体积且集体耦合低于激光阈值时，激光发射便会终止。对于振荡区间，云团的加速度会迅速使 689 纳米再泵浦跃迁失谐，导致再泵浦无法继续维持粒子数反转；此时云团仍处于腔模体积内，激光发射便已终止。

我们通过将腔发射的光与频率稳定的689 nm参考激光器重叠，进行外差拍频测量，以研究稳态激光发射区间的频率成分。在激光发射期间，再泵浦过程会使原子升温，从而导致激光频率的腔牵引随时间变化 [29] ， c_p (t。我们通过在稳态区间内产生脉冲，测量$c_p(t)$处的腔牵引；这些脉冲对应于五种不同的腔失谐，均相对于原子共振δ_{cav}。图3(a)展示了五个脉冲叠加后的频谱图，其中 Δf_b 表示拍频的平均频率偏差。每条线表示一个激光脉冲的拍频信号，各脉冲对应不同的腔失谐。我们确定频谱图中每个时间分箱内各脉冲对应的峰值频率，并通过直线拟合提取 c_p ，如图3(b)所示。图3(c)中我们

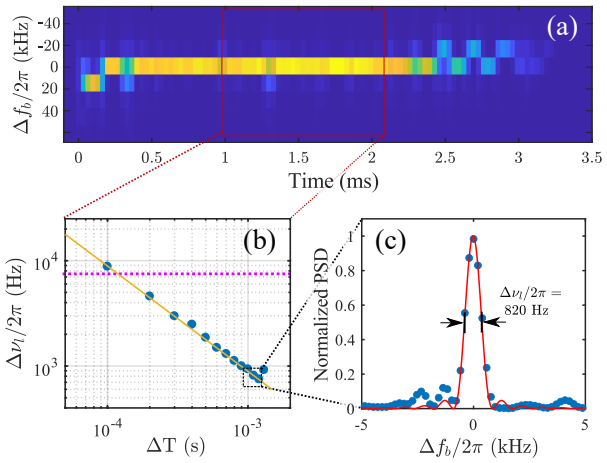


图4。（a）测得的拍频信号 f_b 的频谱图，窗口大小为 60 μ 秒。脉冲中段的激光频率稳定，但随着功率下降，脉冲末端的频率会发生漂移。（b）对（a）中标记部分的脉冲，逐渐延长取样时段，测量其功率谱密度（PSD）的半高全宽。在数据点上方绘出了方波信号窗口的傅里叶极限。两者吻合良好，说明观测到的线宽受傅里叶极限限制。紫色水平虚线标出了 7.5 kHz 的自然线宽。（c）（a）中稳态激射区域的拍频信号功率谱密度。红色实线表示对纯正弦波脉冲进行傅里叶变换所得的功率谱密度，该脉冲的振幅恒定，且其中心频率和持续时间与拍频信号相同。

绘制了 $c_p(t)$。我们观察到，$c_p(t)$起初迅速上升，可近似为指数式趋近（红色虚线）。我们初步认为，激光发射开始后的前 500 μ 秒内腔牵引的增大，是由有效样品温度迅速升高所致。激光脉冲初始阶段的发射主要来自到达上激光能级前吸收的再泵浦光子数少于平均值的原子。我们在绿色阴影区域内对 $c_p(t)$进行线性拟合（黑线），以估算腔牵引的一阶漂移；结果为 $\Delta c_p(t) = 0.008(3)$，对应 $\Delta t = 1$ 毫秒。这表明，在激光发射开始后的最初 1 毫秒之后，腔牵引对腔锁定点偏移的一阶敏感度较低。

接下来，我们研究腔与原子共振时稳态激光工作区的频率稳定性。图4(a) 展示了单个脉冲拍频信号的频谱图，其中每隔 60 μ s 设置一个重叠的方形窗口 30 μ s。我们观察到一些激光发射区域，在这些区域中，拍频、输出功率和腔牵引（如图3(c) 所示）最为稳定。我们选择这一区域来研究拍频信号的线宽，因为这一时段的参数稳定，可用于模拟连续稳态超辐射激光器。我们通过计算所观测拍频信号的离散傅里叶变换的模平方来估算其功率谱密度（PSD），并将线宽定义为 $\Delta\nu_l$ 全宽信号峰的半高全宽（FWHM）。

在图4(b) 中，我们给出了图 ΔT 4(a) 所示区域内、时间逐渐延长的方波信号窗口 ΔT 对应的功率谱密度（PSD），并通过拟合 sinc函数的模平方测量各个 $\Delta\nu_l/2\pi = 0.89/\Delta T$ [30] 的线宽，同时绘出了方波信号窗口对应的傅里叶极限线宽 $\Delta\nu_l/2\pi = 0.89/\Delta T$ [30]（黄色直线）。若将积分范围扩展至图4 (a) 所示范围之外，Δf_b 便会因激光发射动力学不稳定和技术噪声而开始漂移。紫色虚线表示裸激光跃迁的自然线宽，$\gamma_l/2\pi$。图4(c) 展示了脉冲中所选感兴趣区域在积分时间为 1.1 ms 时的拍频信号功率谱密度（蓝色圆点）。信号经过零填充，以便将频谱插值到更高分辨率；这增加了用于说明的点数，但不会改变测得的线宽。红色实线表示一个恒定振幅的纯正弦波脉冲的功率谱密度，其中心频率和持续时间与拍频信号相同。我们测得的线宽为 $\Delta\nu_l/2\pi = 820$Hz，几乎比该跃迁的自然线宽低一个数量级。拍频信号的功率谱密度与纯正弦波脉冲高度吻合，这表明 $\Delta\nu_l$ 受傅里叶极限限制；图4(b) 中的数据点落在傅里叶极限线上，也清楚地印证了这一点。尽管我们产生的每个超辐射脉冲在频谱上都呈现出亚自然线宽特征，但系统的技术噪声限制了逐发重复性。

我们的实验展示了来自单个超辐射激光脉冲的亚自然线宽光。连续再泵浦方案结合经过精心调节的再泵浦速率，使脉冲足够长，从而能够观察到稳态行为，并以技术上实用的功率实现激光发射。使用 $^3P_2$ 将原子囚禁于亚稳态，为未来实验带来了有趣的前景；在这些实验中，激光发射期间的再泵浦过程可同时冷却原子。以 $^3P_2$ 为下态 [31, 32], 运行的光学腔中，磁光阱可直接由原子束持续装载。随后，开启弱 707 nm再泵浦激光或将其调至失谐，即可使原子缓慢泄漏至上激光能级，从而实现连续超辐射发射。本快报中的原理验证将推动对完全连续的主动式原子钟开展进一步研究 [33–36] 尤其是研究跃迁频率更低的跃迁，例如 $^3P_0 \rightarrow {}^1S_0$Sr 中的毫赫兹跃迁 ^{87} [20, 22, 37], ，它有望与最先进的晶格钟相媲美。

我们感谢Stefan A. Sch¨affer、Mikkel Tang 和 Asbjørn A. Jørgensen 对实验装置的贡献以及富有帮助的讨论。本项目获得欧盟（EU）地平线2020研究与创新计划的支持，资助依据为玛丽·斯克·沃多夫斯卡-居里资助协议第860579号（Mo-SaiQC）和资助协议第820404号（iqClock项目）；此外还获得了 EM-

PIR 倡议下的 USOQS 项目（17FUN03），以及欧盟委员会 QuantERA 倡议下的 Q-Clocks 项目资助。我们还感谢 VILLUM FONDEN 通过研究基金第 17558 号提供资助。S. L. K. 和 E. B. 对本研究的贡献相同。

* sofus.kristensen@nbi.ku.dk
† muller@nbi.ku.dk

[1] S. L. Campbell, R. B. Hutson, G. E. Marti, A. Goban, N. D. Oppong, R. L. McNally, L. Sonderhouse, J. M. Robinson, W. Zhang, B. J. Bloom, and J. Ye, 《科学》358, 90 (2017). [2] S. M. Brewer, J.-S. Chen, A. M. Hankin, E. R. Clements, C. W. Chou, D. J. Wineland, D. B. Hume, and D. R. Leibrandt, 《物理评论快报》123, 033201 (2019). [3] W. F. McGrew, X. Zhang, R. J. Fasano, S. A. Sch¨ affer, K. Beloy, D. Nicolodi, R. C. Brown, N. Hinkley, G. Milani, M. Schioppo, T. H. Yoon, and A. D. Ludlow, 《自然》564, 87 (2018). [4] B. J. Bloom, T. L. Nicholson, J. R. Williams, S. L. Camp- bell, M. Bishof, X. Zhang, W. Zhang, S. L. Bromley, and J. Ye, 《自然》506, 71 (2014). [5] I. Ushijima, M. Takamoto, M. Das, T. Ohkubo, and H. Katori, 《自然·光子学》9, 185 (2015). [6] N. Huntemann, C. Sanner, B. Lipphardt, C. Tamm, and E. Peik, 《物理评论快报》116, 063001 (2016). [7] M. Schioppo, R. C. Brown, W. F. McGrew, N. Hinkley, R. J. Fasano, K. Beloy, T. H. Yoon, G. Milani, D. Ni- colodi, J. A. Sherman, N. B. Phillips, C. W. Oates, and A. D. Ludlow, 《自然·光子学》11, 48 (2017). [8] J. Borregaard and A. S. Sørensen, 《物理评论快报》111, 090802 2013( ). [9] M. E. Kim, W. F. McGrew, N. V. Nardelli, E. R. Clements, Y. S. Hassan, X. Zhang, J. L. Valencia, H. Leopardi, D. B. Hume, T. M. Fortier, A. D. Ludlow, and D. R. Leibrandt, 《自然·物理学》19, 25 (2023). [10] W. Li, S. Wu, A. Smerzi, and L. Pezz`e, 《物理评论 A》105, 053116 (2022). [11] R. Hobson, W. Bowden, A. Vianello, I. R. Hill, and P. Gill, 《光学快报》27, 37099 (2019). [12] G. Vallet, E. Bookjans, U. Eismann, S. Bilicki, R. L. Targat, and J. Lodewyck, 《新物理学杂志》19, 083002 2017( ). [13] H. Katori, 《应用物理快报》14, 072006 (2021). [14] M. J. Martin, D. Meiser, J. W. Thomsen, J. Ye, and M. J. Holland, 《物理评论 A》84, 063813 (2011). [15] P. G. Westergaard, B. T. R. Christensen, D. Tieri, R. Matin, J. Cooper, M. Holland, J. Ye, and J. W. Thomsen, 《物理评论快报》114, 093002 (2015). [16] B. T. R. Christensen, M. R. Henriksen, S. A. Sch¨affer, P. G. Westergaard, D. Tieri, J. Ye, M. J. Holland, and J. W. Thomsen, 《物理评论 A》92, 053820 (2015). [17] S. A. Sch¨affer, M. Tang, M. R. Henriksen, A. A. Jørgensen, B. T. R. Christensen, and J. W. Thomsen, 《物理评论 A》101, 013819 (2020). [18] J. G. Bohnet, Z. Chen, J. M. Weiner, D. Meiser, M. J. Holland, and J. K. Thompson, 《自然》484, 78 (2012). [19] M. A. Norcia and J. K. Thompson, 《物理评论X》6, 011025 2016( ). [20] M. A. Norcia, J. R. K. Cline, J. A. Muniz, J. M. Robin- son, R. B. Hutson, A. Goban, G. E. Marti, J. Ye, and J. K. Thompson, 《物理评论X》8, 021036 (2018). [21] F. Haake, M. I. Kolobov, C. Fabre, E. Giacobino, and S. Reynaud, 《物理评论快报》71, 995 (1993). [22] D. Meiser, J. Ye, D. R. Carlson, and M. J. Holland, 《物理评论快报》102, 163601 (2009). [23] J. Chen, 《科学通报》54, 348 (2009). [24] K. Numata, A. Kemery, and J. Camp, 《物理评论快报》93, 250602 (2004). [25] G. D. Cole, W. Zhang, M. J. Martin, J. Ye, and M. As- pelmeyer, 《自然·光子学》7, 644 (2013). [26] A. D. Ludlow, M. M. Boyd, J. Ye, E. Peik, and P. O. Schmidt, 《现代物理评论》87, 637 (2015). [27] M. Tang, S. A. Sch¨affer, A. A. Jørgensen, M. R. Hen- riksen, B. T. R. Christensen, J. H. M¨uller, and J. W. Thomsen, 《物理评论研究》3, 033258 (2021). [28] H. Tanji-Suzuki, I. D. Leroux, M. H. Schleier-Smith, M. Cetina, A. T. Grier, J. Simon, and V. Vuleti´c, *Ad-vances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 60, 201 2011( ). [29] J. G. Bohnet, Z. Chen, J. M. Weiner, K. C. Cox, and J. K. Thompson, 《物理评论快报》109, 253602 (2012). [30] F. Riehle, *Frequency Standards* (John Wiley I& Sons, Ltd, 2003) Chap. 5, pp. 117–165. [31] J. Gr¨unert and A. Hemmerich, 《应用物理B》( ). [32] R. Hobson, W. Bowden, A. Vianello, I. R. Hill, and P. Gill, 《物理评论 A》101, 013420 (2020). [33] J. R. K. Cline, V. M. Sch¨afer, Z. Niu, D. J. Young, T. H. Yoon, and J. K. Thompson, (2022), arXiv:2211.00158. [34] F. Fama, S. Zhou, C. Beli Silva, M. Tang, S. Alaric Schaffer, S. Bennetts, and F. Schreck, in *APS Division of Atomic Molecular and Optical Physics Meeting Ab- stracts* (2022) 2022, 美国物理学会会议摘要, Vol. ( ). [35] M. Bober, S. Bilicki, A. Gogyan, D. Kova˘ci´c, P. Morzy´nski, M. Naro˙znik, A. Tonoyan, V. Singh, M. Witkowski, and M. Zawada, in *2021 Joint Conference of the European Frequency and Time Forum and IEEE International Frequency Control Symposium (EFTF/IFCS)* (2021) 2021, ( ). [36] S. B. J¨ager, H. Liu, J. Cooper, T. L. Nicholson, and M. J. Holland, 《物理评论 A》104, 033711 (2021). [37] H. Liu, S. B. J¨ager, X. Yu, S. Touzard, A. Shankar, M. J. Holland, and T. L. Nicholson, 《物理评论快报》125, 253602 2020( ).