arXiv:2302.09012v1 [math.LO] 17 Feb 2023

广义独立性

FERNANDO HERN´ANDEZ-HERN´ANDEZ 和 CARLOS L´OPEZ-CALLEJAS

Abstract. 我们探讨连续统上的独立族这一经典概念的不同推广，延续 Fisher 和 Montoya[1] 开创的研究。我们证明，在 $\diamondsuit^*(\kappa)$ 下，可以在 κ 上得到大小为 2^κ 的强独立族，并以强独立族的形式给出广义连续统假设的一个等价表述。我们将通过滤子或理想推广独立族的两种自然方式结合起来，重点研究 $\mathcal{C}$-独立族，其中 $\mathcal{C}$ 是闭无界滤子。此外，我们还展示了 $\mathcal{J}$-独立族的存在与理想 $\mathcal{J}$ 的饱和性之间的关系。

Introduction

独立族具有强大的组合性质。自从它们在 [4]，中出现以来，这些族便与许多其他对象相关联，例如几乎不交族、超滤子和理想。例子可参见 [2]。

独立族通常定义在非负整数集ω上；然而，它们自然地推广到更大基数时应如何定义，并不明确。ω 上的一个独立族是一个族 $\mathcal{I} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$，满足：若 S、$T \subseteq \mathcal{I}$ 是有限且不相交的子族，则 $\bigcap S \setminus \bigcup T$是无限集（我们称该集合为由 $\mathcal{I}$得到的有限布尔组合）。换言之，在 ω上，若一个族的所有有限布尔组合都是无限集，则该族是独立的。当我们转向任意基数 κ 的情形时，独立性的概念至少可以用两种不同方式推广：第一种是允许更大的布尔组合，也就是说，不仅考虑有限布尔组合，也考虑长度小于或等于 λ 的布尔组合，其中 λ 是某个给定值；第二种则要求有限布尔组合不仅具有无限基数（或基数 κ），还满足某种“大”的概念。

第一种推广在文献中通常称为强独立族，Vera Fischer 和 Diana Montoya 最近在 [1]中研究了这类族。第一节中，我们定义这类族，说明为何要考虑长度小于 κ 的布尔组合，并从 ω_1上存在这类族的角度刻画连续统假设；此外，我们还证明，$2^\kappa = \kappa^+$ 等价于在 κ上存在某些强独立族。

也许第一节最重要的结果是：存在一个 $\diamondsuit^*$-序列，意味着在 ω_1 上存在一个基数为

2020 *Mathematics Subject Classification.* 03E05, 03E10, 03E35, 03E35, 03E55.
Key words and phrases. 独立族，菱形原理，强独立族，$\mathcal{C}$-独立族，V =L。第一作者的研究获得了 CONACyT 奖学金 733921 和 PAPIIT IN104419 项目的资助。

2^{ω_1} 的强独立族。本节还将说明，某些这类族的存在与强不可达基数的存在之间存在联系。

在第二节中，我们研究独立族的第二种推广，即我们所称的 $\mathcal{F}$-独立族或 $\mathcal{J}$-独立族，具体取决于 $\mathcal{F}$ 是给定基数 κ 上的滤子，还是 $\mathcal{J}$ 是理想。若一个族中的每个有限布尔组合都属于 $\mathcal{F}^+$（或分别属于 $\mathcal{J}^+$），我们就称该族为 $\mathcal{F}$-独立族（或 $\mathcal{J}$-独立族）。对于滤子 $\mathcal{F}$，我们给出其满足的若干条件，以确保存在 $\mathcal{F}$-独立族；沿着这一思路，我们还说明强 $\mathcal{F}$-独立族也可能存在，即经典独立族的一种双重推广。随后，我们将重点讨论闭无界滤子和闭无界集，并展示这一独立性新概念与经典概念之间的一些相似之处。最后，对于理想 $\mathcal{J} \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$，我们说明 $\mathcal{J}$-独立族的存在（或不存在）与 $\mathcal{J}$ 的饱和性之间存在某种联系，因此也与基数 κ 的某些性质有关。

1. Strongly independent families

对于基数 κ 和 $A \subseteq \kappa$，我们将采用 Shelah 于 [10]中引入的惯用记号：A^0 表示 A，而 A^1 表示 $\kappa \setminus A$。如果 X和 Y是集合，且 s是一个函数，我们将使用记号 $s; X \to Y$ 表示 s 是从 X 到Y的偏函数，即 $dom(s) \subseteq X$，且 s 的取值属于 Y。对于一个族 $\mathcal{I}$，我们将集合 $\{s; \mathcal{I} \to 2 : |s| < \omega\}$ 记为 $FF(\mathcal{I})$。其余术语均为标准术语，也是现代集合论文献所采用的术语。

定义 1.1. 若 $\mathcal{I}$ 是基数 κ 的子集族，且 $h; \mathcal{I} \to 2$，则$\mathcal{I}^h = \bigcap_{I \in dom(h)} I^{h(I)}$ 是由 h确定的 $\mathcal{I}$ 的布尔组合。若 h 是有限的，则称 $\mathcal{I}^h$ 为有限布尔组合。若 h 的基数为 λ，则称 $\mathcal{I}^h$ 为长度为 λ的布尔组合。

由 $\mathcal{I}$ 中所有有限布尔组合构成的集合是 $\mathcal{I}$ 的包络，记作 Env($\mathcal{I}$)。

定义 1.2. 若一个由基数为 κ 的集合组成的族 $\mathcal{I}$，其每个有限布尔组合的基数都是 κ，则称该族独立。

我们可以通过允许更大的布尔组合来推广独立族的概念。

定义 1.3. 若一个由基数为 κ 的集合组成的族 $\mathcal{I}$，其中任意长度小于 κ、由 $\mathcal{I}$ 中元素构成的布尔组合，其大小都是 κ，则称该族强独立。

通常，定义之后会给出例子；但我们现在先介绍一个关于 ω 上独立族的经典情形的典型例子。稍后我们将用它来举例说明刚刚介绍的推广。

例 1.4. 令 p_n 为第 n 个素数，并令 $C_n = \{mp_n : m \in \omega\}$。族 $\mathcal{I} = \{C_n : n \in \omega\}$ 是独立的。

前一个示例中的族是一个独立族，对于任意无限布尔组合 h，$\omega \to 2$ 使得 $h^{-1}[\{0\}]$ 为无限，均有 $\mathcal{I}^h \neq \emptyset$。然而，这并不意味着该族不是强独立的，因为在 $\kappa = \omega$ 的情形下，独立性与强独立性是一致的（这也是它们一致的唯一一个基数）。容易观察到，对于任意独立族 $\mathcal{I}$，在 ω 上为无限，存在 h；$\mathcal{I} \to 2$ 为无限，使得 $\mathcal{I}^h = \emptyset$。一般而言，

在定义 1.3 中，我们将自己限制在长度小于 κ 的布尔组合上，因为如果 $\mathcal{I}$ 是 κ 上基数为 κ 的独立族，则存在 $h\colon\ \mathcal{I}\to 2$，其中 $|h|=\kappa$，使得 $\mathcal{I}^h=\emptyset$。

自然会产生这样一个问题：对于哪些基数，强独立族存在（或可能存在）；对于哪些基数，存在大型强独立族，也就是说，基数为 2^κ 的强独立族? Fischer 和 Montoya 在 [1] 中对这个问题给出了部分答案，这启发我们使用猜测原理来构造强独立族。

定义 1.5. [6] 设 κ 是一个正则基数。我们称序列 $\langle S_\alpha\colon\ \alpha\in\kappa\rangle$ 为一个 $\diamondsuit^*(\kappa)$-序列，如果:
(1) 对每个 $\alpha\in\kappa$，都有 $S_\alpha\subseteq\mathscr{P}(\alpha)$ 且 $|S_\alpha|<\kappa$。(2) 对每个 $X\subseteq\kappa$，集合 $\{\alpha\in\kappa\colon\ X\cap\alpha\in S_\alpha\}$ 是 κ 中的闭无界集。$\diamondsuit^*(\kappa)$-序列的存在性简记为 $\diamondsuit^*(\kappa)$。

由 $\diamondsuit^*$ 可得一个非常著名且简单的推论，见下一个命题。

命题 1.6. 设 κ 和 λ 是基数，满足 $\lambda<\kappa$，且 κ 是正则基数。那么，$\diamondsuit^*(\kappa)$ 蕴含 $2^\lambda\leq\kappa$。

这可用于证明存在许多强独立族的可能性。

定理 1.7. 设 κ 是一个不可数正则基数。那么，$\diamondsuit^*(\kappa)$ 蕴含在 κ 上存在一个基数为 2^κ 的强独立族。

证明. 设 $\langle S_\alpha\colon\ \alpha\in\kappa\rangle$ 是一个 $\diamondsuit^*(\kappa)$ 序列，并按如下方式定义 C：

$$C=\{\langle\gamma,A\rangle:\gamma\in\kappa\wedge A\subseteq S_\gamma\}.$$

由于对每个 $\alpha\in\kappa$ 都有 $|S_\alpha|<\kappa$，由命题 1.6 可得,

$$|C|=\sum_{\alpha\in\kappa}2^{|S_\alpha|}\leq\sum_{\alpha\in\kappa}\kappa=\kappa$$

并且显然 $\kappa\leq|C|$，由此我们得出 $|C|=\kappa$。因此，在 κ 上构造强独立族，等价于在 C上构造强独立族。

对于每个 $X\subseteq\kappa$，定义 Y_X 如下:

$$Y_X=\{(\gamma,A)\in C:X\cap\gamma\in A\}.$$

为证明 $\mathcal{I}=\{Y_X\colon\ X\subseteq\kappa\}$ 是强独立的，设 $\{X_i\colon\ i\in I_0\}$、$\{Z_j\colon\ j\in I_1\}\subseteq\mathscr{P}(\kappa)$ 是两个不相交的集合族，其中 $|I_0|$、$|I_1|<\kappa$。

对于每一对 i、$i'\in I_0$，若 $i\neq i'$，令 $\gamma_{i,\ i'}\in\kappa$ 满足

$$X_i\cap\gamma_{i,i'}\neq X_{i'}\cap\gamma_{i,i'}.$$

注意，若 $\gamma\geq\gamma_{i,\ i'}$，则 $X_i\cap\gamma\neq X_{i'}\cap\gamma$；对于 j、$j'\in I_1$，也同样如此。令 $j\neq j'$，使得 $\alpha_{j,\ j'}$ 满足

$$Z_j\cap\alpha_{j,j'}\neq Z_{j'}\cap\alpha_{j,j'}.$$

最后，若 $i\in I_0$ 和 $j\in I_1$，令 $\beta_{i,\ j}\in\kappa$ 满足

$$X_i\cap\beta_{i,j}\neq Z_j\cap\beta_{i,j}.$$

如果我们将 $B\subseteq\kappa$ 定义为:

$$B=\{\gamma_{i,i'}\colon\ i,i'\in I_0\wedge i\neq i'\}\cup\{\gamma_{j,j'}\colon\ j,j'\in I_1\wedge j\neq j'\}\cup\{\gamma_{i,j}\colon\ i\in I_0\wedge j\in I_1\},$$

显然， $|B| < \kappa$ ，并且由于 κ 是正则的，存在 $\gamma_0 \in \kappa$ 使得 B 由 γ_0界定。现在，如果 $\gamma \in \kappa$ 大于 γ_0，那么它满足以下条件：
(1) $X_i \cap \gamma \neq X_{i'} \cap \gamma$若 i，则$i' \in I_0$，其中 $i \neq i'$。
(2) $Z_j \cap \gamma \neq Z_{j'} \cap \gamma$若 j，则$j' \in I_1$，其中 $j \neq j'$。
(3) $X_i \cap \gamma \neq Z_j \cap \gamma$若 $i \in I_0$，则 $j \in I_1$。

对于每个 $i \in I_0$，考虑 $D_i = \{\gamma \in \kappa : X_i \cap \gamma \in S_\gamma\}$，它是一个闭无界集。现在令$D = \bigcap_{i \in I_0} D_n$，并取 $\gamma \in D$，使得 $\gamma > \gamma_0$。
定义 $A_\gamma \subseteq S_\gamma$ 如下：

$$A_\gamma = \{X_i \cap \gamma : i \in I_0\}.$$

因此，对于每个 $i \in I_0$，都有 $(\gamma, A_\gamma) \in Y_{X_i}$；对于每个 $j \in I_1$，都有 $(\gamma, A_\gamma) \notin Y_{Z_j}$。这证明：

$$(\gamma, A_\gamma) \in \bigcap_{i \in I_0} Y_{X_i} \setminus \bigcup_{j \in I_1} Y_{Z_j}$$

并且由于这对每个 $\gamma \in D$ 满足 $\gamma > \gamma_0$的情形都成立，因此：

$$\left| \bigcap_{i \in I_0} Y_{X_i} \setminus \bigcup_{j \in I_1} Y_{Z_j} \right| = \kappa,$$

至此，证明完成。 ❐

如果 κ 是强不可达的，那么 $\langle \mathscr{P}(\alpha) : \alpha \in \kappa \rangle$ 最终会成为一个 $\diamondsuit^*(\kappa)$-序列，因此，前一个定理尤其意味着：对于每个强不可达基数，都存在一个定义在其上的大强独立族。这是 Fischer 和 Montoya 在 [1]中得到的结果；然而，定理 1.7 给出了更广的基数范围，在这些基数上，一致地存在强独立的大族。例如，在 V = L 下，定理 1.7 意味着，在许多基数上都存在大强独立族。事实上，Jensen 在 [6] 中证明了：

定理 1.8。 [6] V =L 蕴含：对每个后继基数 κ，都有 $\diamondsuit^*(\kappa)$。

推论 1.9。V =L 蕴含：对每个后继基数 κ，都存在一个基数为 2^κ的强独立族。

另一方面，后继基数上强独立族的存在也与广义连续统假设密切相关。

定理 1.10. 设 κ 是一个无限基数。以下两个条件等价。

(1) 存在一个基数为 κ 的 κ^+ 上的强独立族。(2) 等式 $2^\kappa = \kappa^+$ 成立。

证明. (1) ⇒(2)。令 $\mathcal{I} = \{X_\alpha : \alpha \in \kappa\}$。现在，由于 $\mathcal{I}$ 是 κ^+ 上的强独立族，对于所有 $h \in 2^\kappa$，我们有 $\mathcal{I}^h$ 的基数为 κ^+；显然，如果 h、$g \in 2^\kappa$ 不同，那么 $\mathcal{I}^h$ 与 $\mathcal{I}^g$ 不相交。对于每个 $h \in 2^\kappa$，令 $x_h \in \mathcal{I}^h$；则集合 $\{x_h : h \in 2^\kappa\}$ 是 κ^+ 的子集，且基数为 2^κ，因此 $2^\kappa \leq \kappa^+$，从而 $2^\kappa = \kappa^+$。

(2) ⇒ (1)。令 $f : \kappa^+ \to 2^\kappa \times \kappa^+$ 为一个双射（将 2^κ 视为从 κ 到 2 的所有函数的集合）。对于每个 $h \in 2^\kappa$，令 $X_h = f^{-1}(\{h\} \times \kappa^+)$；对于每个$\alpha \in \kappa$，令 I_α 定义如下：

$$I_\alpha = \bigcup \left\{ X_h : h \in 2^\kappa \setminus \{\overline{1}\} \ \wedge \ h(\alpha) = 0 \right\},$$

其中，$\overline{1}$ 表示具有常值 1 的函数 $f : \kappa \to 2$。

令 $\mathcal{I} = \{I_\alpha : \alpha \in \kappa\}$。显然，若 $h \in 2^\kappa \setminus \{\overline{1}\}$，则 $\mathcal{I}^h \supseteq X_h$；并且，由于 $|X_h| = \kappa^+$，我们有 $|\mathcal{I}^h| = \kappa^+$，这证明了 $\mathcal{I}$ 是强独立的。❐

以下结果是定理 1.10 的简单推论。

推论 1.11。如果在 ω_1 上存在无限强独立族，当且仅当满足连续统假设（CH）；因此，在 ω_1 上存在无限强独立族这一命题独立于 ZFC。

推论 1.12。设 κ 是一个不可达基数（极限且正则），并且对于每个无限基数 $\lambda < \kappa$，在 λ^+ 上存在一个基数为 λ 的强独立族，则 κ 是强不可达的。

证明。我们只需验证 κ 是一个强极限基数。令 $\lambda \in \kappa$；由于 κ 是极限序数，因此可得 $\lambda^+ < \kappa$。另一方面，由于在 λ^+ 上存在一个大小为 λ 的强独立族，因此 $2^\lambda = \lambda^+$，从而 $2^\lambda < \kappa$，这就完成了证明。❐

推论 1.13。如果 κ 是不可达的，并且对于每个 $\lambda < \kappa$，在 λ 上存在一个基数为 λ 的强独立族，则 κ 是强不可达的。

尽管我们已经知道强独立族存在的一些充分条件，但这类族的一个有趣性质是：它们并不满足应用佐恩引理的条件（不同于经典的独立族），而佐恩引理是证明具有某种性质的极大对象存在的标准方法。因此，了解以下问题就显得非常重要：

问题 1.14. 对于哪些基数，在其上存在强独立的极大族?

目前尚不知道对于任何基数这些族是否存在；迄今为止，我们得到的唯一结果都表明它们不是极大的。

定义 1.15. 基数 κ 上的强独立族 $\mathcal{I}$ 称为极大的，如果不存在基数 κ 上的另一个强独立族可以真扩充它。

定理 1.16. 对任意无限基数 $\kappa > \omega$，都存在一个非强独立的独立族。

证明. 我们知道 κ 与 $\omega \times \kappa$之间存在一个双射，因此我们将构造所需的、定义在 $\kappa \times \omega$上的独立族。对于每个 $n \in \omega$，令 $I_n = \kappa \times C_n$，其中 C_n 如例 1.4 中所述，并令 $\mathcal{I} = \{I_n : n \in \omega\}$。

显然，若 $h; \omega \to 2$ 是有限的，那么对每个 $\alpha \in \kappa$，都有 $(\{\alpha\} \times \omega) \cap \mathcal{I}^h$ 是无限的，特别是 $\mathcal{I}^h$ 的大小为 κ。另一方面，若 $h : \omega \to 2$ 满足 $h^{-1}[\{0\}]$ 是无限的，那么对每个 $\alpha \in \kappa$，都有 $(\{\alpha\} \times \omega) \cap \mathcal{I}^h = \emptyset$，这意味着 $\mathcal{I}^h = \emptyset$，因此 $\mathcal{I}$ 不是强独立的。❐

注意，前一定理证明中构造的族可以扩展为极大独立族 $\mathcal{J}$，且由于 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$，$\mathcal{J}$ 也不是强独立的。因此我们得到下面的推论。

推论 1.17。对于每个无限基数 κ，都存在一个定义在 κ 上的极大独立族，它不是强独立的。

如同独立族的经典情形一样，我们知道，基数较小的强独立族不是极大的。

命题 1.18。如果 $\mathcal{I}$ 是基数为 κ 且满足 $|\mathcal{I}| < \kappa$ 的强独立族，那么 $\mathcal{I}$ 不是极大的。

证明。令 $\mathcal{I} = \{I_\alpha : \alpha \in \lambda\}$，其中 $\lambda < \kappa$，并对每个 $h : \lambda \to 2$，令 $X_h = \mathcal{I}^h$。现在每个集合 X_h 的基数都是 κ，且若 h、$g \in 2^\lambda$ 不同，则 $X_h \cap X_g = \emptyset$，这意味着 $2^\lambda \leq \kappa$。令 $\langle Y_\alpha : \alpha \in \kappa \rangle$ 为 $\{X_h : h \in 2^\lambda\}$ 的一个枚举，使得每个 X_h 恰好出现 κ 次。令 a_0、$b_0 \in Y_0$ 满足 $a_0 < b_0$，并假设对所有 $\beta < \alpha$，a_β 和 b_β 都已定义。由于 Y_α 的基数为κ，存在 a_α、$b_\alpha \in Y_\alpha$，使得对所有 $\beta \in \alpha$，都有 a_β、$b_\beta < a_\alpha$，并且还有$a_\alpha < b_\alpha$。现在令 $Z = \{a_\alpha : \alpha \in \kappa\}$。根据 Z 的构造，我们有 $Z \cap X_h$，且对所有 $h \in 2^\lambda$，$(\kappa \setminus Z) \cap X_h$ 的基数为 κ；也就是说，$\mathcal{I} \cup \{Z\}$ 是一个强独立族。 ❐

请注意，上述证明不适用于基数为 κ 的强独立族。

以下结果沿着命题 1.18 的思路表明，另一类强独立族也不是极大的。

定义 1.19. 设 κ 是一个无限基数。
(1) 设 $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$ 和 $X \subseteq \kappa$，若 X 将 $\mathcal{F}$ 分裂为 $Y \cap X$ 和 $Y \setminus X$，且对所有 $Y \in \mathcal{F}$，它们的大小均为 κ，则称 X 分裂 $\mathcal{F}$。(2) 若不存在分裂 $\mathcal{R}$ 的 $X \subseteq \kappa$，则称族 $\mathcal{R} \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$ 不可分裂（或称为收割族）。(3) $\mathfrak{r}(\kappa)$ 是 κ 上不可分裂族的最小基数。

定理 1.20. (Fischer-Montoya [1]) 设 κ 是一个无限正则基数。若 $\mathcal{I}$ 是 κ 上的强独立族，满足 $|\{\mathcal{I}^h : h; \mathcal{I} \to 2 \wedge |h| < \kappa\}| < \mathfrak{r}(\kappa)$，则 $\mathcal{I}$ 不是极大的。

在 [8], K. Kunen 研究了不可数基数中的极大 σ-独立族；也就是说，关于可数长度的布尔组合而言相互独立的极大族。例如，他证明了

定理 1.21（Kunen）。如果 ZFC 加上可测基数存在这一公理是一致的，那么 ZFC 加上存在极大 σ-独立族 $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{P}(\omega_1)$ 也是一致的。

他的方法是特设的，似乎不可能将其推广来回答问题 1.14；然而，这说明了要回答问题 1.14 所需面对的一致性强度。Kunen 的论文还展示了不可数基数上的独立族的极大性这一性质的全部复杂性。正如我们之前所说，我们无法给出能够保证强独立族具有极大性的性质。在下一节中，我们将采用一种不同的方法来推广经典情形。同样，对于这些族而言，极大性或许更加难以处理。例如，我们无法证明可数$\mathcal{C}$-独立族不可能是极大的。参见定理 2.10。

2. $\mathcal{F}$-INDEPENDENT FAMILIES

设 $\mathcal{F}$ 是 κ上的一个滤子。若子集 $X \subseteq \kappa$ 满足对每个$Y \in \mathcal{F}$都有 $X \cap Y \neq \emptyset$，则称其为 $\mathcal{F}$-正的；我们用 $\mathcal{F}^+$表示 $\mathcal{F}$-正子集所成的族。若 $\mathcal{J} \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$ 是一个理想，则 $\mathcal{J}^+ = \{X \subseteq \kappa : X \notin \mathcal{J}\}$。

若 $\mathcal{F}$ 是基数 κ上的滤子，我们用 $\mathcal{F}^*$ 表示其对偶理想，即理想$\{X \subseteq \kappa : \kappa \setminus X \in \mathcal{F}\}$。

定义 2.1. 若族 $\mathcal{I} \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$ 的每个有限布尔组合都属于 $\mathcal{F}^+$，则称其为 $\mathcal{F}$-独立。类似地，若 $\mathcal{J}$ 是一个理想，则当 $\mathcal{I}$ 的每个有限布尔组合都属于 $\mathcal{J}^+$时，称 $\mathcal{I}$ 为 $\mathcal{J}$-独立。

注意，一个族是 $\mathcal{F}$-独立的，当且仅当它是 $\mathcal{F}^*$-独立的。另一方面，如果 $\mathcal{F}_r$ 是弗雷歇滤子，那么一个族是 $\mathcal{F}_r$-独立的，当且仅当它是独立的。显然，如果 $\mathcal{I}$ 是定义在 κ 和$X \in \mathcal{I}$上的 $\mathcal{F}$-独立族，那么 X 是 $\mathcal{F}$-双重正的，也就是说， X，$\kappa \setminus X \in \mathcal{F}^+$，因此，如果 $\mathcal{F}$是超滤子，就不存在 $\mathcal{F}$-独立族。一个自然的问题是：对于哪些滤子（或理想） $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$（除了弗雷歇滤子之外），存在 $\mathcal{F}$-独立族?

命题 2.2。设 $\mathcal{F}$ 是形如 $\mathcal{F} = \{A \subseteq \kappa : B \subseteq A\}$ 的滤子，其中$B \subseteq \kappa$。

(1) 如果 B 是有限的，那么不存在无限的 $\mathcal{F}$-独立族；此外，如果 $|B| = n$，那么不存在基数为 n的 $\mathcal{F}$-独立族。(2) 如果 $|B| = \lambda$ 且 λ 是无限的，则存在基数为 2^λ的 $\mathcal{F}$-独立族，但不存在基数为 $(2^\lambda)^+$的 $\mathcal{F}$-独立族。

证明。(1) 注意到 $\mathcal{F}^+ = \{X \subseteq \kappa : \ X \cap B \neq \emptyset\}$。令 $B = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$，并假设 X_0、.....、$X_{n-1} \in \mathcal{I}$ 两两不同，其中 $\mathcal{I}$ 是一个 $\mathcal{F}$-独立族。对于每个 $i \in n$，若 $x_i \in X_i$，则令 $h(i) = 1$，否则令 $h(i) = 0$；因此我们有 $x_i \notin X_i^{h(i)}$。于是，对于每个 $x \in B$，我们有：

$$x \notin \bigcap_{i \in n} X_i^{h(i)} = \mathcal{I}^h,$$

因此 $\mathcal{I}^h \cap B = \emptyset$，从而 $\mathcal{I}^h \notin \mathcal{F}^+$，这与 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{F}$-独立的事实相矛盾。

(2) 再次注意到 $\mathcal{F}^+ = \{X \subseteq \kappa : \ X \cap B \neq \emptyset\}$。现在令 $\mathcal{I} = \{X_\alpha : \ \alpha \in 2^\lambda\}$ 为 B 的子集所组成的一个独立族，并对每个 $\alpha \in 2^\lambda$ 令 $Y_\alpha = X_\alpha \cup (\kappa \setminus B)$，再令 $\widehat{\mathcal{I}} = \{Y_\alpha : \ \alpha \in 2^\lambda\}$。显然，若 h；$2^\lambda \to 2$ 是有限的，则 $\mathcal{I}^h \subseteq \widehat{\mathcal{I}}^h$；由于 $\mathcal{I}$ 在 B 上是独立的，我们有：

$$\emptyset \neq B \cap \mathcal{I}^h = B \cap \widehat{\mathcal{I}}^h,$$

这证明了 $\widehat{\mathcal{I}}^h \in \mathcal{F}^+$，因此 $\widehat{\mathcal{I}}$ 是 $\mathcal{F}$-独立的。

若 $\mathcal{I} \subseteq \kappa$ 的基数为 $(2^\lambda)^+$，如 $|B| = \lambda$，则存在 $X, Y \in \mathcal{I}$ 个互不相同的对象，使得 $X \cap B = Y \cap B$；但此时 $(X \setminus Y) \cap B = \emptyset$，这证明了 $X \setminus Y \notin \mathcal{F}^+$，因此 $\mathcal{I}$ 并非 $\mathcal{F}$-独立。 ❐

正如预期的那样，本研究所讨论的独立性的两种推广彼此兼容，也就是说，我们可以将这两个概念结合起来，从而得到具有更多组合性质的族。

定义 2.3. 设 $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$ 是一个滤子（分别地， $\mathcal{J} \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$ 是一个理想）。若 $\mathcal{I}$ 的每个长度小于 κ 的布尔组合都属于 $\mathcal{F}^+$ （分别地，属于$\mathcal{J}^+$），则称族 $\mathcal{I} \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$ 是强 $\mathcal{F}$-独立的（分别地，是强 $\mathcal{J}$-独立的）。

我们将在下文进一步探讨这些族。

2.1. $\mathcal{C}$-独立族。对于每个正则基数 κ，令 $\mathcal{C}_\kappa \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$ 表示闭无界滤子，也就是由闭无界集生成的滤子（上下文明确时，我们将 $\mathcal{C}_\kappa$ 简称为 $\mathcal{C}$）。 $\mathcal{C}_{\omega_1}$ 是研究 ω_1 组合性质时一个非常重要的滤子，因此自然会产生几个问题：是否存在 $\mathcal{C}_{\omega_1}$-独立族？每个极大的 $\mathcal{C}$-独立族是否都是强$\mathcal{C}$-独立的？这些问题的答案分别见命题 2.6 和推论 2.7。

首先，请注意，对于每个滤子 $\mathcal{F}$， $\mathcal{F}$-独立族的并集是一个 $\mathcal{F}$-独立族，因此如果存在 $\mathcal{F}$-独立族，那么就存在极大的独立族（由佐恩引理）。

请记住， $\mathcal{C}$-正集称为驻定集；关于驻定集最重要的结果之一如下：

引理 2.4（[11], [7]）。对于每个不可数正则基数 κ， κ 可表示为多达 κ 个两两不交的驻定集之并。

推论 2.5。对于每个不可数正则基数 κ 以及每个 $\lambda \leq \kappa$， κ 可表示为 λ 个两两不交的驻定集之并。

以下两个结果是这个最后推论的推论；它们的证明遵循定理 1.10 的证明思路。

命题 2.6. 对每个不可数正则基数 κ，都存在一个无限$\mathcal{C}$-独立族。

证明. 根据推论 2.5，存在一个可数集 $\{X_s : s \in 2^{<\omega}\}$，其中包含两两不相交的平稳子集，且它们的并集为 κ；这些子集以集合 $2^{<\omega}$ 为指标集。

现在，对每个 $n \in \omega$，按如下方式定义 $I_n \subseteq \kappa$：

$$I_n = \bigcup\{X_s : s \in 2^{<\omega} \wedge n \in dom(s) \wedge s(n) = 0\}.$$

事实证明， $\mathcal{I} = \{I_n : n \in \omega\}$ 是一个 $\mathcal{C}$-独立族，因为 $\mathcal{I}$ 的每个有限布尔组合都包含某种如下形式的组合

$$\bigcap\{I_n^{s(n)} : n \in dom(s)\}$$

对于某个 $s \in 2^{<\omega}$，并且还有：

$$X_s \subseteq \bigcap\{I_n^{s(n)} : n \in dom(s)\},$$

这证明了 $\mathcal{I}$ 的每个有限布尔组合都包含一个驻定集，因此其为平稳集。 ❒

推论 2.7. 对任意基数 $\kappa \geq \omega_1$，在 κ 上存在一个 $\mathcal{C}$-独立的极大族，它不是强 $\mathcal{C}$-独立的。

证明. 令 $\{X_m : m \in \omega\}$ 为 κ 的一个由平稳集组成的划分。现在，对每个 $n \in \omega$，令 $Y_n = \bigcup\{X_m : m \in C_n\}$，其中 C_n 如例 1.4 中所示。考虑 $\mathcal{I} = \{Y_n : n \in \omega\}$；显然， $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{C}$-独立的，但对于满足 $h^{-1}[\{0\}]$ 为无限集的 h；$\omega \to 2$，我们有 $\mathcal{I}^h = \emptyset$，这证明了 $\mathcal{I}$ 不是强 $\mathcal{C}$-独立的。将 $\mathcal{I}$ 扩充为一个极大的 $\mathcal{C}$-独立族，即得所求。 ❒

定理 2.8. 对于基数 κ，以下陈述等价：

(1) $2^\kappa = \kappa^+$.

(2) 存在一个定义在 κ^+ 上、大小为 κ 的强独立族。(3) 存在一个定义在 κ^+ 上、至少有 κ 个元素的强 $\mathcal{C}$-独立族。

证明。我们只证明 (1)⇒ (3)。令 $\{X_f : f \in 2^\kappa\}$ 为 κ^+ 到驻定集的一个划分，并且对每个 $\alpha \in \kappa$，令 I_α 定义为

$$I_\alpha = \bigcup \{X_f : f \in 2^\omega \ \wedge \ (f(\alpha) = 0)\}.$$

令 $\mathcal{I} = \{I_\alpha : \alpha \in \kappa\}$。显然，如果 f; $\kappa \to 2$，那么对于某个 $h \in 2^\kappa$有 $\mathcal{I}^f \supseteq X_h$，并且由于 X_h 是驻定集， $\mathcal{I}^f$ 也是驻定集，这证明了 $\mathcal{I}$ 是强$\mathcal{C}$-独立的。 ❐

现在我们知道，在 ω_1上存在可数的 $\mathcal{C}$-独立族。那么，在 ω_1上是否存在不可数的 $\mathcal{C}$-独立族? 此外，是否存在基数为 2^{ω_1}的 $\mathcal{C}$-独立族?

定理 2.9。设 κ 和 λ 为满足 $\omega \leq \lambda \leq 2^\kappa$ 且 κ 为正则基数的基数。那么，在 κ上存在一个基数为 λ的 $\mathcal{C}$-独立族。

证明。令 $\{X_\beta : \beta \in \kappa\}$ 为 κ 到驻定集的一个划分。现在令 $\mathcal{I} = \{I_\alpha : \frown\alpha \in \lambda\}$ 为 κ 上的一个基数为 λ 的独立族。对于每个 $\alpha \in \lambda$，按如下方式定义 $I_\alpha \subseteq \kappa$:

$$\widehat{I_\alpha} = \bigcup \{X_\beta : \beta \in I_\alpha\}.$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$现在令 $\mathcal{I} = \{I_\alpha : \alpha \in \lambda\}$。显然， $\mathcal{I}$ 的大小为 λ，因此只剩下证明它是一个 $\mathcal{C}$-独立族。令 s; $\lambda \to 2$ 为有限集，我们要证明 $\mathcal{I}^s$ 是平稳的。由于 $\mathcal{I}$ 是独立的，因此存在 $\beta \in \mathcal{I}^s$，但这意味着，如果 $s(\alpha) = 0$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$，那么 $X_\beta \subseteq I_\alpha$；如果 $s(\alpha) = 1$，那么 $X_\beta \cap I_\alpha = \emptyset$，也就是说， $X_\beta \subseteq \mathcal{I}^s$。又由于 X_β 是平稳的， $\mathcal{I}^s$ 也平稳。 ❐

与独立族的经典情形一样，人们会预期可数的 $\mathcal{C}$-独立族不是极大的；然而，要证明这一点似乎很复杂。我们尝试推广经典证明、对包络作不交细化，或使用 $\diamondsuit^\sharp$-序列，但都未能成功。下面是对 [5]中主要构造的一种修改。

定理 2.10。在 $\mathsf{V} = \mathsf{L}$ 下，可数 $\mathcal{C}_{\omega_1}$-独立族不是极大的。

证明。设 $\mathcal{I}$ 是一个可数 $\mathcal{C}$-独立族，并令 $\{E_n : n \in \omega\}$ 为其包络的一个枚举。对每个极限序数 $\gamma < \omega_1$，设

$$\mathscr{A}_\gamma = \{\alpha < \omega_1 : L(\alpha) \models \mathsf{ZF}^- \ \wedge \ \gamma = \omega_1^{L(\alpha)}\}.$$

由于 $\{\varrho < \omega_1 : L(\varrho) \prec L(\omega_1)\}$ 在 ω_1中无界，因此对每个极限 $\gamma < \omega_1$， $\mathscr{A}_\gamma$ 至多可数。众所周知， $\{\gamma < \omega_1 : \mathscr{A}_\gamma \neq \emptyset\}$ 包含一个闭无界集。令

$$\mathscr{G}_\gamma = \{C \subseteq \gamma : C \text{ is club in } \gamma \ \wedge \ (\exists \alpha \in \mathscr{A}_\gamma)(C \in L(\alpha))\}.$$

那么 $\mathscr{G}_\gamma$ 是可数的；又由于 ZF^- 足以证明有限个闭无界子集的交仍是闭无界子集，因此 $\mathscr{G}_\gamma$ 对有限交封闭。

同样考虑

$$\mathscr{S}_\gamma = \{S \subseteq \gamma : (\exists \alpha \in \mathscr{A}_\gamma)(S \in L(\alpha)) \ \wedge \ (\forall C \in \mathscr{G}_\gamma)(C \cap S \neq \emptyset)\}.$$

再次， $\mathscr{S}_\gamma$ 是可数的；固定一个枚举 $\{S_n : n \in \omega\}$，枚举 $\mathscr{S}_\gamma$，其中每个元素都出现无穷多次，并取一个简单的枚举 $\{C_n : n \in \omega\}$，枚举 $\mathscr{G}_\gamma$。现在考虑 $\mathscr{A}_\gamma$ 中的一个共尾序列 $\langle \alpha_n : n \in \omega \rangle$，使得

$$S_n \in L(\alpha_n) \ \wedge \ (\forall m \leq n)(C_m \in L(\alpha_n)).$$

由于 $L(\alpha_0) \models$ “S_0 在 γ 中是平稳的”，选取

$$\xi_0 \in S_0 \cap C_0 \quad \text{and} \quad \eta_0 \in S_0 \cap C_0 \setminus (\xi_0 + 1),$$

并递归地

$$\xi_{n+1} \in (S_{n+1} \cap \bigcap_{k \leq n+1} C_k) \setminus (\eta_n + 1) \quad \text{and} \quad \eta_{n+1} \in (S_{n+1} \cap \bigcap_{k \leq n} C_k) \setminus (\xi_{n+1} + 1),$$

对所有 $n \in \omega$。这样我们构造出了两个不相交子集 $A_\gamma = \{\xi_n : n \in \omega\}$ 和 $B_\gamma = \{\eta_n : n \in \omega\}$。

令 $A = \bigcup\{A_\gamma : \gamma \in$ 极限序数$(\omega_1)\}$ 和 $B = \bigcup\{B_\gamma : \gamma \in$极限序数$(\omega_1)\}$。

断言：$(\forall k \in \omega)$（$E_k \cap A$ 是平稳的）。

固定一个闭无界子集 $C \subseteq \omega_1$。递归地定义一列初等子模型$M_\nu \prec L(\omega_2)$，其中 $\nu < \omega_2$，如下所示：

- M_0 是满足 $\{E_n$ 的最小 $M \prec L(\omega_2) : \ n \in \omega\}, C \in M$,
- $M_{\nu+1}$ 是满足 $M_\nu \cup \{M_\nu\} \subset M$ 的最小 $M \prec L(\omega_2)$,
- $M_\xi = \bigcup_{\nu<\xi} M_\nu$，只要 ξ 是一个极限序数。

根据凝缩引理， $M_\nu \cap L(\omega_1)$ 是传递的，且为集合 $\alpha_\nu = M_\nu \cap \omega_1$。于是$\langle \alpha_\nu : \nu < \omega_1 \rangle$ 是 ω_1 中的正规序列。使用 Mostowski塌缩 $\pi_\nu : \ M_\nu \cong L(\beta_\nu)$ 得到

- $\pi_\nu \restriction L(\alpha_\nu) =$ 标识 $\restriction L(\alpha_\nu)$,
- $\pi_\nu(\omega_1) \ = \alpha_\nu$,
- $\pi_\nu(C) \ = C \cap \alpha_\nu$,
- $(\forall n \in \omega)(\pi_\nu(E_n) \ = E_n \cap \alpha_\nu)$。

考虑由 $\langle \alpha_\nu$ 的极限点构成的集合 $K : \ \nu < \omega_1 \rangle$。显然，若$\gamma \in K$，则 K 是 ω_1中的一个闭无界集，

$$\gamma = \sup_{\nu<\zeta} \alpha_\nu = \sup_{\nu<\zeta} \beta_\nu,$$

对某个序数 $\zeta < \omega_1$，因此 $\gamma = \alpha_\zeta$。要证明这一点，只需证明$\alpha_\nu < \beta_\nu < \alpha_{\nu+1}$。显然 $\alpha_\nu < \beta_\nu$。由于 β_ν 可由 M_ν 定义为 $L(\beta_\nu)$是 M_ν 的传递塌缩，而且该定义可以相对化到 $L(\omega_2)$。因此 $\beta_\nu \in M_{\nu+1}$，因为 $M_\nu \in M_{\nu+1} \prec L(\omega_2)$。此后 $\beta_\nu \in \alpha_{\nu+1}$。

注意， $\beta_\zeta \in \mathscr{A}_\gamma$ 因为 $L(\beta_\zeta) \ \models \gamma = \omega_1$ 且 $L(\beta_\zeta) \ \models \mathrm{ZF}^-$。因此 $C \cap \gamma = \pi_\zeta(C) \in L(\beta_\zeta)$，当然 $L(\beta_\zeta)$ 模型中， $\pi_\zeta(C)$ 是 γ 中的闭无界集。这意味着$C \cap \gamma \in \mathscr{G}_\gamma$。同样也有 $E_k \cap \gamma \in L(\beta_\zeta)$，于是对无穷多个 $n \in \omega$， $E_k \cap \gamma = S_n \in \mathscr{S}_\gamma$。由于 $A_\gamma \setminus (C \cap \gamma)$ 是有限的，而 A_γ 的构造方式使得 $A_\gamma \cap (E_k \cap \gamma)$ 是无限的，这说明 $E_k \cap A$ 在 ω_1 中是平稳的。

类似地，对于所有 $k \in \omega$， $E_k \cap B$ 在 ω_1 中是平稳的。因此， $\mathcal{I} \cup \{A\}$ 也是 $\mathcal{C}$-独立的。 ❐

注意， $A \cap B \neq \emptyset$ 完全有可能成立；然而，不难证明 $A \setminus B$ 和 $B \setminus A$ 也都是平稳的。

极大的 $\mathcal{C}$-独立族具有许多性质，类似于经典情形中的极大独立族。例如，很容易证明:

如果 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{C}$-独立且有限的，那么它就不是极大的。事实上，设 $\mathcal{I}=\{I_i:\ i\in n\}$，其中某个 $n\in\omega$ 满足此条件，并注意对于每个 $s:\ n\to 2$，集合 $\mathcal{I}^s=\bigcap_{i\in n} I^{s(i)}$ 是驻定的；此外，如果 s、$t:\ n\to 2$ 彼此不同，那么 $\mathcal{I}^s$ 和 $\mathcal{I}^t$ 不相交。对于每个 $s:n\to 2$，令 A_s 和 B_s 为 $\mathcal{I}^s$ 的一个划分，使其成为两个不相交的驻定集，并令 $A=\bigcup\{A_s:\ s\in 2^n\}$。显然，$A\notin\mathcal{I}$，且 $\mathcal{I}\cup\{A\}$ 是 $\mathcal{C}$-独立的。请注意，由于我们总能将一个驻定集分成两个驻定子集，上述论证保证我们可以递归构造基数为 $n\in\omega$ 的 $\mathcal{C}$- 独立族，从而得到一个可数的 $\mathcal{C}$- 独立族。这种方法的优点在于，它只要求一个驻定集可以分成两个驻定集，而不一定要分成无限多个驻定集。

2.1.1. 稠密 $\mathcal{C}$-独立族。接下来展示的关于 $\mathcal{C}$-独立族的所有性质，均由 Goldstern 和 Shelah 针对经典独立性证明于[3], 这证明了，ω_1 上的 $\mathcal{C}$-独立族与 ω 上的独立族表现相似。

定义 2.11. 若 $\mathcal{I}$ 是一个 $\mathcal{C}$-独立族，则我们将与 $\mathcal{I}$ 相关联的理想定义为:

$$\mathcal{J}_{\mathcal{I}}=\{A\subseteq\omega_1:(\forall f\in FF(\mathcal{I}))(\exists g\in FF(\mathcal{I}))(g\supseteq f\wedge\mathcal{I}^g\cap A\text{ is not stationary})\}.$$

显然，$\mathcal{J}_{\mathcal{I}}$ 是一个包含非平稳集之理想的理想。

定义 2.12. (1) 若 $X,Y\subseteq\omega_1$，我们称 X 几乎包含于 Y，如果$X\setminus Y$不是一个平稳集，并将此记作 $X\subseteq_{\mathrm{NS}} Y$。
(2) 对于由 ω_1 的子集构成的族 $\mathcal{X}$ 以及 $Y\subseteq\omega_1$，若对每个 $X\in\mathcal{X}$都有 $Y\subseteq_{\mathrm{NS}} X$，则称 Y 是 $\mathcal{X}$ 的伪交。

定义 2.13。若对于每个 $A\in\mathcal{J}_{\mathcal{I}}{}^+$，都存在 $g\in FF(\mathcal{I})$ 使得 $\mathcal{I}^g\subseteq_{\mathrm{NS}} A$，则 $\mathcal{C}$-独立极大族是稠密的。

这可以解释如下：若 $\mathcal{I}$ 的包络是 $\mathcal{J}_{\mathcal{I}}{}^+$ 的一个基，则 $\mathcal{C}$-独立族是稠密的；还要注意，对于所有 $f\in FF(\mathcal{I})$，我们都有 $\mathcal{I}^f\in\mathcal{J}_{\mathcal{I}}{}^+$，因为 f 本身就是这一点的见证。接下来使用以下标准记号：若 $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(X)$ 且 $Y\subseteq X$，则 $\mathscr{A}\restriction Y$ 是如下的族 $\{A\cap Y:\ A\in\mathscr{A}\}$。

命题 2.14。若 $\mathcal{I}$ 是一个极大的 $\mathcal{C}$-独立族，则存在 $f\in FF(\mathcal{I})$，使得对于每个 $g\in FF(\mathcal{I})$，在 $g\supseteq f$ 的条件下，$\mathcal{I}\restriction\mathcal{I}^g$ 是极大的。

证明。令 $\{f_n:\ n\in\omega\}$ 是一个具有以下性质的极大族:
（1）如果 $n\neq m$、f_n 和 f_m 不相容。（2）
对于每个 $n\in\omega$，$\mathcal{I}\restriction\mathcal{I}^{f_n}$ 都不是极大的。
注意，根据条件 1），并且由于 FF（$\mathcal{I}$）满足 ccc条件，该集合至多是可数的（原则上它也可能是有限的，但不妨设它是可数的）。

现在，对每个 $n\in\omega$，令 $A_n\subseteq\mathcal{I}^{f_n}$ 满足 $\mathcal{I}\restriction\mathcal{I}^{f_n}\cup\{A_n\}$ 在 $\mathcal{I}^{f_n}$ 上是 $\mathcal{C}$-独立的，并令 $A=\bigcup_{n\in\omega}A_n$。由于 $\mathcal{I}$ 是极大的，存在 $f\in FF(\mathcal{I})$ 使得 $\mathcal{I}^f\cap A$，或者 $\mathcal{I}^f\setminus A$ 不是平稳的。不失一般性，假设 $\mathcal{I}^f\cap A$ 不是平稳的。我们声称 f 与每个 f_n 都不相容；为此，假设 f 和 f_n 相容，也就是说，假设 $f\cup f_n$ 是一个函数。因此 $\mathcal{I}^{f\cup f_n}\in\mathrm{Env}(\mathcal{I}\restriction\mathcal{I}^{f_n})$，特别是我们有:

$$\mathcal{I}^f\cap A\supseteq\mathcal{I}^{f\cup f_n}\cap A\supseteq\mathcal{I}^{f\cup f_n}\cap A_n,$$

但这是不可能的，因为在这种情况下， $\mathcal{I}^{f\cup f_n}\cap A_n$ 是平稳的，而 $\mathcal{I}^f\cap A$ 不是。

由于 f与每个 f_n都不相容，因此任何满足$g\subseteq f$的 $g\in FF(\mathcal{I})$也都不相容；故 $\mathcal{I}\restriction\mathcal{I}^g$ 是极大的，否则就会与 $\{f_n$ 的极大性相矛盾： $n\in\omega\}$ 。 ❒

引理 2.15. 若 $\mathcal{I}$ 是一个 $\mathcal{C}$-独立极大族，并且对于每个 $f\in FF(\mathcal{I})$，族 $\mathcal{I}\restriction\mathcal{I}^f$都是极大的，那么 $\mathcal{I}$是稠密的。

证明。设 $A\in\mathcal{J}_{\mathcal{I}}{}^+$，这意味着存在 $f\in FF(\mathcal{I})$，使得对于每个扩展为 f的 $g\in FF(\mathcal{I})$，我们都有 $\mathcal{I}^g\cap A$是平稳的。由于 $\mathcal{I}\restriction\mathcal{I}^f$是极大的，存在 $g\in FF(\mathcal{I})$、 $g\supseteq f$，使得 $\mathcal{I}^g\cap A$或 $\mathcal{I}^g\setminus A$不是平稳的；但我们知道 $\mathcal{I}^g\cap A$ 是平稳的，因此必有 $\mathcal{I}^g\setminus A$ 不是平稳的，即 $\mathcal{I}^g\subseteq_{\mathrm{NS}}A$，这正是我们想要的。 ❒

命题 2.16. 如果 $\mathcal{I}$ 是一个稠密的极大 $\mathcal{C}$-独立族，那么 $P(\omega_1)/\mathcal{J}_{\mathcal{I}}$ 满足 ccc条件。

证明。反证法。假设 $\{X_\alpha:\alpha\in\omega_1\}\subseteq\mathcal{J}_{\mathcal{I}}{}^+$ 满足：若 $\alpha\neq\beta$，则 $X_\alpha\cap X_\beta\in\mathcal{J}_{\mathcal{I}}$。由于 $\mathcal{I}$ 是一个稠密族，对每个 $\alpha\in\omega_1$，都存在 $f_\alpha\in FF(\mathcal{I})$ 使得 $\mathcal{I}^{f_\alpha}\subseteq_{\mathrm{NS}}X_\alpha$。现在，若 $\alpha\neq\beta$，则 f_α 与 f_β 不相容；否则 $\mathcal{I}^{f_\alpha\cup f_\beta}=\mathcal{I}^{f_\alpha}\cap\mathcal{I}^{f_\beta}\subseteq_{\mathrm{NS}}X_\alpha\cap X_\beta\in\mathcal{J}_{\mathcal{I}}$。但此时 $\mathcal{I}^{f_\alpha\cup f_\beta}\in\mathcal{J}_{\mathcal{I}}$（因为 $\mathcal{J}_{\mathcal{I}}$ 包含非平稳集），这与 Env($\mathcal{I}$) $\subseteq\mathcal{J}_{\mathcal{I}}{}^+$ 矛盾。

因此，族 $\{f_\alpha:\alpha\in\omega_1\}$ 是 $FF(\mathcal{I})$ 中的一个反链，但这与 $FF(\mathcal{I})$ 满足 ccc条件这一事实矛盾。 ❒

2.1.2. 强连续统假设-独立族。

引理 2.17. 设 $\mathcal{E}=\{E_n:n\in\omega\}$ 是由平稳集组成的嵌套集族，即 $E_{n+1}\subseteq E_n$ 对所有 $n\in\omega$ 都成立。以下条件等价：
(1) $\mathcal{E}$ 有一个平稳伪交，也就是说，存在一个平稳集 X，使得对于所有 $n\in\omega$，$X\setminus E_n$ 都不是平稳集。(2)$\bigcap_{n\in\omega}E_n$ 是平稳的。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2) 注意到

$$X=(X\cap\bigcap_{n\in\omega}E_n)\cup(X\cap(\omega_1\setminus\bigcap_{n\in\omega}E_n))$$

构成并集的两个集合中必有一个是平稳集。另一方面：

$$X\cap(\omega_1\setminus\bigcap_{n\in\omega}E_n)=X\cap(\bigcup_{n\in\omega}\omega_1\setminus E_n)=\bigcup_{n\in\omega}X\cap(\omega_1\setminus E_n)=\bigcup_{n\in\omega}X\setminus E_n,$$

由于每个 $X\setminus E_n$ 都不是平稳集，因此$\bigcup_{n\in\omega}X\setminus E_n$ 也不是平稳集，即$X\cap(\omega_1\setminus\bigcap_{n\in\omega}E_n)$ 不是平稳集。必然 $X\cap\bigcap_{n\in\omega}E_n$ 是平稳集，因此$\bigcap_{n\in\omega}E_n$ 也是平稳集。

(2) $\Rightarrow$ (1) 在这种情况下，只需取 $X=\bigcap_{n\in\omega}E_n$。 ❒

推论 2.18。设 $\mathcal{I}\subseteq\mathscr{P}(\omega_1)$ 是一个 $\mathcal{C}$-独立族。以下条件等价：

(1) $\mathcal{I}$ 是强 $\mathcal{C}$-独立的。

(2) 对每个 f；$\mathcal{I} \to 2$，若 f可数，则集合族 $\{\mathcal{I}^{f\restriction n}:\ n \in \omega\}$ 存在一个平稳伪交[1]。

命题 2.19。可数的强 $\mathcal{C}$-独立族不是极大的，既不是强 $\mathcal{C}$-独立族，也不是 $\mathcal{C}$-独立族。

证明。设 $\mathcal{I} = \{I_n:\ n \in \omega\}$ 是一个强 $\mathcal{C}$-独立族。对于每个 $f \in 2^\omega$，考虑 $X_f = \mathcal{I}^f$。若 $f \neq g$，则 $X_f \cap X_g = \emptyset$。现在令 $\{A_f, B_f\}$为X_f 的一个驻定集划分，并定义 A 如下:

$$A = \bigcup_{f\in 2^\omega} A_f.$$

我们来证明 $\mathcal{I} \cup \{A\}$ 是强 $\mathcal{C}$-独立的。为此，只需证明对所有 $f \in 2^\omega$，集合 $X_f \cap A$ 和 $X_f \setminus A$ 都是平稳集；然而 $X_f \cap A = A_f$和 $X_f \setminus A = B_f$ 是平稳集。 ❐

如我们所见，在连续统假设下，存在可数的 $\mathcal{C}$-独立族，它们是强 $\mathcal{C}$-独立的；另一方面（不需要 ZFC 以外的额外假设），也存在可数的 $\mathcal{C}$-独立族，它们离强独立相去甚远。这意味着存在 $\mathcal{I} = \{I_n:\ n \in \omega\} \subseteq \mathscr{P}(\omega_1)$，它是 $\mathcal{C}$-独立的，但对每个满足 $|h^{-1}(\{0\})| = \omega$ 的 $h \in 2^\omega$，都有 $\mathcal{I}^h = \emptyset$；例如，要构造这样的一个族，只需取$\{X_n:\ n \in \omega\}$，将 ω_1 划分为平稳集，并定义 I_n 如下:

$$I_n = \bigcup_{m\in C_n} X_m,$$

其中 C_n 与例 1.4 中相同，因此，族 $\{I_n:\ n \in \omega\}$ 满足此性质。

3. Saturated ideals and $\mathcal{J}$-independent families

理想的饱和性与大基数的研究密切相关，因此，正如我们将在本节中看到的，它构成了这些基数与其上存在 $\mathcal{J}$-独立族之间的桥梁。

定义 3.1. 设 $\mathcal{J}$ 是基数 κ上的一个理想。那么:

(1) 若对于每个集合 $\{X_\alpha:\ \alpha \in \lambda\} \subseteq \mathcal{J}^+$，都存在$\beta < \gamma < \lambda$ 使得 $X_\beta \cap X_\gamma \in \mathcal{J}^+$，则称 $\mathcal{J}$ 是 λ-饱和的。(2) sat($\mathcal{J}$) 是使得 $\mathcal{J}$ 为 λ-饱和的最小 λ。

引理 3.2. 设 $\mathcal{J}$ 是基数 κ 上的一个理想，且对于某个基数 λ，sat($\mathcal{J}$) $> \lambda$。那么，κ 上存在一个基数为 2^λ的 $\mathcal{J}$-独立族。

证明。由于 $\mathcal{J}$ 不是 λ-饱和的，存在一个集合 $\{X_\beta:\ \beta \in \lambda\} \subseteq \mathcal{J}^+$，使得当 $\beta \neq \gamma$ 时，$X_\beta \cap X_\gamma \in \mathcal{J}$。令 $\mathcal{I} = \{I_\alpha:\ \alpha \in 2^\lambda\}$ 为定义在 λ 上的、基数为 2^λ 的独立族。对于每个 $\alpha \in 2^\lambda$，令 $\widehat{I_\alpha} \subseteq \kappa$ 定义如下:

$$\widehat{I_\alpha} = \bigcup\{X_\beta : \beta \in I_\alpha\}.$$

现在令 $\widehat{\mathcal{I}} = \{\widehat{I_\alpha}:\ \alpha \in \kappa\}$。显然，$\widehat{\mathcal{I}}$ 的基数为 2^λ，因此剩下唯一需要证明的就是它是一个 $\mathcal{J}$-独立族。

[1]为了使 $f\restriction n$ 有意义，只需枚举 f 的定义域，这样 f 就可以被解释为 2^ω 中的一个函数。

固定 s; $2^\lambda \to 2$, 其中 $|s| < \omega$。我们希望证明 $\widehat{\mathcal{I}}^s \in \mathcal{J}^+$。由于 $\mathcal{I}$是独立的，$\frown$存在 $\beta \in \mathcal{I}^s$，但后者恰恰意味着：对于所有满足 $\frown$ $\frown^s$ $(\alpha) = 0$ 的 α，都有 $X_\beta \subseteq I_\alpha$；并且对于所有满足 $s(\alpha) = 1$的 α，都有 $X_\beta \cap I_\alpha \in \mathcal{J}$，即 $X_\beta \subseteq^* \mathcal{I}^s$。又因为$X_\beta \in \mathcal{J}^+$，所以可得 $\widehat{\mathcal{I}}^s \in \mathcal{J}^+$。 ❒

接下来，我们将指出强$\mathcal{J}$独立族的不存在性与大基数存在性之间的一些关系。

定义 3.3. 如果 $\mathcal{J}$是 κ上的理想，我们称 $\mathcal{J}$是 κ-完备的，如果对于满足 $|\mathcal{H}| < \kappa$的每个子族 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{J}$，都有 $\bigcup \mathcal{H} \in \mathcal{J}$。

定理 3.4. ([7]) 假设 $\mathcal{J}$ 是 κ上的 κ-完备理想。

(1)（塔斯基 [12]）如果 $\mathcal{J}$ 是带有 $2^{<\lambda} < \kappa$的 λ-饱和理想，则 κ 是可测的。

(2)（Levy-Silver [7]）如果 $\mathcal{J}$ 是 κ-饱和的且 κ 是弱紧的，则 κ 是可测的。

(3)（Kurepa [9]）如果 $\mathcal{J}$是带有 $\lambda < \kappa$的 λ-饱和理想，则 κ 具有树性质。

推论 3.5. 假设 $\mathcal{J}$ 是 κ-完备理想，定义在 κ上。

(1) 若 $\lambda < \kappa$, $2^{<\lambda} < \kappa$ 且不存在基数为 2^λ的 $\mathcal{J}$-独立族，则 κ是可测的。

(2) 若不存在基数为 2^κ 的 $\mathcal{J}$-独立族，且 κ 是弱紧的，则 κ 是可测的。(3) 若 $\lambda < \kappa$ 且不存在基数为 2^λ的 $\mathcal{J}$-独立族，则 κ 具有树性质。

证明。我们只证明第一部分，另外两部分的证明类似。

由于不存在基数为 2^λ的 $\mathcal{J}$-独立族，因此由引理 3.2 可得 sat($\mathcal{J}$) $\leq \lambda$，即 $\mathcal{J}$ 是 λ-饱和的；于是由定理 3.4 的第一部分可得所需结论。 ❒

理想 $\mathcal{J}$ 的饱和性与强 $\mathcal{J}$-独立族的存在性有关。

命题3.6. 设 $\mathcal{J}$ 是 κ 上的一个理想，并假设存在一个基数为 κ的强$\mathcal{J}$-独立族。那么 sat($\mathcal{J}$) $\geq \kappa$。此外，如果 κ 是正则的，那么 κ 是强不可达的。

证明。设 $\mathcal{I}$ 是一个基数为 κ的强 $\mathcal{J}$-独立族，$\lambda < \kappa$ 且 $\mathcal{I}_\lambda \subseteq \mathcal{I}$使得 $|\mathcal{I}_\lambda| = \lambda$。那么对于每个 $h: \lambda \to 2$, 都有 $\mathcal{I}_\lambda^h \in \mathcal{J}^+$，并且如果 $h \neq g$, 则 $\mathcal{I}_\lambda^h \cap \mathcal{I}_\lambda{}^g = \emptyset$, 这证明了 sat($\mathcal{J}$) $> 2^\lambda > \lambda$, 从而证明完成。 ❒

前一个证明中的方法具有这样的优点：它说明了 κ 是一个强极限基数这一事实；然而，基数为 κ 的强 $\mathcal{J}$-独立族的存在性还揭示了更多关于 $\mathcal{J}$的饱和性的信息：如果 $\mathcal{J}$ 是 κ 上的一个理想，并且存在一个基数为 κ的强 $\mathcal{J}$-独立族 $\mathcal{I}$，那么 sat($\mathcal{J}$) $> \kappa$。事实上，设 $\mathcal{I} = \{X_\alpha : \alpha \in \kappa\}$，并且对每个 $\beta \in \kappa$ 令 $Y_\beta = X_\beta \setminus \bigcup_{\alpha \in \beta} X_\alpha$。注意，由于 $\mathcal{I}$是强 $\mathcal{J}$-独立的，$Y_\beta \in \mathcal{J}^+$；如果 $\beta < \gamma < \kappa$，则 $Y_\beta \cap Y_\gamma = \emptyset$。这证明了 $\mathcal{J}$ 不是 κ-饱和的（因为$\{Y_\beta : \beta \in \kappa\}$ 就是一个见证）。

References

[1] Vera Fischer 和 Diana Carolina Montoya。《高阶独立性》。 *arXiv preprint arXiv:1909.11623* 2019 。

[2] S. Geschke。《几乎不交族与独立族》。

RIMS Kokyuroku 1790 1 9, , 页

2012
码 – 。[3] M. Goldstern 和 S. Shelah。Ramsey 超滤子与收割数——Con(

$\mathfrak{r} < \mathfrak{u}$ *Ann.*)。 ,

Pure Appl. Logic 49 2 121 142, 1990
( ) : – 。[4] 费利克斯·豪斯多夫。 ¨关于 G. Fichtenholz 和 L. Kantorovitch 的两条定理。载于 , 页码 – 。Springer, 。[5] F. Hernández-Hernández 和 Paul J. Szeptycki。由俱乐部猜测原理产生的一个小 Dowker 空间。 *Topology Proc.*, 34: 351–363, 2009。[6] R. Björn Jensen。可构造层级的精细结构。 *Ann. Math. Logic*, 4: 229–308; 勘误, 见同刊 4 (1972) , 443, 1972。附有 Jack Silver 撰写的一节。[7] Akihiro Kanamori。 *The higher infinite*。《数学逻辑展望》。Springer-Verlag, 柏林, 1994。集合论中的大基数: 从起源谈起。[8] Kenneth Kunen。极大的 σ-独立族。 *Fund. Math.*, 117: 75–80, 1983。[9] Georges Kurepa。 *Ensembles ordonnées et ramifiés*。论文, 巴黎。贝尔格莱德大学数学出版物, 1935。[10] Saharon Shelah。CON($\mathfrak{u} > \mathfrak{i}$)。 *Arch. Math. Logic*, 31(6): 433–443, 1992。[11] Robert M. Solovay。实值可测基数。载于

Axiomatic set theory (Proc. Sympos. , 页

Pure Math., Vol. XIII, Part I, Univ. California, Los Angeles, Calif., 1967) 397
码 –428, 1971。[12] 塔斯基。完全集合环中的理想。II。 *Fund. Math.*, 33: 51–65, 1945。

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México
Email address: fernando.hernandez@umich.mx

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH, México
Email address: carloscallejas.math@gmail.com