arXiv:2302.09031v2 [math.LO] 1 Feb 2024

范畴证明论语义

David Pym[1, 2*†], Eike Ritter[3*†] 和 Edmund Robinson[4*†1*]

计算机科学与哲学，伦敦大学学院，Gower Street，伦敦，WC1E 6BT，英国。[2]伦敦大学高等研究学院哲学研究所，Malet Street，伦敦，WC1E 7HU，英国。[3]伯明翰大学计算机科学系，Edgbaston，伯明翰，B15 2TT，英国。[3]伦敦大学玛丽女王学院电子工程与计算机科学学院，Mile End Road，伦敦，E1 4NS，英国。

通讯作者。电子邮箱：d.pym@ucl.ac.uk；
e.ritter@bham.ac.uk；e.p.robinson@qmul.ac.uk；
†这些作者对本研究的贡献相同。

摘要

在证明论语义中，模型论有效性被证明论有效性所取代。公式的有效性通过归纳定义：先给出原子的基，再利用源自证明论规则的归纳子句加以定义。一个关键目标是在不要求形式模型的情况下证明证明规则的完备性。要为命题直觉主义逻辑（IPL）确立这一点，会引出一些技术和概念上的问题。我们将 Sandqvist 对直觉主义命题逻辑的（完备）基扩张语义与预层中的范畴证明论联系起来，以范畴论方式重构其可靠性和完备性论证，从而展示 Sandqvist 的构造具有自然性。这种自然性也体现在 Sandqvist 对析取的处理上：其依据是析取的二阶呈现，或消去规则呈现。这些构造所体现的不只是有效性，还包括某些形式的论证对象。我们进一步从有效性的视角表明，Sandqvist 语义也可以被视为层范畴中的自然析取。

1 引言

在模型论语义中，逻辑语言被解释为具有适当公理化并支持模型论后承关系概念的数学结构。具体而言，命题句 ϕ 是集合 Γ 中命题句的模型论后承，当且仅当 Γ 的每个模型 $\mathcal{M}$ 也是 ϕ 的模型；也就是说，

$$\Gamma \models \phi \text{ iff for all } \mathcal{M}, \text{ if, for all } \psi \in \Gamma, \text{ if } \mathcal{M} \models \psi, \text{ then } \mathcal{M} \models \phi$$

正如 Schroeder-Heister [34] 所解释的，在这个后承关系的定义中，真从前提传递到结论，而这种传递由元理论中的经典蕴涵决定。这个后承关系的定义支持对逻辑常项含义的归纳刻画。例如，

$$\mathcal{M} \models \phi \wedge \psi \text{ iff } \mathcal{M} \models \phi \text{ and } \mathcal{M} \models \psi$$

证明论后承通常被定义为在形式系统中的可导性：在形式系统 S 中，命题句 ϕ 是一组命题句 Γ 的证明论后承 —— 也就是说，$\Gamma \vdash_S \phi$ —— 当且仅当它可以使用集合 Γ 中的元素以及集合 S 的公理和推理规则推导出来。这个后承关系的定义也支持对逻辑常项含义的归纳刻画。例如，

$$\text{if } \Gamma \vdash_S \phi \text{ and } \Gamma \vdash_S \psi, \text{ then } \Gamma \vdash_S \phi \wedge \psi$$

请注意，这些刻画的可逆性是一个微妙的问题（例如，参见 [20]）。

从模型论语义及其核心概念——真——的角度来看，形式系统 S 中推理的正确性由可靠性断言给出，

$$\text{if } \Gamma \vdash_S \phi, \text{ then } \Gamma \models \phi$$

如果完备性——即逆向命题——也成立，那么模型论后承与证明论后承便相一致。请注意，完备性并不意味着证明论刻画具有可逆性。

证明论语义为逻辑常项的意义提供了一种不同于模型论语义的解释。粗略地说，证明论语义有两种进路。第一种是我们称为 Dummett-Prawitz 证明论语义的进路 [34]；第二种是我们称为基扩展语义的进路 [31, 22, 23]。前者在时间上优先出现，但后者或许可以视为更一般的视角 [10]。

Dummett-Prawitz 观点源于 Dummett [4]对 Prawitz [26]规范化结果的哲学解读。此后，Schroeder-Heister [33] 提出了一种一般论述，明确区分了语义考量与计算考量；这一观点在数学和哲学层面都得到了实质性发展。它主要应用于直觉主义逻辑。在此背景下，直觉主义逻辑的自然演绎系统 NJ 中的规则被视为先验有效。论证是一棵由公式构成的树，其叶节点称为假设，其中一些假设可能标记为

已解除。论证是间接的（即非直接的），如果它包含绕行，此时可通过约简使其直接，约简方式 `依照Prawitz [26]；例如，经由 $\to$ 的间接论证可按如下方式约简：

$$\dfrac{\mathcal{D}_1 \quad \dfrac{[\phi]\ \mathcal{D}_2\ \psi}{\phi \supset \psi}}{\psi} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} \mathcal{D}_1 \\ \phi \\ \mathcal{D}_2 \\ \psi \end{array}$$

不含假设且没有绕行的论证称为典范证明，它们本身就是有效的。任意论证是否有效，取决于它能否依照某些固定操作（例如通过约简）表示为这些典范证明之一。由此可见，Dummett-Prawitz传统中的证明论有效性是一种证明语义学。这里我们不讨论这种观点。

基扩展语义是一种后承关系的刻画，它由一个归纳定义的判断给出，而该判断的基例由证明而非真来确定。关键在于，模型论语义中的判断基例由真来确定（也就是说，在解释为 I的模型 $\mathcal{M}$ 中，当且仅当$w \in I(p)$时，判断 $w \Vdash p$ 成立）；而在证明论语义中，基例则由某个原子系统中的可证性来确定；也就是说，由以下子句给出，其中 $\mathcal{B}$ 是任意一个原子系统：

$$\Vdash_{\mathcal{B}} p \text{ 当且仅当 } \quad p \text{ 在 } \mathcal{B}\text{中可证}$$

请注意，基扩展语义依赖的是一个（与证明无关的）可证性判断，而不是关于某个证明对象确立了某个后承关系的判断。

当然，也可以给出一种只是模仿模型论语义的基扩展语义。Goldfarb 的完备性证明通过采用一种编码 Kripke 反模型可能世界结构的基扩展语义来实现——见 Goldfarb [14]。这种方法能够在仍然采用 Kripke [17],给出的 IPL 中析取的通常框架语义学的同时，得到完备性。

$$w \Vdash \phi \vee \psi \quad \text{iff} \quad w \Vdash \phi \text{ or } w \Vdash \psi,$$

其中 w 表示任意一个世界。类似地，Stafford 和 Nascimento[36] 最近的研究通过从基规则集合构造 Kripke 模型而得到完备性。

相比之下，在 Sandqvist[31], 给出的 IPL 完备基扩展语义中，析取的子句如下，其中 $\mathbb{A}$ 是原子命题的集合：

$$\begin{array}{ll} \Vdash_{\mathcal{B}} \phi \vee \psi & \text{iff} \quad \text{for any } \mathcal{C} \supseteq \mathcal{B} \text{ and any } p \in \mathbb{A}, \\ & \quad \phi \Vdash_{\mathcal{C}} p \text{ and } \psi \Vdash_{\mathcal{C}} p \text{ implies } \emptyset \Vdash_{\mathcal{C}} p \end{array}$$

完备性是通过使用一个模拟命题及其证明的基来获得的，而不是通过模拟 Kripke 模型的元素来获得。

不过，从 Dummett-Prawitz 证明论语义的精神来看，上文给出的析取语义形式自然可视为自然演绎中 $\vee$消去规则 [9, 26], 的表示；它也自然可视为 $\vee$ 二阶命题逻辑中众所周知的定义（例如参见 [11, 39, 5, 30, 31]）。第4节也讨论了这一观点。

在这两种情况下，该定义都将假设的结论以及定义本身的结论限制为原子命题。也就是说，

$$\dfrac{\phi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\phi] \\ \vdots \\ p\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi] \\ \vdots \\ p\end{array}}{p}$$

并且，用 $\bigwedge$ 表示二阶命题全称量词，

$$\phi \vee \psi \quad = \quad \bigwedge p \,.\, (\phi \supset p) \supset (\psi \supset p) \supset p$$

Sandqvist 语义学以及我们对其进行的范畴论分析，都可以从这两种角度加以理解。

这种对析取的解释已在 F_{at} [7, 6, 8, 32, 25] System F 的原子片段 [13, 12]的语境中得到研究。在 [6, 8] 中证明了这种解释是保真的；也就是说，对于 ϕ 直觉主义命题逻辑（IPL）的任意公式， ϕ 可证明，当且仅当其 F_{at}-解释在 F_{at}中可证明。从超出我们当前讨论范围的视角来看，这一结果或许可以被视为 Sandqvist 完备性结果的证明论对应物。第 F_{at} 节解释了4与我们论述之间的联系。此外，这种析取语义形式与 Beth 语义学密切相关；例如，参见 [18]中关于 Kripke-Beth-Joyal 语义学及相关历史背景的讨论。

Gheorghiu 和 Pym [10] 指出，基扩展语义可以被视为证明论有效性操作范式的声明式对应物。具体而言， [10] 表明，可以从直觉主义命题逻辑的基扩展语义中还原 Dummett-Prawitz 有效性。

范畴论是一门关于数学结构及其关系的一般理论，由 Eilenberg 和 Mac Lane 于20世纪中叶在他们关于代数拓扑的奠基性研究中提出。它提供了一种统一的语言，用于研究数学结构，并支持用一种理论来解释另一种理论。范畴逻辑是一个高度发展的领域，从范畴结构的视角研究逻辑。

模型论语义与范畴逻辑之间，以及证明论与范畴逻辑之间的关系丰富且发展成熟，尤其是在直觉主义逻辑和模态逻辑领域。参见例如 [19, 21, 15, 35]。经典逻辑证明论与范畴逻辑之间的关系发展得不那么充分，但参见例如 [1, 29, 2]。

本文开始探讨证明论语义与范畴逻辑之间的关系。我们这样做主要有两个动机。首先，

一般而言，是为了将证明论语义纳入范畴逻辑的框架。其次，更具体地说，是为了探究直觉主义命题逻辑的基扩展语义在表述上的某些技术层面 [31, 22, 23, 14, 36]:

– 语义的形式自然性
– 析取语义的选择。

这里，形式自然性指的是函子之间存在自然变换（例如， [18, 19, 15], 中定义的那样）：若 F 和 G 是范畴 C 与 D之间的函子，那么 η 是 F 与 G 之间的一个自然变换，它是由一族态射构成，并满足以下条件:

1. η 必须为 C 中的每个对象 x 关联一个箭头 η_x : $F(x) \to G(x)$ 2. 对于 C中的每个 f: $x \to y$，都有 $\eta_y \circ F(f) = G(f) \circ \eta_x$，其中 $\circ$表示态射的复合。

通俗地说，自然变换这一概念体现了：函子之间给定的映射可以在整个范畴中一致地进行。在上述情形中，我们称该结构“关于 x自然”。

我们的主要关注点是 Sandqvist 针对直觉主义命题逻辑提出的基扩展语义 [31]。我们将在第2节简要介绍这项工作。

下面我们概述本文其余部分的结构。在第 2 节中，我们概述 Sandqvist 针对直觉主义命题逻辑提出的基扩展语义，包括在直觉主义自然演绎中可导出的后承关系的可靠性与完备性（见图 1），记作 $\Gamma \vdash \phi$；基扩张有效性记作 $\Gamma \Vdash \phi$。接着，在第 3 节中，我们将以范畴论的方式表述 Sandqvist 的构造。这将运用范畴逻辑中成熟的（本质上基于类型论的）思想（例如，[35, 18, 19, 15]），并在预层范畴中展开。我们将证明，相对于 Sandqvist 语义而言，我们的代数构造是正确的（即具有可靠性与完备性）。随后，在第 4 节中，我们将讨论基扩展语义、直觉主义逻辑的 Kripke 模型以及类型论的预层模型之间的关系。在第 5 节中，我们将以范畴论的方式重构直觉主义命题逻辑基扩展语义的逻辑元理论，并针对直觉主义自然演绎证明熟知的可靠性与完备性定理：也就是说， $\Gamma \vdash \phi$ 当且仅当 $\Gamma \models \phi$，其中 $\models$ 表示由我们的范畴论模型导出的后承关系。本文最后在第 6 节反思析取语义，并说明对其解释方式的选择——本质上是在 Kripke 风格解释与 Sandqvist 风格解释之间进行选择；后者采用与消去规则所提供的证明论解释相对应的二阶表述——如何影响完备性。

本工作的初步版本曾在第十一届斯堪的纳维亚逻辑学会研讨会上发表， 2022 [27]。

2 直觉主义命题逻辑的基扩展语义

Sandqvist [31] 为 IPL 提出了基扩展证明论语义，在该语义下，自然演绎是可靠且完备的。关于详细的动机和技术发展，请参阅 [31] 。这里我们只作非常简短的概述。

下文中，罗马字母 p、 P 等分别表示原子和原子集合；希腊字母 ϕ、 Γ 等分别表示公式和公式集合。

基 $\mathcal{B}$ 是原子规则的集合（针对 $\vdash_{\mathcal{B}}$），如定义1所述，该定义还规定了基规则的应用以及基中的满足关系（$\Vdash_{\mathcal{B}}$）。

定义1（基）。基规则 $\mathcal{R}$、基规则的应用，以及在（可能是有限的）可数规则基 $\mathcal{B}$ 中的公式满足关系 $\mathcal{R}$ 定义如下：原子规则 $\mathcal{R}$ 表示为涉及（原子集合的）二阶蕴含（记作 $\Rightarrow$）：$((P_1 \Rightarrow q_1) \ldots, (P_n \Rightarrow q_n)) \Rightarrow r)$（大写字母 P_i 表示原子集合，而小写字母 q_j 表示单个原子命题）。这可以理解为表示一个带有已解除假设的证明片段：

$$\frac{\begin{array}{cccc}[P_1] & & & [P_n] \\ q_1 & \cdots & & q_n\end{array}}{r}\,\mathcal{R}$$

现在我们可以定义相对于某个基的原子后承关系：

$$\begin{array}{ll}(\text{Ref}) & P, p \vdash_{\mathcal{B}} p \\ (\text{App}_{\mathcal{R}}) & \text{if } ((P_1 \Rightarrow q_1), \ldots, (P_n \Rightarrow q_n)) \Rightarrow r) \text{ is a rule in the base and,} \\ & \text{for all } i \in [1, n],\ P, P_i \vdash_{\mathcal{B}} q_i, \text{ then } P \vdash_{\mathcal{B}} r\end{array}$$

这里，组合子（Ref 和 App$_{\mathcal{R}}$）规定了如何在基中使用规则 $\mathcal{R}$ 构造证明，这些规则用上文讨论的二阶蕴含 $\Rightarrow$ 表示（另见 Sandqvist[31]）。

定义2（基中的有效性）。基中的有效性归纳地定义如下：

（原子情形）对于原子命题 p, $\Vdash_{\mathcal{B}} p$ 当且仅当 $\vdash_{\mathcal{B}} p$(⊃) $\Vdash_{\mathcal{B}} \phi \supset \psi$ 当且仅当 $\phi \Vdash_{\mathcal{B}} \psi$(∧) $\Vdash_{\mathcal{B}} \phi \wedge \psi$ 当且仅当 $\Vdash_{\mathcal{B}} \phi$ 且 $\Vdash_{\mathcal{B}} \psi$(∨) $\Vdash_{\mathcal{B}} \phi \vee \psi$ 当且仅当，对于每个原子命题 p 和每个 $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{B}$，若 $\phi \Vdash_{\mathcal{C}} p$ 且 $\psi \Vdash_{\mathcal{C}} p$，则 $\Vdash_{\mathcal{C}} p$(⊥) $\Vdash_{\mathcal{B}} \bot$ 当且仅当，对于所有原子命题 p, $\Vdash_{\mathcal{B}} p$以及（无穷情形）对于 $\Theta \neq \emptyset$, $\Theta \Vdash_{\mathcal{B}} \phi$ 当且仅当，对于每个 $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{B}$，若对每个 $\theta \in \Theta$都有 $\Vdash_{\mathcal{C}} \theta$，则 $\Vdash_{\mathcal{B}} \phi$

定义3（有效性）。定义（参见 *[31]*） $\Gamma \Vdash \phi$ 如下：对于所有 $\mathcal{B}$，若对于所有 $\psi \in \Gamma$， $\Vdash_{\mathcal{B}} \psi$，则 $\Vdash_{\mathcal{B}} \phi$。

记作 $\Gamma \vdash \phi$，表示 ϕ 可由 Γ 在自然演绎系统直觉主义自然演绎（参见 [31]）中证明。作为参考，直觉主义自然演绎的概要见图1。

定理4（可靠性）。若 $\Gamma \vdash \phi$，则 $\Gamma \Vdash \phi$。定理5（完备性）。

若 $\Gamma \Vdash \phi$，则 $\Gamma \vdash \phi$。

Sandqvist 完备性定理 [31] 必不可少地运用了扁平化。定义 6（运算 $-^\flat$和 $-^\natural$）。令 Δ 包含 $\Gamma \cup \{\phi\}$ 的所有元素及其子公式。对于每个非原子 $\delta \in \Delta$，关联一个不同的原子 $\delta^\flat \notin \Delta$；对于每个原子 $q \in \Delta$，取 $q^\flat = q$。我们用 $\Delta^\flat$ 表示 Δ的扁平化。我们

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi}\ \bot E$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}\ \wedge I \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \phi}\ \wedge E \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \wedge E$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi}\ \vee I \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi}\ \vee I \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \vee \psi \quad \Gamma, \phi \vdash \chi \quad \Gamma, \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash \chi}\ \vee E$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \supset \psi}\ \supset I \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \phi \supset \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ \supset E$$

图1 NJ演算（序列形式，省略 $\top$） [26]

还需要逆运算。对于任意原子命题 p，定义 $p^\natural$：若 $\phi^\flat = p$ 且$p^\natural = p$，则为 ϕ；否则为其他值。

Sandqvist [31] 定义了一个特殊基 $\mathcal{N}$，它取决于 $\Delta^\flat$，如下所示：

定义 7 （基 $\mathcal{N}_{\Delta^\flat}$）。 $\mathcal{N}_{\Delta^\flat}$ 由且仅由以下规则构成，这些规则对应于直觉主义自然演绎（图*1*）：

$\supset I$: $(\phi^\flat \Rightarrow \psi^\flat) \Rightarrow (\phi \supset \psi)^\flat$
$\supset E$: $(\phi \supset \psi)^\flat, (\Rightarrow \phi^\flat) \Rightarrow \psi^\psi$
$\wedge I$: $(\Rightarrow \phi^\flat), (\Rightarrow \psi^\flat) \Rightarrow (\phi \wedge \psi)^\flat$
$\wedge E$: $(\Rightarrow (\phi \wedge \psi)^\flat) \Rightarrow \phi^\flat$
$\wedge E$: $(\Rightarrow (\phi \wedge \psi)^\flat) \Rightarrow \psi^\flat$
$\vee I$: $(\Rightarrow \phi^\flat) \Rightarrow (\phi \vee \psi)^\flat$
$\vee I$: $(\Rightarrow \psi^\flat) \Rightarrow (\phi \vee \psi)^\flat$
$\vee E$: $(\Rightarrow (\phi \vee \psi)^\flat), (\phi^\flat \Rightarrow p), (\psi^\flat \Rightarrow p) \Rightarrow p$
$\bot$: $(\Rightarrow \bot^\flat) \Rightarrow p$

在继续进行范畴论分析之前，我们先说明，附录A 讨论了基 $\mathcal{N}$ 与有效性如何由后承关系表示之间的关系。

3 范畴解释

在具有与逻辑联结词[35, 18, 15]相对应结构的范畴中，解释直觉主义逻辑（NJ）的自然演绎证明，已有一套成熟的方法。具体而言，我们在双笛卡尔闭范畴中解释NJ中的证明：用积解释合取，用指数对象（函数空间）解释蕴含，用余积解释析取。由此，我们得到如下形式的解释：一个态射

$$[\![\Gamma]\!] \xrightarrow{[\![\Phi]\!]} [\![\phi]\!]$$

将后承关系 $\Gamma \vdash \phi$ 的证明 Φ 解释为。这里， Φ 是直觉主义自然演绎中该后承关系的一个证明，并使用某种语言的术语来表示，例如带积和和的类型化 λ-演算。

在这一设定中，我们处理如下形式的判断

$$x_1 : \phi_1, \ldots, x_i : \phi_i, \ldots, x_m : \phi_m \vdash \Phi(x_1, \ldots, x_m) : \phi$$

按照命题即类型解释的理解，它们读作如下形式：如果 x_is 是 ϕ_i 的证明的见证，那么 $\Phi(x_1, .., x_m)$ 表示一个使用直觉主义自然演绎的规则构造出的 ϕ 的证明。

现在，如果 Φ_i 是 ϕ_i 的一个具体证明，那么可以在整个这一判断中用它替换 x_i，从而得到

$$x_1 : \phi_1, \ldots, x_m : \phi_m \vdash \Phi(x_1, \ldots, x_m)[\Phi_i/x_i] : \phi$$

其中假设 $x_i : \phi_i$ 已被移除，并且 Φ 中的 x_i 已被 Φ_i 替换。

在证明论语义的框架中，我们首先关注的是那些仅限于某个基的规则的推导。我们为基中的推导引入项——这些项可视为上述项的一类受限子类——如下：

$$\Phi ::= x \mid \Phi_{\mathcal{R}}(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$$

其中，与定义 1中一样， $\mathcal{R}$ 是一个规则

$$\frac{\begin{array}{cccc}[P_1] & & & [P_n] \\ q_1 & \cdots & & q_n\end{array}}{r}\,\mathcal{R}$$

属于基 $\mathcal{B}$， x 是一个推导的见证，而 Φ_is 归纳地表示原子命题 p的推导，如定义 1所给出。

若 $P = p_1, \ldots, p_m$ 和 $X = x_1, \ldots, x_m$，我们将 $(X\colon P)$ 记作 $x_1\colon p_1, \ldots, x_m\colon p_m$。使用此记法，基中的良构推导可归纳地定义如下：

$$\frac{}{(X:P), x:p \vdash_{\mathcal{B}} x:p}\ (\mathrm{Ref})$$

$$\frac{(X:P), (X_i:P_i) \vdash_{\mathcal{B}} \Phi_i:q_i \quad i = 1, \ldots, n}{(X:P) \vdash_{\mathcal{B}} \Phi_{\mathcal{R}}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n):r}\ (\mathrm{App}_{\mathcal{R}})$$

注意，在规则 App$_{\mathcal{R}}$ 中，变量 X_i 在结论的右侧被绑定。

将 Φ 代入 Ψ 中的 x 所得到的项记为 $\Psi[\Phi/x]$，我们有两个关键的代换引理。首先，代换保留后承关系：引理8。若 $(X\colon P) \vdash_{\mathcal{B}} \Phi\colon q$ 且 $(X\colon P)\ y\colon q \vdash_{\mathcal{B}} \Psi\colon r$，则 $(X\colon P) \vdash_{\mathcal{B}} \Psi[\Phi/y]\colon r$。

证明。对 Ψ 的推导进行归纳。$\Psi = y$假设 $(X\colon P)\ y\colon q \vdash_{\mathcal{B}} y\colon q$。根据定义，$\Psi[\Phi/y] = \Phi$。因此，根据假设，$(X\colon P) \vdash \Psi[\Phi/y]\colon r$。

$\Psi = \Phi_{\mathcal{R}}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ 根据归纳假设，$(X\colon P), (X_i\colon P_i) \vdash_{\mathcal{B}} \Phi_i[\Phi/y]\colon q_i$。因此，$(X\colon P) \vdash_{\mathcal{B}} \Phi_{\mathcal{R}}(\Phi_1[\Phi/y], \ldots, \Phi_m[\Phi/y])\colon r$ 也成立。 □

其次，代换满足结合律：

引理 9. 对于所有推导 $(X\colon P) \vdash_{\mathcal{B}} \Phi_1\colon q_1$、$(X\colon P)\ y_1\colon q_1 \vdash_{\mathcal{B}} \Phi_2\colon q_2$ 以及 $(X\colon P)\ y_2\colon q_2 \vdash_{\mathcal{B}} \Psi\colon r$，其中不失一般性地，$y_1 \neq y_2$，我们有

$$\Psi[\Phi_2[\Phi_1/y_1]/y_2] = (\Psi[\Phi_2/y_2])[\Phi_1/y_1]$$

证明。对 Ψ 的结构进行归纳法。 □

形如 $\mathbf{Set}^{\mathcal{W}^{op}}$ 的函子范畴，其中 $(-)^{op}$ 运算将一个范畴及其态射反转，可用于解释直觉主义自然演绎中的证明。$(-)^{op}$ 算子的使用符合范畴论界的惯例。原因在于 $\mathcal{W}$ 嵌入 $\mathbf{Set}^{\mathcal{W}^{op}}$ 中，并且事实上 $\mathbf{Set}^{\mathcal{W}^{op}}$ 可以被刻画为 $\mathcal{W}$的完备化。详见第 4 节。

对于 $\mathcal{W}$ 的适当选择，这些函子范畴也可用于解释基中的推导。

基本思想是，原子命题 p 在集合 $\mathcal{W}^{op}$ 中的解释是一个函子，它在世界 $(\mathcal{B}, (X\colon P))$ 处的取值为从假设 $(X\colon P)$ 推导出 p 在 $\mathcal{B}$ 中的所有推导所构成的集合。函子 $\mathcal{W}$ 对态射的作用由代换给出。我们采用以下定义：

定义 10（基与上下文）。定义范畴 $\mathcal{W}$ 如下：

– $\mathcal{W}$ 的对象是形如 $(\mathcal{B}, (X\colon P))$ 的有序对，其中 $\mathcal{B}$ 是一个基，而 $(X\colon P)$ 是一个上下文；– 从 $(\mathcal{B}, (X\colon P))$ 到 $(\mathcal{C}, (Y\colon Q))$ 的态射由将基 $\mathcal{C}$ 包含到 $\mathcal{B}$ 中，以及一组推导 $X\colon P \vdash_{\mathcal{B}} \Phi_i\colon q_i$ 给出，其中 $Q = \{q_1, \ldots, q_m\}$。我们将这样的态射记作 $(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$；– $(X\colon P)$ 上的恒等态射是 $(x_1, \ldots, x_n)$；– 从 $(X\colon P)$ 到 $(Y\colon Q)$ 的态射 $(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$ 与从 $(Y\colon Q)$ 到 $(Z\colon R)$ 的态射 $(\Psi_1, \ldots, \Psi_k)$ 的复合为

$$(\Psi_1[\Phi_1/y_1, \ldots, \Phi_m/y_m], \ldots, \Psi_k[\Phi_1/y_1, \ldots, \Phi_m/y_m])$$

引理 9 表明复合满足结合律。

现在，我们将对原子命题 p 的解释扩展到对公式的解释：用范畴积表示合取，用函子范畴中的指数对象表示蕴含。我们使用积、指数对象和对原子的量化来表示 Sandqvist 所采用的析取形式，这与其二阶定义（或者，也可以说，直觉主义自然演绎中 $\vee$ 的消去规则）相对应。例如，参见 [3]。

理解我们对函子范畴中指数对象所作的范畴论表述，关键在于 Yoneda 引理（见 [19]）：设 $\mathcal{C}$ 是一个（局部小）范畴，Set 是集合范畴，$F \in [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$（即 $\mathcal{C}$ 上的预层范畴）；那么，对于 $\mathcal{C}$ 中的每个对象 C，若 $h^C = \hom(-, C)\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$，则自然变换

$h^C \to F$ 与 $F(C)$ 的元素一一对应，而且这一对应关于 C 和 F 是自然的。

我们将使用 Yoneda 引理来计算预层范畴之间某些函子的取值。这些函子定义为右伴随。给定函子 $G{:}\mathcal{C} \to \mathcal{D}$，$G$ 的右伴随是函子 $H: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$，其定义特征是 $\mathcal{D}(Gc, d)$ 与 $\mathcal{C}(c, Hd)$ 自然同构。这一概念有一个对偶。给定$H: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$，左伴随是函子 $G: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，其定义特征是$\mathcal{D}(Gc, d)$ 与 $\mathcal{C}(c, Hd)$ 自然同构。Yoneda 引理告诉我们，如果 F定义为右伴随，那么它的取值就是从相应左伴随所定义的函子之间的一些自然变换。

引理 11. 假设 $L: [\mathcal{C}^{op}$,Set$] \to [\mathcal{D}^{op}$,Set$]$ 有一个右伴随，记作 $R: [\mathcal{D}^{op}$,Set$] \to [\mathcal{C}^{op}$,Set$]$。令 $G: \mathcal{D}^{op} \to$ Set。那么对于任意 $C \in \mathcal{C}$，$RG(C)$ 都可以取为从 $L(\hom(-, C))$ 到 G 的自然变换所构成的集合。

证明。根据 Yoneda 引理，$RG(C) \cong [\mathcal{C}^{op}, \text{Set}](h^C, RG)$，而根据伴随，这与 $[\mathcal{C}^{op}, \text{Set}](L(h^C)\ G)$ 同构，即从$L(\hom(-, C))$到 G 的自然变换集合。 □

稍后，我们将应用这一点来刻画指数对象，其中 $L = (-) \times F$。在这种情况下，我们得到，$F \supset G$ 在 C 处的取值是从 $\hom(-, C) \times F$到 G 的自然变换集合。

函子范畴 $[\mathcal{W}^{op}$,Set$]$ 中的积是按分量给出的。对于函- 子 F 和 G，我们用 $F \supset G$ 表示指数函子。该函子定义为 $(-) \times F$ 的右伴随，采用上文给出的刻画:

$$(F \supset G)(\mathcal{B}, (X : P)) = Nat(h^{(\mathcal{B},(X:P))} \times F, G)$$

其中 $Nat(\phi, \psi)$ 表示集合值函子 ϕ 和 ψ之间的自然变换集合。

现在，我们可以用积和指数对象来形式化描述析取的处理方式。令 $\mathcal{A}$ 为原子命题构成的离散范畴（其对象集合就是原子命题的集合，且其唯一的态射是恒等态射）。定义函子$\Delta_{\mathcal{A}} : (\mathcal{W}^{op} \to \text{Set}) \to ((\mathcal{W}^{op} \times \mathcal{A}) \to \text{Set})$，将函子 $H: \mathcal{W}^{op} \to$ Set 映射为函子 $H': \mathcal{W}^{op} \times \mathcal{A} \to$ Set，使得 $H'((\mathcal{B}, (X: P))\ p) = H((\mathcal{B}, (X: P)))$。将此函子的右伴随称为 $\forall_{\mathcal{A}}$。作为右伴随，我们仍可用自然变换来刻画其取值。具体来说，若 $K : (\mathcal{W}^{op} \times \mathcal{A}) \to$ Set，则 $(\forall_{\mathcal{A}} K)(\mathcal{B}, (X: P))$ 是从 $\Delta_{\mathcal{A}} h^{(\mathcal{B},(X:P))}$ 到 K的自然变换集合。由于 $\mathcal{A}$ 是离散的，这相当于对每个原子命题 p，给出从 $h^{(\mathcal{B},(X:P))}$到 $K(-, p)$ 的自然变换。

定义12 定义了公式在预层中的解释。就我们的目的而言，关键情形包括基例，它刻画基中原子的推导；析取情形，已在其他地方详尽讨论；以及假情形，它被解释为零元析取。

定义 12（解释函子）。按以下方式对 ϕ 的结构进行归纳，定义一个函子 $[\![\phi]\!]: \mathcal{W}^{op} \to$ 集合:

- $[\![p]\!](\mathcal{B}, (X: P))$ 是推导的集合 $(X: P) \vdash_{\mathcal{B}} \Phi: p$。任意从 $(\mathcal{B}, (X: P))$ 到 $(\mathcal{C}, (Y: Q))$ 的态射 $(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$，都会将推导 $(Y: Q) \vdash_{\mathcal{C}} \Phi: p$ 映射为，

它同时也是推导 $(Y:\ Q)\ \vdash_{\mathcal{B}}\ \Phi:\ p$，映射到推导 $(X:\ P)\ \vdash_{\mathcal{B}}$ $\Phi[\Phi_1/x_1,\ldots,\Phi_n/x_n]\colon p$。– $[\![\phi\wedge\psi]\!]$ 是函子 $[\![\phi]\!]$ 和 $[\![\psi]\!]$的积。– $[\![\phi\supset\psi]\!]$ 定义为 $[\![\phi]\!]\supset[\![\psi]\!]$。– $[\![\phi\vee\psi]\!]$ 定义如下：令 $F=[\![\phi]\!]$、 $G=[\![\psi]\!]$和 $K((\mathcal{B},(X:\ P))\ p)$ $=(F\supset[\![p]\!])\ \supset((G\supset[\![p]\!])\ \supset[\![p]\!])(\mathcal{B},(X:\ P))$。这可以扩展为函子$\mathcal{W}^{op}\times\mathcal{A}\to$ Set。然后 $[\![\phi\vee\psi]\!]$ 定义为 $\forall K$。– $[\![\bot]\!]$ 定义如下：令 $K((\mathcal{B},(X:\ P))\ p)\ =[\![p]\!](\mathcal{B},$ $(X:\ P))$。这可以扩展为函子 $\mathcal{W}^{op}\times\mathcal{A}\to$ Set。然后 $[\![\bot]\!]$ 定义为 $\forall_{\mathcal{A}}K$。

请注意，在这种解释中，与双笛卡尔闭范畴中直觉主义自然演绎证明的基本解释不同，析取并不对应于[$\mathcal{W}^{op}$,Set]中的余积。我们将在下文讨论这一点。

在第 5节，我们为 Sandqvist 语义学的范畴化表述建立可靠性和完备性。可靠性证明利用了与 $\Vdash$: $\Gamma\Vdash\phi$ 相对应的自然变换的存在性：当且仅当存在一个从 $[\![\Gamma]\!]$ 到 $[\![\phi]\!]$的自然变换。完备性证明使用特殊基，这与 [31], 中的做法相同；该特殊基通过 $[\![-]\!]$ 自然扩展到完整的后承关系。

定义 13（范畴基扩展有效性）。我们记 $\Gamma\models\phi$，当且仅当存在自然变换 $\eta:[\![\Gamma]\!]\to[\![\phi]\!]$。

对于每个基 $\mathcal{B}$，我们通过考察一个适当的全子范畴，证明相对于该基的可靠性和完备性。考察空基即可得到可靠性和完备性。

对于任意基 $\mathcal{B}$，我们用 $\mathcal{W}_{\mathcal{B}}$ 表示 $\mathcal{W}$ 的全子范畴，其中对象是满足 $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{C}$的有序对 $(\mathcal{C},(Y:\ Q))$。对于 $\mathcal{W}$的任意全子范畴 $\mathcal{W}'$，我们用 $[\![-]\!]^{\mathcal{W}'}$表示函子 $[\![-]\!]$ 在 $\mathcal{W}'$中的对象和态射上的限制。

在引理 14中，我们不失一般性地假设， $\phi^\flat$ 在 $\mathcal{N}_{\Delta^\flat}$ 中的所有元素以及 ${\phi_1}^\flat$、.....、 ${\phi_n}^\flat$ 都不同于 $\mathcal{B}$中的原子命题

引理14。设 $\Gamma=\phi_1,\ .....,\ \phi_n$。设 $\mathcal{B}'=\mathcal{B}\cup\mathcal{N}_{\Delta^\flat}\cup\{\Rightarrow{\phi_1}^\flat,\ldots,\Rightarrow{\phi_n}^\flat\}$。设 $\mathcal{W}'=\mathcal{W}_{\mathcal{B}}$。若 $P\vdash_{\mathcal{B}'}p$，则存在一个自然变换 $\eta:[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'}\times[\![P^\natural]\!]^{\mathcal{W}'}\to[\![p^\natural]\!]^{\mathcal{W}'}$。

证明。该证明对 $P\vdash_{\mathcal{B}'}p$ 的推导结构进行归纳，按推导中所使用的最后一条规则进行分类。对于 $\vee$-消去规则的情形，我们再次对 ϕ 的结构进行归纳。由于 $\vee$ 的语义不使用余积，因此在此情形下我们无法使用泛性质；通过采用这一归纳法，证明中只需考虑所有属于语义 $[\![-]\!]$ 值域的对象。

$\{\Rightarrow{\phi_1}^\flat,\ldots,\Rightarrow{\phi_n}^\flat\}$ 中的规则：

– 假设最后一条规则是 $\Rightarrow\phi^\flat$。那么 $\phi^{\flat\ \natural}$ $=\phi$，而从 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'}\times[\![P^\natural]\!]^{\mathcal{W}'}$ 到 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{W}'}$ 的投影给出了该断言。

$\mathcal{B}$中的规则：

– 假设该推导为 P、 $p\vdash_{\mathcal{B}'}p$。从 $[\![P,p$ 出发的投影 $\natural]\!]^{\mathcal{W}'}$ 到 $[\![\flat]\!]^{\mathcal{W}'}$ 具有所需的性质。

– 假设推导的最后一条规则是规则 $\mathcal{R} = ((P_1 \Rightarrow p_1) \ldots, (P_n \Rightarrow p_n)) \Rightarrow p$ 的应用。根据归纳假设，存在自然变换 η_i，从 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![P^\natural, P_i]\!]^{\mathcal{W}'}$ 到 $[\![p_i]\!]^{\mathcal{W}'}$。因此也存在自然变换 η_i'，从 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![P^\natural]\!]^{\mathcal{W}'}$ 到 $[\![P_i \supset p_i]\!]^{\mathcal{W}'}$。现在考虑 $\mathcal{W}'$ 中任意一个对象。它是一个对 $(\mathcal{C}, (Y : Q))$，满足 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$。设 f 是 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C}, (Y : Q))$ 中的一个元素，并设 g 是 $[\![P^\natural]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C}, (Y : Q))$ 中的一个元素。因此，$\eta_{i(\mathcal{C},(Y:Q))}'(f, g)$ 是一个自然变换 κ_i，从 $Hom(-, (\mathcal{C}, (Y : Q))) \times [\![P_i]\!]^{\mathcal{W}'}$ 到 $[\![p_i]\!]^{\mathcal{W}'}$。令 π_i 为从 $(Y : Q), (Z_i : P_i)$ 到 P_i 的投影。根据定义，$\kappa_i(Id, \pi_i)$ 是一个推导 $\Phi_i : (Y : Q), (Z : P_i) \vdash_{\mathcal{C}} p_i$。因此，$\Phi_{\mathcal{R}}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ 是 $Y : Q \vdash_{\mathcal{C}} p$ 的一个推导。$\mathcal{N}_{\Delta^\flat}$ 中的规则：– 假设最后一条规则是 ${\psi_1}^\flat, {\psi_2}^\flat \Rightarrow (\psi_1 \wedge \psi_2)^\flat$。根据归纳假设，存在两个自然变换 η_1 和 η_2，其中 η_i 是一个从 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![P^\natural]\!]^{\mathcal{W}'}$ 到 $[\![\psi_i]\!]^{\mathcal{W}'}$ 的自然变换。因此，$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle$ 是一个从 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![P^\natural]\!]^{\mathcal{W}'}$ 到 $[\![\psi_1 \wedge \psi_2]\!]^{\mathcal{W}'}$ 的自然变换。– 假设最后一条规则是 $(\psi_1 \wedge \psi_2)^\flat \Rightarrow {\psi_1}^\flat$。根据归纳假设，存在一个从 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![P^\natural]\!]^{\mathcal{W}'}$ 到 $[\![\psi_1 \wedge \psi_2]\!]^{\mathcal{W}'}$ 的自然变换 η。现在将此自然变换与从 $[\![\psi_1 \wedge \psi_2]\!]^{\mathcal{W}'}$ 到 $[\![\psi_1]\!]^{\mathcal{W}'}$ 的投影复合。– 假设最后一条规则是 $({\psi_1}^\flat \Rightarrow {\psi_2}^\flat) \Rightarrow (\psi_1 \supset \psi_2)^\flat$。根据假设，存在一个从 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![P^\natural]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![\psi_1]\!]^{\mathcal{W}'}$ 到 $[\![\psi_2]\!]^{\mathcal{W}'}$ 的自然变换。因此也存在一个从 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![P^\natural]\!]^{\mathcal{W}'}$ 到 $[\![\psi_1 \supset \psi_2]\!]^{\mathcal{W}'}$ 的自然变换。– 假设最后一条规则是 ${\psi_1}^\flat, (\psi_1 \supset \psi_2)^\flat \Rightarrow {\psi_2}^\flat$。根据假设，我们有自然变换 η_1 和 η_2，它们分别从 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![P^\natural]\!]$ 到 $[\![\psi_1]\!]^{\mathcal{W}'}$，以及从 $[\![\psi_1 \supset \psi_2]\!]^{\mathcal{W}'}$ 出发。根据函子范畴中函数空间的定义，也存在一个从 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![P^\natural]\!]$ 到 $[\![\psi_2]\!]^{\mathcal{W}'}$ 的自然变换。– 假设最后一条规则是 ${\psi_1}^\flat \Rightarrow (\psi_1 \vee \psi_2)^\flat$。根据析取的解释，存在一个从 $[\![\psi_1]\!]^{\mathcal{W}'}$ 到 $[\![\psi_1 \vee \psi_2]\!]^{\mathcal{W}'}$ 的自然变换 κ。根据归纳假设，存在一个从 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![P^\natural]\!]^{\mathcal{W}'}$ 到$[\![\psi_1]\!]^{\mathcal{W}'}$ 的自然变换 η。因此，$\kappa \circ \eta$ 是一个从 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![P^\natural]\!]$ 到 $[\![\psi_1 \vee \psi_2]\!]^{\mathcal{W}'}$ 的自然变换。– 假设最后一条规则是 $(\psi_1 \vee \psi_2)^\flat, ({\psi_1}^\flat \Rightarrow p), ({\psi_2}^\flat \Rightarrow p) \Rightarrow p$。根据归纳假设，存在自然变换 $\eta_{\psi_1 \vee \psi_2}$，从 $[\![\Gamma]\!] \times [\![P^\natural]\!]^{\mathcal{W}'}$ 到 $[\![\psi_1 \vee \psi_2]\!]^{\mathcal{W}'}$；$\eta_{\psi_1}$，从 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![P^\natural]\!] \times [\![\psi_1]\!]^{\mathcal{W}'}$ 到 $[\![p^\natural]\!]^{\mathcal{W}'}$；以及 η_{ψ_2}，从 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![P^\natural]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![\psi_2]\!]^{\mathcal{W}'}$ 到 $[\![p^\natural]\!]^{\mathcal{W}'}$。现在我们对 $p^\natural$ 的结构进行归纳。– $p^\natural = p$：根据析取的解释，还存在一个从 $[\![\psi_1 \vee \psi_2]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![\psi_1 \supset p]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![\psi_2 \supset p]\!]^{\mathcal{W}'}$ 到 $[\![p]\!]^{\mathcal{W}'}$ 的自然变换。因此也存在一个从 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![P^\natural]\!]^{\mathcal{W}'}$ 到 $[\![p]\!]^{\mathcal{W}'}$ 的自然变换。– $p^\natural = \phi_1 \wedge \phi_2$：对于 $i = 1$，我们还有 $P, {\psi_1}^\flat \vdash_{\mathcal{B}'} {\phi_i}^\flat$ 和 $P, {\psi_2}^\flat \vdash_{\mathcal{B}'} {\phi_i}^\flat$。根据归纳假设，存在一个从 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![P^\natural]\!]$到 $[\![\phi_i]\!]^{\mathcal{W}'}$ 的自然变换 η_i。自然变换 $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle$ 是一个从$[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![P^\natural]\!]$ 到 $[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!]^{\mathcal{W}'}$ 的自然变换。

– $p^\natural = \phi_1 \supset \phi_2$：我们还有 $P, \phi_1{}^\flat, \psi_i{}^\flat \vdash_{\mathcal{B}'} \phi_2{}^\flat$和 $P, \phi_1{}^\flat \vdash_{\mathcal{B}'} (\psi_1 \vee \psi_2)^\flat$。根据归纳假设，存在一个从 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![P^\natural]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![\phi_1]\!]^{\mathcal{W}'}$到 $[\![\phi_2]\!]^{\mathcal{W}'}$的自然变换。因此，也存在一个从$[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![P^\natural]\!]^{\mathcal{W}'}$到 $[\![\phi_1 \supset \phi_2]\!]^{\mathcal{W}'}$的自然变换。

– $p^\natural = \phi_1 \vee \phi_2$：对于任意原子命题 q和任意 F_1： $[\![\phi_1]\!]^{\mathcal{W}'} \supset [\![q]\!]^{\mathcal{W}'}, F_2$： $[\![\phi_2]\!]^{\mathcal{W}'} \supset [\![q]\!]^{\mathcal{W}'}$，我们定义一个自然变换 μ^{ψ_1}： $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![P^\natural]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![\psi_1]\!]^{\mathcal{W}'} \to [\![q]\!]^{\mathcal{W}'}$，其定义为$\mu^{\psi_1}(\gamma, f, t) = \eta_{\psi_1}(\gamma, f, t) p F_1 F_2$。类似地，我们定义一个自然变换$\mu^{\psi_2}$： $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![P^\natural]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![\psi_2]\!]^{\mathcal{W}'} \to [\![q]\!]^{\mathcal{W}'}$，其定义为 $\mu^{\psi_2}(\gamma, f, t) = \eta_{\psi_2}(\gamma, f, t) p F_1 F_2$。现在，我们使用非正式的 λ-演算记法定义一个自然变换η： $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'} \times [\![P^\natural]\!]^{\mathcal{W}'} \to [\![\phi_1 \vee \phi_2]\!]^{\mathcal{W}'}$，其定义为

$$\eta(\gamma, f) = \lambda q \,.\, \lambda F_1 : [\![\phi_1]\!] \supset [\![q]\!]^{\mathcal{W}'} \,.\, \lambda F_2 : [\![\phi_2]\!] \supset [\![q]\!]^{\mathcal{W}'} \,. \\ \eta_{\psi_1 \vee \psi_2}(\gamma, f) p (Cur(\mu^{\phi})(\gamma, f)) (Cur(\mu^{\psi})(\gamma, f))$$

□

引理 15（代数可靠性）。设 $\Gamma \Vdash_{\mathcal{B}} \phi$。令 $\mathcal{W}'$ 为范畴 $\mathcal{W}_{\mathcal{B}}$。则存在一个自然变换 $\eta_{\mathcal{B}} : [\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'} \to [\![\phi]\!]^{\mathcal{W}'}$。

证明。令 $\Gamma = \phi_1$、.....、 ϕ_n。令 $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \mathcal{N}_{\Delta^\flat} \cup \{\Rightarrow \phi_1{}^\flat, \ldots, \Rightarrow \phi_n{}^\flat\}$。利用 Sandqvist 定理 5.1 的证明，我们有 $\Vdash_{\mathcal{B}'} \Gamma$。因此，根据假设，我们也有 $\Vdash_{\mathcal{B}'} \phi$；再次利用 Sandqvist 定理 5.1 的证明，我们有 $\Vdash_{\mathcal{B}'} \phi^\flat$。引理14 由此得出所需结论。 □

现在我们转向完备性，它被表述为可靠性的逆命题。引理16（代数完备性）。考虑任意基 $\mathcal{B}$。令 $\mathcal{W}'$ 为范畴$\mathcal{W}_{\mathcal{B}}$。如果存在自然变换 $\eta_{\mathcal{B}} : [\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'} \to [\![\phi]\!]^{\mathcal{W}'}$，那么 $\Gamma \Vdash_{\mathcal{B}} \phi$。

证明。 证明通过对以下结构进行归纳法得出： Γ 和 ϕ。$\Gamma = P$， $\phi = p$令 id为 P上的恒等映射。根据定义，$\eta_{\mathcal{B},\ (\mathcal{B},(X:P))}(id)$ 是一个推导——即，根据定义 2 所述的证明——$P \Vdash_{\mathcal{B}} p$。$\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$ 根据定义，存在自然变换 $\eta_i : [\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'} \to [\![\phi_i]\!]^{\mathcal{W}'}$，

因此，根据归纳假设，我们有 $\Gamma \Vdash_{\mathcal{B}} \phi_i$，从而得到 $\Gamma \Vdash_{\mathcal{B}} \phi_1 \wedge \phi_2$。$\Gamma = \Delta$， $\phi_1 \wedge \phi_2$ 根据归纳假设，存在一个推导 $\Delta, \phi_1, \phi_2 \Vdash_{\mathcal{B}} \phi$，这正是所需的推导，因为 $[\![\Delta, \phi_1 \wedge \phi_2]\!] = [\![\Delta, \phi_1, \phi_2]\!]$。

$\phi = \phi_1 \supset \phi_2$ 根据 $\supset$ 作为右伴随的定义，存在一个自然变换 η': $[\![\Gamma, \phi_1]\!]^{\mathcal{W}'} \to [\![\phi]\!]^{\mathcal{W}'}$。根据归纳假设，存在一个推导 $\Gamma, \phi_1 \Vdash_{\mathcal{B}} \phi_2$，因此也存在一个推导 $\Gamma \Vdash_{\mathcal{B}} \phi_1 \supset \phi_2$。

$\Gamma = \Delta, \phi_1 \supset \phi_2$ 假设 $\Vdash_{\mathcal{C}} \Gamma$。根据代数可靠性，对于所有满足 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$和 P 的 $\mathcal{D}$，存在元素 δ，属于 $[\![\Delta]\!](\mathcal{D}, (X : P))$，以及元素 f，属于 $[\![\phi_1 \supset \phi_2]\!](\mathcal{D}, (X : P))$。$\eta_{\mathcal{B},\ (\mathcal{D},(X:P))}(\delta, f)$ 是 $[\![\phi]\!](\mathcal{D}, (X : P))$ 的一个元素。此赋值关于 $(\mathcal{D}, (X : P))$ 是自然的。根据归纳假设，我们有 $\Vdash_{\mathcal{C}} \phi$。

$\phi = \phi_1 \vee \phi_2$ 根据 $[\![-]\!]$的定义，对于所有原子命题 p，存在一个从 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'}$ 到 $[\![\phi_1 \vee \phi_2]\!]^{\mathcal{W}'}$ 的自然变换 $\eta_{\mathcal{B}}$，当且仅当对于所有原子命题 p，存在一个自然变换 $\eta_{p,\ \mathcal{B}}$ 从 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'}$ 到 $[\![(\phi_1 \supset p) \supset (\phi_2 \supset p) \supset p]\!]^{\mathcal{W}'}$。因此

归纳假设给出 $\Gamma \Vdash_{\mathcal{B}} (\phi_1 \supset p) \supset (\phi_2 \supset p) \supset p$。因此，根据定义，$\Gamma \Vdash_{\mathcal{B}} \phi_1 \vee \phi_2$。$\Gamma = \Delta$，$\phi_1 \vee \phi_2$ 对 ϕ 的结构进行归纳。$\phi = p$ 假设 $\Vdash_{\mathcal{B}} \Gamma$。根据代数可靠性，存在一个自然变换$\eta' : [\![\top]\!]^{\mathcal{W}'} \to [\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'}$。根据定义，$\eta_{\mathcal{B}} \circ \eta'$ 是一个从$[\![\top]\!]^{\mathcal{W}'}$ 到 $[\![p]\!]^{\mathcal{W}'}$的自然变换。由于 $[\![\top]\!](\mathcal{B}, (- : -))$ 非空，$[\![p]\!](\mathcal{B}, (- : -))$ 也非空，因此根据 $[\![-]\!]$ 的定义，存在一个推导 $\Vdash_{\mathcal{B}} p$。$\phi = \psi_1 \wedge \psi_2$ 根据定义，存在自然变换 η_1 和 η_2，使得$\eta = \langle \eta_1, \eta_2 \rangle$。根据归纳假设，存在推导 $\Gamma \Vdash_{\mathcal{B}} \psi_1$ 和$\Gamma \Vdash_{\mathcal{B}} \psi_2$。因此我们也有 $\Gamma \Vdash_{\mathcal{B}} \psi_1 \wedge \psi_2$。$\phi = \psi_1 \supset \psi_2$ 根据定义，还存在一个从$[\![\Gamma, \psi_1]\!]^{\mathcal{W}'}$ 到 $[\![\psi_2]\!]^{\mathcal{W}'}$的自然变换 $\eta'_{\mathcal{B}}$。根据归纳假设，存在一个推导Γ，$\psi_1 \Vdash_{\mathcal{B}} \psi_2$。因此也存在一个推导 $\Gamma \Vdash_{\mathcal{B}} \psi_1 \supset \psi_2$。$\phi = \psi_1 \vee \psi_2$ 考虑任意原子命题 p。根据 $[\![-]\!]$ 的定义，存在一个从 $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{W}'}$ 到 $[\![(\psi_1 \supset p) \supset (\psi_2 \supset p) \supset p]\!]^{\mathcal{W}'}$ 的自然变换 η'。根据归纳假设，存在一个推导 $\Gamma \Vdash_{\mathcal{B}} (\psi_1 \supset p) \supset (\psi_2 \supset p) \supset p$。因此也存在一个推导 $\Gamma \Vdash_{\mathcal{B}} \psi_1 \vee \psi_2$。

□

命题 17（等价性）。 $\Gamma \Vdash \phi$ 当且仅当 $\Gamma \models \phi$。

证明。由引理15 和16直接得出。 □

4 与 Kripke、预层及层模型的关系

上一节详细阐述了 Sandqvist 的证明论语义学的范畴论论述。本节将这一论述与经典 Kripke 模型、通过完备Heyting代数处理直觉主义逻辑的方法，以及通过预层范畴与层范畴处理高阶类型论的方法联系起来。

合取和蕴含的处理是标准的。然而，析取的处理并非如此；对其进行细致分析后可以发现，证明无关的代数语义与证明相关的范畴语义之间存在区别。在代数语义中，可以将 Sandqvist 对析取的定义揭示为由标准 Kripke 模型（定义 30，引理 33）所得到的局部的子局部（商完备海廷代数）中的自然析取，从而确立其可靠性。范畴论框架中的对应情形，则是相对于相应（Grothendieck 或 Joyal-Tierney）拓扑的层。然而，并没有充分理由要求原子命题的解释必须是层，而且析取的定义也不是范畴余积。

该解释的可靠性反而源自结构归纳，而非任意层所具有的性质（引理25、15 以及命题27）。这在类型论的范畴解释中并不常见，因此值得注意。

经典 Kripke 模型以一个世界集合 $\mathcal{K}$ 为基础。对于每个原子谓词 p，我们都会知道 p 是否在世界 w 中成立：$w \Vdash p$。在解释直觉主义逻辑时，世界集合可以被视为可能的知识状态。这个集合是

一个偏序集，其顺序表示知识的增长。这种观点引出了单调性，也体现于单调性性质中：如果 $w \leq w'$ 和 $w \Vdash p$，那么 $w' \Vdash p$。

通过结构归纳法，将有效性的定义扩展到任意命题：

(⊃) $w \Vdash \phi \supset \psi$ 当且仅当对所有 $w \leq w'$，若 $w' \Vdash \phi$，则 $w' \Vdash \psi$(∧) $w \Vdash \phi \wedge \psi$ 当且仅当 $w \Vdash \phi$ 且 $w \Vdash \psi$(⊥) $w \Vdash \bot$ 永不 (∨) $w \Vdash \phi \vee \psi$ 当且仅当 $w \Vdash \phi$ 或 $w \Vdash \psi$

随后，单调性也扩展到所有公式。为了确保这一点，(⊃) 子句中必须对扩展进行量化。

基扩展语义与 Kripke 模型密切相关。在最简单的表述中（我们的表述稍微复杂一些），世界集合 $\mathcal{K}$ 就是所使用的基的集合，而偏序就是基之间的包含关系。我们定义 $\mathcal{B} \Vdash p$ 当且仅当 $\vdash_{\mathcal{B}} p$。这满足单调性，因为若 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ 且 $\vdash_{\mathcal{B}} p$，则 $\vdash_{\mathcal{C}} p$。将原子公式的这一界定扩展到一般公式，主要有两种方法：

- Schroeder-Heister 等人的方法（参见 [24]），它完全遵循 Kripke 定义；- Sandqvist 的方法 [31], ，它遵循 Kripke 对蕴含和合取的定义，但不遵循对析取或假命题的定义。不过，Kripke 模型也有一种更具代数性的解释。

引理18。在任意 Kripke 模型中，任意命题 ϕ 的解释都满足单调性：如果 $w \leq w'$ 且 $w \Vdash \phi$，那么 $w' \Vdash \phi$。

因此，任意命题 ϕ 的解释也满足单调性，因而是 $\mathcal{K}$ 的上闭子集。

定义19。令 Ω 为 $\mathcal{K}$ 的上闭子集的集合；也就是说，

$$\Omega = \{U \subseteq \mathcal{K} \mid \text{if } \mathcal{B} \in U \text{ and } \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}, \text{ then } \mathcal{C} \in U\}$$

Ω 按包含关系构成偏序。

引理20。Ω 是一个（完备的）Heyting代数，并且逻辑联结词在该代数中的解释与其在 Kripke 模型中的解释一致。

此外，如果 $w \in \mathcal{K}$，那么 $w^{\uparrow} = \{w' \in \mathcal{K} \mid w \leq w'\}$ 就在 Ω 中。然而，如果 $w_0 \leq w_1$，那么 $w_1^{\uparrow} \subseteq w_0^{\uparrow}$。因此，嵌入 Ω 的是 $\mathcal{K}^{op}$，而不是 $\mathcal{K}$。事实上，Ω 可以看作是对 $\mathcal{K}^{op}$ 关于任意析取的自由完备化。这意味着 Kripke 模型可以看作是呈现完备Heyting代数的一种简便方式。

标准的克里普克解释为有效性提供了一种解释，但并未真正解释证明或正当化。为了做到这一点，我们需要转向一种能够区分不同证明的框架。一种方法是使用预层。

定义 21. 如果 C 是一个范畴，那么 C 上的预层是一个函子 $F\colon \mathrm{C}^{op} \to$Set，而预层态射是这些函子之间的自然变换。

预层范畴推广了 Kripke 模型。为了用预层来表述 Kripke 模型，令 $\mathsf{C} = \mathcal{K}^{op}$，因此 $\mathsf{C}^{op} = \mathcal{K}$。由此，与该 Kripke 模型对应的预层范畴实际上是 $\mathsf{Set}^{\mathcal{K}}$。这里我们采用将偏序视为范畴的标准解释：偏序的元素构成该范畴的对象；若 $w_o \leq w_1$，则同态集 $\mathcal{K}(w_0, w_1)$ 含有一个元素，否则为空。

在建立 Kripke 模型与预层之间的联系时，一个简单但重要的预层是预层 1，定义为 $1(w) = \{*\}$。如果 ϕ 是它的一个子预层，那么每个 $\phi(w)$ 都将是 $\emptyset$ 或 $\{*\}$。并且，如果 $w_0 \leq w_1$，那么就存在一个函数 $\phi(w_0) \to \phi(w_1)$。因此，如果 $\phi(w_0)$ 非空，那么 $\phi(w_1)$ 也非空。由此，ϕ 对应于 $\mathcal{K}$ 的一个上闭子集。反过来，如果 U 是 $\mathcal{K}$ 的一个上闭子集，那么我们可以定义 $\chi_U : \mathcal{K} \to$集合如下：

- $\chi_U(w) = \{*\}$ if $w \in U$
- $\chi_U(w) = \emptyset$ otherwise

χ_U 是 1 的一个子函子。对于与 Kripke 模型对应的预层范畴，这表明 Kripke 模型中命题的可能解释与预层范畴中 1 的子函子之间存在保序对应。我们已经得到：

引理 22. 存在一个保序同构，连接
- Ω，即 $\mathcal{K}$ 的上闭子集构成的格，以及
- 预层托扑斯 $\mathsf{Set}^{\mathcal{K}}$ 中 1 的子函子构成的格。

这意味着，对于直觉主义命题逻辑的基于有效性的语义，可以将这两个格中的任意一个互换用作目标。

然而，预层范畴还包括以含有多个元素的集合为目标的函子。它们不仅提供直觉主义命题逻辑的模型，还构成简单直觉主义类型论的模型，并带有类型构造运算的解释，包括积和和。

下文设 F 和 G 是两个函子 $\mathsf{C}^{op} \to \mathsf{Set}$。

- 在预层范畴中，F与 G 的积是函子 $F \times G$，它在对象上的定义为 $F \times G(A) = F(A) \times$集合 $G(A)$，而对态射的作用是逐分量定义的。- 范畴函数空间 $[F \to G]$ 在对象上的定义如下：$[F \to G](A)$是从 $F \times \mathsf{C}(-, A)$到 G的自然变换集合。对态射的作用通过复合得到。- F与 G 的余积是函子$(F + G)(A) = F(A) +$集合 $G(A)$，其中 $+$集合是集合范畴中的余积（即不交并）。

如果$\mathsf{C} = \mathcal{K}^{op}$ 是一个偏序，且 F 与 G 是1的子函子，那么这些定义对应于相应Kripke 模型中 $\wedge$、 $\supset$和 $\vee$ 的解释。

此外，第3节还给出了与范畴解释的联系。其中给出的构造是预层拓扑斯 $\mathcal{W}^{op} \to$集合中的内部构造：我们由定义12回顾，原子命题 p 的解释是一个函子$\mathcal{W}^{op} \to$集合，并且对于任意命题，ϕ和 ψ，$\phi \wedge \psi$和 $\phi \supset \psi$ 的解释分别定义为 $[\![\phi]\!] \times [\![\psi]\!]$ 和 $[\![\phi]\!] \supset [\![\psi]\!]$。

引理 23。 对于原子 p 以及任意命题 ϕ和 ψ，定义 12 中定义的解释具有以下性质：

– 原子命题 p 的解释是一个函子 $[\![p]\!]: \mathcal{W}^{op} \to$集合 – $\phi \wedge \psi$ 的解释是 $[\![\phi]\!] \times [\![\psi]\!]$– $\phi \supset \psi$ 的解释是 $[\![\phi]\!] \to [\![\psi]\!]$。

然而， $\phi \vee \psi$ 的解释并不是预层托扑斯 $\mathcal{W}^{op} \to$集合中的余积 $[\![\phi]\!] + [\![\psi]\!]$。相反，它是二阶公式的解释：

$$\forall p.([\![\phi]\!] \to [\![p]\!]) \to ([\![\psi]\!] \to [\![p]\!]) \to [\![p]\!]$$

将这种直觉形式化有两种等价的方式。
– 我们可以将原子命题的集合视为外部集合，并将量化视为所有 $([\![\phi]\!] \to [\![p]\!]) \to ([\![\phi]\!] \to [\![p]\!]) \to [\![p]\!]$ 的合取，因为命题格有无限交。

– 我们可以将原子命题的集合内化为常值预层$\Delta\mathbb{A}$，其中 $(\Delta\mathbb{A})(w) = \mathbb{A}$。我们将 $([\![\phi]\!] \to [\![p]\!]) \to ([\![\phi]\!] \to [\![p]\!]) \to [\![p]\!]$ 解释为由 $\Delta\mathbb{A}$ 索引的内部命题族，并将 $\forall p$ 解释为托扑斯逻辑中的内部量化；在此情形下，它就是积：$\prod_p .([\![\phi]\!] \to [\![p]\!]) \to ([\![\psi]\!] \to [\![p]\!]) \to [\![p]\!]$。
后者引出了第 3 节所详述的构造。

由此可知，我们在第 3 节定义的结构自然是 F_{at} 的一个模型。它是二阶 λ 演算的一种受限形式，其中函数类型以及多态都限定于一组原子类型。将 $\forall$ 限定在预定义的集合上，意味着 F_{at} 是谓词式的，这与完整的 System F[13, 11], 形成对比；这也意味着它可以在一种广义的集合论框架中得到解释，其中全称类型被解释为原子类型集合上的积。这正是我们的范畴模型所做的。因此，这里的结构与 Ferreira 等人深入研究的结构之间存在紧密联系。[5, 7, 6, 8, 32, 25]然而，Ferreira 的处理本质上是语法层面的，而我们的处理则具有鲜明的语义性质。尤其是， F_{at} 的类型存在于更广泛的上下文中。不过，我们对引理 25 的证明，可以看作是 Ferreira 针对析取情形所提出的“实例化溢出”的语义对应物。

这种解释支持析取的引入规则：对于托扑斯中的任意对象A 和 B ，都存在态射 $A \to \forall p.(A \to [\![p]\!]) \to (B \to [\![p]\!]) \to [\![p]\!]$和 $B \to \forall p.(A \to [\![p]\!]) \to (B \to [\![p]\!]) \to [\![p]\!]$。但消去规则并没有类似的通用解释。相反，我们得到的解释会限制其中一个变量的取值范围，使其只能取公式的解释，而不能取托扑斯中的任意对象。

考虑析取消去规则：

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \vee \psi \quad \Gamma, \phi \vdash \chi \quad \Gamma, \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash \chi} \vee E$$

我们希望根据托扑斯的结构来编码这条规则。为此，我们考虑一种解释，其中元变量 ϕ、ψ和 χ 表示托扑斯中的对象，而非公式。将 ϕ、 ψ和 χ 替换为 A、 B和 C后，我们看到

我们需要一个态射

$$\sigma(A,B)\times C^A\times C^B\to C$$

其中，σ 是托扑斯中对象上的二元运算，为析取提供语义。

具体而言，Sandqvist 语义学使用 $\sigma(A,B)=\forall p.(A\to[\![p]\!])\to(B\to[\![p]\!])\to[\![p]\!]$，其在任意层拓扑斯中都有定义。对于这种解释，如果将 χ 解释为任意对象，则该规则并不具备可靠性。然而，如果解释 χ 的对象是由原子命题的解释以命题方式构造出来的，并且命题的解释也是如此，那么可靠性便得以恢复。

定义24。对于托扑斯中的对象 C，如果存在一个态射，我们称类型构造子 $\sigma(A,B)$ 支持析取消去

$$\sigma(A,B)\times[A\to C]\times[B\to C]\longrightarrow C$$

构造子 σ 支持析取消去的对象具有良好的闭包性质。

引理 25。

1. σ 总是支持对终对象 1 进行析取消去；也就是说，当C 为 1 时，取值为 $\{*\}$的常值函子。2. 如果 σ 支持对 C_0 和 C_1进行析取消去，那么 σ 支持对 $C_0\times C_1$进行析取消去。3. 如果 σ 支持对 C进行析取消去，那么 σ 支持对 $[D\to C]$进行析取消去。4. 如果 σ 支持对任意满足 $x\in X$的 C_x 进行析取消去，那么 σ 支持对 $\prod_{x\in X}C_x$ 进行析取消去（对于托扑斯中的内部积，也有一个类似但更复杂的陈述）。

证明。所有证明都是对托扑斯的笛卡尔闭结构进行直接操作。

1. 我们需要一个态射 $\sigma(A,B)\times[A\to 1]\times[B\to 1]\to 1$，由于 1 是终对象，该态射唯一存在。2. 我们需要一个态射

$$\sigma(A,B)\times[A\to(C_0\times C_1)]\times[B\to(C_0\times C_1)]\to(C_0\times C_1)$$

但 $[A\to(C_0\times C_1)]$ 与 $[A\to C_0]\times[A\to C_1]$ 同构，$[B\to(C_0\times C_1)]$ 也同样如此。这意味着，可以很容易地由给定的态射构造出所需的态射

$$\sigma(A,B)\times[A\to C_0]\times[B\to C_0]\to C_0$$

以及 $\sigma(A,B)\times[A\to C_1]\times[B\to C_1]\to C_1$。

3. 同样，我们要求一个态射

$$\sigma(A,B)\times[A\to[D\to C]]\times[B\to[D\to C]]\to[D\to C]$$

但可以由该映射的指数构造出来

$$\sigma(A,B)\times[A\to C]\times[B\to C]\to C$$

4. 这本质上与2相同。

□

引理 26. 设 $\sigma(A,B)=\prod_p(A\to[\![p]\!])\to(B\to[\![p]\!])\to[\![p]\!]$，则 σ 对任何作为某个公式语义的对象都支持析取消去：$[\![\phi]\!]$。

证明。对 ϕ 的结构进行归纳。基例是 $\phi=q$，其中 q 是一个原子命题。所需的态射

$$(\prod_p(A\to[\![p]\!])\to(B\to[\![p]\!])\to[\![p]\!])\times(A\to[\![q]\!])\times(B\to[\![q]\!])\to[\![q]\!]$$

是到 q 分量的投影，随后进行求值。合取和蕴含的归纳情形由引理25 立即得出，因为在托扑斯中，这些解释分别由积和指数运算给出。析取的归纳情形也由同一引理得出，因为若 $\phi=\psi\vee\chi$ $[\![\phi]\!]=\prod_p[\![\psi]\!]\to$，$[\![p]\!]\to[\![\chi]\!]\to[\![p]\!]\to[\![p]\!]$ 则 ( ) ( )。□

并非托扑斯中的任意对象都支持析取消去。具体而言，对象 0（它对应于取值为空集的常值函子）并不支持析取消去。若 $A=B=C=0$ $\sigma\ A\ B=\prod_p A\to[\![p]\!]\to B\to$，则 (,) $[\![p]\!]\to[\![p]\!]$ $\prod_p[\![p]\!]$ $[A\to C]$ $[B\to C]$ ( ) ( ) 同构于，而 和 都同构于 1；但是 $\prod_p[\![p]\!]$ 可能非空，因此可能不存在态射 $\prod_p[\![p]\!]\to 0$。

该解释的可靠性现在显而易见：

命题 27. 给定一个关于 $\Gamma\vdash\phi$ 的直觉主义命题逻辑证明，我们可以归纳地定义预层托扑斯中的一个态射（函子之间的自然变换）$[\![\Gamma]\!]\to[\![\phi]\!]$。归纳法既基于证明的结构，也基于其中公式的句法结构。

这一可靠性结果与传统上在托扑斯中解释直觉主义证明论的可靠性形成对照。在后一种情况下，该结果允许证明中包含命题变量，并将它们解释为托扑斯中的任意对象。而在我们的情形中，证明仅限于由一组原子构成的公式，其中每个原子都有明确的语义，即托扑斯中的某个特定对象。

不过，有办法摆脱这一限制。我们将分两个阶段来实现。首先考虑基于有效性的语义，然后再考虑一种与证明相关的语义。

对于基于有效性的语义，我们采用一种从当前语义导出的语义，但将每个 $[\![\phi]\!]w$的所有元素等同起来。

定义28。我们如下定义基于有效性的语义

$$\{|\phi|\}w=\{*\mid\exists x.x\in[\![\phi]\!]w\}$$

引理 29。

1. $\{|\phi|\}$ 是函子 1 的子函子，其中 $1w=\{*\}$。

2. $\{|\phi \wedge \psi|\} = \{|\phi|\} \times \{|\psi|\}$
3. $\{|\phi \supset \psi|\} = \{|\phi|\} \to \{|\psi|\}$
4. $\{|\phi|\}w = \{*\}$ 当且仅当 $w \Vdash \phi$ 按照 Sandqvist 的意义 [31]。

现在考虑托扑斯在对象上的映射，它将 U 映射到 $\prod_p(U \to \{|p|\}) \to \{|p|\}$。如果 U 是 1 的子函子，那么 $\prod_p(U \to \{|p|\}) \to \{|p|\}$ 本身同构于 1 的一个子函子。

定义 30. 如果 U 是 1 的子函子，那么令 KU 为与 $\prod_p(U \to \{|p|\}) \to \{|p|\}$同构的 1 的子函子。 K 是作用于 1 的子函子上的一个算子。

引理 31. 对于 1 的所有子函子 U 和 V：

1. U 是 KU的子函子。2. KKU 是 KU的子函子，因此 K 是幂等的（$K^2 = K$）。3. $K(U \times V) = KU \times KV$。

由此可知， K 是按包含关系排序的1的子函子局部上的一个核，参见 Johnstone[16], ，因此其不动点定义了一个子局部。

定义 32. 若1的子函子 U 满足 $KU = U$，则称其为闭的。我们用Ω_K表示按逐点包含关系排序的1的闭子函子集合。

引理 33.

1. 对任意原子命题 p， $\{|p|\}$是闭的。2. 1是闭的。3. 若 U 和 V是闭的，则 $U \times V$也是闭的。4. 若 U 是闭的，且 W 是1的任意子函子，则 $W \to U$ 是闭的。5. 1的任意多个闭子函子的积都是闭的。6. 若 U 和 V 是闭的，则同时包含 U和 V的最小闭子函子为 $\prod_p(U \to \{|p|\}) \to (V \to \{|p|\}) \to \{|p|\}$，因此它是$\Omega_K$中$U$ 和 V 的并。7. Ω_K 是一个完备Heyting代数（因此也是一个支持直觉主义命题逻辑解释的代数）。

证明。（2）—（5）对任意的核都成立，这是由 31的性质推出的。（1）和（6）是 K特有的，但可由引理 31 以及类型和直觉主义逻辑的基本性质推出。

具体而言，（1）由引理 31 （1）以及以下事实推出：若 $\forall p.(\{|q|\} \to \{|p|\}) \to \{|p|\}$，则特别有 $(\{|q|\} \to \{|q|\}) \to \{|q|\}$；又由于 $\{|q|\} \to \{|q|\}$ 总是成立，因此 $\{|q|\}$。这就证明了 $K\{|q|\}$ 是 $\{|q|\}$ 的子函子，反过来也成立，因此二者相等。

类似地，对于（6），我们假设 $U \leq W, V \leq W$ 且 W 是闭的。我们证明

$$\prod_p (U \to \{|p|\}) \to (V \to \{|p|\}) \to \{|p|\} \leq \prod_p (W \to \{|p|\}) \to \{|p|\} = W$$

证明按分量进行：对于任意 p，我们证明

$$(U \to \{|p|\}) \to (V \to \{|p|\}) \to \{|p|\} \leq (W \to \{|p|\}) \to \{|p|\}$$

这由单调性可得。由于 $U \leq W$、$W \to \{|p|\} \leq U \to \{|p|\}$，且由于 $V \leq W$、$W \to \{|p|\} \leq V \to \{|p|\}$。因此，$(U \to \{|p|\}) \to (V \to \{|p|\}) \to \{|p|\}$ 包含于 $(W \to \{|p|\}) \to (W \to \{|p|\}) \to \{|p|\}$，后者等于 $(W \to \{|p|\}) \to \{|p|\}$。□

Ω_K 因此提供了一个直觉主义命题逻辑的模型，其中联结词被解释为标准形式（交、并、Heyting蕴涵等）。此外，它还与 Sandqvist的解释之间存在直接联系。联结词的解释与 Sandqvist的定义完全相同，并且对于任意公式 ϕ，我们有 $\{|\phi|\}w = \{*\}$ 当且仅当 $w \Vdash \phi$。Sandqvist对析取的解释就是 Ω_K中的并运算。

这还可以进一步扩展为一种证明敏感的论述。1 的子函子上的核 K 内化为预层拓扑斯中真值对象 Ω 的一个自同态:

$$k = \lambda\omega.\forall p.(\omega \to \{|p|\}) \to \{|p|\} : \Omega \longrightarrow \Omega$$

使 K 成为核的性质，随后就成为使 k 成为 Joyal-Tierney 拓扑的性质（见 [19]），由此我们可以得到一个取值于层拓扑斯的证明相关模型：$Sh_k(\mathbf{Set}^{\mathcal{W}^{op}})$。该层模型中 1 的子对象，恰好是关于核 k 的闭子函子。

某个拓扑上的层构成预层托扑斯的一个全子范畴，并且通常对积、指数对象和极限封闭。这使层的范畴具有极限和指数对象。k 与 Ω 上恒等映射的等化子给出了 Ω 的一个子对象，该子对象充当层范畴的子对象分类器。因此，层的范畴具有余积。然而，这些余积并不等同于预层范畴中的余积。这一结构可用于构造一个证明相关模型。

然而，关键在于，我们对原子命题 $[\![p]\!]$ 所给出的解释通常并不构成层，因此，我们给出的模型实际上并不是一个层论模型。

要了解其中的原因，不妨假设我们将范围限制在这样一种情形：其中有两个原子命题，即 p 和 q。对于这些命题，一阶规则共有八种可能。其中四种从证明论视角来看是有意义的:

$$\Rightarrow p, \quad \Rightarrow q, \quad q \Rightarrow p, \quad p \Rightarrow q$$

其余四个在形式上都有效，但无法让我们推导出任何新信息:

$$p \Rightarrow p, \quad q \Rightarrow q, \quad p, q \Rightarrow p, \quad p, q \Rightarrow q$$

一个基由这些元素的某个子集给出，因此有 $2^8 = 256$ 个基。使 p 和 q 都有效的极小基为:

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow p, & \Rightarrow q \\ \Rightarrow p, & p \Rightarrow q \\ \Rightarrow q, & q \Rightarrow p \end{array}$$

基 $\{\Rightarrow p,\ \ \Rightarrow q\}$ 生成了 p的一个证明，即通过 $\Rightarrow p$得到的证明。基 $\{\Rightarrow q,\ \ q \Rightarrow p\}$ 生成了 p的另一个证明。这两个基都包含在$\{\Rightarrow p,\ \ \Rightarrow q,\ \ q \Rightarrow p\}$中，而$\{\Rightarrow p,\ \ \Rightarrow q,\ \ q \Rightarrow p\}$包含这两个证明。因此，不可能选出一个对所有能够证明 p 和 q的基都有效的 p 的单一证明。然而，如果在这个例子中 $[\![p]\!]$ 是一个层，我们恰恰会得到这样的结果。

熟悉程序语义的人会认出构造 $((\ ) \to \{|p|\}) \to \{|p|\}$ 是 $((\ ) \to R) \to R$的一种实例，因此也是延续语义的一种形式。在 [28], John Reynolds 引述 Christopher Wadsworth 的说法，将续延描述为“程序其余部分的含义”。程序语义面临一个问题：程序的含义应当以结构化的方式推导，也就是根据程序各部分的含义来推导。然而，程序的一部分无法单独运行，只有完整的程序才能运行。因此，要赋予程序片段含义，就必须说明该片段在程序其余部分补全它的上下文中会做什么；也就是说，要根据它在给定一个延续时会做什么来说明。在 $((\ ) \to R) \to R$ 构造中，R 表示程序的最终结果。$(\ ) \to R$ 表示延续，也就是将片段的含义转换为最终结果的东西；而 $((\ ) \to R) \to R$ 表达的是，程序片段的含义应当是接收一个延续并产生最终结果的东西。然而，这里存在一个漏洞：如果程序片段的含义是 $(X \to R) \to R$，那么这意味着续延应当具有类型 $((X \to R) \to R) \to R$，而程序片段则需要再迭代一层，由此陷入无限循环；但在直觉类型论中，存在一个自然态射

$$(((X \to R) \to R) \to R) \longrightarrow (X \to R)$$

从而允许逃离递归。

对我们而言，这个类比是直接的。非原子公式 ϕ 的证明的含义，是一种机制：给定任意原子公式 p 以及从 ϕ 得到 p 的证明的其余部分，它便能给出 p 的证明。因此，与程序相对应的完整证明是原子公式的证明，而不是任意公式的证明。

5 逻辑元理论

现在，我们已经具备所需的一切，可以完成对 Sandqvist 关于直觉主义命题逻辑的证明论语义的范畴论论述。

在第 3 节中，我们确立了我们的范畴论框架相对于 Sandqvist 有效性表述的（代数）可靠性与完备性。本节给出两个关键的元理论结果，即相对于自然演绎系统 NJ 的可靠性与完备性。关于析取解释方式的选择，我们留待第 6 节讨论。

5.1 可靠性

我们证明，按照证明论有效性的定义，NJ [26], 如图 1所示的系统是可靠的。证明通过对

NJ 中证明的结构进行归纳来完成。尽管这一结果并不直接依赖于代数解释的可靠性与完备性结果，但仍关键地运用了以自然变换刻画有效性的方式。

定理 34（可靠性）。如果 $\Gamma \vdash \phi$，那么 $\Gamma \models \phi$。

证明。 该证明与引理的证明非常相似 15，通过对 $\Gamma \vdash \phi$ 的推导结构进行归纳法得出。关键情形是析取引入和消去。

$\vee I$ 这些规则为

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} \quad \text{and} \quad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi}$$

我们只考虑第一条规则；第二条规则的证明类似。根据假设，存在一个自然变换 η_ϕ: $[\![\Gamma]\!] \to [\![\phi]\!]$。我们使用非正式的λ-演算记法定义一个自然变换 η: $[\![\Gamma]\!] \to [\![\phi \vee \psi]\!]$，如下:

$$\eta(\gamma) = \lambda p \,.\, \lambda F_1 : [\![\phi]\!] \supset [\![p]\!] \,.\, \lambda F_2 : [\![\psi]\!] \supset [\![p]\!] \,.\, F_1(\eta_\phi \gamma)$$

$\vee E$ 该规则为

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \vee \psi \quad \Gamma, \phi \vdash \chi \quad \Gamma, \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash \chi}$$

根据归纳假设，存在自然变换 η_ϕ: $[\![\Gamma, \phi]\!] \to [\![\chi]\!]$、$\eta_\psi$: $[\![\Gamma, \psi]\!] \to [\![\chi]\!]$ 和 $\eta_{\phi\vee\psi}$: $[\![\Gamma]\!] \to [\![\phi \vee \psi]\!]$。对于任意自然变换 η: $[\![\Gamma]\!] \times [\![\chi]\!] \to [\![\sigma]\!]$，我们将 $Cur(\eta)$: $[\![\Gamma]\!] \to [\![\chi]\!] \supset [\![\sigma]\!]$ 记作将定义函数空间的伴随应用于 η 后得到的自然变换。

现在我们对 χ进行归纳。

$\chi = p$, p 原子命题 我们定义一个自然变换 η: $[\![\Gamma]\!] \to [\![\chi]\!]$，其定义为 $\eta(\gamma) = \eta_{\phi\vee\psi} p (Cur(\eta_\phi)\gamma)(Cur(\eta_\psi)\gamma)$。

$\chi = \chi_1 \wedge \chi_2$ 我们还有 $\Gamma, \phi \vdash \chi_i$ 以及 $\Gamma \vdash \chi_i$，对于 $i = 1, 2$。因此，根据归纳假设，存在自然变换 η_i: $[\![\Gamma]\!] \to [\![\chi_i]\!]$，对于 $i = 1, 2$。自然变换 $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle$ 是从 $[\![\Gamma]\!]$ 到 $[\![\chi_1 \wedge \chi_2]\!]$的自然变换。

$\chi = \chi_1 \supset \chi_2$ 我们还有 $\Gamma, \chi_1, \phi \vdash \chi_2$, $\Gamma, \chi_1, \psi \vdash \chi_2$ 以及 $\Gamma, \chi_1 \vdash \phi \vee \psi$。根据归纳假设，存在自然变换 η: $[\![\Gamma]\!] \times [\![\chi_1]\!] \to [\![\chi_2]\!]$。自然变换 $Cur(\eta)$是从 $[\![\Gamma]\!]$ 到 $[\![\chi_1 \supset \chi_2]\!]$的自然变换。

$\chi = \chi_1 \vee \chi_2$ 对于任意原子命题 p 以及任意 F_1: $[\![\chi_1]\!] \supset [\![p]\!]$, F_2: $[\![\chi_2]\!] \supset [\![p]\!]$，我们定义自然变换 μ^ϕ: $[\![\Gamma]\!] \times [\![\phi]\!] \to [\![p]\!]$，其定义为 $\mu^\phi(\gamma, t) = \eta_\phi(\gamma, t) p F_1 F_2$。类似地，我们定义自然变换 μ^ψ: $[\![\Gamma]\!] \times [\![\psi]\!] \to [\![p]\!]$，其定义为 $\mu^\psi(\gamma, t) = \eta_\psi(\gamma, t) p F_1 F_2$。现在，我们再次使用非正式的 λ演算记法，定义自然变换 η: $[\![\Gamma]\!] \to [\![\chi_1 \vee \chi_2]\!]$，其定义为

$$\eta(\gamma) = \lambda p \,.\, \lambda F_1 : [\![\chi_1]\!] \supset [\![p]\!] \,.\, \lambda F_2 : [\![\chi_2]\!] \supset [\![p]\!] \,.\, \eta_{\phi\vee\psi} \gamma p (Cur(\mu^\phi)\gamma)(Cur(\mu^\psi)\gamma)$$

□

5.2 完备性

现在，我们证明相对于直觉主义自然演绎，证明论有效性的完备性。证明首先构造一个对象，该构造类似于项模型的构造，但针对的是（证明论）有效性。随后，通过诉诸自然性即可得出完备性结论。

为了证明完备性，我们要证明：若 $\Gamma \Vdash \phi$，则 $\Gamma \vdash \phi$。我们主要运用 Sandqvist 的扁平化及其相应的基 $\mathcal{N}_{-}$，其定义见第 7 节的定义 2。

引理 35. 设 ϕ 是任意公式。设 $\Delta^\flat$ 是 ϕ 的扁平化。设 $\mathcal{N}_{\Delta^\flat}$ 是定义 7 给出的特殊基。设 $\mathcal{B}$ 是满足 $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{N}_{\Delta^\flat}$ 的任意基。对于任意原子集合 Q，设 $\mathcal{W}' = \mathcal{W}_{\mathcal{B},\ (Y:Q)}$。

1. 存在一个从 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{W}'}$ 到 $[\![\phi^\flat]\!]^{\mathcal{W}'}$ 的自然变换。2. 存在一个从 $[\![\phi^\flat]\!]^{\mathcal{W}'}$ 到 $[\![\phi]\!]^{\mathcal{W}'}$ 的自然变换。

证明。我们对 ϕ 的结构进行归纳，同时证明这两个命题。1. $\phi = p$ 根据定义，$p^\flat = p$，因此恒等函数具有所需的性质。

$\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$ 令 f 为 $[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C}, (X\colon P))$ 的一个元素。因此，$\pi_1(f)$ 和 $\pi_2(f)$ 分别是 $[\![\phi_1]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C}, (X\colon P))$ 和 $[\![\phi_2]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C}, (X\colon P))$ 的元素，其中 π_1 和 π_2 分别是从 $[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!]^{\mathcal{W}'}$ 到 $[\![\phi_1]\!]^{\mathcal{W}'}$ 和 $[\![\phi_2]\!]^{\mathcal{W}'}$ 的投影。根据归纳假设，存在函数 $\eta_1 : [\![\phi_1]\!]^{\mathcal{W}'} \to [\![\phi_1{}^\flat]\!]^{\mathcal{W}'}$ 和 $\eta_2 \colon [\![\phi_2]\!]^{\mathcal{W}'} \to [\![\phi_2{}^\flat]\!]^{\mathcal{W}'}$。根据定义，$\eta_1(\pi_1(f))$ 和 $\eta_2(\pi_2(f))$ 分别是推导 $P \vdash_{\mathcal{C}} \phi_1{}^\flat$ 和 $P \vdash_{\mathcal{C}} \phi_2{}^\flat$。利用 $\mathcal{N}_{\Delta^\flat}$ 的 $\wedge I$- 规则，还存在一个推导 $P \vdash_{\mathcal{C}} (\phi_1 \wedge \phi_2)^\flat$。

$\phi = \phi_1 \supset \phi_2$ 令 f 为 $[\![\phi_1 \supset \phi_2]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C}, (X\colon P))$。我们先证明 $P, \phi_1{}^\flat \vdash_{\mathcal{C}} \phi_2{}^\flat$。假设 $\vdash_{\mathcal{D}} P$ 且 $\vdash_{\mathcal{D}} \phi_1{}^\flat$，其中 $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{C}$。那么我们也有 $P \vdash_{\mathcal{D}} \phi_1{}^\flat$。根据归纳假设，存在一个函数 η_1，从 $[\![\phi_1{}^\flat]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{D}, X\colon P))$ 到 $[\![\phi_1]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{D}, X\colon P))$。因此也存在一个元素 g，属于 $[\![\phi_1]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{D}, X\colon P))$。所以，$f(\iota, g)$ 是 $[\![\phi_2]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{D}, (X\colon P))$ 的一个元素，其中 ι 是 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的反向包含。根据归纳假设，还存在一个函数 η_2，从 $[\![\phi_2]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{D}, X\colon P))$ 到 $[\![\phi_2{}^\flat]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{D}, X\colon P))$。因此存在一个推导 $P \vdash_{\mathcal{D}} \phi_2{}^\flat$，进而根据切规则，也存在一个推导 $\vdash_{\mathcal{D}} \phi_2{}^\flat$。现在，$\mathcal{N}_{\Delta^\flat}$ 的 $\supset I$ 规则给出一个推导 $P \vdash_{\mathcal{C}} (\phi_1 \supset \phi_2)^\flat$。

$\phi = \phi_1 \vee \phi_2$ 令 f 为 $[\![\phi_1 \vee \phi_2]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C}, (X\colon P))$ 的一个元素。根据定义，还存在一个 $[\![(\phi_1 \supset (\phi_1 \vee \phi_2)^\flat) \supset (\phi_2 \supset (\phi_1 \vee \phi_2)^\flat) \supset (\phi_1 \vee \phi_2{}^\flat)]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C}, (X\colon P))$ 的元素。根据归纳假设，还存在一个推导 $P \vdash_{\mathcal{C}} (\phi_1{}^\flat \supset (\phi_1 \vee \phi_2)^\flat) \supset (\phi_2{}^\flat \supset (\phi_1 \vee \phi_2)^\flat) \supset (\phi_1 \vee \phi_2)^\flat$。现在应用 $\mathcal{N}_{\Delta^\flat}$ 的 $\vee I$ 规则，可得 $P \vdash_{\mathcal{C}} (\phi_1 \vee \phi_2)^\flat$。

2. $\phi = p$ 根据定义，$p^\flat = p$，因此恒等函数具有所需的性质。

$\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$ 假设 $P \vdash_{\mathcal{C}} (\phi_1 \wedge \phi_2)^\flat$。应用 $\mathcal{N}_{\Delta^\flat}$ 的 $\wedge E$ 规则，我们分别得到 $P \vdash_{\mathcal{C}} \phi_1{}^\flat$ 的推导 Φ_1 和 $P \vdash_{\mathcal{C}} \phi_2{}^\flat$ 的推导 Φ_2。根据归纳

假设，存在函数 η_1: $[\![\phi_1{}^\flat]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C},(X\colon P)) \to [\![\phi_1]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C},(X{:}P))$ 和 η_2: $[\![\phi_2{}^\flat]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C},(X{:}P)) \to [\![\phi_2]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C},(X{:}P))$。因此，$(\eta_1(\Phi_1)\ \Phi_2)$ 是 $[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C},(X\colon P))$ 的一个元素。$\phi = \phi_1 \supset \phi_2$ 根据函数空间的定义，只需证明存在一个从 $[\![(\phi_1 \supset \phi_2)^\flat]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C},(X\colon P))$ $[\![\phi_1]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C},(X\colon P))$ 到$[\![\phi_2]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C},(X\colon P))$ 的函数。令 Φ 为 $P \vdash_{\mathcal{C}} (\phi_1 \supset \phi_2)^\flat$ 的一个推导，f为 $[\![\phi_1]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C},(X\colon P))$ 的一个元素。根据归纳假设，存在函数 η_1: $[\![\phi_1]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C},(X\colon P)) \to [\![\phi_1{}^\flat]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C},(X\colon P))$，因此也存在一个推导 $P \vdash_{\mathcal{C}} \phi_1{}^\flat$。现在应用 $\mathcal{N}_{\Delta^\flat}$ 的 $\supset E$规则，得到 $P \vdash_{\mathcal{C}} \phi_2{}^\flat$的一个推导。根据归纳假设，存在函数$\eta_2$: $[\![\phi_2{}^\flat]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C},(X\colon P)) \to [\![\phi_2]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C},(X\colon P))$，因此也存在 $[\![\phi_2]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C},X\colon P))$ 的一个元素。$\phi = \phi_1 \vee \phi_2$ 只需证明，对于所有原子 p，都存在一个从$[\![(\phi_1 \vee \phi_2)^\flat]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C},(X\colon P))$ $[\![\phi_1 \supset p]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C},(X\colon P))$ $[\![\phi_2 \supset p]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C},(X\colon P))$ 到$[\![p]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C},(X\colon P))$ 的函数。假设 $P \vdash_{\mathcal{C}} (\phi_1 \vee \phi_2)^\flat$，并令 f_1 和 f_2 分别为 $[\![\phi_1 \supset p]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C},(X\colon P))$ 和 $[\![\phi_2 \supset p]\!]^{\mathcal{W}'}(\mathcal{C},(X\colon P))$ 的元素。根据归纳假设，还存在推导 $P \vdash_{\mathcal{C}} (\phi_1 \supset p)^\flat$ 和 $P \vdash_{\mathcal{C}} (\phi_2 \supset p)^\flat$。现在应用 $\mathcal{N}_{\Delta^\flat}$ 的 $\vee E$规则，得到 $P \vdash_{\mathcal{C}} p$的一个推导。

证明至此完成。 □

定理 36（完备性）。如果 $\Gamma \models \phi$，那么 $\Gamma \vdash \phi$。

证明。令 $\Delta^\flat$ 为 Γ 和 ϕ 的扁平化。令 $\mathcal{N}_{\Delta^\flat}$ 为定义 7 针对这个原子集合给出的特殊基。根据引理 35，存在一个函数 η，从 $[\![\Gamma^\flat]\!](\mathcal{N}_{\Delta^\flat},(X\ :\ \Gamma^\flat))$ 映射到 $[\![\phi^\flat]\!](\mathcal{N}_{\Delta^\flat},(X\ :\ \Gamma^\flat))$。根据定义，$\eta(id)$ 是一个推导$\Gamma^\flat \vdash_{\mathcal{N}_{\Delta^\flat}} \phi^\flat$。桑德奎斯特定理 5.1 现在推出 $\Gamma \vdash \phi$ 属于直觉主义自然演绎。 □

6 析取及其解释

在任何给定的语义中，蕴含只有一种解释。析取则并非如此。对于特定语义，析取往往有多种解释方式，其性质有时差异显著。本节讨论解释析取的可能替代方案，并为基扩展语义中采用的析取解释提供正当化。

公式的有效性通常通过对公式结构进行归纳来定义。析取的条款通常表述为——例如，在初等克里普克式语义中——析取式 $\phi \vee \psi$ 有效，当且仅当 ϕ 或 ψ 有效。对于采用证明论语义的有效性概念而言，这一条款存在问题，因为完备性并不成立，正如 [23] 所示：具体而言，作者证明了按照这一定义，哈罗普规则是有效的；然而，哈罗普规则在直觉主义逻辑中不可导。

从推理主义视角来看，Kripke 的子句过于强势，因为它假定析取的劝服性内容与其析取支的劝服性内容相同。然而，桑德奎斯特的处理方式对应于直觉主义自然演绎中析取的 $\vee$-消去规则，

表达了这样一种观点：凡是能从两个析取支都推导出的内容，也能从该析取中推导出来。正是这种对应关系使完备性得以成立。

从范畴的角度看，析取通常被解释为余积。但余积是定义为左伴随的。从逻辑角度看，这意味着余积由消去规则决定，因此，除非公式在不可分解性方面具有某些强性质，否则基于引入规则的刻画便不符合范畴解释。

因此，析取的有效性由消去规则给出：如果 $\phi \vee \psi$有效，并且对于所有公式 χ，若 ϕ 有效，则 χ 有效；且若 ψ 有效，则χ 有效，那么 χ 有效。Sandqvist 对析取有效性的定义将χ 限制为原子命题（参见 [37, 38]）。这样，我们便得到一个有效性的归纳定义。我们的范畴解释对这一有效性定义进行了建模。利用一个基 $\mathcal{N}$可以得到完备性，其中每个公式都对应一个单独的原子。由此可知，对原子的量化涵盖了对所有公式的量化。

我们还可以使用有效性的范畴定义——如定义 13 中所述——来说明，以余积解释析取会导致不完备性：证明完备性将意味着规则

$$\frac{p \supset q \vee r}{(p \supset q) \vee (p \supset r)}$$

是可导出的。该规则具有强析取性质，但在直觉主义命题演算中不可导出。定理证明中的论证是对 Sandqvist [31] 所给论证的改写：

定理 37. 假设在定义 *12*中，将 $[\![\phi \vee \psi]\!]$ 的定义子句替换为

– $[\![\phi \vee \psi]\!]$ 是余积 $[\![\phi]\!] + [\![\psi]\!]$。

那么存在一个自然变换，从 $[\![p \supset (q \vee r)]\!]$ 到 $[\![(p \supset q) \vee (p \supset r)]\!]$。

证明。考虑规则

$$\frac{p \supset q \vee r}{(p \supset q) \vee (p \supset r)}$$

现在考虑任意满足 $p \supset (q \vee r)$ 的 $(\mathcal{B}, (X : P))$，这意味着 $[\![p \supset (q \vee r)]\!](\mathcal{B}, (X : P))$ 非空。因此，存在一个自然变换 $\eta \text{from} \mathcal{W}(-, (\mathcal{B}, (X : P))) \times [\![p]\!] \text{to } [\![q \vee r]\!]$。令 $\mathcal{C}$ 为通过将规则 $\Rightarrow p$ 添加到 $\mathcal{B}$ 而得到的基。令 Φ 为通过应用该规则而在 $\mathcal{C}$ 中得到的 $P \vdash_{\mathcal{C}} p$ 的推导。令 ι 为从 $(\mathcal{C}, P)$ 到 $(\mathcal{B}, P)$ 的逆包含映射。因此，$\eta_{(\mathcal{C},P)}(\iota, \Phi)$ 是 $[\![q \vee r]\!](\mathcal{C}, (X : P)) = [\![q]\!](\mathcal{C}, (X : P)) + [\![r]\!](\mathcal{C}, (X : P))$ 的一个元素。因此，$\eta_{(\mathcal{C},P)}(\iota, \Phi)$ 是 $[\![q]\!](\mathcal{C}, (X : P))$ 或 $[\![r]\!](\mathcal{C}, (X : P))$ 的一个元素。

现在考虑这个析取的第一种情况；也就是说，存在一个从 X 推导出 $P \vdash_{\mathcal{C}} q$ 的推导。我们必须证明，存在一个属于 $[\![p \supset q]\!](\mathcal{B}, (X : P)) = Nat(\mathcal{W}(-, (\mathcal{B}, (X : P))) \times [\![p]\!], [\![q]\!])$ 的元素。考虑任意基 $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{B}$和原子集合 Q，使得 $\Phi : Y : Q \vdash_{\mathcal{D}} P$，并且存在一个推导 $\Psi : Y : Q \vdash_{\mathcal{D}} p$。

现在，我们通过对 Z 的推导进行归纳，证明：存在一个推导 $Z : S, Y : Q \vdash_{\mathcal{D}} s$，使得 $S, X : P \vdash_{\mathcal{C}} s$。

对于除 $\Rightarrow p$ 之外的任何规则，将 Φ 代换为 X，可得到一个推导$Z\colon S, Y\colon Q \vdash_{\mathcal{D}} s$。现在假设最后一条规则是 $Z\colon S, X\colon P \Rightarrow p$。根据假设，还存在一个推导 $Z\colon S, Y\colon Q \vdash_{\mathcal{D}} p$。

通过类似的论证，我们证明在第二种情况下，$[\![p \supset r]\!](\mathcal{B}, (X\colon P))$中存在一个元素。因此也可得出，还存在一个元素属于

$$([\![p \supset q]\!] \vee [\![p \supset r]\!])(\mathcal{B}, (X\colon P)$$

□

由此可得，如果用余积来解释析取，完备性就不成立（参见第 4 节对预层中的余积与层中的余积所作的区分）。通过将原子命题 p 替换为任意公式$\phi = p_n \supset \cdots \supset p_1 \supset p_0$，可以推广这一证明，其中所有 p_i 都是原子命题。证明的修改之处在于，将 $[\![p]\!]$ 替换为 $[\![p_n \supset \cdots \supset p_1 \supset p_0]\!]$，并使用这一自然变换，而非规则 $\Rightarrow p$，来构造 Z 的推导：S，$Y\colon Q \vdash_{\mathcal{D}} s$。

该证明利用了这样一个事实：在基扩展语义中，扩展具有更多结构。特别是，对于每个基 $\mathcal{B}$ 以及上述指定的每个公式 ϕ，都可以构造一条规则，对应于加入 ϕ 的一个推导。此外，基 $\mathcal{B}$ 存在一个特定扩展 $\mathcal{C}$（即仅加入这条规则的扩展），使得只要某个原子命题在 $\mathcal{C}$ 中可推导，它在 $\mathcal{B}$ 的任何满足公式 ϕ 的扩展中都可推导。如果用余积来刻画析取，这就意味着具有强析取性质：存在一个从 $[\![\phi \supset (q \vee r)]\!](\mathcal{B}, P)$ 到 $[\![(\phi \supset q) \vee (\phi \supset r)]\!](\mathcal{B}, P)$ 的态射。

这一特定扩展 $\mathcal{C}$ 在Kripke语义中不一定存在，因此这一论证不适用于Kripke语义。

致谢

我们感谢匿名审稿人以及 Alexander Gheorghiu 和 Tao Gu 对本文提出的宝贵意见。

参考文献

[1] Gianluigi Bellin、Martin Hyland、Edmund P. Robinson 和 Christian Urban。经典命题演算的范畴证明论。《理论计算机科学》，364：146–165，2006年。[2] C. F¨uhrmann 和 D. Pym。经典序列演算的序关系丰富范畴模型。《纯粹与应用代数杂志》，204(1)：21–78，2006年。[3] D. van Dalen。《逻辑与结构》。施普林格出版社，第5版，2012年。[4] Michael Dummett。《形而上学的逻辑基础》。哈佛大学出版社，1993年。[5] Fernando Ferreira。关于谓词逻辑的评论。《哲学逻辑杂志》，35，2006年。[6] Fernando Ferreira 和 Gilda Ferreira。原子多态性的忠实性。《逻辑学趋势 XIII》，2013年。[7] Fernando Ferreira 和 Gilda Ferreira。原子多态性。《符号逻辑杂志》，78(1)：260–274，2013年。

[8] Fernando Ferreira 和 Gilda Ferreira。fat 的忠实性：一个证明论证明。Studia Logica，103(6)，2015年。.[9] Gerhard Gentzen。逻辑推理研究。II。《数学杂志》，39：405–431，1935年。[10] Alexander V. Gheorghiu 和 David J. Pym。从证明论有效性到直觉主义命题逻辑的基扩展语义。https://arxiv.org/pdf/2210.05344，2022年。已提交。[11] J.-Y. Girard、Y. Lafont 和 P. Taylor。《证明与类型》。剑桥大学出版社，1989年。[12] Jean-Yves Girard。算术的高阶函数解释与切消去。国家博士论文，巴黎第七大学，1972年。[13] Jean-Yves Girard。哥德尔解释向分析的扩展及其在分析和类型论中的切消去应用。第二届斯堪的纳维亚逻辑研讨会论文集，第63–92页，1971年。[14] W. Goldfarb。论 Dummett 的《逻辑定律的证明论辩护》。载于《证明论语义学进展》，第195—210页。施普林格，2016年。[15] Bart P. F. Jacobs。《范畴逻辑与类型论》，《逻辑与数学基础研究》第141卷。北荷兰出版社，2001年。[16] Peter T. Johnstone。《斯通空间》，《剑桥高等数学研究》第3卷。剑桥大学出版社，1982年。[17] Saul A Kripke。直觉主义逻辑的语义分析（一）。载于《逻辑与数学基础研究》，第40卷，第92–130页。爱思唯尔，1965年。[18] J. Lambek 和 P. Scott。《高阶范畴逻辑导论》。剑桥大学出版社，1986年。[19] Saunders Mac Lane 和 Ieke Moerdijk。《几何与逻辑中的层：托扑斯理论初探》。施普林格出版社，1992年。[20] Sara Negri 和 Jan Von Plato。《结构证明论》。剑桥大学出版社，2008年。[21] P. Blackburn、M. de Rijke 和 Y. Venema。《模态逻辑》。剑桥大学出版社，2001年。[22] Thomas Piecha。证明论语义学中的完备性。载于《证明论语义学进展》，第231–251页。施普林格，2016年。[23] Thomas Piecha、Wagner de Campos Sanz 和 Peter Schroeder-Heister。证明论语义学中的完备性失败。《哲学逻辑杂志》，44(3)：321–335，2015年。[24]Thomas Piecha 和 Peter Schroeder-Heister。相对于证明论语义而言，直觉主义命题逻辑的不完备性。Stud Logica，107(1)：233–246，2019年。[25] Paolo Pistone、Luca Tranchini 和 Mattia Petrolo。自然演绎的自然性 II：论原子多态性和广义命题联结词。Studia Logica，110，2022年。[26] Dag Prawitz。《自然演绎：一项证明论研究》。多佛出版社，1965年。[27] David J. Pym、Eike Ritter 和 Edmund Robinson。证明论语义学中的

层（扩展摘要）。载于《第十一届斯堪的纳维亚逻辑研讨会论文集》——SLSS 11，第36–38页，2022年。[28]John C Reynolds。续延的发现。《Lisp 与符号计算》，6(3):233–247，1993年。[29] E.P. Robinson。经典逻辑的证明网。《逻辑与计算杂志》，13(5):777–797，2003年。[30] Tor Sandqvist。关于二阶逻辑中逻辑算子可定义性的一则注记。2008年。[31] Tor Sandqvist。直觉主义命题逻辑的基扩展语义。《IGPL逻辑杂志》，23(5):719–731，2015年。[32] Jose Espirito Santo 和 Gilda Ferreira。通过原子多态性对直觉主义逻辑的一种精细解释。Studia Logica，108:477–507，2020年。[33] Peter Schroeder-Heister。证明论语义中的有效性概念。《综合》，148(3):525–571，2006年。[34] Peter Schroeder-Heister。证明论后承与模型论后承。载于Michal Pelis编，《Logica年鉴2007》。Filosofia，2008年。[35] R. Seely。超教义与自然演绎。Zeitschr. f. math Kogik un Grundlagen d. Math，29:505–542，1983年。[36] Will Stafford 和 Victor Nascimento。遵循所有规则：广义证明论有效性的直觉主义完备性。Analysis，第anac100页，2023年7月。[37] Neil Tennant。蕴涵与证明。《亚里士多德学会会刊》，79:167–189，1978年。[38] Neil Tennant。《核心逻辑》。牛津大学出版社，2017年。[39] A. S. Troelstra 和 H. Schwichtenberg。《基础证明论》。剑桥理论计算机科学丛书43。剑桥大学出版社，第2版，2000年。

关于后承关系的几点说明

事实证明，基 $\mathcal{N}_{-}$ 的意义远不止于它在 Sandqvist 完备性定理中的用途。具体而言，我们在第3 节给出的代数解释，必不可少地依赖于 $\phi^{\flat}$ 中 $\mathcal{N}_{-}$ 形式为原子命题的典范证明，以便定义我们在解释中所需的自然变换。

正如我们所指出的，证明论语义学的一个关键问题是其完备性，或者说缺乏完备性 [22, 23]。然而，这个问题比乍看之下更为微妙。

首先，我们需要明确所使用的判断。不同形式的判断会对可靠性和完备性问题给出不同答案。在最基本的层面上，我们讨论有效性：基本判断是某个公式是否有效。可靠性意味着定理（可证明的公式）在语义中应当有效；完备性则意味着，任何在语义中始终有效的公式都应当是一个定理。然而，这是一种相当弱的概念，因此人们常常将所使用的判断加强为序列。在这种情况下，可靠性和完备性分别对应于对逻辑后承有效性的保持与反映，而且更有必要具体说明如何设定相关内容。即便我们

只考虑哪些后承是有效的，也会出现这种情况。当我们进一步考虑有效性的可能表示方式时，问题就会更加复杂。

通常的标准表述是，后承关系是一种关系，用来表达某个公式是其他公式集合的后承。这一概念抽象地体现为自反性、单调性和复合性，最后一项对应于切规则。

定义3 8.（有限制）后承关系是有限公式集合与一个公式之间的关系 $\Gamma \triangleright p$，满足：

– $\phi \triangleright \phi$– 若 $\Gamma \triangleright \phi$，则 $\Gamma, \psi \triangleright \phi$– 若 $\Gamma \triangleright \phi$ 且 Δ，则 $\phi \triangleright \psi$, $\Gamma, \Delta \triangleright \psi$。

有一种标准方法，可以从有效性的定义得到后承关系。我们用 $\blacktriangleright \phi$ 表示 ϕ 有效。

定义3 9. 由有效性生成的后承关系定义为 $\Gamma \triangleright \psi$，当且仅当对于所有 $\gamma \in \Gamma$，若 $\blacktriangleright \gamma$，则 $\blacktriangleright \psi$。

注意，我们可以从后承关系中恢复有效性：

$\blacktriangleright \psi$ 当且仅当 $\emptyset \triangleright \psi$

然而，不同的后承关系可能产生相同的有效性。因此，我们需要谨慎考虑所使用的后承关系及其原因。但以上定义的后承关系在以下意义上是规范的：

引理40. 由一种有效性生成的有限后承关系，是与该有效性相对应的最大的有限后承关系。

如果允许后承关系 $\Gamma \triangleright \psi$ 其中 Γ 是无限的，这一性质便不成立（与一种有效性相对应的最大后承关系是：当且仅当 Γ 有限且 ψ 按照有限情形是 Γ 的后承关系时为 $\Gamma \triangleright \psi$ ；或者当 Γ 无限且 ψ 任意时为 $\Gamma \triangleright \psi$ ）。此外，这些结构不适用于次结构逻辑，必须将其改为公式代数的一个元素与一个公式之间的关系。

定义 39 与可容许规则的概念密切相关。如果一条规则的应用能够保持有效性，则称该规则为可容许规则：若在某个实例中，所有假设都有效，那么结论也有效。但证明系统会产生另一种自然的后承关系概念：它表示一个公式可以从一组假设中得到证明。