悬垂缆绳与蜘蛛丝

Christoph B¨orgers数学系，塔夫茨大学，177 College Avenue，梅德福，MA 02155 cborgers@tufts.edu

arXiv:2302.09054v1 [math.HO] 16 Feb 2023

摘要 300多年来，人们一直知道，均匀线密度的不可伸长的悬垂缆绳、链条或绳索，其形状是双曲余弦的图像，只需对坐标进行缩放和平移即可。但已知缆索两端的连接点后，坐标究竟应如何缩放和平移？许多关于这一问题的优秀论述对此都略显含糊。例如，它们可能用最低点处的张力来给出答案，却没有解释如何计算该张力。本文将讨论如何求得所有必要的参数。要得到最低点处的张力，必须数值求解一个非线性方程。当缆索两端连接在不同高度时，还必须求解第二个非线性方程，以确定最低点的位置。当缆索具有弹性时，例如蜘蛛网中的蜘蛛丝，这两个方程将不再能够解耦，但可以使用二维牛顿迭代求解。

简介



由 Kamel15 提供，经由维基媒体
CC BY-SA 3.0 许可
creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode



由 Tony Boon 提供，经由维基媒体
受版权保护，可免费使用



阿迦汗提供，来自维基媒体
CC BY-SA 4.0 许可
creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode



由 vastateparkstaff 提供，经由维基媒体
CC BY-2.0 许可
https://creativecommons.org/licenses/by/2.0/legalcode

图 1 悬链线的示例。

悬挂缆索（或链条、绳索）的形状称为悬链线；示例见图 1。1691年，同一期刊连续发表了三篇论文，

[**2, 9, 11**], 无弹性悬链线可用以下形式的方程描述（坐标平移后）：

$$\frac{y}{\lambda} = \cosh \frac{x}{\lambda}. \tag{1}$$



（当时的记号有所不同；那时还没有双曲余弦的概念。）参数 $\lambda > 0$ 是一个长度，我们将其称为形状参数。它有时也称为悬链线参数。注意， x 和 y 必须采用相同的缩放方式。如果 x 和 y使用相同的长度单位，那么没有任何悬挂的链条会由 $y = \cosh(2x)$描述。

关于公式（1）推导过程的精彩讲解不胜枚举。下面我将给出自己的推导。要确定 λ，必须（用数值方法）求解一个非线性方程。可以使用牛顿法求解；只要选择合适的初始猜测，基于凸性即可保证收敛。

人们研究过无数种变体。也许最简单的问题是：当两端没有固定在同一高度时，会发生什么？例如，见图1左下方的插图，其中描绘了秘鲁的克苏瓦查卡绳桥。

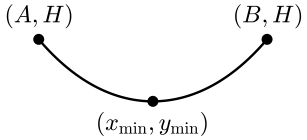


形状仍然是双曲余弦曲线，但最低点的位置不再能通过对称性显而易见地确定。两个相互耦合的非线性方程决定了形状参数和最低点的位置。通过一种代数技巧，可以将方程组解耦，从而先求出形状参数，再求出最低点的位置。两者各自都需要求解一个（标量）非线性方程。对于这两个方程，只要恰当地选择初始猜测，牛顿法就能保证收敛，这同样是出于凸性方面的原因。

例如，弹性缆绳（如蜘蛛丝）并非呈双曲余弦曲线，事实上，根本无法再将 y 显式地表示为 x 的函数。不过，在没有张力的情况下，仍然可以将 x 和 y 显式地表示为 $s =$ 弧长的函数。这一点几个世纪以来也早已为人所知 [**5**]。同样，仍有一个包含两个相互耦合的非线性方程、两个未知数的方程组，用来确定形状参数和最低点；但再也没有代数技巧可以将这些方程解耦。必须同时求解形状参数和最低点。采用非弹性情形的参数值作为初始值，在二维中使用牛顿法，可以可靠且高效地完成求解。

两端处于同一高度的非弹性缆索

我们设想一条缆索悬挂在一个（x， y）平面内，该平面垂直于地面。缆索两端固定在（x， y）$=$（A， H）和（x， y）$=$（B， H）处，并且缆索的长度 L 大于 $B - A$，因此缆索会下垂。我们将最低点的坐标记为 $x_{\min}$ 和 $y_{\min}$。这就是最标准的悬链线问题。



双曲余弦的常规推导。考察缆索从最低点（$x_{\min}$， $y_{\min}$）到右侧某一点（x， y）之间的一段，其中$x > x_{\min}$ 且 $y > y_{\min}$；见图 2。我们也可以类似地讨论（$x_{\min}$，$y_{\min}$）与左侧某一点（x， y）之间的一段，其中 $x < x_{\min}$ 且 $y > y_{\min}$，并得出类似结论。位于（x， y）右侧的缆索会以沿缆索切线方向的某个力拉扯这段缆索。我们将这个力的大小称为张力在（x， y）处的值，并记作 T。

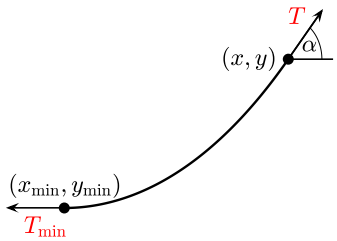


图 2 悬索一段上的张力。

如果你和我一样，此刻感到些许不安，也许并不完全确定自己是否理解“张力”的真正含义，以及缆索的各部分究竟是如何相互牵拉的，那么请阅读下面关于弹性缆索的讨论，以便更好地理解非弹性缆索。

位于$(x_{\min}, y_{\min})$ 左侧的缆索部分以大小为 $T_{\min}$ 的力拉动这一段； $T_{\min}$ 是最低点$(x_{\min}, y_{\min})$处的张力。由于缆索处于静止状态，两个张力的水平分量必须相互平衡：

$$T\cos\alpha = T_{\min} \tag{2}$$

其中 $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ 的定义见图 2。符号 $T_{\min}$ 确实一语双关；它不仅表示最低点处的张力，也是最小张力，正如公式 (2) 所示。

同样，点 $(x_{\min}, y_{\min})$ 与 (x, y) 之间这段缆索的重量必须由竖直方向的张力平衡。设 Δs 为点 $(x_{\min}, y_{\min})$ 与 (x, y) 之间这段缆索的长度。再设 ρ 为缆索的线质量密度，即单位长度的质量。我们假设 ρ 为常数。长度为 Δs 的这段缆索的质量为 $\rho\Delta s$。因此，点 $(x_{\min}, y_{\min})$ 与 (x, y) 之间这段缆索的重量为 $\rho g\Delta s$，其中 g 为重力加速度。这个重量必须由点 (x, y) 处张力的竖直分量平衡，因为在点 $(x_{\min}, y_{\min})$ 处，张力的竖直分量为零：

$$T\sin\alpha = \rho g\Delta s. \tag{3}$$

将 (3) 除以 (2)，得到

$$\tan\alpha = \frac{\rho g\Delta s}{T_{\min}}.$$

如果我们将图 2 中的 y 视为 x 的函数，那么$\tan\alpha$ 就是 y 关于 x的导数。我们将这个导数记作 $y'(x)$。因此

$$y'(x) = \frac{\rho g\Delta s}{T_{\min}}. \tag{4}$$

弧长 Δs 是 x的函数:

$$\Delta s = \int_{x_{\min}}^{x} \sqrt{1 + y'(u)^2}\, du,$$

其中， y' 仍表示 y的导数。我们使用字母 u ，只是因为它既不是 x、 y，也不是 s（我们用后者表示弧长）。因此

$$y'(x) = \frac{\rho g}{T_{\min}} \int_{x_{\min}}^{x} \sqrt{1 + y'(u)^2}\, du.$$

对两边求导，得到二阶微分方程

$$y''(x) = \frac{\rho g}{T_{\min}} \sqrt{1 + y'(x)^2}. \tag{5}$$

为简化记号，我们写作

$$\lambda = \frac{T_{\min}}{\rho g}. \tag{6}$$

注意， λ 是长度，因为 $T_{\min}$ 是力，而 ρg 是单位长度的力。我们将这个参数称为形状参数。方程（5）意味着， $z(x) = y'(x)$ 满足一阶微分方程

$$z'(x) = \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 + z(x)^2}.$$

通过分离变量法，记住 $\int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\, dz = \text{双曲正弦}^{-1} z + C$，并利用 $z(x_{\min}) = y'(x_{\min}) = 0$，我们得到

$$z(x) = y'(x) = \sinh\left(\frac{x - x_{\min}}{\lambda}\right).$$

再积分一次，得到

$$y(x) = \lambda \cosh\left(\frac{x - x_{\min}}{\lambda}\right) - \lambda + y_{\min}. \tag{7}$$

我们选取积分常数，使得 y 在 $x = x_{\min}$时等于 $y_{\min}$。将方程 (7) 重写为

$$\frac{y - y_{\min}}{\lambda} = \cosh\left(\frac{x - x_{\min}}{\lambda}\right) - 1. \tag{8}$$

现在已经说到了悬链线最引人注目之处：经过适当的坐标平移和缩放（其中 x 和 y 的缩放方式完全相同——也就是说， x 和 y使用相同的长度单位），它就是一个双曲余弦函数。但 $x_{\min}$、 $y_{\min}$和 λ是什么?

根据对称性,

$$x_{\min} = \frac{A + B}{2}. \tag{9}$$

如果我们也知道 λ，那么利用当 $x = B$ 时 $y = H$ 这一点，就可以从 (7) 得到 $y_{\min}$：

$$y_{\min} = H - \lambda \cosh\left(\frac{B-A}{2\lambda}\right) + \lambda. \tag{10}$$

然而，我们仍需确定形状参数 λ，或者等价地（见公式（6））确定最低点处的张力 $T_{\min}$。

方程 λ，或者等价地，最低点处的张力。 根据缆索的长度 L，我们得到λ。由公式（7）可知，这意味着：

$$\begin{aligned}
&\int_A^B \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x - x_{\min}}{\lambda}\right)}\, dx = L \\
\Leftrightarrow\quad &\int_A^B \cosh\left(\frac{x - x_{\min}}{\lambda}\right)\, dx = L \\
\Leftrightarrow\quad &\lambda \sinh\left(\frac{x - x_{\min}}{\lambda}\right)\Big|_A^B = L \qquad (11)\\
\Leftrightarrow\quad &\sinh\left(\frac{B-A}{2\lambda}\right) = \frac{L}{2\lambda}. \qquad (12)
\end{aligned}$$

公式（12）是确定 λ 的非线性方程。在这里，进行一个小的坐标变换会很方便：

$$\xi = \frac{B-A}{2\lambda}, \tag{13}$$

因此公式（12）变为

$$\sinh\xi - \frac{L}{B-A}\xi = 0. \tag{14}$$

求解 λ。 为求出 λ，我们对式 (14) 求解 ξ。下述命题给出了详细说明。

命题1。 方程 *(14)* 恰有一个正解 ξ，因此式 *(12)* 也恰有一个正解 λ。对式 *(14)* 使用牛顿法，并取 $\sqrt{6\frac{L}{B-A}}$ 为初始猜测，可以保证收敛到该正解。

证明。正解的存在性和唯一性可由双曲正弦ξ 对 $\xi \geq 0$ 的凸性，以及 双曲正弦(0) $= 0$、双曲正弦$'(0) = 1$和 $\frac{L}{B-A} > 1$ （这是由假设得出的——缆索会下垂）推出；见图3A。

要证明牛顿法从 $\sqrt{6\frac{L}{B-A}}$ 开始迭代时会收敛到正解，只需利用双曲正弦 $\xi - \frac{L}{B-A}\xi$图像的凸性，证明 $\sqrt{6\frac{L}{B-A}}$ 是正解的上界；见图3B。

下面的论证证明，$\sqrt{6\frac{L}{B-A}}$ 确实是方程 (14) 正解的一个上界。由于 双曲正弦 $\xi = \xi + \frac{\xi^3}{3!} + \frac{\xi^5}{5!} + \ldots$，对于 $\xi > 0$，我们有：

$$\sinh\xi > \frac{L}{B-A}\xi \;\Leftarrow\; \frac{\xi^3}{6} \geq \frac{L}{B-A}\xi \;\Leftrightarrow\; \frac{\xi^2}{6} \geq \frac{L}{B-A} \;\Leftrightarrow\; \xi \geq \sqrt{6\frac{L}{B-A}}.$$

因此，如果$\xi \geq \sqrt{6\frac{L}{B-A}}$，那么 ξ 不是方程 (14) 的解。换句话说，方程 (14) 的任何解都小于 $\sqrt{6\frac{L}{B-A}}$ □

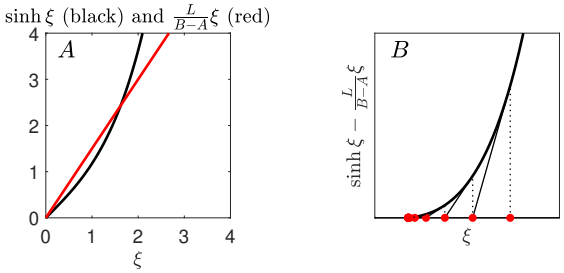


图3 A：当$\frac{L}{B-A} > 1$时，双曲正弦 $\xi = \frac{L}{B-A}\xi$为何有唯一正解。B：牛顿法应用于双曲正弦$\xi - \frac{L}{B-A}\xi = 0$的示意图，初始点取在正解右侧。

总结。 两端处于同一高度悬挂的非弹性缆索，其形状可按如下方法求得。

1. 使用牛顿法和初始猜测$\sqrt{6\frac{L}{B-A}}$求方程（14）的正解，并定义 $\lambda = \frac{B-A}{2\xi}$。
2. 根据方程（9）和（10）定义 $x_{\min}$ 和 $y_{\min}$。3. 悬索的形状由方程（8）给出。

补充说明。

1. 该方程是通过考察最低点与另一点之间一段缆索上的竖直力和水平力平衡推导出来的。不过，这也意味着沿缆索任意一段上的竖直力和水平力都处于平衡状态。2. 形状参数的计算无需了解 ρ。缆索的重量与其形状无关。3. 当然，缆索中的张力 确实取决于重量。例如，最低点处的张力为 $T_{\min} = \rho g\lambda$（比较公式（6））。4. 当 L 趋近于 $B - A$时，(14) 的正解 ξ 趋近于0。因此， λ 趋近于 ∞， $T_{\min} = \rho g\lambda$也同样如此。因此，缆索完全不下垂是不可能的；那将需要无限大的张力。

建筑中的倒置悬链线。 建筑中有无数拱近似呈（上下颠倒的）悬链线形状，也有许多穹顶近似呈悬链线旋转曲面 [**6**,第 7]章中的形状。这种曲面是将悬链线绕其竖直对称轴 [**14**]旋转得到的。*

悬链线拱具有一种特殊的稳定性，这正是导致悬链线方程的力平衡关系的镜像；任意一段上的水平力和垂直力

*不要将其与绕悬链线的水平（x-）轴旋转所得的悬链面混淆；有关悬链面的最新精彩讨论，请参见[**4**]。

都处于平衡状态。悬链线旋转曲面不具备类似的性质，但与具备这种性质的曲面 [**3, 14**]相差不远。

图4展示了A至C栏中的悬链线拱和穹顶实例。图中D栏展示了圣路易斯的圣路易斯拱门，它不是倒置的悬链线；它实际上是一条形式为

$$\frac{y}{\lambda_y} = -\cosh\frac{x}{\lambda_x}$$

（适当平移坐标后），其中 $\lambda_x \approx 1.45\lambda_y$ [**15**]。这称为加权悬链线。



作者：Safa Daneshvar，来源：维基媒体
CC BY-SA 4.0 许可
creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode

作者：Sailko，来源：维基媒体
知识共享署名 2.5 许可协议
creativecommons.org/licenses/by/2.5/legalcode

作者：Mouenthias，来源：维基媒体
CC BY-SA 4.0 许可
creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode

作者：Daniel Schwen，来源：维基媒体
CC BY-SA 3.0 许可
creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode

图4 建筑中的悬链线和悬链线穹顶实例。A：泰西封拱门，这座波斯纪念碑位于今伊拉克境内，已有约1500年历史。B：佛罗伦萨大教堂的穹顶，建于1296年至1436年。C：喀麦隆穆斯古姆人的传统住宅。D：圣路易斯的圣路易斯拱门。它是一条加权悬链线。黑色曲线在A至C栏中为悬链线，在D栏中为加权悬链线。

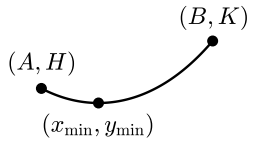
两端高度不同的非弹性缆索

现在假设两端分别固定在$(x, y) = (A, H)$ 和$(x, y) = (B, K)$处。不失一般性，$H \le K$. 我们假设缆索的长度 L 大于(A, H) 与(B, K)之间的距离，因此缆索会下垂：

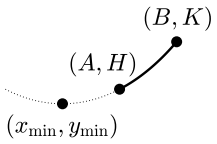
$$L > \sqrt{(B-A)^2 + (K-H)^2}. \tag{15}$$

它仍然是双曲余弦。我们先前的论证仍然表明，解的形式如公式（8）所示，为方便起见，在此重述:

$$\frac{y-y_{\min}}{\lambda}=\cosh\left(\frac{x-x_{\min}}{\lambda}\right)-1. \tag{8}$$



问题在于，不再有任何对称性论证能够告诉我们 $x_{\min}$的值。事实上， $x_{\min}$ 甚至可能位于 A的左边。



关于两个未知数的两个方程 λ 和 $x_{\min}$。 </style}必须选择三个参数 λ、 $x_{\min}$ 和 $y_{\min}$ ，使得满足三个条件:

$$y(A)=H,\quad y(B)=K,\quad \text{length of cable}=L.$$

不过，我们可以很容易地推导出关于两个参数 λ 和 $x_{\min}$的两个方程:

$$y(B)-y(A)=K-H,\quad \text{length of cable}=L,$$

或者，利用 (7) 和 (11)，明确写为:

$$\cosh\left(\frac{B-x_{\min}}{\lambda}\right)-\cosh\left(\frac{A-x_{\min}}{\lambda}\right)\;=\;\frac{K-H}{\lambda}, \tag{16}$$

$$\sinh\left(\frac{B-x_{\text{xmin}}}{\lambda}\right)-\sinh\left(\frac{A-x_{\text{xmin}}}{\lambda}\right)\;=\;\frac{L}{\lambda}. \tag{17}$$

一旦已知 λ 和 $x_{\min}$ ，就可以利用（7）从 $y(B)=K$ 求得 $y_{\min}$:

$$y_{\min}=K-\lambda\cosh\left(\frac{B-x_{\min}}{\lambda}\right)+\lambda. \tag{18}$$

求出 λ。 现在有一个代数技巧。我们将（16）和（17）两边平方，再相减，并对所有 u 和 v使用 双曲余弦$^2\,u-$双曲正弦$^2\,u=1$ 和 双曲余弦 u双曲余弦 $v-$双曲正弦 u双曲正弦 $v=$双曲余弦$(u-v)$ 。由此得到:

$$2-2\cosh\left(\frac{B-A}{\lambda}\right)=\frac{(K-H)^2-L^2}{\lambda^2},$$

或者等价地,

$$\cosh\left(\frac{B-A}{\lambda}\right)-1=\frac{L^2-(K-H)^2}{2\lambda^2}. \tag{19}$$

这是关于 λ 的单个方程。利用另一个双曲三角公式，可以将其写得更加简洁：双曲余弦 $u = 1 + 2$ 双曲正弦$^2 \frac{u}{2}$。这样，(19) 变为

$$\sinh^2\left(\frac{B-A}{2\lambda}\right) = \frac{L^2-(K-H)^2}{4\lambda^2},$$

或者等价地，

$$\sinh\left(\frac{B-A}{2\lambda}\right) = \frac{\sqrt{L^2-(K-H)^2}}{2\lambda}. \tag{20}$$

公式（20）与公式（12）完全相同，只是将 L 替换为了 $\sqrt{L^2-}$（$K-H$）^{2}。还要注意，(15) 意味着 $\sqrt{L^2-}$（$K-H$）$^2 > B-A$。因此，命题1适用，只需将 L 替换为 $\sqrt{L^2-}$（$K-H$）^{2}。公式（20）有唯一的正解 λ，我们可以使用牛顿法计算$\xi = \frac{B-A}{2\lambda}$，将其应用于

$$\sinh\xi - \frac{\sqrt{L^2-(K-H)^2}}{B-A}\,\xi = 0, \tag{21}$$

初始猜测为 $\sqrt{6\sqrt{L^2-\frac{(K-H^2)}{B-A}}}$。

求出 $x_{\min}$。 一旦知道 λ，就可以通过求解公式(16)来获得 $x_{\min}$，其中求解对象为 $x_{\min}$。下面的命题给出了详细信息。

命题2。 设 $A < B$、$H \le K$ 和 $\lambda > 0$。令，对于 $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \cosh\left(\frac{B-x}{\lambda}\right) - \cosh\left(\frac{A-x}{\lambda}\right) - \frac{K-H}{\lambda} \tag{22}$$

于是，式（16）变为 $g(x_{\min}) = 0$。

(a) g 严格递减，且 $\lim_{x\to-\infty} = \infty$ 和 $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$，因此存在唯一解 $x_{\min}$，满足 $g(x) = 0$,

(a) $g\left(\frac{A+B}{2}\right) \le 0$，因此 $x_{\min} \le \frac{A+B}{2}$，(c) $g''(x) > 0$ 对于 $-\infty < x < \frac{A+B}{2}$ 成立，并且

(d) 对 $g(x) = 0$应用牛顿法，以初始猜测 $\frac{A+B}{2}$ 开始，将收敛到 ~~$g(x) = 0$~~ 的唯一解 $x_{\min}$。

示意图见图5。

证明。(a) 对所有 x,

$$g'(x) = \frac{1}{\lambda}\left(\sinh\left(\frac{A-x}{\lambda}\right) - \sinh\left(\frac{B-x}{\lambda}\right)\right) < 0$$

因为 $\lambda > 0$、$A < B$，且双曲正弦 是严格递增函数。利用双曲余弦的定义，

$$g(x) = \frac{e^{(B-x)/\lambda} + e^{-(B-x)/\lambda}}{2} - \frac{e^{(A-x)/\lambda} + e^{-(A-x)/\lambda}}{2} - \frac{K-H}{\lambda} \tag{23}$$

美国数学协会《数学杂志》0:0 2023年2月20日 1:27a.m. hanging˙chains.tex 第10页

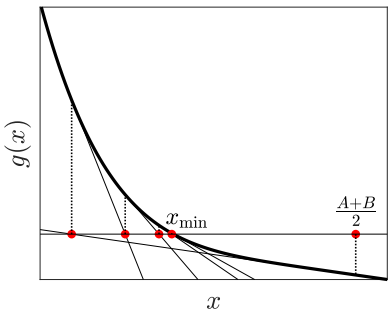


图5 牛顿法应用于 $g(x) = 0$的示意图。

当 $x \to -\infty$时，(23) 等于

$$\frac{e^{(B-x)/\lambda} - e^{(A-x)/\lambda}}{2} + O(1)$$

（记号 $O(1)$ 表示“在极限下保持有界的项”），并且

$$\frac{e^{(B-x)/\lambda} - e^{(A-x)/\lambda}}{2} = e^{(A-x)/\lambda}\,\frac{e^{(B-A)/\lambda} - 1}{2} \to \infty$$

当 $x \to -\infty$ 时。类似地可以看出，$g(x) \to -\infty$当 $x \to \infty$ 时。

(b)

$$g\left(\frac{A+B}{2}\right) = -\frac{K-H}{\lambda} \le 0$$

因为 $H \le K$。

(c)

$$g''(x) = \frac{1}{\lambda^2}\left(\cosh\left(\frac{B-x}{\lambda}\right) - \cosh\left(\frac{A-x}{\lambda}\right)\right) = \frac{1}{\lambda^2}\left(g(x) + \frac{K-H}{\lambda}\right)$$

由于根据 (a) 已知 g 严格递减，因此它也严格递减。由于 $g''\left(\frac{A+B}{2}\right) = 0$，(c) 得证。

(d) 证明了 (a)–(c) 之后，从图示上看这一点非常明显（见图5），因此我们不再作解析证明。 □

总结。 两端悬挂在不同高度时，非弹性缆索的形状可按以下步骤求得。

1. 使用初始猜测 $\sqrt{6\sqrt{L^2 - \left(\frac{K-H}{B-A}\right)^2}}$，通过牛顿法求方程 (21) 的正解，并定义 $\lambda = \frac{B-A}{2\xi}$。
2. 按照 (22) 定义 g 后，使用初始猜测 $\frac{A+B}{2}$，通过牛顿法求解 $g(x_{\min}) = 0$，求出 $x_{\min}$。
3. 根据方程 (18) 计算 $y_{\min}$。
4. 悬索的形状由公式（8）给出。

图 6 展示了两个示例。

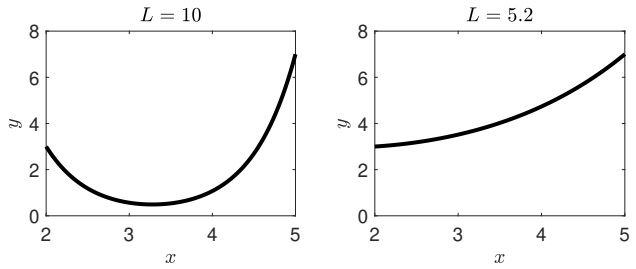


图6 一条较长和一条较短的悬索，其中 $A = 2$, $B = 5$, $H = 3$, $K = 7$。

补充说明。当 L 趋近于 $\sqrt{(A-B)^2+(K-H)^2}$, 时，式（21）的解趋近于零，因此 λ 趋近于 ∞。我们再次看到，缆索不可能完全没有下垂。

弧长参数化。我们将以弧长为参数对悬索进行参数化。这完全没有必要，但会使它与稍后讨论的弹性情形之间的类比更加清晰。

由式（8）可知，缆索左端点与位于 $x \in [A, B]$ 处的点之间的弧长 s 为

$$s = \int_A^x \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{u - x_{\min}}{\lambda}\right)}\, du.$$

利用 $\sqrt{1+\text{双曲正弦}^2} = \text{双曲余弦}$，计算积分可得

$$s = \lambda \sinh\left(\frac{x - x_{\min}}{\lambda}\right) + \lambda \sinh\left(\frac{x_{\min} - A}{\lambda}\right). \tag{24}$$

与 $x_{\min}$相关的弧长参数尤其为

$$s_{\min} = \lambda \sinh\left(\frac{x_{\min} - A}{\lambda}\right). \tag{25}$$

解出 (24) 中的 x 并利用 (25)，可得 x 与弧长 s之间的关系：

$$\frac{x - x_{\min}}{\lambda} = \sinh^{-1}\left(\frac{s - s_{\min}}{\lambda}\right). \tag{26}$$

由此，(8) 变为

$$\frac{y - y_{\min}}{\lambda} = \cosh \sinh^{-1}\left(\frac{s - s_{\min}}{\lambda}\right) - 1. \tag{27}$$

对于任意 $u \in \mathbb{R}$，双曲余弦 双曲正弦$^{-1}(u) = \sqrt{1+u^2}$.（这可由双曲余弦^2 –双曲正弦$^2 = 1$推出。）因此，方程 (27) 也可以写成这样：

$$\frac{y - y_{\min}}{\lambda} = \sqrt{1 + \left(\frac{s - s_{\min}}{\lambda}\right)^2} - 1. \tag{28}$$

方程 (26) 和 (28) 描述了以弧长为参数的悬索。

弹性缆绳还是蜘蛛丝

现在我们来考虑一根可以伸长的缆索。蜘蛛网的丝线就是一个例子。令柔度趋于零，也可以由此得到前几节讨论过的标准双曲余弦公式的另一种推导。这种推导不如之前介绍的标准推导直接；不过，它能更清楚地解释切向张力。

关于胡克常数、柔度和串联弹簧的背景知识。一根自然长度为 h、伸长至长度 ℓ 的线性弹簧，会以力 $F = \kappa(\ell - h)$，收缩，其中比例常数 κ 称为胡克常数。它的倒数 $c = 1/\kappa$ 称为弹簧的柔度，因此 $F = \frac{\ell - h}{c}$. 的物理量纲是长度除以力。柔度越大，弹簧就越容易伸长。

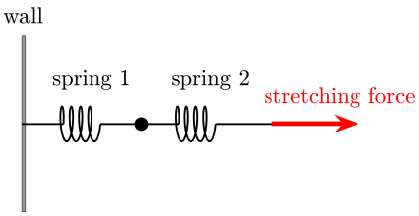


图7 串联的两根弹簧正在被拉伸。

现在考虑两根串联的弹簧，它们的柔度分别为 c_1 和 c_2，自然长度分别为h_1 和 h_2，一端如图7所示连接在墙上。假设你将弹簧从它们的总自然长度 $h = h_1 + h_2$ 拉伸到某个长度 ℓ。两根弹簧的长度将分别为 ℓ_1 和 ℓ_2，而牛顿第三定律意味着，弹簧彼此之间以恰好等于整体拉伸力的力相互作用：

$$\frac{\ell_1 - h_1}{c_1} = \frac{\ell_2 - h_2}{c_2} = \frac{\ell - h}{c} \tag{29}$$

其中，c 是由弹簧 1 和弹簧 2 组合而成的弹簧的柔度。由式 (29) 得，

$$\ell_1 - h_1 = \frac{c_1}{c}(\ell - h) \quad \text{and} \quad \ell_2 - h_2 = \frac{c_2}{c}(\ell - h).$$

将这两个方程相加，得

$$\ell - h = \frac{c_1 + c_2}{c}(\ell - h)$$

因此

$$c = c_1 + c_2. \tag{30}$$

结论是，弹簧串联时，柔度可以相加。

美国数学协会 《数学杂志》 0:0 2023年2月20日 上午1:27 hanging˙chains.tex 第13页

由弹簧连接的质点串。设想一串由无质量弹簧连接的有限个质点。之后我们将取连续体极限。取连续体极限后，我会使用“缆索”一词，而将由弹簧连接的有限个质点称为“串”。

因此，考虑一条由 $N+1$ 个质点组成的链，质点之间由 N 个相同的无质量弹簧连接。假设所有弹簧的静止长度都相同，记为 h。假设每个弹簧的柔度为 qh，其中 $q>0$ 是一个固定常数，称为线柔度密度（单位长度的柔度），其单位是力的倒数。由于弹簧串联时柔度相加，这条链的柔度便为 $qhN=qL$，其中 L 是链在不受任何张力时的长度。

类似地，假设每个质点的质量为 ρh，但两个端点的质量为 $\rho h/2$，其中 $\rho>0$ 是线质量密度。因此，这条链的总质量为 $\rho hN=\rho L$。由于 q 是力的倒数，量

$$\gamma = q\cdot \rho L g = \text{linear compliance density}\cdot \text{weight of cable} \tag{31}$$

是无量纲的。它量化了弹性对缆索的重要性，并将在我们的分析中发挥重要作用。

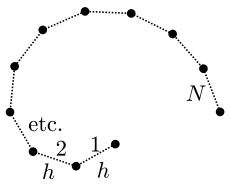


图8 弹簧串静置于地面上，没有张力。

两端固定的弹簧串。现在，假设我们像之前一样，将弹簧串固定在$(x,y)=(A,H)$和 $(x,y)=(B,K)$处，其中 $H\le K$；见图9。第i个质点的位置为(x_i,y_i)，其中

$$(x_0,y_0)=(A,H)\quad \text{and}\quad (x_N,y_N)=(B,K).$$

我们记

$$\ell_i=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}$$

表示第 i个弹簧拉伸后的长度，并用 α_i 表示x轴与第 i段弹簧之间的夹角，$-\pi/2<\alpha_i<\pi/2$；见图9。我们有

$$\sin\alpha_i=\frac{y_i-y_{i-1}}{\ell_i}\quad\text{and}\quad \cos\alpha_i=\frac{x_i-x_{i-1}}{\ell_i}. \tag{32}$$

对于 $1\le i\le N-1$，作用在质点 i 上的竖直方向的总力等于

$$-\rho g h-\frac{\ell_i-h}{qh}\sin\alpha_i+\frac{\ell_{i+1}-h}{qh}\sin\alpha_{i+1}.$$

这个表达式必须为零，因此我们得到 $N-1$ 缆索静止悬挂时必须满足的方程：

$$-\rho g h-\frac{\ell_i-h}{qh}\sin\alpha_i+\frac{\ell_{i+1}-h}{qh}\sin\alpha_{i+1}=0,\quad 1\le i\le N-1. \tag{33}$$

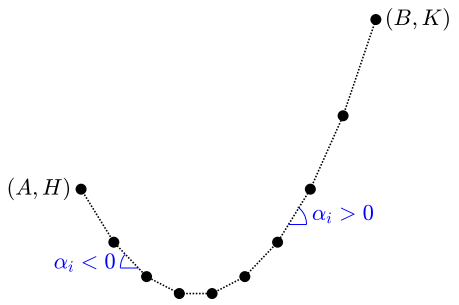


图9 两端点均连接着弹簧串。此处也标出了角度的定义 α_i （见正文）。

现在，我们将对这些方程进行变换，使近似导数的差商出现，因为我们计划令 $h \to 0$ ，从而导出一个微分方程。

利用（32），将（33）改写为

$$-\rho h g - \frac{1}{qh}\frac{\ell_i - h}{\ell_i}(y_i - y_{i-1}) + \frac{1}{qh}\frac{\ell_{i+1} - h}{\ell_{i+1}}(y_{i+1} - y_i) = 0.$$

两边乘以 $\frac{q}{h}$，并稍作代数运算:

$$\frac{1}{h}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h}\left(1 - \frac{h}{\ell_{i+1}}\right) - \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\left(1 - \frac{h}{\ell_i}\right)\right) = \rho q g,$$

so

$$\frac{1}{h}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{h}\right)^2 + \left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h}\right)^2}}\right) - \right.$$

$$\left.\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_i-x_{i-1}}{h}\right)^2 + \left(\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right)^2}}\right)\right) = \rho q g. \tag{34}$$

水平力的平衡可由类似的方程表示

$$\frac{1}{h}\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{h}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{h}\right)^2 + \left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h}\right)^2}}\right) - \right.$$

$$\left.\frac{x_i - x_{i-1}}{h}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_i-x_{i-1}}{h}\right)^2 + \left(\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right)^2}}\right)\right) = 0. \tag{35}$$

这里右边为零，因为不存在水平重力。

连续体极限。 我们以静止状态下无张力时的弧长作为自变量，并记为 s。在左端，$s=0$；在右端，$s=L$。方程 (34) 是对以下内容进行有限差分离散化得到的

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}\right)\right)=\rho q g.$$

该方程右边等于 γ/L（见公式（31））。积分一次,

$$\frac{dy}{ds}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}\right)=\frac{\gamma}{L}\left(s-s_{\min}\right) \tag{36}$$

其中 $s_{\min}$ 是与最低点对应的参数，此处 $\frac{dy}{ds}=0$。类似地，公式（35）是对以下内容的离散化:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}\right)\right)=0.$$

积分一次:

$$\frac{dx}{ds}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}\right)=\mu \tag{37}$$

对于某个尚待讨论的无量纲常数 μ。

求解微分方程。我们通过求出dx/ds 和 dy/ds来简化方程（36）和（37）。首先，写作

$$R=\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}.$$

你现在也许会说：“等等，既然 s 是弧长， $ds^2=dx^2+dy^2$，那么 R 不应该始终等于 1 吗？”不过，你必须记住， s 是缆索悬挂起来之前的未拉伸弧长。而现在，我们考虑的是悬挂状态下的缆索，它已经被拉伸了；因此 $R>1$。

采用这一记号后，（36）和（37）变为

$$\frac{dx}{ds}=\frac{\mu}{1-\frac{1}{R}}\quad\text{and}\quad\frac{dy}{ds}=\frac{\frac{\gamma}{L}\left(s-s_{\min}\right)}{1-\frac{1}{R}}. \tag{38}$$

因此

$$R=\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}=\sqrt{\frac{\mu^2}{\left(1-\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{\frac{\gamma^2}{L^2}\left(s-s_{\min}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{R}\right)^2}}.$$

两边乘以 $1-\frac{1}{R}$，可得:

$$R-1=\sqrt{\mu^2+\frac{\gamma^2}{L^2}\left(s-s_{\min}\right)^2}$$

因此

$$\frac{1}{1-\frac{1}{R}}=\frac{R}{R-1}=1+\frac{1}{R-1}=1+\frac{1}{\sqrt{\mu^2+\frac{\gamma^2}{L^2}\left(s-s_{\min}\right)^2}}.$$

将其代入（38）式，得到

$$\frac{dx}{ds}=\mu+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{\mu^2L^2}\left(s-s_{\min}\right)^2}} \tag{39}$$

and

$$\frac{dy}{ds}=\left(\mu+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{\mu^2L^2}\left(s-s_{\min}\right)^2}}\right)\frac{\gamma}{\mu L}\left(s-s_{\min}\right). \tag{40}$$

组合式 $\frac{\gamma}{\mu L}$ 及其平方在（39）式和（40）式中各出现三次。我们通过定义来简化记号

$$\lambda=\frac{\mu L}{\gamma}.$$

由于 μ 和 γ 均为无量纲量， λ 是一个长度。事实证明，在弹性情形下，它将成为形状参数的自然类比。（这一点在此时并不明显，至少对我来说并不明显。我是在完成接下来将要进行的计算后才意识到这一点的。）采用这一记号，（39）式和（40）式变为

$$\frac{dx}{ds}=\gamma\frac{\lambda}{L}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{s-s_{\min}}{\lambda}\right)^2}}\quad\text{and}\quad\frac{dy}{ds}=\left(\gamma\frac{\lambda}{L}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{s-s_{\min}}{\lambda}\right)^2}}\right)\frac{s-s_{\min}}{\lambda}.$$

我们再次积分，得到 x 和 y的公式:

$$\frac{x-x_{\min}}{\lambda}=\sinh^{-1}\left(\frac{s-s_{\min}}{\lambda}\right)+\gamma\frac{\lambda}{L}\frac{s-s_{\min}}{\lambda}, \tag{41}$$

and

$$\frac{y-y_{\min}}{\lambda}=\sqrt{1+\left(\frac{s-s_{\min}}{\lambda}\right)^2}-1+\gamma\frac{\lambda}{L}\frac{1}{2}\left(\frac{s-s_{\min}}{\lambda}\right)^2 \tag{42}$$

其中， $x_{\min}$ 和 $y_{\min}$ 分别是当 $s=s_{\min}$时 x 和 y 的值。积分常数的选取确保了 $s=s_{\min}$ 对应于 $x=x_{\min}$ 和$y=y_{\min}$。

方程 (41) 和 (42) 与非弹性悬链线的弧长参数化方程 (26) 和 (28) 非常相似。唯一的区别是这里多出了与 γ成正比的项。当柔度密度 q 趋于零时，这些项便会消失（回想一下 $\gamma=q\rho Lg$）；因此，在柔度密度趋于零的极限下，我们得到非弹性悬链线的标准描述，也由此重新推导出了该描述。

虽然这种推导比标准推导更复杂，但我更喜欢它，因为它描绘了“张力”力的微观图景——当然，这种微观图景只是一种理想化。

参数方程。 必须选择四个参数 λ、 $s_{\min}$、 $x_{\min}$ 和 $y_{\min}$，使其满足条件

$$x(0) = A, \quad y(0) = H, \quad x(L) = B, \quad y(L) = K$$

满足条件。利用方程 (41) 和 (42)， $x(0) = A$ 和 $y(0) = H$ 表示

$$x_{\min} = \gamma \frac{\lambda}{L} s_{\min} + A + \lambda \sinh^{-1}\left(\frac{s_{\min}}{\lambda}\right) \tag{43}$$

and

$$y_{\min} = -\gamma \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 \frac{L}{2} \left(\frac{s_{\min}}{\lambda}\right)^2 + H - \lambda \left(\sqrt{1 + \left(\frac{s_{\min}}{\lambda}\right)^2} - 1\right). \tag{44}$$

已知 $x(0) = A$ 和 $y(0) = H$，其余两个条件等价地可写为 $x(L) - x(0) = B - A$，以及 $y(L) - y(0) = K - H$。利用方程 (41) 和 (42)，这些方程变为

$$\gamma + \sinh^{-1}\left(\frac{L - s_{\min}}{\lambda}\right) + \sinh^{-1}\left(\frac{s_{\min}}{\lambda}\right) = \frac{B - A}{\lambda}, \tag{45}$$

$$\gamma \frac{\lambda}{L} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{L - s_{\min}}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{s_{\min}}{\lambda}\right)^2\right) + \sqrt{1 + \left(\frac{L - s_{\min}}{\lambda}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{s_{\min}}{\lambda}\right)^2} = \frac{K - H}{\lambda}. \tag{46}$$

遗憾的是，方程 (45) 和 (46) 中与 γ 成比例的额外项破坏了此前将方程解耦的代数处理，至少在我看来是如此。现在我们必须联立求解方程 (45) 和 (46)，求出$(\lambda, s_{\min})$。

形状参数和最低点的数值计算。在讨论非弹性情形时，我发现求解以下方程更方便

$$\xi = \frac{B - A}{2\lambda}$$

而不是直接求解 λ。这里我也采用了同样的方法，在方程（45）和（46）中用 $\frac{B-A}{2\xi}$ 替换 λ。然后，我使用二维牛顿迭代求解所得方程。图10展示了一些示例，其中γ以0.2 为步长从 0 增加到 2。对于每个新的 γ 值，我都用前一个值对应的参数 ξ 和 $s_{\min}$ 作为牛顿迭代的初始值。图 10 中的弹性悬链线参数只需进行六次或更少的牛顿迭代，即可达到15位精度。非弹性情形中的参数 ξ 则需要稍长一些，进行9次牛顿迭代。

我们似乎没有必要使用这种“延拓法”。我从未遇到过这样的例子：以非弹性情形下计算出的 ξ 和 $s_{\min}$ 为初始值，牛顿法不能快速收敛，即使 γ 取值非常大。

总结性评论

图6和图10的代码。 我很乐意把生成图6和图10的Matlab代码发给你；给我发电子邮件即可。

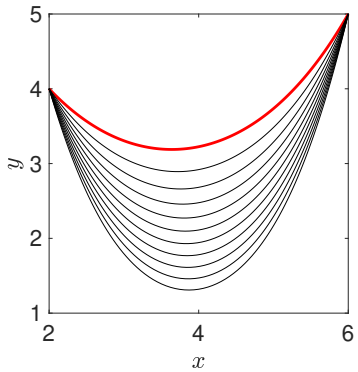


图10 非弹性缆索（红色）和弹性逐渐增强的缆索（黑色），其中 γ 从0 到2，步长为0.2。

未解决的问题。 这里仍有几个问题尚未得到解答。首先，我们能否证明，对于 $A < B$、 $H \le K$和 $L > 0$的任意取值，方程（45）和（46）都有唯一解（λ, $s_{\min}$） ，且满足 $\lambda > 0$ 和$s_{\min} \le \frac{L}{2}$？ 情况应当如此，但我还没有证明这一点。

其次，为什么从非弹性缆索的参数出发，牛顿法求解（45）和（46）时，即使柔度很大，似乎也总是能够非常顺利地工作？令人放心的是，如果确实遇到某种情况下它无法快速收敛，也总是可以使用延拓法，逐步提高柔度，而这样肯定会奏效。不过，根据我的经验，这似乎从来没有必要。

如果弹簧不是线性的呢？在这种情况下，仍然可以写出微分方程（36）和（37）的类似形式，但通常无法显式地求出 x 和 y，因此也就不再存在（41）和（42）的类似形式。

关于悬挂缆索的工程文献。 我在这里所介绍的内容，几乎不可能是全新的。事实上，已有大量内容丰富、技术精深的工程类文献，而悬链线问题不过是这些研究的起点；[**7, 8, 16, 17, 18**] 提供了几个例子。不过，我在这里介绍的内容似乎很难——甚至不可能——从那些文献中提炼出来。

蜘蛛网。 可以考虑多根彼此相连的弹性缆绳，就像蜘蛛网一样。将蜘蛛丝视为由质点组成、并由无质量弹簧连接起来的“离散”模型，很容易建立。关于蜘蛛网的数学建模与计算建模，已有相当丰富的文献；[**1, 10, 13**] 提供了几个例子。

致谢 本文的灵感来自马克·列维对悬链线若干惊人性质的精彩论述，该文发表于2021年5月的《*SIAM* 新闻》 [**12**]。我要感谢匿名审稿人认真审阅我的论文、纠正错别字并提出改进建议。

参考文献

1. Y. AOYANAGI 和 K. OKUMURA（2010年）。蜘蛛网力学的简单模型。《物理评论快报》104 038102 2 038102 10 1103 104 1691 : . doi.org/ . /PhysRevLett. . . J. BERNOULLI（）。《悬链线问题的解答》。《博学学报》： 274–276。3. R. B ¨OHME、S. HILDEBRANDT 和 E. TAUSCH（1980年）。悬链线的二维类比。《太平洋数学杂志》88(2)：247–278。doi.org/10.2140/PJM.1980.88.247

4. O. DE LA GRANDVILLE（2022年）。关于变分法中的一个经典问题：厘清悬链线的关键性质。《美国数学月刊》

129 2 103 115 10 1080 00029890 2022 2004849 ( ): – 。

5 1826 1827 doi.org/ . / . . . E. BOBILLIER 和 P.J.E. FINCK（-）。前一卷第

296 17 59 68 80155 页所提两个静力学问题的解。

6 2022 《纯粹与应用数学年鉴》：–。eudml.org/doc/。M. GOHNERT（）。壳体结构：理论与应用。施普林格国际出版公司。7. L. GRECO、N. IMPOLLONIA 和 M. CUOMO（2014年）。依据弹性悬链线理论对缆索结构进行静力分析的方法。《国际固体与结构杂志》51(7–8)：1521–1533。doi.org/10 001 8 1016 2014 01 . / j.ijsolstr. . . . W. HUANG、D. HE、D. TONG、Y. CHEN、X. HUANG、L. QIN 和 Q. FEI（2022年）。利用离散悬链线理论对机械荷载作用下的弹性缆索结构进行静力分析，《基础研究》：即将发表。doi.org/10 011 9 1016 2022 03 1691. /j.fmre. . . . C. HUYGENS（）。Dynaste Zulchemii，《悬链线问题的解答》。《博学学报》：281–282。10. A. KAWANO 和 A. MORASSI（2019年）。在蜘蛛圆网上发现猎物。《*SIAM*应用数学杂志》79(6)：2506 1372792 11 2529 10 1137 20 1691–。doi.org/ . / M . G. LEIBNIZ（）。悬链线问题的解。《博学学报》：277–281。12. M. LEVI（2021年）。悬索与流体静力学。《*SIAM* 新闻》54，第4期。sinews.siam.org/Details-Page/hanging-cables-and-hydrostatics 13. L.H. LIN、D.T. EDMONDS 和 F. VOLLRATH（1995年）。蜘蛛圆网的结构工程。《自然》

373 146 148 10 1038 373146 0 : –。doi.org/ . / a . R. LOPEZ（）。受压穹顶：悬链线旋转曲面

14 2022 与抛物面的数学模型比较研究。《混沌、孤子与分形》161：112350。doi.org/10 112350 15 1016 2022 2010. /j.chaos. . . R. OSSERMAN（）。圣路易斯拱门如何形成其形状。《*Nexus*网络期刊》12(2)：167–189。doi.org/10 8 16 1007 00004 010 0030 . /s - - - . C. A. PIERCE、F. J. ADAMS 和 G. I. GILCHREST（1913年）。应用于输电线路的非弹性与弹性悬链线理论，《电气工程师学会会刊》32(6)：1373–1391。doi.org/10 6660750 17 1109 1913 . /PAIEE. . . J. QIN、J. CHEN、L. QIAO、J. WAN 和 Y. XIA（2016年）。多重荷载下货运索道轨道绳的悬链线分析与计算方法。《*MATEC*会议网络》82：01008。doi.org/10 20168201008 18 1051. /matecconf/ . H.-B. TANG、Y. HAN、H. FU 和 B.G. XU（2021年）。基于局部参考系的线弹性非预应变缆索数学建模。《应用数学建模》91：695–708。doi.org/10.1016/j.apm.2020.10.008

克里斯托夫·B ¨奥格斯 是塔夫茨大学的数学教授。他的研究兴趣包括数学神经科学、数值分析，以及近年来的反常扩散和意见动力学。2022年，他荣获塔夫茨大学莱布纳教学与指导卓越奖。