arXiv:2302.09058v2 [math.CO] 7 Nov 2024

典型范数中的单位距离与互异距离

Noga Alon* Matija Bucić† Lisa Sauermann‡

摘要

Erdős单位距离问题和Erdős互异距离问题是离散数学中最经典、最著名的开放问题之一。它们分别要求确定由欧几里得平面中的 n 个点所确定的单位距离数量的最大值，或不同距离数量的最小值。20世纪80年代，Ulam和Erdős提出了这样的问题：如果考虑欧几里得平面以外的赋范空间，这些问题会出现什么情况；多年来，这一问题引起了广泛关注。对于 $\mathbb{R}^d$上的几乎所有范数，我们在某种贝尔纲意义下，为这两个问题给出了本质上紧的答案。

对于单位距离问题，我们证明，对于 $\mathbb{R}^d$上的几乎所有范数 $\|.\|$，任意 n 个点根据 $\|.\|$至多确定$\frac{1}{2}d \cdot n \log_2 n$ 个单位距离。我们还证明了这一结果在本质上是紧的：对于 $\mathbb{R}^d$上的每个范数 $\|.\|$，任意充分大的 n，都可以找到 n 个点，根据 $\|.\|$确定至少$\frac{1}{2}(d-1-o(1)) \cdot n \log_2 n$个单位距离。

对于不同距离问题，我们证明，对于几乎所有范数，在 $\mathbb{R}^d$ 上的任意 n 个点集根据 $\|.\|$ 至少确定 $(1-o(1))n$ 个不同距离。这显然在 $o(1))$ 项的意义下是紧的。

我们还解决了几乎所有 $\mathbb{R}^2$ 上范数下著名的 Hadwiger–Nelson 问题，表明其单位距离图的色数为 4。

我们的结果以一种有力且有些出人意料的形式解决了 Brass、Ma- toušek、Brass–Moser–Pach、Chilakamarri 和 Robertson 提出的问题与猜想。证明将组合学和几何学思想与来自线性代数、拓扑学和代数几何的工具结合起来。

1 引言

1.1 单位距离

Erdős单位距离问题于 1946 年提出，见 [20]（另见 [8, 第 5] 章），是组合学中最著名的未解决问题之一。该问题要求估计欧几里得平面中由 n 个不同点确定的单位距离的最大可能数量$U_{\|.\|_2}(n)$，其中距离根据欧几里得范数 $\|.\|_2$确定。迄今为止的最佳界为

$$n^{1+\Omega(1/\log\log n)} \leq U_{\|.\|_2}(n) \leq O(n^{4/3}).$$

下界出现在 Erdős 的初始论文中 [20],，而上界最早由 Spencer、Szemerédi 和 Trotter 于 1984 年证明 [41]；另见 [45]，其中给出了一种基于交叉引理的简短而优雅的证明。有关这一问题丰富历史的更多内容，可参见综述文章 [8, 46]。

这一问题的一个有趣变体探讨的是一般实赋范空间中的同一问题。Ulam 最先提出了这一问题，Erdős 于20世纪80年代初对其作了明确描述 [19]。我们称范数 $\|.\|$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上为一种

*普林斯顿大学数学系，美国普林斯顿。研究得到美国国家科学基金会资助，部分资助来自 NSF 项目 DMS-2154082 以及美以双边科学基金会项目 2018267。电子邮箱：nalon@math.princeton.edu。

†普林斯顿大学数学系，美国普林斯顿。研究得到美国国家科学基金会资助，部分资助来自 NSF 项目 CCF-1900460 和 DMS-2349013。电子邮箱：matija.bucic@ias.edu。

‡波恩大学应用数学研究所，德国波恩。本项工作的一部分是在该作者任职于麻省理工学院期间完成的。研究得到美国国家科学基金会 DMS-2100157 项目奖助以及斯隆研究奖学金的部分资助。电子邮箱：sauermann@iam.uni-bonn.de。

d-范数，并用 $U_{\|.\|}(n)$ 表示由 $\mathbb{R}^d$中 n 个不同点组成的集合所确定的单位距离的最大可能数量。 d-范数 $\|.\|$ 的单位距离图是这样一种图：其顶点是 $\mathbb{R}^d$中的所有点，当且仅当两点之间的距离为一时，这两点才相邻。因此，$U_{\|.\|}(n)$ 是 $\|.\|$的单位距离图中一个具有 n个顶点的子图所含边数的最大值。一个初步而简单的观察是：如果 d-范数 $\|.\|$ 的单位球边界包含一条直线线段，那么 $U_{\|.\|}(n)$ 关于 n是二次增长的；因为在这种情况下，存在两个无限子集 A、B，它们属于 $\mathbb{R}^d$，且任意一个$\mathbf{a} \in A$ 与$\mathbf{b} \in B$ 之间的距离都为一。另一方面，如果 $\|.\|$ 是一个严格凸的二维范数（即单位球的边界不包含直线线段），那么可以将欧几里得情形中已有的证明推广，从而证明$U_{\|.\|}(n) \leq O(n^{4/3})$。Valtr [48] 构造了一种严格凸的二维范数，使得对于每个 n，都存在含有 n个元素的点集，其中至少有 $\Omega(n^{4/3})$ 个单位距离。另请参见 [39]，其中介绍了具有同样性质的更一般的范数族。这表明，一般情况下，上界无法进一步改进。关于估计一般范数下 $U_{\|.\|}(n)$这一问题的历史，更多详情请见 [8] 。

不难看出，对于任意二维范数 $\|.\|$，都有 $U_{\|.\|}(n) \geq (\frac{1}{2} - o(1))n\log_2 n$。事实上，$k$维超立方体的图是任意二维范数的单位距离图的子图，具体做法是选取 k 个随机单位向量 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$、……、$\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^2$，并对每个子集 $S \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ 定义 $\mathbf{v}_S = \sum_{i \in S} \mathbf{u}_i$。如果两个子集 S、$S' \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ 仅相差一个元素，那么按照 $\|.\|$ 计算，$\mathbf{v}_S$ 与 $\mathbf{v}_{S'}$ 之间的距离为 1，正如所需。

Matoušek [34] 在 2011年 得出的一个引人注目且经常被引用的结果（例如参见 [8, 30, 33, 38, 43, 46]）表明，对于大多数范数，在贝尔纲意义下（将在第3节中详细描述），这个结果已经非常接近最优。具体而言，对于典型的二维范数 $\|.\|$，$U_{\|.\|}(n) \leq O(n\log n\log\log n)$。这引出了一个显而易见的问题：$\log\log n$ 项是否是必要的。关于 $U_{\|.\|}(n)$ 能有多小的问题，Brass [6] 已于 1996年 进行过研究；他特别问道，是否存在一种二维范数，使得 $U_{\|.\|}(n) \leq O(n\log n)$。高维中的相应问题也已得到研究。特别是，Brass、Moser 和 Pach [8,《问题 4 和 5》，第 195] 页猜想，对于每个 $d \geq 3$ 以及每个 d-范数 $\|.\|$，$U_{\|.\|}(n)$ 的渐近增长都大于 $\Omega(n\log n)$，并询问对于 $d \geq 4$ 是否存在一种 d-范数 $\|.\|$，使得$U_{\|.\|}(n) = o(n^2)$。注意，对于 d 维欧几里得范数 $\|.\|_2$，不难看出，对于每个 $d \geq 4$，都有 $U_{\|.\|}(n) \geq \Omega(n^2)$（事实上，精确常数也是已知的，见 [18]），这表明对于欧几里得范数，尽管二维和三维中的问题仍完全悬而未决，但在所有维数 $d \geq 4$ 中该问题都很简单。

在本文中，我们以如下的强形式，在所有维数下解决了上述 Brass、Matoušek 以及 Brass、Moser 和 Pach 所提出的问题。

定理 1.1。 对于任意 $d \geq 2$，对大多数 d-范数 $\|.\|$，我们有

$$U_{\|.\|}(n) \leq \frac{d}{2} \cdot n\log_2 n$$

对所有 n 均成立。更确切地说，对于除第一纲集之外的所有 d-范数 $\|.\|$，以下结论成立：对于每个 $n \geq 1$ 以及 Rd 中的任意 n 个点集，按照 $\|.\|$ 计算的这些 n 个点之间的单位距离至多有 $\frac{d}{2} \cdot n\log_2 n$ 个。

定理 1.2。 令 $d \geq 2$ 固定。则对于每个 d-范数 $\|.\|$，我们有

$$U_{\|.\|}(n) \geq \frac{d - 1 - o(1)}{2} \cdot n\log_2 n.$$

对所有充分大的 n 均成立。也就是说，对于每个 d 范数 $\|.\|$ 和每个 n，存在一个包含 n 个点的集合，位于 $\mathbb{R}^d$ 中，使得按照 $\|.\|$ 计算的这些 n 个点之间的单位距离数量至少为 $\frac{d-1-o(1)}{2} \cdot n\log_2 n$，其中 $o(1)$ 项随 $n \to \infty$ 趋于无穷大而趋于零。

1.2 不同距离

同样著名的 Erdős 不同距离问题关注的是：估计欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$ 中由 n 个点确定的不同距离的可能最小数量 $D_{\|.\|_2}(n)$。例如，可参阅专门讨论这一问题及其历史、推广和与其他领域联系的著作 [26] 。Erdős 不同距离问题也可追溯到 Erdős 于 1946 年发表的论文 [20] 。在这篇论文中，他还研究了高维欧氏空间中的同一问题。对于平面情形，Erdős 证明了上界 $O(n/\sqrt{\log n})$，并猜想该界是紧的。经过对下界的一系列长期改进，Guth 和 Katz 于 [29] 建立了一个几乎紧的下界 $\Omega(n/\log\ n)$。对于高维欧氏空间，甚至 n 的正确指数都尚不清楚；最佳已知界见 [40] 。

Erdős 不同距离问题在一般 d-范数的情形下同样有着悠久的历史，参见 [43] 近期关于这一方向已知结果的综述。给定一个 d-范数 $\|.\|$ ，我们用 $D_{\|.\|}(n)$ 表示根据 $\|.\|$，由 n 中的点所确定的不同距离数目的可能最小值。对于每个 d-范数 $\|.\|$ 和每个 n，显然有 $D_{\|.\|}(n) \leq n-1$，因为只需考虑直线上沿等差数列排列的任意 n 个点即可。Brass 猜想，对于任意 $d \geq 2$ 和任意 d-范数 $\|.\|$ ，都有 $D_{\|.\|}(n) = o(n)$（参见 [8, 第 5.4 章，猜想 5，第 211] 页）。在此，我们以一种更强的形式反驳了他的猜想。对于大多数 d-范数 $\|.\|$，我们证明 $D_{\|.\|}(n)$ 不仅关于 n 是线性的，事实上还具有 $(1-o(1))n$ 的形式。

定理 1.3。 对于任意固定的 $d \geq 2$，对于大多数 d-范数 $\|.\|$ 我们有

$$D_{\|.\|}(n) = (1-o(1))n$$

对所有 n均成立。更确切地说，除去一个第一纲集，对于所有 d-范数 $\|.\|$ ，以下结论成立：对于每个 n，在 $\mathbb{R}^d$ 中的任意 n 个点中，按照 $\|.\|$计算，至少有 $(1-o(1))n$ 个不同距离，其中 $o(1)$项在 $n \to \infty$时趋于零。

1.3 Hadwiger–Nelson 问题

确定平面上欧几里得范数的单位距离图的色数，是离散几何中的又一个著名未解问题，被称为 Hadwiger–Nelson 问题。换言之，这个问题要问的是：为了给平面上的所有点着色，使任意两个欧几里得距离为一的点具有不同颜色，至少需要多少种颜色。这个问题可以追溯到 1950 年，长期以来人们一直知道其答案至少为 4、至多为 7。最近的一项计算突破 [11, 22], 将下界提高到了 5，从而促成了一个专注于该问题的协作式 Polymath 项目 [37]。关于 Hadwiger–Nelson 问题的历史，另请参阅 [8, 43] 以了解更多详情。

Chilakamarri [9] 于1991年研究了其他平面范数下这一问题的类似情形，并证明每个2-范数的单位距离图的色数至少为4且至多为7。此外， [9,Robertson提出的 5], 问题要求确定至少一个严格凸2-范数的单位距离图的色数。我们证明，大多数2-范数的单位距离图的色数等于4。

定理 1.4。 对于除去一个第一纲集的所有2-范数， $\|.\|$ 其单位距离图的色数等于4。

相比之下，正如上文所述，最近已有研究表明 [11, 22] 对于欧几里得二范数，单位距离图的色数至少为 5。因此，大多数 2-范数的表现不同于欧几里得二范数，这尤其推翻了 Chilakamarri 的一个猜想 [9, 第 355]页。

在 d维中，我们的论证给出了大多数 d-范数的单位距离图色数的上界 2^d。已知任意 d-范数的单位距离图的色数至多呈 d 指数增长（见 [25, 32]），但这些已知上界中的指数底数远大于 2。另请参阅[43]，其中对围绕这一问题的已知结果进行了更为详细的综述。我们还注意到，Frankl 和 Wilson 的结果 [23] 为所有在坐标置换下不变的 d-范数的单位距离图色数给出了指数下界。

对于大多数 d范数，我们得到的 2^d 上界实际上也适用于奇距离图的色数（即边对应于 $\mathbb{R}^d$ 中距离为奇整数的点对的图）。这是一个更强的结果，因为单位距离图是奇距离图的子图。这与欧几里得情形截然不同：根据 Davies 的一项近期结果， [10] 即使在平面上，奇距离图的色数也是无限的。

2 证明概述

我们的定理证明运用了组合学、多面体与离散几何、拓扑学和代数学中的论证。本节将对证明作高层次概述。需要指出的是，这一概述简化了许多部分，也省略了一些重要细节，因为本节旨在介绍总体思路及其如何结合起来。我们从定理 1.1 开始。

定理 1.1 的证明分为两部分。第一部分更偏向组合学，它表明：对于某个 d范数，如果某组 n 点之间有大量单位距离，那么相应的单位向量之间必然存在大量有理线性依赖。更确切地说，如果定理 1.1 中的上界对某个 d范数 $||.||$不成立，也就是说，如果我们能找到 n 个点，它们之间的单位距离超过$(d/2)\cdot n\log_2 n$，那么就存在一组单位向量，其 $\mathbb{Q}$有理线性张成中包含许多其他单位向量。第二部分更偏向几何学，旨在证明对大多数范数而言，这种情况不可能发生。换句话说，对大多数范数而言，不可能存在一组单位向量，使得可以通过有理线性组合得到许多其他单位向量。

在第一部分中，根据某个 d-范数，我们固定 n 个点，它们之间的单位距离数量超过 $(d/2)\cdot n\log_2 n$。我们的目标是证明，描述这些单位距离的向量 $\mathbf{u}_1$、.....、$\mathbf{u}_k$（其中 $||\mathbf{u}_1|| = \cdots = ||\mathbf{u}_k|| = 1$）之间必然存在大量有理线性依赖。如果有理线性依赖并不多（更准确地说，如果对于每个 ℓ，任意 ℓ 个向量 $\mathbf{u}_1$、.....、$\mathbf{u}_k$ 的 $\mathbb{Q}$-线性张成空间至多包含 $\mathbf{u}_1$、.....、$\mathbf{u}_k$ 中的 $d\cdot\ell$ 个向量），那么我们就能找到这些单位向量的一个在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关的子集，并且该子集对应于这 n 个固定点之间相对较多的单位距离（即，超过 $(1/2)\cdot n\log_2 n$ 个单位距离）。另一方面，对于 n 个固定点，我们可以分析其点对的差向量有多少次能够属于给定的一组 $\mathbb{Q}$-线性无关向量；事实证明，这种情况至多发生于 $(1/2)\cdot n\log_2 n$ 个点对（这源自 Bollobás 和 Leader [5], 提出的网格等周不等式，但我们也给出了一个自包含的证明）。这一矛盾意味着，原来的单位向量 $\mathbf{u}_1$、.....、$\mathbf{u}_k$ 必须存在大量有理线性依赖，正如所要证明的那样。

对于第二部分，我们需要证明，满足以下性质的特殊 d-范数只有“很少”一部分：对于某个单位向量集合，可以将大量其他单位向量表示为有理线性组合。因此，我们需要证明，具有这一性质的 d-范数集合可以被 d-范数空间中的可数个处处稀疏子集所覆盖（该空间带有某种自然拓扑，详见第3节）。粗略地说，这些可数个子集分别对应于单位向量集合大小的不同可能性、相关有理线性组合中的有理系数的不同可能性，以及这些单位向量中任意两个向量之间分离角的一个下界。为了证明这些子集中的每一个在所有 d-范数空间中都是处处稀疏的，我们证明：对于任意一个单位球为具有足够小的面的凸多面体的 d-范数，都存在一个微小扰动（通过对每个面超平面进行微小平移得到）

使其不可能成为该子集中某个聚点的单位球。从启发式角度看，如果这样的扰动所对应的单位球属于该子集中某个范数，那么，对于包含上述性质中出现的单位向量的那些面，其平移长度必须满足某些线性方程（这是单位向量之间线性关系的结果）。一般的扰动并不满足这些线性方程，因此不可能对应于该子集中范数的聚点。这就证明了这些子集中的每一个确实处处稀疏，并完成了定理 1.1 的证明。

定理 1.3 的证明遵循类似的整体思路，但各个步骤更加复杂，并且需要引入重要的新思想。第一部分中，对于 n 在某种 d-范数下具有较少不同距离的给定点集，我们在由这些 n点之间的不同距离生成的 $\mathbb{Q}$ 域扩张上进行研究（因此，我们考虑系数取自该扩张域的线性关系）。我们还需要为在某些单位向量集合的张成空间中找到的单位向量数量建立更强的定量界。总体而言，定理 1.3 证明的第一部分比定理 1.1 的证明复杂得多。例如，在这种情形下，我们不能再使用 Bollobás–Leader 边等周不等式，因为这里需要一个比定理 1.1 的情形更一般的结论（见引理 4.3）；我们通过组合论论证证明了这个更一般的结论。定理 1.3 证明的第二部分与定理 1.1 的证明相对类似，但需要使用一些代数几何的基本工具，而不是定理 1.1 证明中使用的线性代数论证。

对于定理 1.4 中关于典型范数下 Hadwiger–Nelson 问题的结果，我们将定理 1.1 证明的第二部分与第一部分的一个修改版本结合起来。特别是，我们充分利用了 Edmonds 拟阵划分定理 [14]。

我们注意到，尝试控制典型范数中单位向量之间线性依赖数量这一总体思路源于 Matoušek [34], ，而他针对大多数 2-范数 $||.||$ 的上界 $U_{||.||}(n) \leq O(n\log n\log\log n)$ 证明，同样分为两部分，正如我们的定理 1.1 证明一样。对于第二部分，即证明对于大多数范数，单位向量之间不可能存在大量线性依赖，我们的方法受到了他的论证启发。然而，他在二维中使用了关于“膨胀”线段或将其分解为梯形的具体几何论证，而这些论证似乎并不容易推广到高维。因此，为了在任意维数中获得我们的结果，我们引入了若干新思路，尤其是使证明更加代数化。另一方面，我们证明的第一部分与 Matoušek 的证明截然不同。他的证明通过概率方法，基于图论中的“扩张”论证，从而得到较弱的上界。相反，我们为证明的第一部分制定了一套全新的策略，最终得到了本质上紧的上界。

为了证明定理 1.2 中关于任意 d-范数 $||.||$ 的 $U_{||.||}(n)$ 新下界，我们考虑某些精心选取的小型点集的闵可夫斯基和，使得我们能够以类似网格的方式获得许多单位距离。为确保能够找到适合作为构造基集的小型点配置，我们使用维数理论中的一个结果：Hurewicz维数降低定理。

组织结构。 下一节将介绍一些背景知识和预备引理。定理 1.1 和 1.3 的证明第一部分见第 4 节，第二部分见第 5 节。随后，我们将在第 6 节中证明定理 1.4，并以之前各节的内容为基础。最后，我们将在第7节证明定理 1.2，并在第 8 节以一些总结性评论和开放问题作为结尾。

3 几何预备知识

3.1 背景

我们首先建立一些记号，并介绍将要使用的概念。需要指出的是，除非另有说明，我们所使用的所有对数均以2为底。

对于 $d \geq 1$， $\mathbb{R}^d$ 上的范数是一种映射 $||.||$，它为每个$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ 指定一个非负实数 $||\mathbf{x}||$，并满足以下三个条件：

- 对于每个$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$，当且仅当$\mathbf{x} = \mathbf{0}$时，我们有 $||\mathbf{x}|| = 0$。
- 对于所有 $\alpha \in \mathbb{R}$ 和$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$，我们有 $||\alpha\mathbf{x}|| = |\alpha| \cdot ||\mathbf{x}||$。
- 三角不等式成立，也就是说，对于所有$\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$，我们有 $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$。

每个范数 $||.||$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上都由其单位球唯一确定，该单位球定义为所有满足 $||\mathbf{x}|| \leq 1$的$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ 所组成的集合。任意范数的单位球都是一个包含$\mathbf{0}$于其内部的闭、有界、关于$\mathbf{0}$对称的凸体。此外，任何这样的凸体都可作为唯一范数的单位球。令 $\mathcal{B}_d$ 表示$\mathbb{R}^d$ 中所有范数的单位球所组成的集合，或者等价地，表示 $\mathbb{R}^d$ 中所有包含$\mathbf{0}$ 于其内部的闭、有界、关于$\mathbf{0}$对称凸体所组成的集合。如下文所述，已知赋予 $\mathcal{B}_d$ 所谓的豪斯多夫度量 d_H 后，它构成一个贝尔空间。

两个集合 A、$B \subseteq \mathbb{R}^d$之间的豪斯多夫距离 $d_H(A, B)$定义为

$$d_H(A, B) := \max\left\{\sup_{\mathbf{a}\in A}\inf_{\mathbf{b}\in B}||\mathbf{a}-\mathbf{b}||_2, \sup_{\mathbf{b}\in B}\inf_{\mathbf{a}\in A}||\mathbf{a}-\mathbf{b}||_2\right\},$$

其中， $||.||_2$ 表示 $\mathbb{R}^d$中的欧几里得距离。如果 A、$B \subseteq \mathbb{R}^d$ 是闭且有界的，则在上述定义中可以用最大值和最小值替换上确界和下确界。因此，在这种情况下，豪斯多夫距离$d_H(A, B)$就是集合 B中一点到集合 A的“最大距离”，或集合 A中一点到集合 B的“最大距离”。注意，豪斯多夫距离满足三角不等式。

如果度量（或拓扑）空间 S 中的集合 X 满足：每个非空开集 $U \subseteq X$ 都包含一个满足 $V \cap S = \emptyset$ 的非空开集 V，则称其为无处稠密集。 X 中的第一纲集是无处稠密集的可数并。注意，任何第一纲集的子集也都是第一纲集。如果 X 中每个第一纲集的补集都是稠密的，则称空间 X 为贝尔空间。已知，赋予豪斯多夫度量 d_H 的 $\mathcal{B}_d$ 构成贝尔空间（例如，这可由定理 6[4] 结合贝尔纲定理 [28, 得出）。

非空有界闭子集 $S \subseteq \mathbb{R}^d$ 的直径（相对于欧几里得距离）定义为

$$\operatorname{diam}(S) = \max_{\mathbf{a},\mathbf{b}\in S}||\mathbf{a}-\mathbf{b}||_2$$

（注意，由于 S 是闭且有界的，该最大值确实定义良好。）

$\mathbb{R}^d$ 中的半空间是 $\mathbb{R}^d$ 的闭子集，由满足某个形如 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \leq b$ 的线性不等式 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ 以及某个 $b \in \mathbb{R}$ （从几何上看，这是由 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = b$ 给出的仿射超平面一侧的所有点组成的集合，包括该超平面本身）。 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ 中的多胞体是 $\mathbb{R}^d$ 中有限个半空间的交集。注意，每个多胞体 P 都是凸的。每个有界多胞体 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ 还可以表示为 $\mathbb{R}^d$ 中有限个点的凸包。

每个$\mathbf{0}$-对称多胞体 P 若$\mathbf{0}$ 位于其内部，则都可以写成如下形式

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{o}_i \cdot \mathbf{x}| \leq t_i \text{ for } i = 1, \ldots, h\}$$

取非零向量 $\mathbf{o}_1$、...、$\mathbf{o}_h \in \mathbb{R}^d$ 以及正实数 t_1、...、t_h。此类多胞体的面是如下形式的交集： $P \cap H$，其中超平面 H 满足交集 $P \cap H$ 是（$d-1$）维的

并且 P 包含于由 H 界定的某个闭半空间中。如果 P 具有 **0** 对称性，则这些面会成对出现，构成相对面（彼此平行）。

集合 $B \subseteq \mathbb{R}^d$ 是严格凸的，当且仅当对于所有不同的 a、b $\in B$ 以及所有 $0 < \alpha < 1$，点 αa $+ (1-\alpha)$b 都属于 B的内部。对于严格凸集 $B \subseteq \mathbb{R}^d$，对于边界 B 上的每个点 b，都存在一个超平面H 满足 $H \cap B = \{$ b$\}$，使得 B 包含于由 H界定的某个半空间中。范数 $||.||$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上的单位球 B 是严格凸的，当且仅当对于所有彼此不成倍数的非零向量 x、y $\in \mathbb{R}^d$，三角不等式是严格不等式 $||$x $+$ y$|| < ||$x$|| + ||$y$||$。事实上，在这种情况下，对于满足 span$_{\mathbb{R}}$(a) $\neq$ span$_{\mathbb{R}}$(b) 且 $0 < \alpha < 1$成立的非零 a、b，我们有 $||\alpha$a $+ (1-\alpha)$b$|| < ||\alpha$ a$|| + ||(1-\alpha)$b$|| = \alpha||$a$|| + (1-\alpha)||$b$|| \leq \alpha + (1-\alpha) = 1$。对于满足 span$_{\mathbb{R}}$(a) $=$ span$_{\mathbb{R}}$(b) 的不同向量 a、b，我们总有 $||\alpha$a $+ (1-\alpha)$b$|| < 1$，因为我们必有 max$\{||$a$||, ||$b$||\} < 1$ 或 a $= -$b。对于满足 a $=$ **0** 或 b $=$ **0** 的 a、b，我们也显然有 $||\alpha$a $+ (1-\alpha)$b$|| < 1$。因此，对于 $||.||$，当其对所有满足 span$_{\mathbb{R}}$(x) $\neq$span$_{\mathbb{R}}$(y) 的非零向量 x、y $\in \mathbb{R}^d$均为严格不等式时，三角不等式确实意味着 B 是严格凸的。

最后，我们记录　　下面这个简单的代数学事实，我们将在定理 1.3 的证明中使用它。

事实 3.1。 对于任意正整数 m，给定 $m+1$ 个具有实系数的有理函数 f_1、.....、 $f_{m+1} \in \mathbb{R}(x_1$、.....、 $x_m)$，它们是 m 个变量的函数，存在一个非零多项式 $P \in \mathbb{R}[y_1, \ldots, y_{m+1}]$，使得 $P(f_1$、.....、 $f_{m+1}) = 0$。

这立即由以下众所周知的事实得出：函数域$\mathbb{R}(x_1$、.....、 $x_m)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的超越次数等于 m。事实上，由于 $m+1$ 大于这个超越次数， f_1、.....、 f_{m+1} 之间必然存在代数关系。

3.2 几何引理

本节包含一些基本的几何引理。尽管本节的大部分内容都是众所周知的，我们仍为方便读者而收录其中一些证明。

前两 个引理仅用于证明本节中的第三个引理　　.

引理 3.2。 设 $T \subseteq \mathbb{R}^d$ 是有界子集，且 $\varepsilon > 0$。则存在一个有限子集 $S \subseteq T$，使得对于每个点 $\boldsymbol{t} \in T$，都存在一个点 $\boldsymbol{s} \in S$，满足 $||\boldsymbol{s} - \boldsymbol{t}||_2 \leq \varepsilon$。

我们指出，这样的子集 S 称为 T 的 ε-网。

证明。 由于 T 有界，它包含于以 **0** 为中心、半径为 R 的欧氏球中，其中 $R > 0$。考虑所有满足以下性质的子集 $S \subseteq T$ 所构成的族：对于其中任意两个不同的 $\mathbf{s} - \mathbf{s}'||_2 > \varepsilon$，都有 $||$，$\mathbf{s}$、$\mathbf{s}' \in S$。我们声称，每个这样的子集 S 的大小为 $|S| \leq (2R/\varepsilon + 1)^d$。事实上，以 S 中各点为中心、半径为 $\varepsilon/2$ 的欧氏球互不相交，并且包含于以 **0** 为中心、半径为 $R + \varepsilon/2$ 的欧氏球中。因此，根据体积关系，集合 S 至多包含 $(2R/\varepsilon + 1)^d$ 个点。

注意到 $S = \emptyset$ 平凡地满足以下性质：对于所有不同的$\mathbf{s} - \mathbf{s}'||_2 > \varepsilon$，$\mathbf{s}$、$\mathbf{s}' \in S$均成立。因此，具有该性质的子集族 $S \subseteq T$非空；又由于其中所有成员都满足 $|S| \leq (2R/\varepsilon + 1)^d$，所以该子集族中必定存在一个极大子集 $S \subseteq T$。于是，设 $S \subseteq T$ 是一个极大子集，并具有如下性质：对于所有不同的$\mathbf{s} - \mathbf{s}'||_2 > \varepsilon$，$\mathbf{s}$、$\mathbf{s}' \in S$均成立。

现在，让我们验证对于每个点$\mathbf{t} \in T$，都存在一个点$\mathbf{s} \in S$，满足 $||\mathbf{s} - \mathbf{t}||_2 \leq \varepsilon$。如果$\mathbf{t} \in S$，我们可以选择$\mathbf{s} = \mathbf{t}$。如果$\mathbf{t} \notin S$，那么根据所选集合的极大性 S，我们无法将$\mathbf{t}$ 加入该集合。这意味着，对于某个$\mathbf{s} \in S$，必有 $||\mathbf{s} - \mathbf{t}||_2 \leq \varepsilon$，正如所要求的那样。 □

下面的引理指出，在任意 $B \in \mathcal{B}_d$ 附近，我们都可以找到某个严格凸的 B'。这个引理也可以由 Klee [31] 于1959年提出的一个经典结果推导出来，该结果表明， $\mathbb{R}^d$ 上的几乎所有范数都是严格凸的。

引理 3.3。 对于每个 $B \in \mathcal{B}_d$ 和每个 $\mu > 0$，都存在一个严格凸的 $B' \in \mathcal{B}_d$，使得 $d_H(B, B') \leq \mu$。

证明。 记 $||.||$ 为单位球为 B 的范数。于是 $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : ||\mathbf{x}|| \leq 1\}$。由于 B 是有界的，我们可以选取某个 $c > 0$，使得对于所有 $\mathbf{b} \in B$，都有 $||\mathbf{x}||_2 \leq c$。令 $\varepsilon = \mu/c^2$。

我们通过 $||\mathbf{x}||' := ||\mathbf{x}|| + \varepsilon||\mathbf{x}||_2$ 为 $||.||'$ 定义一个范数，对所有 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ 均成立。为验证 $||.||'$ 确实是一个范数，注意到 $||.||$ 和 $||.||_2$ 的三角不等式蕴含

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}||' = ||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| + \varepsilon||\mathbf{x}+\mathbf{y}||_2 \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| + \varepsilon||\mathbf{x}||_2 + \varepsilon||\mathbf{y}||_2 = ||\mathbf{x}||' + ||\mathbf{y}||',$$

对于所有 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$，因此三角不等式对于 $||.||'$ 也成立。此外请注意，只有当 $||\mathbf{x}+\mathbf{y}||_2 = ||\mathbf{x}||_2 + ||\mathbf{y}||_2$ 时，才能取等号；由于对于任意不是彼此倍数的非零向量 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$， $||.||_2$ 的三角不等式都是严格的，因此对于 $||.||'$ 也同样成立。于是，范数 $||.||'$ 的单位球 B' 是严格凸的。

注意到 $B' \subseteq B$，因此对于任意点 $\mathbf{b}' \in B'$，我们都有一点 $\mathbf{b} = \mathbf{b}' \in B$，其与 $\mathbf{b}'$ 的欧几里得距离为 $0 \leq \mu$。另一方面，我们声称，对于任意点 $\mathbf{b} \in B$，也可以找到一点 $\mathbf{b}' \in B'$，使其与 $\mathbf{b}$ 的欧几里得距离至多为 μ。如果 $||\mathbf{b}||_2 \leq \mu$，我们只需取 $\mathbf{b}' = \mathbf{0} \in B'$ 即可。如果 $||\mathbf{b}||_2 > \mu$，则有

$$\left\| \left(1 - \frac{\mu}{||\mathbf{b}||_2}\right) \mathbf{b} \right\|' = \left(1 - \frac{\mu}{||\mathbf{b}||_2}\right) ||\mathbf{b}||' = \left(1 - \frac{\mu}{||\mathbf{b}||_2}\right) (||\mathbf{b}|| + \varepsilon||\mathbf{b}||_2) \leq (1 - \varepsilon||\mathbf{b}||_2)(1 + \varepsilon||\mathbf{b}||_2) < 1,$$

使用 $\varepsilon = \mu/c^2 \leq \mu/(||\mathbf{b}||_2)^2$ 和 $||\mathbf{b}|| \leq 1$。因此我们可以取 $\mathbf{b}' := \left(1 - \frac{\mu}{||\mathbf{b}||_2}\right) \mathbf{b} \in B'$，并且有 $||\mathbf{b}' - \mathbf{b}||_2 = \frac{\mu}{||\mathbf{b}||_2} \cdot ||\mathbf{b}||_2 = \mu$。这表明 $d_H(B, B') \leq \mu$，如所需。 □

我们将需要以下引理，它说明我们可以用具有小面片的多胞体来逼近任意 $B \in \mathcal{B}_d$ 中的对象。我们注意到，已有大量研究关注类似的多胞体逼近问题，例如参见 [4] 及其中的参考文献；这些研究大多关注为获得良好逼近所需的最少面片数。在这里，我们并不关心逼近多胞体的面片数量，而是要求所有面片的直径都很小。

引理 3.4。 对于每个 $B \in \mathcal{B}_d$ 和每个 $\mu > 0$，都存在一个有界的 $\mathbf{0}$-对称多胞体 $B' \in \mathcal{B}_d$，其内部包含 $\mathbf{0}$，使得 $d_H(B, B') < \mu$，并且 B' 的所有面片的直径都小于 μ（相对于欧几里得距离）。

注意，当将由形如 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = b$ 的方程描述的超平面与点（ $||\mathbf{a}||_2 = 1$ ）对应时，我们可以利用 $\mathbb{R}^{d+1}$ 赋予 $\mathbb{R}^d$ 中所有（$d-1$）维超平面组成的集合以由 $\mathbb{R}^{d+1}$ 诱导的自然拓扑。更确切地说，具有形如 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = b$ 方程的此类超平面对应于商空间（$\mathbf{a}$ b）$\in$（$S^{d-1} \times \mathbb{R}$）$/\{\pm 1\}$ 中的一个点（此处 S^{d-1} 是 $\mathbb{R}^d$ 中的（$d-1$）维单位球面，并且我们考虑 $\{\pm 1\}$ 在（$\mathbf{a}$ b）$\in S^{d-1} \times \mathbb{R}$ 上的作用所得到的商，其中 -1 通过将（$\mathbf{a}$ b）$\mapsto$ 映射为（$-\mathbf{a}$ $-b$）来作用。）

我们记作 $\mathrm{dist}(\mathbf{p}, H)$，表示点 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$ 到超平面 $H \subseteq \mathbb{R}$ 的（欧几里得）距离 ^{d}.

证明。 根据引理 3.3，存在一个严格凸的 $B'' \in \mathcal{B}_d$，其具有 $d_H(B'', B) < \mu/2$。现在只需证明，存在一个有界的 $\mathbf{0}$-对称多胞体 $B' \in \mathcal{B}_d$，使得 $\mathbf{0}$ 位于其内部，且 $d_H(B', B'') < \mu/2$，并且 B' 的所有面直径均小于 μ

令 $\mathcal{H}$ 为所有满足以下条件的 $(d-1)$ 维超平面 H 的集合： $\mathbb{R}^d$ 中的 $H \cap B''$ 的直径至少为 μ。注意， $\mathcal{H}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中所有 $(d-1)$ 维超平面集合的闭有界子集（要看出 $\mathcal{H}$ 是闭的，只需注意，$\mathrm{diam}(H \cap B'')$ 是所有 $(d-1)$ 维超平面$H \subseteq \mathbb{R}^d$上的连续函数）。因此， $\mathcal{H}$ 在诱导拓扑下是紧致的。

每个超平面 $H \in \mathcal{H}$都会将严格凸集 B''分成两部分 $B_1''(H)$ 和 $B_2''(H)$（严格来说，它们分别是 B'' 与由 H 界定的两个闭半空间的交集），根据 B''的严格凸性假设，这两部分都不包含于 H。对于每个超平面 $H \in \mathcal{H}$, 定义

$$f(H) = \min\left\{ \max_{\mathbf{b} \in B_1''(H)} \mathrm{dist}_2(\mathbf{b}, H), \max_{\mathbf{b} \in B_2''(H)} \mathrm{dist}_2(\mathbf{b}, H) \right\},$$

并注意，对于每个 $H \in \mathcal{H}$，都有 $f(H) > 0$。现在， f 是紧致空间上的连续函数，因此可以取得最小值。设 $\eta > 0$ 为此最小值，则对于所有 $H \in \mathcal{H}$，都有 $f(H) \geq \eta$。
现在，让我们将引理 3.2应用于集合 B'' 和 $\varepsilon = \min\{\mu, \eta\}/2$，也就是说，选取 B''的一个 ε-网 $S \subseteq B''$。通过向 S中添加至多 $d+1$ 个额外的点，我们可以假设 $\mathbf{0}$ 位于 S的凸包内部。
此外，我们还可以假设 S 是 $\mathbf{0}$-对称的，这意味着 $-S = S$（实际上，对于每个点 $\mathbf{s} \in S$，如果点 $-\mathbf{s}$ 尚未包含在 S 中，我们就可以将其添加到 S 中）。
现在，对于每个超平面 $H \in \mathcal{H}$， S 中都存在位于 H 两侧的点（更准确地说，由 H 界定的两个开半空间都各自包含 S 中至少一个点）。事实上，由于 $f(H) \geq \eta$，存在点 $\mathbf{b}_1 \in B_1''(H) \subseteq B''$ 和 $\mathbf{b}_2 \in B_2''(H) \subseteq B''$，使得 $\mathrm{dist}_2(\mathbf{b}1, H) \geq \eta$ 且 $\mathrm{dist}_2(\mathbf{b}2, H) \geq \eta$。注意，$\mathbf{b}_1$ 和 $\mathbf{b}_2$ 位于超平面 H 的相对两侧（而不在超平面 H 本身上）。现在，我们可以选取点 $\mathbf{s}_1$,$\mathbf{s}_2 \in S$，使得$||\mathbf{s}_1 - \mathbf{b}_1|| \leq \varepsilon \leq \eta/2$ 且 $||\mathbf{s}_2 - \mathbf{b}_2|| \leq \varepsilon \leq \eta/2$。于是，$\mathbf{s}_1$ 必定位于与 $\mathbf{b}_2$ 相同的 H 一侧（且不在 H 本身上）；对 $\mathbf{s}_2$ 也同样如此。因此，$\mathbf{s}_1$ 和 $\mathbf{s}_2$ 位于 H 的相对两侧，即由 H 界定的两个开半空间中。所以，对于每个 $H \in \mathcal{H}$，由 H 界定的两个开半空间都各自包含 S 中至少一个点。

最后，我们定义 $B' = \mathrm{conv}(S)$ 为 S 的凸包。根据我们对 S 的假设，集合 B' 是一个有界的 $\mathbf{0}$-对称多胞体，且包含 $\mathbf{0}$ 于其内部。特别地， B' 是 d 维的
为验证 $d_H(B'', B') \leq \mu/2$，首先注意到 $B' = \mathrm{conv}(S) \subseteq \mathrm{conv}(B'') = B''$（因为 B'' 是一个凸集）。因此我们有 $\sup_{\mathbf{b}' \in B'} \inf_{\mathbf{b} \in B''} ||\mathbf{b} - \mathbf{b}'||_2 = 0 < \mu$。此外，对于每个 $\mathbf{b} \in B''$，存在一点 $\mathbf{b}' \in S \subseteq B'$，满足$||\mathbf{b} - \mathbf{b}'||_2 \leq \varepsilon \leq \mu/2$，从而 $\sup_{\mathbf{b} \in B''} \inf_{\mathbf{b}' \in B'} ||\mathbf{b} - \mathbf{b}'||_2 \leq \mu/2$。这表明确实有 $d_H(B'', B') \leq \mu/2$。
最后，还需验证 B' 的各个面直径均小于 μ。因此，假设 B' 有一个直径至少为 μ 的面。对于经过该面的（$d-1$）维超平面 H，集合 $H \cap B''$（包含该面）的直径至少为 μ。因此 $H \in \mathcal{H}$，但这意味着由 H 界定的两个开半空间都至少包含 $S \subseteq B'$ 中的一个点。这与 H 是经过 B' 的一个面的超平面这一事实相矛盾。因此， B' 的各个面确实都具有小于 μ 的直径。

□

引理 3.5。 设 $\delta > 0$，并设 B， $B' \in \mathcal{B}_d$ 满足 $d_H(B, B') \leq \delta$。那么，对于 B 边界上的每一点$\boldsymbol{x}$，都存在 B' 边界上的一点$\boldsymbol{y}$，使得 $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||_2 \leq \delta$。

证明。 根据$\mathbf{x}$ 相对于 B' 的位置，我们分三种情况讨论。首先，如果$\mathbf{x}$ 位于 B' 的边界上，则可取$\mathbf{y} = \mathbf{x}$，从而满足该引理中的陈述。
接下来，假设$\mathbf{x} \notin B'$。由于 $d_H(B, B') \leq \delta$，我们有 $\min_{\mathbf{y}' \in B'} ||\mathbf{x} - \mathbf{y}'||_2 = \inf_{\mathbf{y}' \in B'} ||\mathbf{x} - \mathbf{y}'||_2 \leq \delta$，因此存在一点$\mathbf{y}' \in B'$，使得 $||\mathbf{x} - \mathbf{y}'||_2 \leq \delta$。现在，考虑从$\mathbf{y}' \in B'$到$\mathbf{x} \notin B'$的直线段。该直线段必然包含 B' 边界上的某个点$\mathbf{y}$，且有$||\mathbf{x} - \mathbf{y}||_2 \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}'||_2 \leq \delta$。

最后，假设$\mathbf{x}$ 位于 B'的内部。回顾$\mathbf{x}$ 位于 B的边界上，令 H 为 B 在$\mathbf{x}$处的支撑超平面（这意味着 B 包含于由 H界定的两个闭半空间之一中

且$\mathbf{x}$ 位于 H上）。现在考虑一条与 H正交的射线，该射线以$\mathbf{x}$为起点，指向远离 B的方向。这条射线必定包含 B' 边界上的一点$\mathbf{y}$（因为射线的起点$\mathbf{x}$ 位于 B' 的内部，且 B' 是有界的）。如果 $||\mathbf{x}-\mathbf{y}||_2 > \delta$，那么，以$\mathbf{y}$ 为中心、半径为 δ 的闭欧几里得球与由 H 界定且包含 B的半空间不相交。因此 $\inf_{\mathbf{b}\in B}||\mathbf{b}-\mathbf{y}||_2 = \min_{\mathbf{b}\in B}||\mathbf{b}-\mathbf{y}||_2 > \delta$，这与我们的假设$d_H(B,B') \le \delta$相矛盾。因此必有 $||\mathbf{x}-\mathbf{y}||_2 \le \delta$。

□

4 具有许多特殊差向量的点集

以下两个引理分别概括了我们证明定理 1.1 和 1.3 的第一部分（另见第 2 节中的证明概述）。粗略地说，第一个引理指出，对于某个向量空间 V 上的一列向量 $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k$，以及 V 的任意子集，如果其中有许多差向量属于集合$\{\pm\mathbf{u}_1,\dots,\pm\mathbf{u}_k\}$，那么向量 $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k$ 之间必然存在大量线性依赖。更准确地说，这些向量 $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k$ 中某个较小子集的张成空间必然包含 $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k$ 中许多其他向量。

在下一节中，我们将应用引理 4.1 来完成定理 1.1 的证明，此时取 $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k$ 为某个范数下，在 $\mathbb{R}^d$ 中一个点集里构成单位距离的单位向量。如果这样的单位距离很多，那么该引理便意味着，向量 $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k$ 中某个较小子集的张成空间必然包含 $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k$ 中许多其他向量。第 5 节中，我们将证明（作为证明的第二部分），这是一种“特殊”性质，也就是说，大多数范数都不具备这种性质（更准确地说，具有这种性质的范数构成一个第一纲集）。

引理 *4.1.* 设 V 是 $\mathbb{Q}$ 上的一个向量空间，且 $u_1,\dots,u_k \in V$ 是 V 中的非零向量。设 $p_1,\dots,p_n \in V$ 是互不相同的向量，并考虑顶点集为 $\{1,\dots,n\}$ 的图，其中对于任意 x、$y \in \{1,\dots,n\}$，当且仅当 $p_x - p_y \in \{\pm u_1,\dots,\pm u_k\}$ 时，我们在顶点 x 和 y 之间画一条边。对于某个正整数 d，假设该图的边数多于 $\frac{d}{2}\cdot n\log n$。那么存在一个子集 $I \subseteq \{1,\dots,k\}$，使得对于至少 $d\cdot|I|+1$ 个指标 $\ell \in \{1,\dots,k\}$，有 $u_\ell \in$ 张成空间$\mathbb{Q}(u_i : i \in I)$。

我们将在本节稍后证明引理 4.1，然后在下一节中利用它证明定理 1.1。下面的引理将以类似方式用于证明定理 1.3。应用该引理时，我们将取 F 为由给定范数下一组 n 个点中出现的所有不同距离生成的 $\mathbb{Q}$ 的域扩张。

引理 *4.2*。设 $d \ge 1$ 为一个整数，且设 $0<\mu<1$。假设相对于 d 和 μ，n 足够大。设 $F \subseteq \mathbb{R}$ 为 $\mathbb{R}$ 的一个子域，且设 V 为 $\mathbb{R}$ 上的一个向量空间。设 $u_1,\dots,u_k \in V$ 为 V 中的非零向量，并设 $p_1,\dots,p_n \in V$ 为互不相同的向量，使得 $p_1,\dots,p_n$ 不全都位于 V 中的一条公共仿射直线上（将其视为 $\mathbb{R}$ 上的向量空间）。假设对于所有 x、$y \in \{1,\dots,n\}$，都有 $p_x - p_y \in$ 张成 $_F(u_i)$，其中某个 $i \in \{1,\dots,k\}$。那么存在一个子集 $I \subseteq \{1,\dots,k\}$，使得对于至少 $d\cdot|I| + (1-\mu)$ 个 $\cdot n+1$ 指标 $\ell \in \{1,\dots,k\}$，有 $u_\ell \in$ 张成 $_F(u_i : i \in I)$。

引理4.1和4.2的证明依赖于以下引理，我们先证明该引理。

引理 4.3。设 V 是域 F 上的向量空间，且 $\mathbf{u}_1$、.....、$\mathbf{u}_k \in V$ 是 V 中的线性无关向量。对于某个 $n \ge 1$，设 $\mathbf{p}_1$、.....、$\mathbf{p}_n \in V$ 为互不相同的向量，并设 G 是一个顶点集为 $\{1,\dots,n\}$ 的图，满足以下两个条件

- 对于图 G 的每条边 xy，都有 $\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y \in$张成空间$_F(\mathbf{u}_i)$ 对于某个 $i \in \{1,\dots,k\}$ 成立。
- 对于每个 $i \in \{1,\dots,k\}$，由所有满足 $\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y \in$张成空间$_F(\mathbf{u}_i)$ 的边 xy 构成的 G 子图是一个森林。

那么，图 G 至多有 $\frac{1}{2}\cdot n$对数 n 条边。

在证明这个引理时，我们将使用以下简单不等式。

引理 4.4。对于任意正　　整数 $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_\ell \geq 1$，若 $n = n_1 + \cdots + n_\ell$（且 $\ell \geq 1$），则有　　e

$$n_1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\ell} n_i \log n_i \geq n - \frac{1}{2} \cdot n \log n.$$

证明。回忆二元熵函数 $H(t) = -t\log t - (1-t)\log(1-t)$（其中 $t \in \in (0,1)$，且 $H(0) = H(1) = 0$）是区间 $[0,1]$ 上的凹函数。它与直线 $2-2t$ 相交于 $t = \frac{1}{2}$ 和 $t = 1$，因此对于 $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$，有 $H(t) \geq 2 - 2t$，从而 $t + \frac{1}{2}H(t) \geq 1$。

现在我们通过对 ℓ 进行归纳来证明所需的结论。对于 $\ell = 1$，有 $n_1 = n$，该结论显然成立。因此，假设 $\ell \geq 2$，并且我们已经证明了 $\ell - 1$ 的引理。现在，令 $n_1' = n_1 + n_\ell \leq 2n_1$，则有 $\frac{1}{2} \leq n_1/n_1' \leq 1$，因此

$$\begin{aligned} n_1 - \frac{1}{2}\cdot n_1 \log n_1 - \frac{1}{2}\cdot n_\ell \log n_\ell &= n_1 - \frac{1}{2}\cdot n_1' \cdot \log n_1' - \frac{1}{2}\cdot n_1 \cdot \log(n_1/n_1') - \frac{1}{2}\cdot n_\ell \cdot \log(n_\ell/n_1') \\ &= -\frac{1}{2}\cdot n_1' \cdot \log n_1' + n_1' \cdot \left(\frac{n_1}{n_1'} - \frac{1}{2}\cdot\frac{n_1}{n_1'}\cdot\log(n_1/n_1') - \frac{1}{2}\cdot\frac{n_\ell}{n_1'}\cdot\log(n_\ell/n_1')\right) \\ &= -\frac{1}{2}\cdot n_1' \cdot \log n_1' + n_1' \cdot \left(\frac{n_1}{n_1'} + \frac{1}{2}\cdot H(n_1/n_1')\right) \geq -\frac{1}{2}\cdot n_1' \cdot \log n_1' + n_1'. \end{aligned}$$

因此，

$$n_1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\ell} n_i \log n_i \geq n_1' - \frac{1}{2}\cdot n_1' \log n_1' - \sum_{i=2}^{\ell-1} n_i \log n_i \geq n - \frac{1}{2}\cdot n \log n,$$

其中，最后一个不等式是将归纳假设应用于 $n_1' \geq n_2 \geq \cdots \geq n_{\ell-1}$ 得到的（注意 $n_1' + n_2 + \cdots + n_{\ell-1} = (n_1 + n_\ell) + n_2 + \cdots + n_{\ell-1} = n$）。 □

现在，我们准备证明引理 4.3。

引理 4.3 的证明。我们将对 n 使用归纳法来证明该引理。如果 $n = 1$，则该图有 $0 = (1/2) \cdot 1 \cdot \log 1$ 条边。

因此，现在假设 $n \geq 2$，并且我们已经对 n 的所有更小值证明了该引理。令 G 为一个满足引理陈述的图。

如果图 G 不连通，那么我们可以将其分成两个不相连的部分，分别具有 $n_1 \geq 1$ 和 $n_2 \geq 1$ 个顶点（其中 $n_1 + n_2 = n$）。根据归纳假设，这两部分分别至多有 $(1/2) \cdot n_1 \log n_1$ 和 $(1/2) \cdot n_2 \log n_2$ 条边。因此，G 中的边总数至多为

$$\frac{1}{2}\cdot n_1 \log n_1 + \frac{1}{2}\cdot n_2 \log n_2 \leq \frac{1}{2}\cdot(n_1+n_2)\log n = \frac{1}{2}\cdot n \log n,$$

如我们所愿。因此，从现在起设 G 是连通的。

如果 G 没有边，则所需结论显然成立，因此设 G 至少有一条边 xy。于是存在某个指标 $i \in \{1,\ldots,k\}$，使得 $\mathsf{p}_x - \mathsf{p}_y \in$ 张成空间$_F(\mathsf{u}_i)$。重新标记后，不妨设 $i = k$，即不妨设 G 中至少存在一条边 xy，且 $\mathsf{p}_x - \mathsf{p}_y \in$ 张成空间$_F(\mathsf{u}_k)$。

现在，如果 $\mathsf{p}_x - \mathsf{p}_y \in \mathsf{span}_F(\mathsf{u}_k)$，我们就将 xy 中的任意一条边染成红色。于是，G中至少存在一条红边。我们注意到，根据引理 4.3陈述中关于图 G 的第二个条件，红边构成一个森林。

我们固定一个任意顶点 $z \in \{1,\dots,n\}$。由于 G 是连通的，每个顶点 $w \in \{1,\dots,n\}$ 都可以通过 G 中的某条路径从 z 到达。对于该路径上的每条边 xy，都有 $\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y \in \mathrm{span}_F(\mathbf{u}_i)$，其中某个 $i \in \{1,\dots,k\}$ 成立。现在，将路径上所有边 xy 对应的 $\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y$ 相加，得到表示 $\mathbf{p}_w = \mathbf{p}_z + a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_k\mathbf{u}_k$，其系数为 a_1、……、$a_k \in F$。由于向量 $\mathbf{u}_1$、……、$\mathbf{u}_k \in V$ 在 F 上线性无关，对于任意给定的 $w \in \{1,\dots,n\}$，这种表示都是唯一的。特别地，对于每个 $w \in \{1,\dots,n\}$，向量 $\mathbf{p}_w$ 恰好属于集合 $\mathbf{p}_z + a\mathbf{u}_k + F\mathbf{u}_1 + \cdots + F\mathbf{u}_{k-1}$ 中的一个，其中 $a \in F$。

这给出了顶点 $w \in \{1,\dots,n\}$ 的一个划分，将其分成集合 W_a，其中对于每个 $a \in F$，集合 W_a 由满足 $\mathbf{p}_w \in \mathbf{p}_z + a\mathbf{u}_k + F\mathbf{u}_1 + \cdots + F\mathbf{u}_{k-1}$ 的那些顶点 $w \in \{1,\dots,n\}$ 构成。注意，$\sum_{a\in F} |W_a| = n$。

如果 xy 是 G 中的一条非红边，则 x 和 y 必须属于同一个集合 W_a。事实上，对于某个 $i \in \{1,\dots,k\}$，我们有 $\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y \in$ 张成空间$_F(\mathbf{u}_i)$，因此，如果 $\mathbf{p}_x \in \mathbf{p}_z + a\mathbf{u}_k + F\mathbf{u}_1 + \cdots + F\mathbf{u}_{k-1}$，那么同样有 $\mathbf{p}_y \in \mathbf{p}_z + a\mathbf{u}_k + F\mathbf{u}_1 + \cdots + F\mathbf{u}_{k-1}$。因此，$G$ 的每条非红边都位于诱导子图 $G[W_a]$ 之一中，其中 $a \in F$ 满足 $W_a \neq \emptyset$。

回忆一下，G 的红边构成一片森林。我们断言，对于每个 $a \in F$，集合 W_a 中的顶点必定都属于红色森林的不同连通分支。事实上，假设存在矛盾，即对于某个 $a \in F$，有两个不同的顶点 w、$w' \in W_a$ 属于红色森林的同一个连通分支。那么 w 和 w' 可以通过一条红边路径连接起来，并且对于该路径上的所有边 xy，都有 $\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y \in$ 张成$_F(\mathbf{u}_k)$。对 w 与 w' 之间路径上的所有边求和，我们得到 $\mathbf{p}_w - \mathbf{p}_{w'} \in$ 张成$_F(\mathbf{u}_k)$。另一方面，由于 w、$w' \in W_a$，我们有 $\mathbf{p}_w$，$\mathbf{p}_{w'} \in \mathbf{p}_z + a\mathbf{u}_k + F\mathbf{u}_1 + \cdots + F\mathbf{u}_{k-1}$，因此 $\mathbf{p}_w - \mathbf{p}_{w'} \in$ 张成$_F($ $\mathbf{u}1, \dots, \mathbf{u}_{k-1})$。由于向量 $\mathbf{u}1, \dots, \mathbf{u}_k \in V$ 在 F 上线性无关，这意味着 $\mathbf{p}_w - \mathbf{p}_{w'} = \mathbf{0}$，这产生了矛盾（因为点 $\mathbf{p}1, \dots, \mathbf{p}_n$ 两两不同）。因此，对于每个 $a \in F$，W_a 中的顶点属于红色森林的不同连通分支。

回想一下，G中至少有一条红边，这条边的两个端点必定位于不同的集合W_a 和 $W_{a'}$中。因此，集合 W_a（$a \in F$）中至少有两个非空集合，并且由于 $\sum_{a\in F} |W_a| = n$，对于所有 $a \in F$都有$|W_a| < n$。

现在，我们可以对每个图 $G[W_a]$（$a \in F$）应用归纳假设，其中 $W_a \neq \emptyset$，从而得到：只要 $W_a \neq \emptyset$，就有 $e(G[W_a]) \leq \frac{1}{2} \cdot |W_a| \cdot \log |W_a|$。因此，$G$ 中的非红边数量至多为

$$\sum_{\substack{a\in F\\ W_a\neq\emptyset}} \frac{1}{2} \cdot |W_a| \cdot \log |W_a| = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a\in F\\ W_a\neq\emptyset}} |W_a| \cdot \log |W_a|.$$

令 $a^* \in F$，使得在集合 $|W_a|$（$a \in F$）中，$|W_{a^*}|$ 具有最大大小。于是，对于所有 $a \in F$，我们都有 $|W_a| \leq |W_{a^*}|$。

我们断言，G 中的红边数量至多为 $n - |W_{a^*}|$。事实上，W_{a^*} 中的顶点分别属于由红边构成的森林的不同连通分支。因此，该森林至少有 $|W_{a^*}|$ 个连通分支，因而至多有 $n - |W_{a^*}|$ 条边。

因此，G中的边总数（包括红边和非红边）有界为

$$e(G) \leq n - |W_{a^*}| + \frac{1}{2} \sum_{\substack{a\in F\\ W_a\neq\emptyset}} |W_a| \cdot \log |W_a| \leq n - \left(n - \frac{1}{2} \cdot n \log n\right) = \frac{1}{2} \cdot n \log n,$$

其中第二个不等式由引理 4.4 得出。 □

注记。对于每个为二的幂的 n，引理 4.3 的断言都是紧的，图 k维超立方体的一个一般嵌入说明了这一点。事实上，对于任意线性无关向量 $\mathbf{u}_1$，……，$\mathbf{u}_k$，

我们可以取 $\mathbf{p}_1$，……，$\mathbf{p}_n$，其中 $n = 2^k$ 是 $\{\mathbf{u}_1, \ldots\ldots, \mathbf{u}_k\}$ 的所有子集和。现在令 G 为 k维超立方体图（具有 $\frac{1}{2} \cdot 2^k k = \frac{1}{2} \cdot n \log\, n$ 条边），则引理 4.3 中的所有条件都得到满足（第二个条件中的每个森林都是一个完美匹配）。对于定理 1.1 的证明，我们只需要引理 4.3 的一个特殊情形，其中 G 仅由满足 $\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y \in \{\pm \mathbf{u}_1, \ldots\ldots, \pm \mathbf{u}_k\}$ 的边 xy 组成（此时，引理第二个条件中的每个森林都是由顶点不相交路径构成的集合）。在这种情况下，很容易看出，图 G 是由所有整数序列组成的无限图的子图：当且仅当两个序列除一个坐标外在所有坐标上都相等，且在该坐标上相差一时，这两个序列相邻。该图的一个含有 n 个顶点的子图所能拥有的最大边数的精确值，由 Bollobás 和 Leader 的等周不等式 [5, 定理 15]给出。它推出了该特殊情形下的引理断言，同时也为所有 n 的值（而不仅仅是二的幂）提供了紧的最优值。

引理4.1和4.2的证明所需的第二个要素如下。

引理 4.5. 设 V是域 F上的向量空间，并设 $\mathbf{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in V$是 V中的非零向量。设$d \geq 1$和 $m \geq 0$是整数，并假设对于每个子集 $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$，满足 $\mathbf{u}_\ell \in$张成空间$_F(\mathbf{u}_i \colon i \in I)$的指标至多有 $d \cdot |I| + m$个。对于某个实数 $M > 0$，设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$是区间 $[0, M]$中的实数。那么存在一个子集 $J \subseteq \{1, \ldots, k\}$，使得对于 $j \in J$，向量 $\mathbf{u}_j$线性无关（在 F上），并且

$$\sum_{j \in J} \lambda_j \geq \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k - m \cdot M}{d}.$$

证明。重新编号后，不失一般性，我们可以假设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$。现在，我们按如下方式构造一个由不同指标组成的序列 $j_1, \ldots, j_r \in \{1, \ldots, k\}$。对于任意 $s \geq 1$，在已经选定指标 $j_1, \ldots, j_{s-1}$后，若存在这样的指标，则取满足 $\mathbf{u}_{j_s} \notin$属于span$_F(\mathbf{u}_{j_1}, \ldots, \mathbf{u}_{j_{s-1}})$的最小指标 j_s。若不存在这样的指标，即 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in$不属于span$_F(\mathbf{u}_{j_1}, \ldots, \mathbf{u}_{j_{s-1}})$，则令 $r = s - 1$，终止序列 $j_1, \ldots, j_{s-1}$，不再选取后续项。注意，序列终止时，有 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in$不属于span$_F(\mathbf{u}_{j_1}, \ldots, \mathbf{u}_{j_r})$。将我们的假设应用于 $I = \{j_1, \ldots, j_r\}$，可得 $k \leq d \cdot |I| + m = d \cdot r + m$。

由于我们有 $\mathbf{u}_{j_i} \notin$ 张成空间$_F(\mathbf{u}_{j_1}, \ldots, \mathbf{u}_{j_{i-1}})$ 对于 $i = 1, \ldots, m$，向量 $\mathbf{u}_{j_1}, \ldots, \mathbf{u}_{j_m}$ 是线性无关的。

现在，我们断言，对于 $s = 1, \ldots, r$，有 $j_s \leq (s-1)d+m+1$。事实上，假设对于某个 $1 \leq s \leq m$，我们有 $j_s > (s-1)d+m+1$。根据 j_s的选取，这意味着 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{(s-1)d+m+1} \in$张成空间$_F(\mathbf{u}_{j_1}, \ldots, \mathbf{u}_{j_{s-1}})$。但这与我们对集合 $I = \{j_1, \ldots, j_{s-1}\}$的假设相矛盾。因此，对于 $s = 1, \ldots, r$，我们确实必须有 $j_s \leq (s-1)d+m+1$。

现在定义 $J = \{j_1, \ldots, j_r\}$。那么，对于 $j \in J$，向量 $\mathbf{u}_j$，即向量 $\mathbf{u}_{j_1}$、……、$\mathbf{u}_{j_r}$，是线性无关的。此外，为方便记号，定义 $0 = \lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \ldots$，我们有

$$d \cdot \sum_{j \in J} \lambda_j = d \cdot \sum_{s=1}^{r} \lambda_{j_s} \geq d \cdot \sum_{s=1}^{r} \lambda_{(s-1)d+m+1} \geq \sum_{s=1}^{r} (\lambda_{(s-1)d+1+m} + \cdots + \lambda_{sd+m}) = \lambda_{m+1} + \lambda_{m+2} + \cdots + \lambda_{rd+m}$$

这里，我们利用了对于 $s = 1$、……、r，$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$和 $j_s \leq (s-1)d + m + 1$。回顾 $k \leq rd + m$ 和 $0 = \lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \ldots$，我们可以得出

$$d \cdot \sum_{j \in J} \lambda_j \geq \lambda_{m+1} + \lambda_{m+2} + \cdots + \lambda_{rd+m} = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_m) \geq \lambda_1 + \cdots + \lambda_k - m \cdot M.$$

重新整理可得 $\sum_{j \in J} \lambda_j \geq (\lambda_1 + \cdots + \lambda_k - mM)/d$，如所要求。 □

注。引理 4.5 的断言也可以通过应用 Edmonds 和 Fulkerson 的拟阵划分定理 [15]以更简短的方式得到。为此，在集合

向量 $\{\mathbf{u}_1$、...、$\mathbf{u}_k\}$上定义 个拟阵 、...、。前 d 个拟阵 M_1、...、 M_d 中的每一个都是通常的线性独立拟阵：一个向量集合是独立的，当且仅当它是线性无关的。在最后一个拟阵 M_{d+1}中，一个集合是独立的，当且仅当它至多包含 m 个向量。如果向量的每个子集 I 至多张成 $d\cdot|I|+m$ 个向量，那么对于任意向量集合 J，按照 $d+1$ 个拟阵 M_1、...、 M_{d+1}计算的秩之和至少为 $|J|$。根据 Edmonds–Fulkerson 定理，这意味着集合 $\{\mathbf{u}_1$、...、$\mathbf{u}_k\}$ 可以被划分为 $d+1$ 个子集，其中一个子集的大小至多为 m，而所有其他子集都是由线性无关向量组成的集合。这显然给出了该引理的结论。

现在，让我们使用引理 4.3 和引理 4.5 来证明引理 4.1。

引理 4.1 的证明。 反设所需的子集 $I\subseteq\{1,\dots,k\}$ 不存在。那么，对于每个子集 $I\subseteq\{1,\dots,k\}$，我们都有 $\mathbf{u}_\ell\in$张成空间$_{\mathbb{Q}}(\mathbf{u}_i\colon i\in I)$，其中至多包含 $d\cdot|I|$ 个指标 $\ell\in\{1,\dots,k\}$。令 G' 为图，其顶点集为 $\{1,\dots,n\}$，如引理 4.1 的陈述中所述（其中，对于任意 x、$y\in\{1,\dots,n\}$，当且仅当 $\mathbf{p}_x-\mathbf{p}_y\in\{\pm\mathbf{u}_1,\dots,\pm\mathbf{u}_k\}$ 时，我们在顶点 x 和 y 之间画一条边）。此外，对于 $i=1$、...、k，令 λ_i 表示 G' 中满足 $\mathbf{p}_x-\mathbf{p}_y\in\{\pm\mathbf{u}_i\}$ 的边 xy 的数量。于是，根据我们关于 G' 的边数的假设，$\lambda_1+\cdots+\lambda_k\geq e(G')>\frac{d}{2}\cdot n\log n$。

现在，应用引理 4.5 于 $F=\mathbb{Q}$ 和 $m=0$，存在一个子集 $J\subseteq\{1,\dots,k\}$，使得对于 $j\in J$，向量 $\mathbf{u}_j$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关，并且 $\sum_{j\in J}\lambda_j\geq(\lambda_1+\cdots+\lambda_k)/d$。不妨设对于某个 $k'\in\{1,\dots,k\}$ 有 $J=\{1,\dots,k'\}$（否则重新标记指标）。于是向量 $\mathbf{u}_1$、...、$\mathbf{u}_{k'}$ 线性无关，且有 $\lambda_1+\cdots+\lambda_{k'}\geq(\lambda_1+\cdots+\lambda_k)/d>\frac{1}{2}\cdot n\log n$。

现在，将引理 4.3 应用于 $F=\mathbb{Q}$、线性无关向量 $\mathbf{u}1$、...、$\mathbf{u}_{k'}\in V$、与之前相同的 $\mathbf{p}1$、...、$\mathbf{p}_n\in V$，以及图 G；图 G 由 G' 得到，仅保留满足 $\mathbf{p}_x-\mathbf{p}_y\in\{\pm\mathbf{u}1$、...、$\pm\mathbf{u}_{k'}\}$ 的边 xy。注意，图 G 满足引理 4.3 中的两个条件。事实上，对于 G 的每条边 xy，都有 $\mathbf{p}_x-\mathbf{p}_y\in\{\pm\mathbf{u}_i\}\subseteq\text{span}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{u}_i)$，其中 $i\in\{1,\dots,k'\}$。此外，对于每个 $i\in\{1,\dots,k'\}$，满足 $\mathbf{p}_x-\mathbf{p}_y\in\text{span}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{u}_i)$ 的边 xy 恰好是满足 $\mathbf{p}_x-\mathbf{p}_y\in\{\pm\mathbf{u}_i\}$ 的边（由于 $\mathbf{u}1$、...、$\mathbf{u}_{k'}$ 线性无关，如果 $\mathbf{p}_x-\mathbf{p}_y\in\{\pm\mathbf{u}_j\}$ 对于 $j\neq i$ 成立，就不可能有 $\mathbf{p}_x-\mathbf{p}_y\in\text{span}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{u}_i)$），而这些边构成顶点不相交的路径集合，因而构成森林。因此，根据引理 4.3，图 G 至多有 $\frac{1}{2}\cdot n\log n$ 条边。另一方面，图 G 的边数为 $\lambda_1+\cdots+\lambda_{k'}>\frac{1}{2}\cdot n\log n$，因为对于每个 $i=1$、...、k'，G 中都有 λ_i 条边 xy 满足 $\mathbf{p}_x-\mathbf{p}_y\in\{\pm\mathbf{u}_i\}$。这就产生了矛盾，从而完成了引理 4.1 的证明。□

在引理 4.2 的证明中，我们还使用了 Ungar 证明的以下结果 [47]：该结果指出，对于 $\mathbb{R}^t$ 中任意 n 个不同点，若这些点不全在同一直线上，则这些点对至少确定 $n-1$ 个不同的直线方向。

定理 4.6 ([47])。 给定 n 个不同点 $\mathbf{p}1$，.....，$\mathbf{p}_n\in\mathbb{R}^t$，若它们不全在同一直线上，则 $\mathbb{R}^t$ 中至少有 $n-1$ 个不同的一维线性子空间可表示为 张成空间$_{\mathbb{R}}(\mathbf{p}_x-\mathbf{p}y)$，其中 $1\leq x<y\leq n$。

我们指出，Ungar 的结果实际上略强一些，即当 n 为偶数时，他证明了至少有 n 个不同的直线方向（而不仅仅是 $n-1$ 个）；在这一更强的版本中，他的界是紧的。最后，让我们利用引理 4.3、引理 4.5 和定理 4.6 来证明引理 4.2。

引理 4.2 的证明。令 $m=\lceil(1-\mu)\cdot n\rceil\leq n$，我们要证明存在一个子集 $I\subseteq\{1,\dots,k\}$，使得 $\mathbf{u}_\ell\in$张成空间$_F(\mathbf{u}_i\colon i\in I)$ 至少包含 $d\cdot|I|+m+1$ 个指标 $\ell\in\{1,\dots,k\}$。假设所需的子集 $I\subseteq\{1,\dots,k\}$ 不存在。则对于每个子集 $I\subseteq\{1,\dots,k\}$，$\mathbf{u}_\ell\in$张成空间$_F(\mathbf{u}_i\colon i\in I)$ 至多包含 $d\cdot|I|+m$ 个指标 $\ell\in\{1,\dots,k\}$。

我们可以假设，对于每个 $i\in\{1,\dots,k\}$，都存在互不相同的 x、$y\in\{1,\dots,n\}$，使得 $\mathbf{p}_x-\mathbf{p}_y\in$张成空间$_F(\mathbf{u}_i)$；否则，我们只需省略所有不满足此条件的指标 i，并对剩余指标重新编号。

根据定理 4.6，至少有 $n-1$ 个不同的直线方向位于张成空间$\mathbb{R}(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n) \subseteq V$中，并出现在满足 $1 \le x < y \le n$ 的差向量 $\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y$ 中。对于这些差向量中的每一个，都有 $\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y \in$ 张成空间$_F(\mathbf{u}_i)$，其中 $i \in \{1,\ldots,k\}$满足该关系。因此，至少有 $n-1$ 个不同的向量 $\mathbf{u}_i$，所以 $k \ge n-1$。

现在，我们按如下方式递归地构造一个由互不相同的指标 $j_1,\ldots,j_r \in \{1,\ldots,k\}$ 组成的序列。令 $s \ge 1$，并假设我们已经选取了指标 $j_1,\ldots,j_{s-1}$。现在考察点集 $\{\mathbf{p}1,\ldots,\mathbf{p}_n\} \subseteq V$在投影映射 $V \to V/\mathrm{span}_F(\mathbf{u}_{j_1},\ldots,\mathbf{u}_{j_{s-1}})$ 下的像。对于该像中的每个点，选取一个原像 $\mathbf{p}_h$，并令 $H_{s-1} \subseteq \{1,\ldots,n\}$ 为这些原像所对应的指标 $h \in \{1,\ldots,n\}$ 组成的集合。于是，$|H_{s-1}|$恰好等于 $\{\mathbf{p}1,\ldots,\mathbf{p}_n\}$在 $V/\mathrm{span}_F(\mathbf{u}_{j_1},\ldots,\mathbf{u}_{j_{s-1}})$中的像的大小；并且对于每个 $x \in \{1,\ldots,n\}$，恰好存在一个 $h \in H_{s-1}$，使得 $\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_h \in \mathrm{span}_F(\mathbf{u}_{j_1},\ldots,\mathbf{u}_{j_{s-1}})$。如果存在一个指标 $i \in \{1,\ldots,k\}$，使得在顶点集 H_{s-1} 上存在一个至少具有 $\frac{3d}{\mu}$ 条边的森林，并且对于该森林的每条边 xy，都有 $\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y \in \mathrm{span}_F(\mathbf{u}_i)$，那么就选取这样的指标 i，并定义 $j_s = i$。如果不存在这样的指标 $i \in \{1,\ldots,k\}$，则令 $r = s-1$，从而终止序列 $j_1,\ldots,j_{s-1}$，不再选取后续项。

回顾一下，对于 $s = 0$、.....、r，我们定义了 $H_s \subseteq \{1,\ldots,n\}$，使得 $|H_s|$ 是点集 $\{\mathbf{p}_1$、.....、$\mathbf{p}_n\} \subseteq V$ 在投影映射 $V \to V/\mathrm{span}_F(\mathbf{u}_{j_1}$、.....、$\mathbf{u}_{j_s})$ 下的像的大小，并且对于每个 $x \in \{1,\ldots,n\}$，恰好存在一个 $h \in H_s$，使得 $\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_h \in \mathrm{span}_F(\mathbf{u}_{j_1}$、.....、$\mathbf{u}_{j_s})$。特别地，我们有 $n = |H_0| \ge |H_1| \ge \cdots \ge |H_r| \ge 1$。下面的断言给出了我们的序列 j_1、.....、j_r 的长度上界。

断言1： 我们有 $r \le \frac{\mu}{3d} \cdot n$。

证明。为了证明该断言，只需证明对于 $s = 1$、.....、r，有 $|H_s| \le |H_{s-1}| - \frac{3d}{\mu}$。事实上，这样我们就有 $1 \le |H_r| \le |H_0| - r \cdot \frac{3d}{\mu} = n - r \cdot \frac{3d}{\mu}$，从而可推出 $r \le \frac{\mu}{3d} \cdot n$。

因此令 $s \in \{1,\ldots,r\}$，并考虑集合 $H_{s-1} \subseteq \{1,\ldots,n\}$。点集 $\{\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n\}$ 在商空间 $V' = V/\mathrm{span}_F(\mathbf{u}_{j_1},\ldots,\mathbf{u}_{j_{s-1}})$ 中的像，与点集 $\{\mathbf{p}_h\colon\ h \in H_{s-1}\}$ 在该商空间 V' 中的像相同。

现在，$|H_s|$是该像在由 $V' \to V'/\mathrm{span}_F(\mathbf{u}_{j_s}) = V/\mathrm{span}_F(\mathbf{u}_{j_1},\ldots,\mathbf{u}_{j_s})$ 给出的附加投影下的大小。回顾 j_s 的定义，在顶点集 H_{s-1} 上存在一片森林，至少有 $3d/\mu$ 条边，使得对于森林的每条边 xy，都有 $\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y \in \mathrm{span}_F(\mathbf{u}_{j_s})$。对于每条这样的边 xy，点 $\mathbf{p}_x$ 和 $\mathbf{p}_y$ 在 $V'/\mathrm{span}_F(\mathbf{u}_{j_s})$ 中具有相同的像。因此，对于这片森林的每个连通分支，相应的点 $\mathbf{p}_x$ 都映射到 $V'/\mathrm{span}_F(\mathbf{u}_{j_s})$ 中的同一个点。由于该森林至少有 $\frac{3d}{\mu}$ 条边，因此它至多有 $|H_{s-1}| - \frac{3d}{\mu}$ 个连通分支。因此，点集$\{\mathbf{p}_h\colon\ h \in H_{s-1}\}$在 $V'/\mathrm{span}_F(\mathbf{u}_{j_s})$ 中的像的大小至多为 $|H_{s-1}| - \frac{3d}{\mu}$，这意味着确实有 $|H_s| \le |H_{s-1}| - \frac{3d}{\mu}$。 □

断言2: 我们有 $|H_r| > \frac{\mu}{3d} \cdot n$。

证明。假设$|H_r| \le \frac{\mu}{3d} \cdot n$，以便导出矛盾。固定一个指标 $h^* \in H_r$。那么，对于每个$h \in H_r$，根据引理 4.2 中的假设，我们可以选择一个指标 $i(h) \in \{1,\ldots,k\}$，使得 $\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_{h^*} \in$张成空间$_F(\mathbf{u}_{i(h)})$。现在，定义 $I = \{j_1,\ldots,j_r\} \cup \{i(h)\colon\ h \in H_r\}$，利用断言1，我们有 $|I| \le r + |H_r| \le 2 \cdot \frac{\mu}{3d} \cdot n$。

注意，现在对于所有 $h \in H_r$，我们都有 $\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_{h^*} \in$张成空间$_F(\mathbf{u}_i\colon\ i \in I)$。此外，对于每个 $x \in \{1,\ldots,n\}$，都存在某个 $h \in H_r$，使得 $\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_h \in$张成空间$_F(\mathbf{u}_{j_1},\ldots,\mathbf{u}_{j_r}) \subseteq$张成空间$_F(\mathbf{u}_i\colon\ i \in I)$。这意味着，对于所有 $x \in \{1,\ldots,n\}$，都有 $\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_{h^*} = \mathbf{p}_x - \mathbf{p}_h + \mathbf{p}_h - \mathbf{p}_{h^*} \in$张成空间$_F(\mathbf{u}_i\colon\ i \in I)$。因此，对于所有 $x,y \in \{1,\ldots,n\}$，我们得到 $\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y = \mathbf{p}_x - \mathbf{p}_{h^*} - (\mathbf{p}_y - \mathbf{p}_{h^*}) \in$张成空间$_F(\mathbf{u}_i\colon\ i \in I)$

现在，我们断言，对于所有 $\ell \in \{1,\ldots,k\}$，都有 $\mathbf{u}_\ell \in$张成空间$_F(\mathbf{u}_i\colon\ i \in I)$。事实上，对于每个 $\ell \in \{1,\ldots,k\}$，我们假设存在两个不同的指标 $x,y \in \{1,\ldots,k\}$，使得 $\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y \in$张成空间$_F(\mathbf{u}_\ell)$。由于 $\mathbf{p}_x \ne \mathbf{p}_y$，这意味着对于某个 $t \in F \setminus \{0\}$，有 $\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y = t\mathbf{u}_\ell$。但现在我们有 $t\mathbf{u}_\ell = \mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y \in$ 张成空间 $_F(\mathbf{u}_i\colon\ i \in I)$，这意味着 $\mathbf{u}_\ell \in$ 张成空间 $_F(\mathbf{u}_i\colon\ i \in I)$，正如所断言的那样。

因此，满足 $\mathbf{u}_\ell \in$ 张成空间$_F(\mathbf{u}_i\colon\ i \in I)$ 的指标 $\ell \in \{1,\dots,k\}$ 的数量为

$$k \geq n-1 \geq \frac{2\mu}{3}\cdot n + \lceil (1-\mu)\cdot n\rceil + 1 = d\cdot\frac{2\mu}{3d}\cdot n + m + 1 \geq d\cdot|I| + m + 1,$$

如果相对于 μ 而言， n 足够大。这与我们的假设相矛盾，即不存在这样的集合 I。 □

现在，对于每个 $i=1$，.....， k，让我们在顶点集 H_r 上选取一个森林 G_i，使其边数尽可能多，并且对于森林的每条边 xy，都有 $\mathbf{p}_x-\mathbf{p}_y \in$ 张成空间$_F(\mathbf{u}_i)$。令 λ_i 为该森林的边数，并注意到，根据我们对序列 j_1，.....， j_r 的构造（更确切地说，根据该序列在 j_r 处终止这一事实）， $\lambda_i \leq \frac{3d}{\mu}$。特别地，森林 G_i 至多有 $2\lambda_i$ 个非孤立顶点。

回顾一下，对于任意一对 $(x,y) \in H_r\times H_r$，满足 $x\neq y$，都有 $\mathbf{p}_x-\mathbf{p}_y \in$ 张成空间$_F(\mathbf{u}_i)$，其中某个 $i\in\{1,\dots,k\}$ 成立。我们断言，对于每个 $i\in\{1,\dots,k\}$，至多有 $(2\lambda_i)^2$ 对 $(x,y)\in H_r\times H_r$ 满足 $x\neq y$，使得 $\mathbf{p}_x-\mathbf{p}_y \in$ 张成空间$_F(\mathbf{u}_i)$。事实上，对于任意这样的数对 (x,y)，顶点 x 和 y 必须位于森林 G_i 的同一个连通分支中（否则我们就可以将边 xy 加入森林 G_i，这将与我们选择森林 G_i 的方式相矛盾）。由于 $x\neq y$，这意味着 x 和 y 都是 G_i 中的非孤立顶点，因此 x 至多有 $2\lambda_i$ 种选择， y 至多有 $2\lambda_i$ 种选择。所以，对于每个 $i\in\{1,\dots,k\}$，确实至多有 $(2\lambda_i)^2$ 对 $(x,y)\in H_r\times H_r$ 满足 $x\neq y$，并且有 $\mathbf{p}_x-\mathbf{p}_y \in$ 张成空间$_F(\mathbf{u}_i)$。

由于对于每一对 $|H_r|\cdot(|H_r|-1)$ $(x,y)\in H_r\times H_r$ 且满足 $x\neq y$，都存在一个指标 $i\in\{1,\dots,k\}$，使得 $\mathbf{p}_x-\mathbf{p}_y \in$ 张成空间$_F(\mathbf{u}_i)$，因此我们可以得出结论：

$$\frac{|H_r|^2}{2} \leq |H_r|\cdot(|H_r|-1) \leq \sum_{i=1}^{k}(2\lambda_i)^2 = 4\cdot\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2 \leq \frac{12d}{\mu}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i.$$

这里我们用到了 $|H_r| > \frac{\mu}{3d}\cdot n \geq 2$，这由断言2可知；还用到了 $\lambda_i \leq \frac{3d}{\mu}$ 当 $i=1$、.....、 k。重新整理可得 $\lambda_1+\cdots+\lambda_k \geq \frac{\mu}{24d}\cdot|H_r|^2$。

现在让我们在 $M=\frac{3d}{\mu}$ 的条件下应用引理 4.5，并回顾我们的假设：对于每个子集 $I\subseteq\{1,\dots,k\}$，我们有 $\mathbf{u}_\ell \in$ 张成空间$_F(\mathbf{u}_i\colon\ i\in I)$，对于至多 $d\cdot|I|+m$ 个指标 $\ell\in\{1,\dots,k\}$。根据引理 4.5，存在一个子集 $J\subseteq\{1,\dots,k\}$，使得当 $j\in J$ 时，向量 $\mathbf{u}j$ 在 F 上线性无关，并且

$$\sum_{j\in J}\lambda_j \geq \frac{\lambda_1+\cdots+\lambda_k - m\cdot\frac{3d}{\mu}}{d} \geq \frac{\frac{\mu}{24d}\cdot|H_r|^2 - n\cdot\frac{3d}{\mu}}{d}.$$

根据断言2，我们有 $n\cdot\frac{3d}{\mu} \leq \left(\frac{3d}{\mu}\right)^2\cdot|H_r| \leq \frac{\mu}{48d}\cdot|H_r|^2$ 如果 n（因此 $|H_r|\geq\frac{\mu}{3d}\cdot n$ 也）相对于 d和 μ足够大。那么我们可以得出

$$\sum_{j\in J}\lambda_j \geq \frac{\frac{\mu}{24d}\cdot|H_r|^2 - n\cdot\frac{3d}{\mu}}{d} \geq \frac{\frac{\mu}{48d}\cdot|H_r|^2}{d} = \frac{\mu}{48d^2}\cdot|H_r|^2.$$

最后，设 G 为通过取森林 G_j 中 $j\in J$的所有边所得到的图。由于向量 $\mathbf{u}j$ for$j\in J$ 在 F上是线性无关的，这些森林的边集两两不相交，因此 G 有$\sum_{j\in J}\lambda_j \geq \frac{\mu}{48d^2}\cdot|H_r|^2$ 条边。另一方面， G 满足引理 4.3中的假设，因此引理 4.3意味着 G 至多有$\frac{1}{2}\cdot|H_r|\log|H_r|$ 条边。因此，

$$\frac{\mu}{48d^2}\cdot|H_r|^2 \leq e(G) \leq \frac{1}{2}\cdot|H_r|\log|H_r|,$$

如果 n （因此$|H_r|\geq\frac{\mu}{3d}\cdot n$ 也）相对于 d 和 μ 足够大，这就构成矛盾。 □

5 定理的证明　　定理 1.1 和 1.3：大多数范数只有少数特殊距离

固定 $d \geq 2$。回顾一下， $\mathcal{B}_d$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中所有闭、有界、**0**-对称凸体的集合，且 **0** 位于其内部。集合 $B \in \mathcal{B}_d$ 与 $\mathbb{R}^d$ 上的范数 $||.||$ 一一对应（对于 $\mathbb{R}^d$ 上的每个范数 $||.||$，我们将其单位球所对应的集合记为 $B \in \mathcal{B}_d$ ）。

令 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_d$ 为所有这样的 $B \in \mathcal{B}_d$ 的集合：它们作为 $||.||$ 上某个范数 $\mathbb{R}^d$ 的单位球出现，并且存在某个 $n \geq 1$，使得 $\mathbb{R}^d$ 中存在 n 个点，依据范数 $||.||$ 有超过 $\frac{d}{2} \cdot n\log\ n$ 个单位距离。为了证明定理 1.1，我们需要证明 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_d$ 是一个第一纲集。

对于定理 1.3，令 $\mu > 0$，并令 $n_0(d, \mu) > 1/\mu$，使得引理 4.2 中的陈述对所有 $n \geq n_0(d, \mu)$ 都成立。现在，令 $\mathcal{A}^*_\mu \subseteq \mathcal{B}_d$ 为所有这样的 $B \in \mathcal{B}_d$ 的集合：它们作为 $||.||$ 上某个范数 $\mathbb{R}^d$ 的单位球出现，并且对于某个 $n \geq n_0(d, \mu)$，$\mathbb{R}^d$ 中存在 n 个点，依据范数 $||.||$ 至多有 $(1-\mu) \cdot n$ 个不同距离。为了证明定理 1.3，只需证明 $\mathcal{A}^*_\mu \subseteq \mathcal{B}_d$ 是一个第一纲集。事实上，这样一来，对于 $\mathbb{R}^d$ 上的大多数范数，以下说法成立：对所有 $n \geq n_0(d, \mu)$，$\mathbb{R}^d$ 中任意 n 个点至少产生 $(1-\mu) \cdot n$ 个不同距离。这意味着不同距离的数量具有 $(1 - o(1)) \cdot n$ 的形式。

让我们在定理 1.1 的情形下定义 $m = 0$，并在定理 1.3 的情形下定义 $m = \lceil (1-\mu)n \rceil$。

为了证明 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}^*_\mu$ 是第一纲集，我们需要证明 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}^*_\mu$ 可以被 $\mathcal{B}_d$ 的无处稠密子集的可数并覆盖。我们将考虑适当定义的子集 $\mathcal{A}_{A,\eta} \subseteq \mathcal{B}_d$，它们由一个 $(d\ell + m + 1) \times \ell$ 矩阵 A（其中 ℓ 为正整数）以及某个有理数 $0 < \eta < \pi/2$ 编号。在定理 1.1 的情形下，即为了覆盖集合 $\mathcal{A}$，我们将考虑有理矩阵 $A \in \mathbb{Q}^{(d\ell+m+1)\times\ell}$。在定理 1.3 的情形下，即为了覆盖集合 $\mathcal{A}^*_\mu$，我们的矩阵 A 的元素将属于函数域 $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_m)$（即属于具有 m 个变量且系数为有理数的有理函数域）。在这两种情形下， A 的元素均从一个可数域中选取，因此这样的 A 和 η 只有可数种选择。因此，只需证明 $\mathcal{A} \subseteq \bigcup_{A,\eta} \mathcal{A}_{A,\eta}$ 或 $\mathcal{A}^*_\mu \subseteq \bigcup_{A,\eta} \mathcal{A}_{A,\eta}$（分别）成立，并证明每个集合 $\mathcal{A}_{A,\eta} \subseteq \mathcal{B}_d$ 在 $\mathcal{B}_d$ 中都是无处稠密的。

现在定义我们的集合 $\mathcal{A}_{A,\ \eta} \subseteq \mathcal{B}_d$，首先从定理 1.1 的情形开始（回忆一下，此时 $m = 0$）。给定一个有理数（$d\ell + 1$）$\times\ \ell$ 矩阵 $A = (a_{ji})$，以及一个有理数 $0 < \eta < \pi/2$，令 $\mathcal{A}_{A,\ \eta} \subseteq \mathcal{B}_d$ 由 $\mathbb{R}^d$ 上所有满足以下条件的范数 $||.||$ 的单位球 $B \in \mathcal{B}_d$ 组成：存在单位向量 $\mathbf{u}_1$、...、$\mathbf{u}_{d\ell+1} \in \mathbb{R}^d$（即端点位于 B 的边界上的向量），使得：

- $\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{\ell} a_{ji}\mathbf{u}_i$ 对于 $j = 1$、...、$d\ell + 1$。
- 对于所有 $1 \leq i < j \leq d\ell + 1$，直线 $\text{span}_{\mathbb{R}}(\mathbf{u}_i)$ 与直线 $\text{span}_{\mathbb{R}}(\mathbf{u}_j)$ 之间的角大于 η。

在定理 1.3 的情形下，给定一个（$d\ell + m + 1$）$\times\ \ell$ 矩阵 $A = (a_{ji})$，其元素属于 $\mathbb{Q}$（x_1、...、x_m），以及一个有理数 $0 < \eta < \pi/2$，令 $\mathcal{A}_{A,\ \eta} \subseteq \mathcal{B}_d$ 由 $\mathbb{R}^d$ 上所有满足以下条件的范数 $||.||$ 的单位球 $B \in \mathcal{B}_d$ 组成：存在 z_1、...、$z_m \in \mathbb{R}$ 以及单位向量 $\mathbf{u}_1$、...、$\mathbf{u}_{d\ell+m+1} \in \mathbb{R}^d$（即端点位于 B 的边界上的向量），使得以下三个条件成立：

- 对于矩阵 A 的每个条目 $a_{ji} \in \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_m)$，求值 $a_{ji}(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{R}$ 都有定义（即 a_{ji} 的分母多项式在 $(z_1, \ldots, z_m)$ 处求值不为零）。
- $\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{\ell} a_{ji}(z_1, \ldots, z_m)\mathbf{u}_i$ 对于 $j = 1, \ldots, d\ell + m + 1$.
- 对于所有 $1 \leq i < j \leq d\ell + m + 1$，两条直线 $\text{span}_{\mathbb{R}}(\mathbf{u}_i)$ 和 $\text{span}_{\mathbb{R}}(\mathbf{u}_j)$ 之间的角大于 η。

为了证明定理 1.1 和 1.3，只需证明每个集合 $\mathcal{A}_{A,\eta}$ 都是无处稠密的，并且 $\mathcal{A} \subseteq \bigcup_{A,\eta} \mathcal{A}_{A,\eta}$ 以及 $\mathcal{A}^*_\mu \subseteq \bigcup_{A,\eta} \mathcal{A}_{A,\ \eta}$分别如此。这些陈述将构成下面各引理的内容。

引理 5.1。 在定理 *1.1* 的情形下，我们有 $\mathcal{A} \subseteq \bigcup_{A,\ \eta} \mathcal{A}_{A,\ \eta}$，其中并集遍历所有有理 $(d\ell + 1) \times \ell$ 矩阵 $A \in \mathbb{Q}^{(d\ell+1)\times\ell}$、所有正整数 ℓ以及所有有理数 $0 < \eta < \pi/2$。

证明。设 $B \in \mathcal{A}$。则 B 是 $\mathbb{R}^d$ 上的一个范数 $||.||$ 的单位球，并且具有如下性质：存在不同点 $\mathbf{p}_1$、...、$\mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^d$，使得按照范数 $||.||$，点 $\mathbf{p}_1$、...、$\mathbf{p}_n$之间的单位距离超过 $\frac{d}{2} \cdot n \log n$。现在，令 $\mathbf{u}_1$、...、$\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^d$，其中 $||\mathbf{u}_1|| = \cdots = ||\mathbf{u}_k|| = 1$ 是对应于点 $\mathbf{p}_1$、...、$\mathbf{p}_n$之间单位距离的单位向量（符号任意选取）。注意，$\mathbf{u}_1$、...、$\mathbf{u}_k$是沿不同方向的非零向量（即，对于 $i = 1$、...、k，直线 $\text{span}_{\mathbb{R}}(\mathbf{u}_i)$ 彼此不同）。

现在将 $\mathbb{R}^d$ 视为一个关于 $\mathbb{Q}$ 的（无限维）向量空间，并应用引理 4.1。按照引理的表述，考虑顶点集为 $\{1, \ldots, n\}$ 的图，其中对于任意 x、$y \in \{1, \ldots, n\}$，当且仅当 $\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y \in \{\pm\mathbf{u}_1, \ldots..., \pm\mathbf{u}_k\}$ 时，我们在顶点 x 和 y 之间画一条边。于是，这些边恰好对应于点 $\mathbf{p}_1$，.....，$\mathbf{p}_n$ 按照 $||.||$ 定义的单位距离，因此该图有多于 $\frac{d}{2} \cdot n \log n$ 条边。由此，根据引理 4.1，存在一个子集 $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$，使得对于至少 $d \cdot |I| + 1$ 个指标 $j \in \{1, \ldots, k\}$，有 $\mathbf{u}_j \in$张成空间$_{\mathbb{Q}}(\mathbf{u}_i : i \in I)$。注意，我们必须有 $I \neq \emptyset$，因为 $\mathbf{u}_1$，.....，$\mathbf{u}_k$ 是非零向量。

重新标记指标后，不妨设 $I = \{1, \ldots, \ell\}$ 对于某个整数 $\ell \geq 1$成立，并且 $\mathbf{u}_1$、.....、$\mathbf{u}_{d\ell+1} \in$张成空间$_{\mathbb{Q}}(\mathbf{u}_i : i \in I)$ =张成空间$_{\mathbb{Q}}$($\mathbf{u}_1$、.....、$\mathbf{u}_\ell$)。于是，我们可以找到系数 $a_{ji} \in \mathbb{Q}$，使其对应于 $j = 1$、.....、$d\ell+1$ 以及 $i = 1$、.....、ℓ，从而对所有 $j = 1$、.....、$d\ell + 1$，均有 $\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{\ell} a_{ji}\mathbf{u}_i$。
现在，我们可以取 A 为一个（$d\ell + 1$）矩阵，其元素对于 $j = 1$、.....、$d\ell + 1$ 以及 $i = 1$、.....、ℓ为 a_{ji}。此外，考虑直线 $\text{span}_{\mathbb{R}}(\mathbf{u}_i)$，其中 $i = 1$、.....、$d\ell + 1$，并选择 $0 < \eta < \pi/2$ 为有理数，且小于这些直线中任意两条之间的角。于是，根据范数 $||.||$，$\mathbf{u}_1$、.....、$\mathbf{u}_{d\ell+1}$ 是单位向量，使得对所有 $j = 1$、.....、$d\ell + 1$，均有 $\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{\ell} a_{ji}\mathbf{u}_i$；并且对于所有 $1 \leq i < j \leq d\ell + 1$，直线 $\text{span}_{\mathbb{R}}(\mathbf{u}_i)$ 与 $\text{span}_{\mathbb{R}}(\mathbf{u}_j)$ 之间的角大于 η。这意味着，该范数$||.||$ 的单位球 B 属于$\mathcal{A}_{A,\ \eta}$，正如所要求的那样。

□

引理 5.2。 在定理 *1.3* 的设定下，我们有 $\mathcal{A}^*_\mu \subseteq \bigcup_{A,\ \eta} \mathcal{A}_{A,\ \eta}$，其中并集取遍所有 （$d\ell$+$m$+1）×$\ell$ 矩阵 $A \in \mathbb{Q}$（x_1，.....，x_m）$^{(d\ell+m+1)\times\ell}$，对所有正整数 ℓ 以及所有有理数 $0 < \eta < \pi/2$均如此。

证明。设 $B \in \mathcal{A}^*_\mu$。则 B 是 $\mathbb{R}^d$ 上的某个范数 $||.||$ 的单位球，该范数具有如下性质：对于某个 $n \geq n_0(d,\ \mu)$，存在 $_n \in \mathbb{R}^d$个不同点 $\mathbf{p}1$，.....，$\mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^d$，使得按照范数 $||.||$ 计算的点 $\mathbf{p}1$，.....，$\mathbf{p}_n$之间的不同距离至多为（$1-\mu$）$\cdot n \leq m$ 个。现在，令 $\mathbf{u}1$，.....，$\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^d$ 为连接点 $\mathbf{p}1$，.....，$\mathbf{p}_n$之间所有差向量的方向上的单位向量，并任意选取其符号，使 $||\mathbf{u}_1|| = \cdots = ||\mathbf{u}_k|| = 1$；再令 z_1，.....，$z_m > 0$ 为满足 $||\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y|| \in \{z_1, \ldots, z_m\}$（对所有不同的 x，$y \in \{1, \ldots, n\}$）的正实数。注意，对于所有不同的 x，$y \in \{1, \ldots, n\}$，都有 $\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y = \pm z_j\mathbf{u}_i$，其中某个 $j \in \{1, \ldots, m\}$ 和 $i \in \{1, \ldots, k\}$ 满足该式。定义 $F = \mathbb{Q}$（z_1，.....，z_m）$\subseteq \mathbb{R}$ 为由 z_1，.....，z_m 生成的 $\mathbb{Q}$ 的域扩张，则对于所有不同的 x，$y \in \{1, \ldots, n\}$，都有 $\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y$ 属于 $_F(\mathbf{u}_i)$，其中某个 $i \in \{1, \ldots, k\}$ 满足该式。此外，注意到 $\mathbf{u}1$，.....，$\mathbf{u}_k$ 是方向各不相同的非零向量（即，经过 $\mathbf{u}1$，.....，$\mathbf{u}_k$ 的直线各不相同）。

如果所有点 $\mathbf{p}_1$、...、$\mathbf{p}_n$都位于 $\mathbb{R}^d$ 中的一条公共（仿射）直线上，那么根据范数 $||.||$，这些点之间至少有 $n-1$ 个不同距离。然而，我们有 $n-1 > (1-\mu) \cdot n$（因为 $n \geq n_0(d, \mu) > 1/\mu$），所以这将导致矛盾。因此，点 $\mathbf{p}_1$、...、$\mathbf{p}_n$ 不全都位于 $\mathbb{R}^d$ 中的一条公共直线上。

将引理 4.2 应用于 $V = \mathbb{R}^d$ 和 $F = \mathbb{Q}$（z_1，...，z_m）$\subseteq \mathbb{R}$，存在一个子集 $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$，使得对于至少 $d \cdot |I| +$（$1-\mu$）$\cdot n + 1$ 个指标 $j \in \{1, \ldots, k\}$，有 $\mathbf{u}_j \in$张成空间$_F(\mathbf{u}_i : i \in I)$。由于这类指标的数量是一个整数，且 $m = \lceil (1-\mu)\ n \rceil$，所以对于至少 $d \cdot |I| + m + 1$ 个指标$j \in \{1, \ldots, k\}$，有 $\mathbf{u}_j \in$张成空间$_F(\mathbf{u}_i : i \in I)$。注意，由于 $\mathbf{u}_1$、...、$\mathbf{u}_k$ 是非零向量，我们必有 $I \neq \emptyset$。

如有必要，重新标记指标后，我们可以假设 $I = \{1, \ldots, \ell\}$ 对某个整数 $\ell \geq 1$成立，并且 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{d\ell+m+1} \in$张成空间$_F(\mathbf{u}_i : i \in I)$ =张成空间$_F(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_\ell)$。于是，我们可以找到系数 $a^*_{ji} \in F =$$\mathbb{Q}(z_1, \ldots, z_m)$，使得对于 $j = 1, \ldots, d\ell + m + 1$ 和 $i = 1, \ldots, \ell$，有 $\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{\ell} a^*_{ji}\mathbf{u}_i$。对于每个这样的系数 $a^*_{ji} \in \mathbb{Q}(z_1, \ldots, z_m)$，我们都可以选取一个有理函数 $a_{ji} \in \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_m)$，使得 $a_{ji}(z_1, \ldots, z_m) = a^*_{ji}$（即，将 $z_1, \ldots, z_m$ 代入抽象变量时，a_{ji} 的求值为 a^*_{ji}

$x_1, \ldots, x_m$ 属于函数域 $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_m)$）。特别要注意，对于$j = 1, \ldots, d\ell + m + 1$ 和 $i = 1, \ldots, \ell$，所有求值 $a_{ji}(z_1, \ldots, z_m)$ 都是有定义的。

现在我们可以令 A 为一个具有如下元素的（$d\ell + m + 1$）$\times \ell$矩阵：对于 $j = 1$，……，$d\ell + m + 1$ 以及 $i = 1$，……，ℓ，其元素为 a_{ji}。此外，考虑直线 $\text{span}_{\mathbb{R}}(\mathbf{u}_i)$（其中 $i = 1$，……，$d\ell + m + 1$），并选择 $0 < \eta < \pi/2$ 为有理数，且小于这些直线中任意两条之间的角。于是，根据范数 $||.||$，$\mathbf{u}_1$，……，$\mathbf{u}_{d\ell+m+1}$ 都是单位向量，使得 $\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{\ell} a_{ji}^* \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{\ell} a_{ji}(z_1, \ldots, z_m)\mathbf{u}_i$ 对所有 $j = 1$，……，$d\ell + m + 1$ 成立，并且对于所有 $1 \le i < j \le d\ell + m + 1$，直线 $\text{span}_{\mathbb{R}}(\mathbf{u}_i)$ 与 $\text{span}_{\mathbb{R}}(\mathbf{u}_j)$ 之间的角大于 η。这意味着，该范数 $||.||$ 的单位球 B 属于 $\mathcal{A}_{A,\,\eta}$，正如所要求的那样。 □

还需证明，$\mathcal{A}_{A,\,\eta}$ 中的每个集合在 $\mathcal{B}_d$中都是无处稠密的。这正是下面引理的内容。

引理 5.3。 设 $\ell > 0$ 为一个整数， $0 < \eta < \pi/2$ 为一个有理数， A 为一个$(d\ell + m + 1) \times \ell$矩阵，其元素属于 $\mathbb{Q}$ 或属于 $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_m)$。则$\mathcal{A}_{A,\,\eta}$在 $\mathcal{B}_d$中是无处稠密的。

证明。 如引理陈述中所述，固定矩阵 $A = (a_{ji})$和 $0 < \eta < \pi/2$。为证明$\mathcal{A}_{A,\,\eta}$ 在 $\mathcal{B}_d$中是无处稠密的，我们需要证明：对于每个 $B_0 \in \mathcal{B}_d$ 和每个 $\varepsilon > 0$，存在 $B \in \mathcal{B}_d$ 和 $\delta > 0$，使得 $d_H(B, B_0) < \varepsilon$，并且不存在满足 $d_H(B, B') < \delta$的 $B' \in \mathcal{B}_d$属于$\mathcal{A}_{A,\,\eta}$。因此，固定 $B_0 \in \mathcal{B}_d$。只需对较小的 $\varepsilon > 0$ 证明所需结论（注意，如果该结论对某个 $\varepsilon > 0$成立，那么对任何更大的 ε 也成立）。

回忆一下， $B_0 \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个闭的、有界的、关于$\mathbf{0}$对称的凸体，其内部包含$\mathbf{0}$。由于后一个条件，存在某个 $s > 0$，使得对于 B_0边界上的所有$\mathbf{b}$，都有 $||\mathbf{b}||_2 \ge 2s$。如有需要，通过取更小的 ε，我们可以假设 $\varepsilon < s$。

根据引理 3.4，应用于 $\mu = \min\{\varepsilon/2, s \cdot \sin(\eta/3)\}$，我们可以用一个有界的关于$\mathbf{0}$对称的多胞体 B_1 逼近 B_0，该多胞体的内部包含$\mathbf{0}$，并满足 $d_H(B_0, B_1) < \varepsilon/2$，且 B_1 的所有面直径至多为$s \cdot \sin(\eta/3)$（相对于欧几里得距离）。根据引理 3.5， B_1 边界上的每一点$\mathbf{b}$ 到 B_0边界上某一点的欧几里得距离至多为 $\varepsilon/2 < s$。特别地，对于 B_1 边界上的所有$\mathbf{b}$，都有 $||\mathbf{b}||_2 \ge s$ （因此 B_1 包含以原点为中心、半径为 s 的欧氏球）。

现在选择形如 $|\mathbf{o}_i \cdot \mathbf{x}| \le s_i$（其中 $i = 1, \ldots, h$）的线性不等式组来描述多胞体B_1（其对应的向量 $\mathbf{o}_1, \ldots, \mathbf{o}_h \in \mathbb{R}^d$均为非零向量，且 $s_1, \ldots, s_h > 0$为实数）。更正式地说， B_1是所有满足 $|\mathbf{o}_i \cdot \mathbf{x}| \le s_i$（其中 $i = 1, \ldots, h$）的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ 的集合。通过对这些不等式进行缩放，可以选择向量 $\mathbf{o}_1, \ldots, \mathbf{o}_h \in \mathbb{R}^d$，使得 $||\mathbf{o}_1||_2 = \cdots = ||\mathbf{o}_h||_2 = 1$。由于 B_1包含以原点为中心、半径为 s的欧氏球，因此对于 $i = 1, \ldots, h$，有 $s_i \ge s$。

注意，从几何上看，可以将 $\mathbf{o}_1, \ldots, \mathbf{o}_h$ 视为与 B_1的各个面（或平行的面）正交的（欧氏）单位向量。此外，注意 B_1 边界上的每个点 $\mathbf{b}$ 都满足：对于某个 $i \in \{1, \ldots, h\}$，有 $|\mathbf{o}_i \cdot \mathbf{b}| = s_i$。

在定理 1.1 的设定下（其中 $m = 0$和 A的各项属于 $\mathbb{Q}$），如果存在互不相同的指标 $\varphi(1)$、…、$\varphi(d\ell + 1) \in \{1, \ldots, h\}$ 以及向量 $\mathbf{u}_1$、…、$\mathbf{u}_{d\ell+1} \in \mathbb{R}^d$，满足以下两个条件，我们称一个 h-元组（t_1、…、t_h）$\in \mathbb{R}^h$是可实现的：

（a）$\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{\ell} a_{ji}\mathbf{u}_i$，其中 $j = 1$、…、$d\ell + 1$；以及（b） $|\mathbf{o}_{\varphi(j)} \cdot \mathbf{u}_j| = t_{\varphi(j)}$，其中 $j = 1$、…、$d\ell + 1$。

直观地说，如果存在一个解（$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{d\ell+1}$）满足矩阵 A 所规定的线性方程，使得将 $d\ell + 1$ 个向量 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{d\ell+1}$ 代入为 $i \in \{1, \ldots, h\}$ 所选取的某组 $d\ell + 1$ 个不同表达式 $|\mathbf{o}_i \cdot \mathbf{x}|$ 后，得到（$t_1, \ldots, t_h$）中相应的各项，那么一个 h 元组（ $t_1, \ldots, t_h$ ）就是可实现的。这

将在我们的论证中以下述方式发挥作用：我们将考虑多胞体 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \ |\mathbf{o}_i \cdot \mathbf{x}| \leq t_i \ (\ i = 1, \ldots, h\})$，（注意，当 $(t_1, \ldots, t_h)$ 接近 $(s_1, \ldots, s_h)$ 时，可以将其视为多胞体 $B_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \ |\mathbf{o}_i \cdot \mathbf{x}| \leq s_i \ i = 1 \ (h\})$ 的一个扰动）。只要存在一个满足 A 所规定的线性方程的解 $(\mathbf{u}1, \ldots, \mathbf{u}_{d\ell+1})$，使得 $\mathbf{u}1, \ldots, \mathbf{u}_{d\ell+1}$ 分别位于该多胞体的不同面上，那么 h 元组 $(t_1, \ldots, t_h)$ 就必定是可实现的（事实上，每个 $\mathbf{u}_j$ 都满足 $|\mathbf{o}_i \cdot \mathbf{u}_j| = t_i$，其中索引 i 对应于包含 $\mathbf{u}_j$ 的面）。启发式地说，我们将证明只有少数 h 元组是可实现的，因此可以避免这种情况。

在定理 1.3 的设定下（其中 $m = \lceil (1-\mu)n \rceil$ 且 A 的各项属于 $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_m)$），如果存在互不相同的指标 $\varphi(1) \ldots, \varphi(d\ell + m + 1) \in \{1, \ldots, h\}$、实数 $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{R}$ 以及向量 $\mathbf{u}1, \ldots, \mathbf{u}_{d\ell+m+1} \in \mathbb{R}^d$，满足以下三个条件，则称一个 h-元组 $(t_1, \ldots, t_h) \in \mathbb{R}^h$ 是可实现的：

(o) 对于矩阵 A 的每个条目 $a_{ji} \in \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_m)$，求值 $a_{ji}(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{R}$ 有明确定义。(a) $\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{\ell} a_{ji}(z_1, \ldots, z_m)\mathbf{u}_i$ 对于 $j = 1, \ldots, d\ell + m + 1$，以及 (b) $|\mathbf{o}_{\varphi(j)} \cdot \mathbf{u}_j| = t_{\varphi(j)}$ 对于 $j = 1, \ldots, d\ell + m + 1$。

再次直观地说，如果存在线性方程组的一个解（$\mathbf{u}1, \ldots, \mathbf{u}_{d\ell+m+1}$），其中该线性方程组由矩阵 A 规定，并且矩阵中的各项在（$z_1, \ldots, z_m$）处取值，使得向量 $\mathbf{u}1, \ldots, \mathbf{u}_{d\ell+m+1}$ 对于不同的指标选择都满足 $|\mathbf{o}_i \cdot \mathbf{u}_j| = t_i$，则称一个 h-元组（$t_1, \ldots, t_h$）是可实现的。这与上文在定理 1.1的情形中所说明的意义相同。

对于单射 $\varphi : \{1, \ldots, d\ell + m + 1\} \to \{1, \ldots, h\}$，如果存在向量 $\mathbf{u}1, \ldots, \mathbf{u}_{d\ell+1} \in \mathbb{R}^d$（以及实数 $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{R}$）满足上述条件（更准确地说，满足定理 1.1情形下的条件 (a) 至 (b)，以及定理 1.3情形下的条件 (o) 至 (b)），则称 $(t_1, \ldots, t_h) \in \mathbb{R}^h$ 是 φ-可实现的。于是，$(t_1, \ldots, t_h)$ 是可实现的，当且仅当对于某个单射 $\varphi : \{1, \ldots, d\ell + m + 1\} \to \{1, \ldots, h\}$，它是 φ-可实现的。

直观地说，下面的两个断言表明，在我们的两种设定中，只有极少数 h-元组 $(t_1, \ldots, t_h) \in \mathbb{R}^h$ 是可实现的。

断言1： 在定理 1.1 的设定中，所有可实现的 h-元组 $(t_1, \ldots, t_h) \in \mathbb{R}^h$ 都可以被 $\mathbb{R}^h$ 中有限多个 $(h-1)$ 维线性超平面覆盖。

证明。由于可选取的单射 $\varphi : \{1, \ldots, d\ell + 1\} \to \{1, \ldots, h\}$ 只有有限种可能，因此只需证明，对于每个这样的函数 φ，所有 φ-可实现的 h-元组 $(t_1, \ldots, t_h) \in \mathbb{R}^h$ 都可以被 $\mathbb{R}^h$ 中有限多个 $(h-1)$ 维线性超平面覆盖。于是，我们固定一个单射函数 $\varphi : \{1, \ldots, d\ell + 1\} \to \{1, \ldots, h\}$。

若 $(t_1, \ldots, t_h) \in \mathbb{R}^h$ 是 φ-可实现的，则存在向量 $\mathbf{u}1, \ldots, \mathbf{u}_{d\ell+1} \in \mathbb{R}^d$ 满足上述条件 (a) 和 (b)。根据 (b)，对于每个 $j = 1, \ldots, d\ell + 1$，我们有 $\mathbf{o}_{\varphi(j)} \cdot \mathbf{u}_j = t_{\varphi(j)}$ 或 $\mathbf{o}_{\varphi(j)} \cdot \mathbf{u}_j = -t_{\varphi(j)}$。注意，进行这些符号选择共有 $2^{d\ell+1}$ 种可能。固定这些符号选择后，我们可以将每个 $t_{\varphi(j)}$（对于 $j = 1, \ldots, d\ell + 1$）表示为 $\mathbf{u}_j$ 各项的线性函数（其系数由固定向量 $\mathbf{o}_{\varphi(j)}$ 的各项给出）。然而，根据 (a)，对于 $j = 1, \ldots, d\ell + 1$，每个向量 $\mathbf{u}_j$ 的各项都可以表示为 $\mathbf{u}1, \ldots, \mathbf{u}_\ell$ 各项的线性函数（其系数由固定矩阵 $A = (a_{ji})$ 的各项给出）。因此，对于 $j = 1, \ldots, d\ell + 1$，每个 $t_{\varphi(j)}$ 都可以表示为 $\mathbf{u}1, \ldots, \mathbf{u}_\ell \in \mathbb{R}^d$ 各项的线性函数。这些 ℓ 个向量总共有 $d\ell$ 个分量，所以对于 $j = 1, \ldots, d\ell + 1$，每个 $t_{\varphi(j)}$ 都是相同的 $d\ell$ 个实变量的线性函数。由于 $d\ell$ 个变量的所有线性函数构成的空间维数只有 $d\ell$，因此，表示 $t_{\varphi(j)}$（对于 $j = 1, \ldots, d\ell + 1$）的 $d\ell + 1$ 个线性函数必然线性相关。换言之，对于条件 (b) 中的每种 $2^{d\ell+1}$ 种符号选择，我们都能得到 $t_{\varphi(j)}$（对于 $j = 1, \ldots, d\ell + 1$）各个取值之间的线性关系。每个这样的线性关系都对应于 $\mathbb{R}^h$ 中的一个 $(h-1)$ 维线性超平面。因此，$\in \mathbb{R}^h$ 中所有 φ-可实现的 h-元组 $(t_1, \ldots, t_h)$ 都可以被 $\mathbb{R}^h$ 中的 $2^{d\ell+1}$ 个线性超平面覆盖。

□

断言2: 在定理 1.3 的设定下，所有可实现的 h-元组 $(t_1,\dots,t_h)\in\mathbb{R}^h$ 都可以被有限个非零多项式 $P\in\mathbb{R}[y_1,\dots,y_h]$的零点集 $\{(y_1,\dots,y_h)\in\mathbb{R}^h\colon P(y_1,\dots,y_h)=0\}$ 覆盖。

证明。 再次，能够选择单射 $\varphi\colon\{1,\dots,d\ell+m+1\}\to\{1,\dots,h\}$ 的可能性只有有限种，因此只需证明：对于每个这样的单射，所有 φ-可实现的 h-元组 $(t_1,\dots,t_h)\in\mathbb{R}^h$ 都可以被有限个非零多项式的零点集覆盖。于是我们固定一个单射 $\varphi\colon\{1,\dots,d\ell+m+1\}\to\{1,\dots,h\}$。

如果 $(t_1,\dots,t_h)\in\mathbb{R}^h$ 是 φ-可实现的，则存在满足上述条件 (o) 至 (b) 的向量 $\mathbf{u}1,\dots,\mathbf{u}_{d\ell+1}\in\mathbb{R}^d$。根据 (b)，对于每个 $j=1,\dots,d\ell+m+1$，都有 $\mathbf{o}^{\varphi(j)}\cdot\mathbf{u}_j=t_{\varphi(j)}$ 或 $\mathbf{o}^{\varphi(j)}\cdot\mathbf{u}_j=-t_{\varphi(j)}$。注意到，进行这些符号选择共有 $2^{d\ell+m+1}$ 种可能。固定符号选择后，我们可以将每个 $t_{\varphi(j)}$ （对于$j=1,\dots,d\ell+m+1$）表示为 $\mathbf{u}^j$ 的各个分量的线性函数（具有实系数），其中系数由固定向量 $\mathbf{o}^{\varphi(j)}$ 的各个分量给出。然而，根据 (a)，对于 $j=1,\dots,d\ell+m+1$，每个向量 $\mathbf{u}^j$ 的各个分量都可以表示为 $z_1,\dots,z_m$ 以及 $\mathbf{u}1,\dots,\mathbf{u}_\ell$ 的各个分量的有理函数（其中这些有理函数由固定矩阵 $A=(a_{ji})$ 的各个分量决定）。因此，对于 $j=1,\dots,d\ell+m+1$，每个 $t_{\varphi(j)}$ 都可以表示为 $z_1,\dots,z_m$ 以及 $\mathbf{u}1,\dots,\mathbf{u}_\ell\in\mathbb{R}^d$ 的各个分量的有理函数（具有实系数）。变量$z_1,\dots,z_m$与 ℓ 个向量 $\mathbf{u}1,\dots,\mathbf{u}_\ell\in\mathbb{R}^d$ 的 $d\ell$ 个分量合计共有 $d\ell+m$ 个变量，而对于 $j=1,\dots,d\ell+m+1$，每个$t_{\varphi(j)}$ 都是这 $d\ell+m$ 个变量的有理函数（具有实系数）；其中，有理函数的系数完全由固定向量 $\mathbf{o}1,\dots,\mathbf{o}_h$ 以及固定矩阵$A\in\mathbb{Q}(x_1,\dots,x_m)^{(d\ell+m+1)\times\ell}$决定。根据事实 3.1，存在一个关于 $d\ell+m+1$ 个变量的非零实多项式 P，将描述 $t_{\varphi(1)},\dots,t_{\varphi(d\ell+m+1)}$ 的有理函数代入 P 后，所得表达式为零。这个多项式 P完全由 $\mathbf{o}1,\dots,\mathbf{o}_h$、 $A\in\mathbb{Q}(x_1,\dots,x_m)^{(d\ell+m+1)\times\ell}$ （以及我们此前作出的符号选择）决定，并且有 $P(t_{\varphi(1)},\dots,t_{\varphi(d\ell+m+1)})=0$。因此，对于条件 (b) 中的每一种 $2^{d\ell+m+1}$符号选择，我们都得到一个非零多项式 $P\in\mathbb{R}[y_1,\dots,y_h]$，使得对于每个 $(t_1,\dots,t_h)\in\mathbb{R}^h$，只要它在这些条件 (b) 的符号选择下是 φ-可实现的，就有 $P(t_1,\dots,t_h)=0$。所以，所有 φ-可实现的 h-元组 $(t_1,\dots,t_h)\in\mathbb{R}^h$ 都可以被 $2^{d\ell+m+1}$ 个非零多项式 $P\in\mathbb{R}[y_1,\dots,y_h]$的零点集覆盖。

□

由于 B_1 有界，存在某个 $c>0$，使得对于所有 $\mathbf{b}\in B_1$，都有 $||\mathbf{b}||_2\le c$。对于任意 $(t_1,\dots,t_h)\in\mathbb{R}^h_{>0}$，我们可以考虑多胞体 $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d\colon$ 对于 $i=1,\dots,h\}$，$|\mathbf{o}_i\cdot\mathbf{x}|\le t_i$。该多胞体各个面的最大（欧几里得）直径关于 $(t_1,\dots,t_h)$ 连续变化（事实上，对于每个 $j=1,\dots,h$，使 $\mathbf{o}^j\cdot\mathbf{x}$ 最大的那些 $\mathbf{x}\in\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$ 的子集 $|\mathbf{o}_i\cdot\mathbf{x}|\le t_i$（其中 $i=1,\dots,h\}$）的直径关于 $(t_1,\dots,t_h)$ 连续变化）。注意，当 $(t_1,\dots,t_h)=(s_1,\dots,s_h)$ 时，该多胞体恰好是 B_1，因此其所有面的直径均至多为 $s\cdot\sin(\eta/3)$（相对于欧几里得距离）。于是我们可以选择某个 $0<\varepsilon'<\frac{\varepsilon s}{2c}$，使得对于每个 $(t_1,\dots,t_h)\in\mathbb{R}^h_{>0}$，当 $s_i\le t_i\le s_i+\varepsilon'$for $i=1,\dots,h$ 时，多胞体$\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d\colon|\mathbf{o}_i\cdot\mathbf{x}|\le t_i$for $i=1,\dots,h\}$ 的所有面的直径均至多为 $s\cdot\sin(\eta/2)$（相对于欧几里得距离）。

根据断言1或断言2，可实现的 h 元组（t_1，...，t_h）$\in\mathbb{R}^h$ 可以被 $\mathbb{R}^h$ 中有限个（$h-1$）维线性超平面覆盖，或者被 $\mathbb{R}^h$ 中有限个非零多项式的零点集覆盖。令 H 为这些超平面的并集，或这些多项式的零点集的并集。无论哪种情况， $H\subseteq\mathbb{R}^d$ 都是一个闭集，而 H 不可能包含整个盒 $[s_1,s_1+\varepsilon']\times\cdots\times[s_h,s_h+\varepsilon']$。因此，存在一个 h 元组（t_1，...，t_h）$\notin H$，使得对于 $i=1$，...，h，均有 $s_i\le t_i\le s_i+\varepsilon'$。

由于（t_1，...，t_h）$\notin H$且 H是闭集，因此存在某个 $0<\delta'<\varepsilon'/2$，使得对于满足 $|t'_i-t_i|\le\delta'$且 $i=1$，...，h 的所有（t'_1，...，t'_h），我们也有（t'_1，...，t'_h）$\notin H$（从几何上看， δ'是 ℓ_∞-范数下以（t_1，...，t_h）为中心、且与 H不相交的某个球的半径）。这意味着不存在满足 $|t'_i-t_i|\le\delta'$且 $i=1$，...，h的可实现（t'_1，...，t'_h）。

现在定义

$$B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{o}_i \cdot \mathbf{x}| \le t_i \text{ for } i = 1, \dots, h\}$$

是由线性不等式组 $|\mathbf{o}_i \cdot \mathbf{x}| \le t_i$ for $i = 1, \dots, h$描述的凸的0-对称多胞体。由于 $t_i \ge s_i \ge s > 0$ for $i = 1, \dots, h$，多胞体 B 包含以原点为中心、半径为 s 的欧氏球，特别是 B 在其内部包含 $\mathbf{0}$。此外， B 是有界的，因为它包含于 $\max\{t_1/s_1, \dots, t_h/s_h\}B_1$ 之内（后者是有界的）。因此，我们有 $B \in \mathcal{B}_d$。

由于 $s_i \le t_i \le s_i + \varepsilon'$ for $i = 1, \dots, h$，根据 ε' 的选择，我们知道多胞体 B 的所有面直径至多为 $s \cdot \sin(\eta/2)$（相对于欧几里得距离）。

我们断言 $d_H(B, B_1) \le \varepsilon/2$。首先，注意到

$$B_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{o}_i \cdot \mathbf{x}| \le s_i \text{ for } i = 1, \dots, h\} \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{o}_i \cdot \mathbf{x}| \le t_i \text{ for } i = 1, \dots, h\} = B,$$

由于 $s_i \le t_i$ 对于 $i = 1, \dots, t$成立。因此，对于每个 $\mathbf{b}' \in B_1$，我们有 $\inf_{\mathbf{b} \in B} ||\mathbf{b}' - \mathbf{b}||_2 = 0$。此外，对于每个$\mathbf{b} \in B$，我们有

$$\left|\mathbf{o}_i \cdot \frac{s}{s + \varepsilon'}\mathbf{b}\right| = \frac{s}{s + \varepsilon'} \cdot |\mathbf{o}_i \cdot \mathbf{b}| \le \frac{s}{s + \varepsilon'} \cdot t_i \le \frac{s}{s + \varepsilon'} \cdot (s_i + \varepsilon') \le s_i$$

对于 $i = 1, \dots, h$。因此，令 $\mathbf{b}' = \frac{s}{s+\varepsilon'}\mathbf{b}$，我们有 $\mathbf{b}' \in B_1$，并且 $||\mathbf{b} - \mathbf{b}'||_2 = \frac{\varepsilon'}{s} \cdot ||\mathbf{b}'||_2 \le \frac{\varepsilon' c}{s} < \varepsilon/2$，其中利用了 $||\mathbf{b}'||_2 \le c$（因为 $\mathbf{b}' \in B_1$）以及 $\varepsilon' < \frac{\varepsilon s}{2c}$。这表明，对于所有 $\mathbf{b} \in B$，$\inf_{\mathbf{b}' \in B_1} ||\mathbf{b}' - \mathbf{b}||_2 < \varepsilon/2$。因此，我们确实有 $d_H(B, B_1) \le \varepsilon/2$。

现在，由于 $d_H(B, B_1) \le \varepsilon/2$ 以及 $d_H(B_0, B_1) < \varepsilon/2$，根据三角不等式，我们有 $d_H(B, B_0) < \varepsilon$。为了完成引理 5.3 的证明，我们现在证明存在某个 $\delta > 0$，使得不存在满足$d_H(B, B') < \delta$的 $B' \in \mathcal{B}_d$ 属于 $\mathcal{A}_{A,\eta}$。

取 δ，使得 $0 < \delta < \delta'$，并取足够小的 $s \cdot$，使得 $(\eta/2\sin(+2\delta)\ /)s - \delta(\le)\ \eta\sin' \in \mathbb{R}^d$。我们声称，对于同一个 δ 的任意两个点 b、b B，如果它们到 $\mathbb{R}$ 的同一个面的欧几里得距离至多为 $\mathbb{R}$，那么直线 span′(b) 与 span η(b B) 之间的角至多为 $s \cdot$。事实上，回忆一下，$\eta/2$ 的每个面直径至多为 $||\sin(-)$，由三角不等式可得 $'||_2 \le 2\delta + s \cdot$ b $\eta/2$b$\mathbb{R}\sin(\mathbb{R})$。因此，直线 span′(b) 与 span $||$(b $-$) 之间的角的正弦至多为 $'||_2/||\mathbf{b}||_2 \le$b$s \cdot$ b$\eta/2(+2\delta\sin(/)s - \delta) \le (\eta)\ \ ||\sin||_2 \ge s - \delta$（注意到 B b s，因为 δ 包含以原点为中心、半径为 B 的欧氏球，而 b 到 $\mathbb{R}$ 的边界距离至多为 $\mathbb{R}$）。因此，这确实表明直线 span′(b) 与 span η(b) 之间的角至多为 。

还需证明不存在满足 $< \delta$ 且属于 $\mathcal{A}_{A,\eta}$ 的 $B' \in \mathcal{B}_d$with $d_H(B, B')$。反设存在某个 $B' \in \mathcal{A}_{A,\eta}$，使得 $d_H(B, B') < \delta$。根据 $\mathcal{A}_{A,\eta}$ 的定义，这意味着存在向量 u1, $\dots$, u$_{d\ell+m+1} \in \mathbb{R}^d$，其端点位于 B' 的边界上，并且对于所有$1 \le i < j \le d\ell + m + 1$，由 u$_i$ 张成的直线 span$_{\mathbb{R}}$(u$_i$) 与由 u$_j$ 张成的直线 span$_{\mathbb{R}}$(u$_j$) 之间的角大于 η。此外，在定理 1.1 的情形下（其中 $m = 0$），对于 $j = 1, \dots, d\ell + 1$，我们有 $\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{\ell} a_{ji}\mathbf{u}_i$。在定理 1.3 的情形下，我们还有 $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{R}$，使得对于 A 的所有条目 a_{ji}，$a_{ji}(z_1, \dots, z_m)$ 有定义，并且对于 $j = 1, \dots, d\ell + m + 1$，有 $\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{\ell} a_{ji}(z_1, \dots, z_m)\mathbf{u}_i$。注意，这意味着在定理 1.1 的情形下，条件 (a) 得到满足；而在定理 1.3 的情形下，条件 (o) 和 (a) 得到满足。

将 u1, $\dots$, u$_{d\ell+m+1}$ 视为 $\mathbb{R}^d$ 中位于 B' 边界上的点，根据引理 3.5，存在位于 B 边界上的点 b1, $\dots$, b $_{d\ell+m+1} \in \mathbb{R}^d$，使得 $||\mathbf{u}_j - \mathbf{b}_j||_2 < \delta$，其中 $j = 1, \dots, d\ell + m + 1$（回顾一下，$d_H(B', B) < \delta$）。我们声称，点 b1, $\dots$, b$_{d\ell+m+1}$ 中任意两个点都不可能位于多胞体 B 的同一个面上或相对面上。事实上，如果其中两个点 b$_j$ 和 b$_{j'}$ （满足 $j \ne j'$ ）位于同一个面上，那么根据 δ 的选择，直线 span$_{\mathbb{R}}$(u$_i$) 与直线 span$_{\mathbb{R}}$(u$_j$) 之间的角至多为 η。同样地，如果 b$_j$ 和 b$_{j'}$ （满足 $j \ne j'$ ）位于相对面上，那么 b$_j$ 和 $-$b$_{j'}$ 将位于同一个面上，因此直线 span$_{\mathbb{R}}$(u$_i$) 与直线 span$_{\mathbb{R}}(-$u$_j)$ $=$span$_{\mathbb{R}}$(u$_j$) 之间的角也至多为 η。无论哪种情况，这都是一个

与向量 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{d\ell+m+1}$ 所满足条件相矛盾的矛盾。因此，点 $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{d\ell+m+1}$ 中任意两个点都不可能位于多胞体 B 的同一个面上或相对面上。

由于$\mathbf{b}_1$、.....、$\mathbf{b}_{d\ell+m+1}$位于 $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$的边界上： $|\mathbf{o}_i \cdot \mathbf{x}| \leq t_i$对于 $i = 1$、.....、 $h\}$，对于每个 j =1、.....、$d\ell + m + 1$，我们都可以找到某个 $\varphi(j) \in \{1, \ldots, h\}$，使得 $|\mathbf{o}^{\varphi(j)} \cdot \mathbf{b}_j| = t_{\varphi(j)}$。由于点$\mathbf{b}_1$、.....、$\mathbf{b}_{d\ell+m+1}$中没有两个位于 B的同一个面上或相对面上，因此指标 $\varphi(1)$、.....、 $\varphi(d\ell+m+1) \in \{1, \ldots, h\}$必须各不相同，从而它们定义了一个单射 φ： $\{1, \ldots, d\ell + m + 1\} \to \{1, \ldots, h\}$。

对于 $j = 1$、.....、 $d\ell + m + 1$，定义 $t'_{\varphi(j)} = |\mathbf{o}^{\varphi(j)} \cdot \mathbf{u}_j|$。由于 $||\mathbf{u}j - \mathbf{b}_j||_2 < \delta < \delta'$且 $||\mathbf{o}_{\varphi(j)}||_2 = 1$，对于 $j = 1$、.....、 $d\ell + m + 1$，我们有 $|t'_{\varphi(j)} - t_{\varphi(j)}| \leq |\mathbf{o}^{\varphi(j)} \cdot \mathbf{u}j - \mathbf{o}^{\varphi(j)} \cdot \mathbf{b}_j| \leq ||\mathbf{o}_{\varphi(j)}||_2 \cdot ||\mathbf{u}j - \mathbf{b}_j||_2 < \delta'$。对于每个$i \in \{1, \ldots, h\} \setminus \{\varphi(1)$、.....、 $\varphi(d\ell + m + 1)\}$，定义 $t'_i = t_i$。于是，$(t'_1$、.....、 $t'_h) \in \mathbb{R}^h$满足 $|t'_i - t_i| < \delta'$对于$i = 1$、.....、 h，因此根据我们对 δ'的选择， h-元组$(t'_1$、.....、 $t'_h)$不可实现。

另一方面，向量 $\mathbf{u}_1$、.....、$\mathbf{u}_{d\ell+m+1} \in \mathbb{R}^d$满足 $|\mathbf{o}^{\varphi(j)} \mathbf{u}_j| = t'_{\varphi(j)}$对于 $j = 1$、.....、 $d\ell+m+1$均成立，这意味着在定理 1.1 和定理 1.3 的情形下，条件 (b) 都得到满足。由于我们已经看到 (a) 得到满足（并且在定理 1.3 的情形下 (o) 也得到满足），这意味着 $(t'_1, \ldots, t'_h)$ 是φ-可实现的，特别地，是可实现的。这一矛盾表明，确实不存在满足$d_H(B, B')$ $< \delta$且属于 $\mathcal{A}_{A,\eta}$的 $B' \in \mathcal{B}_d$ 。这就完成了引理 5.3，进而也完成了定理 1.1 和 1.3 的证明。

□

6 定理 1.4 的证明：色数的上界

在本节中，我们证明定理 1.4。正如引言中所述，我们实际上将证明一个更一般的结果：对于任意维数 d，给出大多数 d-范数的奇距离图的色数上界。 d-范数 $||.||$ 的奇距离图是这样一个图：其顶点是 $\mathbb{R}^d$ 中的点，当且仅当根据范数 $||.||$ ，两点之间的距离是奇整数时，这两个点相邻。

定理 6.1。 对于任意 $d \geq 1$，除第一纲集之外的所有 d-范数 $||.||$ ，其 $||.||$ 的奇距离图的色数至多为 2^d。

由于单位距离图是奇距离图的子图，定理 6.1 意味着，除第一纲集之外的所有 2-范数，其单位距离图的色数至多为 4。结合对于任意 2-范数 $[9,$ ，该色数至少为 4 的事实，定理 $3]$, 这就证明了定理 1.4。

定理 6.1 的证明。 我们的目标是证明：每个 d-范数 $||.||$ ，只要其奇距离图的色数大于 2^d，就具有如下性质：存在处于不同方向的向量 $\mathbf{u}_1$、...、$\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^d$，满足 $||\mathbf{u}_1|| = \cdots = ||\mathbf{u}_k|| = 1$，以及一个子集 $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$，使得对于至少 $d \cdot |I| + 1$ 个指标 $j \in \{1, \ldots, k\}$，有 $\mathbf{u}_j \in$张成空间$\mathbb{Q}(\mathbf{u}_i$： $i \in I)$。这就足够了，因为上一节中的论证表明，具有这一性质的 d-范数构成一个第一纲集（事实上，根据引理 5.1 证明的后半部分，该范数的单位球 $||.||$ 包含于引理 5.1 陈述中所考虑的并集$\bigcup_{A、\eta} \mathcal{A}_{A、\eta}$ 中，而这个并集是一个第一纲集，因为根据引理 5.3，其中的每个集合 $\mathcal{A}_{A、\eta}$ 都是无处稠密的）。

因此，设 $||.||$ 是一个 d-范数，其奇距离图的色数大于 2^d，并反设它不满足上述性质。根据德布鲁因–厄尔多什定理， $||.||$的奇距离图必须包含一个有限子图 G，其色数为 $\chi(G) > 2^d$。设 $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^d$对应于子图 G的顶点。此外，设 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^d$是单位向量（符号任意选取），它们的奇数倍产生了 G的边。更准确地说，$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^d$是一列方向各不相同的非零向量（即，对于 $i = 1, \ldots, k$，直线 $\text{span}_{\mathbb{R}}(\mathbf{u}_i)$ 彼此不同），且满足 $||\mathbf{u}_1|| = \cdots = ||\mathbf{u}_k|| =$

1，使得对于 G 中的每条边 $\mathbf{p}_x\mathbf{p}_y$（其中 $x,y \in \{1,\dots,n\}$），都存在一个指标 $i \in \{1,\dots,k\}$ 和一个奇整数 m，使得 $\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y = m\mathbf{u}_i$。

回想一下，根据我们关于范数 $||.||$ 的假设，对于任意子集 $I \subseteq \{1,\dots,k\}$，$\mathbf{u}_j \in$ 张成空间$\mathbb{Q}(\mathbf{u}_i : i \in I)$ 至多有 $d \cdot |I|$ 个指标 $j \in \{1,\dots,k\}$。由埃德蒙兹拟阵分解定理 [14], 可知，这意味着存在一个划分 $\{1,\dots,k\} = J_1 \cup \cdots \cup J_d$，使得对于每个 $\ell = 1,\dots,d$，向量集合 $\{\mathbf{u}_i : i \in J_\ell\}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关。这就得到图 G 的边集的一个划分，将其分为子图 $G_1,\dots,G_d$；对于任意 $\ell = 1,\dots,d$，若存在某个指标 $i \in J_\ell$ 和一个奇整数 m，使得 G 的一条边 $\mathbf{p}_x\mathbf{p}_y$ 满足 $\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y = m\mathbf{u}_i$，则该边属于子图 G_ℓ。

我们断言，对于 $\ell = 1$，……，d，每个子图 G_ℓ 都是二分图。事实上，假设对于某个 $\ell \in \{1,\dots,d\}$，子图 G_ℓ 包含一个奇圈。沿着该奇圈行走，并将沿圈各边对应的项$\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y = m\mathbf{u}_i$ 相加，可得到向量 $\mathbf{u}_i$（$i \in J_\ell$）之间的一个整数线性关系。由于该圈是奇圈，必然存在某个指标 $i \in J_\ell$，使得圈上有奇数条边贡献了形如$\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_y = m\mathbf{u}_i$（其中 m 为奇整数）的项。对于该指标 i，在这个整数线性关系中$\mathbf{u}_i$的系数为奇数，因而尤其不为零。因此，我们得到了向量 $\mathbf{u}_i$（$i \in J_\ell$）之间的一个非平凡整数线性关系，这与这些向量在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关的事实相矛盾。

因此，对于 $\ell = 1$，……，d，图 G_ℓ 确实必须是二分图，也就是说，$\chi(G_i) \leq 2$。这意味着 $\chi(G) = \chi(G_1 \cup \ldots \cup G_d) \leq \chi(G_1) \cdots \chi(G_d) \leq 2^d$，从而得到所需的最终矛盾。 □

7 定理 1.2 的证明：具有许多单位距离的点集

本节讨论 $U_{||.||}(n)$ 的下界。在开始证明之前，我们先介绍一个贯穿本节都会使用的标准记号。给定一族集合 S_1、……、$S_k \in \mathbb{R}^d$，其闵可夫斯基和 $S_1 + \cdots + S_k$ 定义为所有形如$\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k$的点的集合，其中$\mathbf{x}_i \in S_i$，对于$i = 1$、……、$k$。

7.1 平面范数

在任意维数下证明定理 1.2 中关于 $U_{||.||}(n)$ 的下界之前，我们先证明二维情形下一个略强的下界。需要指出的是，正如我们将在第 8 节中解释的那样，还可以得到进一步的微小改进。

命题 7.1。对于每个2范数 $\|.\|$，我们有

$$U_{\|.\|}(n) \geq \left(\frac{1}{\log 3} - o(1)\right) \cdot n \log n$$

对所有 n 均成立。换言之，对于每个 2-范数 $\|.\|$ 和每个 n，都存在一个包含 n 个点的集合，该集合位于 $\mathbb{R}^2$ 中，使得根据 $\|.\|$ 计算的这 n 个点之间的单位距离数量至少为 $\left({}^{1}\log 3 - {}^{o}(1)\right) n\log n$，其中，当 $n \to \infty$ 时，$o(1)$ 项趋于零。

如果范数 $\|.\|$ 不是严格凸的（即该范数的单位球边界包含一条线段），那么我们可以找到 n个点，其中至少有 $\lfloor n^2/4 \rfloor$ 个单位距离。事实上，在这种情况下，相应的单位距离图包含完全二部图 $K_{m,\,m}$ 对每个 m均成立。因此，为了证明命题 7.1，我们可以假设该范数是严格凸范数。

证明的主要部分是说明：任意三角形的幂都是 $\mathbb{R}^2$上任意严格凸范数的单位距离图的子图。更具体地说，对于任意 k，我们找到一组 k 个三角形，这些三角形的所有边根据给定范数都具有单位长度，然后取这些三角形的顶点集的闵可夫斯基和。这样便得到 3^k 个点，相应的单位距离图是三角形 K_3的 k 重图乘积（在通常的图论意义下的图乘积）。为了找到这些三角形，我们证明下面这个简单的引理。

引理 7.2。 设 $\|.\|$ 为严格凸的2-范数。则对于任意整数 k，存在大小为 $|S_1| = \cdots = |S_k| = 3$ 的子集 S_1、S_2、.....、$S_k \subseteq \mathbb{R}^2$，满足 $|S_1 + \cdots + S_k| = 3^k$，并且对于每个 $i = 1$、.....、k， S_i 中的任意两个不同点根据 $||.||$的范数均具有单位距离。

注意到，条件 $|S_1 + \cdots + S_k| = 3^k$恰好意味着，形如$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_k$且$\mathbf{x}_i \in S_i$的所有 3^k个点（其中 $i = 1$, ..., k）彼此不同。此外，注意到第二个条件意味着，对于每个$i = 1$, ..., k， S_i中的三个点构成一个三角形，并且根据范数 $||.||$，其三条边的边长均等于一。

证明。 我们逐一构造集合 S_1、S_2.....，并始终保持如下性质：在确定了 S_1、S_2.....、S_i之后，有 $|S_1 + \cdots + S_i| = 3^i$。我们需要用到一个简单事实（例如参见 [6, 引理 2]）：在严格凸二维实赋范空间（$\mathbb{R}^2$、$||.||$）中，对于任意两个不同点 $\mathbf{a}_1$ 和 $\mathbf{a}_2$，至多存在两个点 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ 同时满足 $|\mathbf{b} - \mathbf{a}_1|| = 1$ 和 $|\mathbf{b} - \mathbf{a}_2|| = 1$（即与$\mathbf{a}_1$ 和$\mathbf{a}_2$的距离均为单位距离）。

假设 S_1、S_2.....、S_{i-1}已经构造完成，现在我们来选择 S_i。对于任意满足 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ with$|\mathbf{x}|| = 1$ 的点 $\mathbf{x}$（即范数 $||.||$的单位球边界上的任意点），设想我们沿着 $||.||$ 的单位球边界，将点 $\mathbf{y}$ 从 $\mathbf{x}$ 移动到对跖点 $-\mathbf{x}$。随着 $\mathbf{y}$ 移动，距离 $|\mathbf{y} - \mathbf{x}||$ 具有连续性，因此在这一过程中某个时刻必有 $|\mathbf{y} - \mathbf{x}|| = 1$。换言之，对于任意满足 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ with $|\mathbf{x}|| = 1$的点 $\mathbf{x}$，都必然存在一个点 $\mathbf{y(x)} \in \mathbb{R}^2$ with $|\mathbf{y(x)}|| = 1$ and $|\mathbf{y(x)} - \mathbf{x}|| = 1$。我们将选择集合 S_i，使其由 $\mathbf{0}$、$\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y} = \mathbf{y(x)}$ 构成，其中适当选取 $\mathbf{x}$，使 $|\mathbf{x}|| = 1$。注意，此时根据 $||.||$， S_i 中的任意两个不同点之间的距离均为单位距离。

为了确保 $|S_1 + \cdots + S_i| = 3^i$，我们需要确保对于所有 $\mathbf{u} \in S_1 + S_2 + \ldots + S_{i-1}$，集合 $\{\mathbf{u} + \mathbf{0}$、$\mathbf{u} + \mathbf{x}$、$\mathbf{u} + \mathbf{y}\}$ 两两不相交。如果对于两个不同的元素 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v} \in S_1 + S_2 + \ldots + S_{i-1}$，集合 $\{\mathbf{u} + \mathbf{0}$、$\mathbf{u} + \mathbf{x}$、$\mathbf{u} + \mathbf{y}\}$ 与 $\{\mathbf{v} + \mathbf{0}$、$\mathbf{v} + \mathbf{x}$、$\mathbf{v} + \mathbf{y}\}$ 相交，那么差向量 $\mathbf{x} - \mathbf{0}$、$\mathbf{y} - \mathbf{0}$、$\mathbf{x} - \mathbf{y}$ 中必有一个形如 $\pm(\mathbf{u} - \mathbf{v})$。我们声称，对于任意两个不同的 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v} \in S_1 + S_2 + \ldots + S_{i-1}$，至多有六种 $\mathbf{x}$ 的选择（满足 $|\mathbf{x}|| = 1$）使该情况发生。事实上，显然至多有两种 $\mathbf{x}$ 的选择，使 $\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{0} \in \{\pm(\mathbf{u} - \mathbf{v})\}$。注意，$\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 以及 $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ 的单位距离均为单位距离（因为 $|\mathbf{y} - \mathbf{x}|| = 1$ and$|\mathbf{y}|| = 1$）。因此，如果 $\mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{0} \in \{\pm(\mathbf{u} - \mathbf{v})\}$ 或 $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \{\pm(\mathbf{u} - \mathbf{v})\}$，那么 $\mathbf{x}$ 必须与 $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ 或 $-(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ 的距离为单位距离。但根据上述事实，满足 $|\mathbf{x}|| = 1$ and$|\mathbf{x} - (\mathbf{u} - \mathbf{v})|| = 1$ 的 $\mathbf{x}$ 至多有两种选择，满足 $|\mathbf{x}|| = 1$ and $|\mathbf{x} + (\mathbf{u} - \mathbf{v})|| = 1$ 的 $\mathbf{x}$ 也至多有两种选择。因此，确实至多有六种 $\mathbf{x}$ 的选择（满足 $|\mathbf{x}|| = 1$），使集合 $\{\mathbf{u} + \mathbf{0}$、$\mathbf{u} + \mathbf{x}$、$\mathbf{u} + \mathbf{y}\}$ 与 $\{\mathbf{v} + \mathbf{0}$、$\mathbf{v} + \mathbf{x}$、$\mathbf{v} + \mathbf{y}\}$ 相交。

由于不同的 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v} \in S_1 + S_2 + \ldots + S_{i-1}$只有有限种选择，这意味着使所需条件 $|S_1 + \cdots + S_i| = 3^i$ 不成立的 $\mathbf{x}$ 也只有有限种选择。由于满足 $|\mathbf{x}|| = 1$ 的点 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ 有无穷多个，我们确实可以取 $S_i = \{\mathbf{0}$,$\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{y(x)}\}$ 为某个适当选取的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ （满足$|\mathbf{x}|| = 1$），使得 $|S_1 + \cdots + S_i| = 3^i$。

□

命题 7.1 是上一个引理的一个简单推论。

命题 7.1 的证明。 如前所述，我们可以假设范数 $\|.\|$ 是严格凸的。现在，对于任意 k，我们可以取引理 7.2 中的集合 S_1、.....、S_k，并考察闵可夫斯基和 $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_k$。这给出了一个大小为 $|S| = 3^k$的集合 $S \subseteq \mathbb{R}^2$，使得 S 中的每个点，根据 $\|.\|$，都与 S 中的至少 $2k$ 个其他点相距单位距离（即，表示式 $\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k$中恰好改变一个加数、并令 $\mathbf{x}_i \in S_i$取 $i = 1$、.....、k所得到的 S 中的所有点）。这为我们给出了 $\mathbb{R}^2$中的一个含有 3^k个点的集合，其中有 $\|.\|$单位距离；特别地，这表明当 n 是三的幂时，所声称的界成立，且不需要 $o(1)$ 项。

为了获得每个 n 的渐近界，我们将 n 写成三进制，即 $n = a_k \cdot 3^k + a_{k-1} \cdot 3^{k-1} + \ldots + a_0$，其中 $k = \lfloor \log_3 n \rfloor$ 和 a_k，.....，$a_0 \in \{0, 1, 2\}$。对于每个 $i = 0$，.....，k，我们现在利用上述构造找到 a_i 个大小为 3^i 的集合；如有必要则进行平移，以确保所有这些集合中的所有点彼此不同。总共得到 $a_k \cdot 3^k + a_{k-1} \cdot 3^{k-1} + \ldots + a_0 = n$ 个点，而在这 n 个点中，至少有

$$a_k \cdot k \cdot 3^k + a_{k-1} \cdot (k-1) \cdot 3^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 1 \cdot 3 = kn - 3^k \cdot \sum_{i=1}^{k} a_{k-i} \cdot i \cdot 3^{-i} \geq kn - 2 \cdot 3^k \cdot \sum_{i=1}^{k} i \cdot 3^{-i} \geq kn - \frac{3}{2}n$$

个单位距离。由于 $k - \frac{3}{2} = \left(\frac{1}{\log 3} - o(1) \right) \log n$，证明得证。 □

7.2 高维

在本节中，我们证明定理 1.2。我们首先证明，任意 d 范数的单位距离图都包含一个完全二部图，其中一个顶点类的大小为 $d-1$，另一个顶点类的大小为无穷大。为此，我们需要下面这个结果，该结果称为 Hurewicz维数降低定理（见 [17, 定理 3.3.10，第 200] 页）。该定理中的维数概念是通常的 Lebesgue覆盖维数，如[17]中所述。

定理 7.3（Hurewicz维数降低定理）。 设 X 和 Y 为度量空间，并假设 X 是紧致的。设 $f\colon\ X \to Y$ 为连续映射，使得对于 $y \in Y$，所有纤维 $f^{-1}(y)$ 的维数均不超过 k。则有 $\dim(X) \leq k + \dim(Y)$。

下面的引理是我们在定理 1.2 中得到下界结果的关键。

引理 7.4。 设 $||.||$ 为一个 d-范数，并令 $\partial B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : ||\boldsymbol{x}|| = 1\}$ 为相应单位球的边界。此外，考虑不同点 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \ldots, \boldsymbol{y}_{d-1} \in \partial B$，并令 $\varepsilon > 0$ 为一个实数。那么存在点 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \ldots, \boldsymbol{x}_{d-1} \in \mathbb{R}^d$，满足 $\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{y}_i\|_2 \leq \varepsilon$（$i = 1, \ldots, d-1$），使得交集 $\bigcap_{i=1}^{d-1} (\boldsymbol{x}_i + \partial B)$ 是无限的。

证明。 定义 U 的一个子集 $\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d)^{d-1}$ 为

$$U := \{(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{d-1}) : \mathbf{x}_i - \mathbf{x} \in \partial B \text{ for } i = 1, \ldots, d-1\}.$$

注意到，U 与 $\mathbb{R}^d \times (\partial B)^{d-1}$同胚，其中同胚映射 $u\colon\ U \to \mathbb{R}^d \times (\partial B)^{d-1}$ 由$u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{d-1}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x} \ldots, \mathbf{x}_{d-1} - \mathbf{x})$给出。现在，我们定义

$$U' := \{(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{d-1}) \in U : \|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i\|_2 \leq \varepsilon \text{ for } i = 1, \ldots, d-1\}.$$

注意到，在上面定义的同胚 $u\colon\ U \to \mathbb{R}^d \times (\partial B)^{d-1}$ 下，U' 的像包含该闭集

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \ ||\mathbf{x}||_2 \leq \varepsilon/2\} \times \{\mathbf{z}_1 \in \partial B : ||\mathbf{z}_1 - \mathbf{y}_1||_2 \leq \varepsilon/2\} \times \cdots \times \{\mathbf{z}_{d-1} \in \partial B : ||\mathbf{z}_{d-1} - \mathbf{y}_{d-1}||_2 \leq \varepsilon/2\} \quad (1)$$

事实上，给定该集合中的 $(x, z1, \ldots, z_{d-1})$，对于由 $x_i = z_i + x$（$i = 1, \ldots, d-1$）给出的 $(x, x1, \ldots, x_{d-1}) \in U'$，我们有 $u(x, x1, \ldots, x_{d-1}) = (x, z1, \ldots, z_{d-1})$（此时 $x_i - x \in \partial B$ 且 $\|x_i - y_i\|_2 = \|x + z_i - y_i\|_2 \le \|x\|_2 + \|z_i - y_i\|_2 \le \varepsilon$）。

对于 $i = 1$，...，$d-1$，我们有 $y_i \in \partial B$，因此集合 $\{z_i \in \partial B : \ ||z_i - y_i||_2 \le \varepsilon/2\}$ 包含一个与 $[0,1]^{d-1}$ 同胚的闭子集（事实上，映射 $z \mapsto z/||z||_2$ 定义了从该集合到 $\mathbb{R}^d$ 中的 $(d-1)$ 维单位球面的一个子集的同胚映射，该子集包含某个正半径的球冠）。因此，（1）中的集合包含一个与 $[0,1]^{d+(d-1)^2}$ 同胚的闭子集。所以，（1）中的闭集的维数至少为 $d + (d-1)^2$，，从而 $\dim(U') \ge d + (d-1)^2$。

此外，集合 U' 是闭集且有界（关于有界性，注意到对于 $i = 1$，...，$d-1$，对所有（x，x_1，...，x_{d-1}），有 $\|x\| \le \|x_1\| + 1$ 且 $\|x_i - y_i\|_2 \le \varepsilon \in U'$）。因此，$U'$ 是紧致的。现在考虑连续投影映射 $f: U' \to (\mathbb{R}^d)^{d-1}$，其定义为 $f(x, x_1, x2, \ldots, x_{d-1}) = (x_1, x2, \ldots, x_{d-1})$。

由于 $\dim((\mathbb{R}^d)^{d-1}) = d(d-1) < \dim(U')$，根据应用于投影映射 $f: U' \to (\mathbb{R}^d)^{d-1}$ 的 Hurewicz维数降低定理，存在点 $x_1, x2, \ldots, x_{d-1} \in \mathbb{R}^d$，使得纤维 $f^{-1}(x_1, x2, \ldots, x_{d-1})$ 的维数至少为一。于是该纤维必为无限集，因此存在无穷多个点 $x \in \mathbb{R}^d$，满足 $(x, x_1, x2, \ldots, x_{d-1}) \in U'$。根据 U' 的定义，这意味着对于 $i = 1, \ldots, d-1$，$\|x_i - y_i\|_2 \le \varepsilon$。此外，这些满足 $(x, x_1, x2, \ldots, x_{d-1}) \in U' \subseteq U$ 的无穷多个点 x 中的每一个都满足 $x_i - x \in \partial B$，其中 $i = 1, \ldots, d-1$，这意味着 $x - x_i \in \partial B$ 且 $x \in x_i + \partial B$。因此，这些点 x 中的每一个都属于交集 $\bigcap_{i=1}^{d-1}(x_i + \partial B)$，所以该交集是无限集。 □

上一个引理的一个直接推论如下。

引理 7.5. 设 k 为正整数，且 $\|.\|$ 为一个 d-范数。那么存在点 $x_1, \ldots, x_{d-1} \in \mathbb{R}^d$，使得 $|\{x_1, 2x_1, \ldots, kx_1\} + \cdots + \{x_{d-1}, 2x_{d-1}, \ldots, kx_{d-1}\}| = k^{d-1}$，并存在一个无限集 $S \subseteq \mathbb{R}^d$，使得其中每个点 $z \in S$ 都满足 $\|z - x_i\| = 1$，其中 $i = 1, \ldots, d-1$。

证明。令 ∂B 为范数 $\|.\|$ 的单位球的边界。我们选取点 $y1, \ldots, y_{d-1} \in \partial B$，使得 $|\{y_1, 2y1, \ldots, ky_1\} + \cdots + \{y_{d-1}, 2y_{d-1}, \ldots, ky_{d-1}\}| = k^{d-1}$（我们可以逐个选取点 $y1, \ldots, y_{d-1}$，同时保持条件 $|\{y_1, 2y1, \ldots, ky_1\} + \cdots + \{y_i, 2y_i, \ldots, ky_i\}| = k^i$，其中 $i = 1, \ldots, d-1$；这是因为选定 $y1, \ldots, y_{i-1}$ 后，观察可知，每一对形如 $a_1y_1 + \ldots + a_iy_i$ 且满足 $a_1, \ldots, a_i \in \{1, \ldots, k\}$ 的不同和之间可能出现的相等关系，都只会排除 y_i 的一个取值）。令 $\varepsilon > 0$ 充分小，使得 $\{y_1, 2y1, \ldots, ky_1\} + \cdots + \{y_{d-1}, 2y_{d-1}, \ldots, ky_{d-1}\}$ 中的任意两个不同点之间的欧几里得距离都大于 $2k(d-1)\varepsilon$。现在，将引理 7.4 应用于 $y1, \ldots, y_{d-1}$ 和 ε，可得到点 $x_1, x2 \ldots, x_{d-1}$，满足 $\|x_i - y_i\|_2 \le \varepsilon$，其中 $i = 1, \ldots, d-1$，且交集 $\bigcap_{i=1}^{d-1}(x_i + \partial B)$ 是无限集。现在，$\{x_1, 2x1, \ldots, kx_1\} + \cdots + \{x_{d-1}, 2x_{d-1}, \ldots, kx_{d-1}\}$ 中的每个点都形如 $a_1x_1 + \ldots + a_{d-1}x_{d-1}$，其中 $a_1, \ldots, a_{d-1} \in \{1, \ldots, k\}$，并且它与相应点 $a_1y_1 + \ldots + a_{d-1}y_{d-1}$ 的距离至多为 $k(d-1)\varepsilon$。根据我们对 ε 的选择，这意味着满足 $a_1, \ldots, a_{d-1} \in \{1, \ldots, k\}$ 的点 $a_1x_1 + \ldots + a_{d-1}x_{d-1}$ 必定两两不同，因此 $|\{x_1, 2x1, \ldots, kx_1\} + \cdots + \{x_{d-1}, 2x_{d-1}, \ldots, kx_{d-1}\}| = k^{d-1}$。此外，定义 $S = \bigcap_{i=1}^{d-1}(x_i + \partial B)$ 后，集合 S 是无限集，且其中每个点 $z \in S$ 都满足 $\|z - x_i\| = 1$，其中 $i = 1, \ldots, d-1$。 □

现在我们准备证明定理 1.2。

定理 1.2 的证明。 在整个论证过程中，我们将 d 视为固定常数，并且所有渐近分析都针对较大的 n。令 $m := \left\lceil \log\left({}^{n}\log_{n} \right) \right\rceil = o(n)$ 和 $k = \lfloor (n/2^m)^{1/(d-1)} \rfloor = \Theta((\log n)^{1/(d-1)})$，这~~样在~~写作 $n' = k^{d-1} \cdot 2^m$ 时，我们有 $n \ge n' \ge k^{d-1}/(k+1)^{d-1} \cdot n = (1 - o(1))n$。令 $\|.\|$ 为一个 d-范数。

根据引理 7.5，存在点 x_1、...、$x_{d-1} \in \mathbb{R}^d$，满足 $|\{x_1, 2x_1$、...、$kx_1\} + \cdots + \{x_{d-1}$、$2x_1$、...、$kx_{d-1}\}| = k^{d-1}$，以及一个无限子集 $S \subseteq \mathbb{R}^d$，使得对于所有 $z \in S$ 和 $i = 1$、...、$d-1$，都有 $\|z - x_i\| = 1$。现在，让我们选择

点 $\mathbf{z}_1$、…、$\mathbf{z}_m \in S$，使得集合

$$\{\mathbf{x}_1, 2\mathbf{x}_1, \dots k\mathbf{x}_1\} + \cdots + \{\mathbf{x}_{d-1}, 2\mathbf{x}_{d-1}, \dots, k\mathbf{x}_{d-1}\} + \{0, \mathbf{z}_1\} + \cdots + \{0, \mathbf{z}_m\} \tag{2}$$

大小为 $k^{d-1} \cdot 2^m = n'$（这是可以做到的：再次逐一选择点 $\mathbf{z}_1$、…、$\mathbf{z}_m \in S$，并注意到在每一步中，形如 $a_1 \mathbf{x}_1 + \ldots + a_{d-1}\mathbf{x}_{d-1} + b_1\mathbf{z}_1 + \ldots + b_j\mathbf{z}_j$的两个不同和之间的每一个潜在等式，其中 a_1、…、$a_{d-1} \in \{1, \dots, k\}$ 以及 b_1、…、$b_j \in \{0, 1\}$，至多排除 $\mathbf{z}_j$的一个取值）。

现在注意，形如 $\mathbf{z}_j - \mathbf{x}_i$ 的每个向量，其中 $i \in \{1, \dots, d-1\}$ 和 $j \in \{1, \dots, m\}$，都可以表示为集合 (2) 中至少 $(k-1)\cdot k^{d-2} \cdot 2^{m-1}$ 对点之差。由于对于所有 $i \in \{1, \dots, d-1\}$和 $j \in \{1, \dots, m\}$都有 $\|\mathbf{z}_j - \mathbf{x}_i\| = 1$，这意味着，在集合 (2) 的 n' 个点中，至少有

$$(d-1)m \cdot (k-1)k^{d-2} \cdot 2^{m-1} = \frac{d-1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right) \cdot (\log n' - (d-1)\log k) \cdot n' = \frac{d - 1 - o(1)}{2} \cdot n' \log n'$$

单位距离。由于 $n' \log n' = (1 - o(1)) n \log n$ and $n' \leq n$，这表明在 $\mathbb{R}^d$ 中存在一个至多包含 n 个点的集合，其中至少有 $\frac{d-1-o(1)}{2} \cdot n \log n$ 个单位距离（通过添加更多点，我们可以构造出恰好包含 n 个点的此类集合），这些单位距离是根据范数 $\|.\|$ 计算的。 □

8 结论与开放问题

我们在定理 1.2 中证明，对于每个 d-范数 $\|.\|$，都有 $U_{\|.\|}(n) \geq \frac{1}{2}(d - 1 - o(1)) \cdot n \log n$。换言之，$\mathbb{R}^d$ 包含 n 个点，这些点确定了至少 $\frac{1}{2}(d - 1 - o(1)) \cdot n \log n$ 个单位距离，其中 $o(1)$ 项在 $n \to \infty$ 时趋于零。这几乎是紧的，因为我们在定理 1.1 中证明了，存在一些 d-范数，在其中没有任何包含 n 个点的集合能确定多于 $\frac{1}{2}d \cdot n \log n$ 个单位距离。事实上，几乎所有 d-范数都满足这一性质。对于 $d = 2$，这解决了 Brass 在 [6] 提出的问题，也解决了 Matoušek 在 [34], 提出的问题，即从 Matoušek 的上界中削去一个 $\log \log n$ 因子。对于一般维数 $d \geq 2$，这给出了一个本质上紧的估计，其误差至多为一个 $(1 - 1/d - o(1))$ 常数因子，并以一种有力且颇为出人意料的形式解决了 [8, 第 195] 页的问题 4 和 5。

对于 $d = 2$，我们在命题 7.1 中证明了，对于每个 2-范数 $\|.\|$，$U_{\|.\|}(n) \geq (\frac{1}{\log 3} - o(1)) \cdot n \log n$，改进了引言中所述超立方体嵌入所得到的一个广为人知且经常被重复引用的下界 $\frac{1}{2} \cdot n \log n$。定理 1.1 中对于大多数 2-范数 $\|.\|$ 的上界为 $U_{\|.\|}(n) \leq n \log n$，因此上下界之间的常数因子仍存在差距。事实上，我们的新下界中的常数因子$\frac{1}{\log 3}$ 还可以略微改进。为此，注意到命题 7.1 的证明中的构造是集合 $S_i = \{0, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i\}$的闵可夫斯基和。在选取这些集合时，点 $\mathbf{x}_i$ 的选择基本上是任意的，因此可以选择它们，使得对于每个 $i \geq 1$，点 $\mathbf{x}_{4i-3} + \mathbf{x}_{4i-2}$ 和 $\mathbf{x}_{4i-1} + \mathbf{x}_{4i}$ 根据 $\|.\|$ 具有单位距离。类似地，通过递归地重复这一论证，还可以得到一个额外的（很小的）改进。由于这仍会在上下界之间留下差距，我们省略详细计算。对于所有维数而言，弥合我们的上下界之间的差距或许会很有趣，尽管定理 1.1 和定理 1.2 中的界已经相当接近（尤其是，随着维数增加，这些界会越来越接近）。这似乎需要一些新的思路。

定理 1.1 的证明应用了第 5 节中确立的事实：对于大多数 d-范数 $\|.\|$，有理数域上单位向量之间不可能存在太多线性依赖（更准确地说，对于给定数量的单位向量，它们在有理数域上的线性张成空间不可能包含太多其他单位向量）。不过，值得注意的是，这类线性依赖始终存在。特别是，引理 7.2 的证明中构造的三角形表明，在每个严格凸2-范数中，都有无穷多个单位向量三元组，其和为 0。类似地，简单应用 Hurewicz维数降低定理（定理 7.3）可知，对于每个 d-范数 $\|.\|$，都存在无穷多个 $(d-1)$-元组 $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d-1})$，其中各点的范数均为单位范数

根据 $\|.\|$，使得差向量的 $(d-2)$-元组 $(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{d-1}-\mathbf{x}_1)$ 对所有这些 $(d-1)$-元组 $(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{d-1})$ 都相同。特别地，这意味着对于任意 $\ell \geq d-1$，我们可以找到一组 ℓ 单位向量，使得它们在有理数域上的线性张成空间至少包含 $(d-1)\cdot(\ell-d+2)$ 个单位向量，根据 $\|.\|$（相比之下，第 5 节中的论证表明，对于典型的 d-范数，这样的张成空间至多包含 $d\cdot\ell$ 单位向量）。

定理 1.3 给出了 $D_{\|.\|}(n)$ 最大可能值的近乎紧确界。当 n 相对于 d 足够大时，存在一个 d-范数 $\|.\|$。据我们所知，更强的界限或许也成立；也就是说，对于每个固定的 d，如果 n 相对于 d 足够大，那么存在一个 d-范数 $\|.\|$，使得 $D_{\|.\|}(n)=n-1$。这甚至可能对大多数范数都成立。如果这一结论属实，其证明还需要一些额外论证。仔细检查我们现有证明中的计算可知，它表明，对于任意 d 和 n，对大多数 d-范数 $\|.\|$，都有 $D_{\|.\|}(n)\geq n-O(dn^{3/4})$。当 n 相对于 d 不够大时，要确定所有 d-范数 $\|.\|$ 中 $D_{\|.\|}(n)$ 的最大可能值，是一个困难的问题。特别是，确定满足以下条件的 n 的最大值：对所有 d-范数 $\|.\|$，都有 $D_{\|.\|}(n)=1$，这等价于一个著名的 Petty 猜想，我们将在下文说明。

能够嵌入 $\|.\|$ 的单位距离图中的最大团的顶点数，称为 $\|.\|$ 的等边数，本文记作 $e_{\|.\|}$（其他类型的空间中也研究过等边数，参见例如 [16]）。Petty 于 1971 年提出的一个猜想（[36], 另见 [8]）断言：$e_{\|.\|}\geq d+1$ 对于每个 d-范数 $\|.\|$，均有此性质。请注意，该猜想的一个等价表述是：$D_{\|.\|}(n)=1$对于每个 d-范数 $\|.\|$ 以及每个 $n\leq d+1$（或等价地，对于 $n=d+1$）。

这一结论在维数为 $d\leq 3$ 时已知（[36]）；对于与 d 维欧几里得范数充分接近的范数（[7], [12]），以及更一般地，对于与 d 维 ℓ_p-范数 ℓ_p^d 充分接近的范数，在任意 $1<p\leq\infty$ 下也已知（[44]）。结合 [2] 的一项结果——每个 d 维赋范空间都包含一个维数为 $r=e^{\Omega(\sqrt{\log d})}$ 的子空间，该子空间要么接近 ℓ_2^r，要么接近 ℓ_∞^r——Swanepoel 和 Villa [44] 证明，任意 d-范数 $\|.\|$ 的等边数 $e_{\|.\|}$ 对某个绝对常数 $b>0$ 均至少为 $e^{b\sqrt{\log d}}$。值得注意的是，即使对于一些简单的 d-范数，例如 ℓ_1^d，其等边数 $e_{\|.\|}$ 的精确值也尚不清楚；猜想其值为 $2d$。更多信息请参见 [3], [42], [43]。

Petty问题以及第7节中的构造，都表明值得研究这样一类图：对于给定的 $d\geq 2$，它们会作为某个 d-范数的单位距离图的子图出现。任意维数的超立方体图都是这类图的一个例子，大小为 $e^{b\sqrt{\log d}}$ 的团也是如此（对于Swanepoel和Villa上述结果中的绝对常数 $b>0$ [44]）。如引理 7.5 所证，对于任意 m，完全二部图$K_{d-1,m}$ 也是一个例子。引理 7.2 表明，另一个作为任意严格凸2-范数的单位距离图子图出现的例子，是三角形的 k次幂（对于任意$k\geq 1$）。要刻画所有作为任意 d-范数的单位距离图子图的图，似乎很困难。

一个相关问题是确定d-范数的单位距离图所能达到的最小色数。在维数为 $d=2$时，答案是 2；事实上，我们在定理 1.4 中证明，对于大多数2-范数，色数等于 4。根据关于Petty猜想的已知结果，任意 d-范数的单位距离图的色数总是至少为 $e^{\Omega(\sqrt{\log d})}$。另一方面，不难证明，任意 d-范数的单位距离图的色数至多随 d 呈指数增长（例如，参见 [25]或[32]）。定理 6.1 给出了大多数 d-范数的一个上界 2^d（其指数底数优于所有范数的已知上界）。值得研究的是，典型的 d-范数的单位距离图的色数究竟呈指数增长还是次指数增长。根据本文的结果，这些图相当稀疏，因此可以推测，其色数可能低于指数级。

我们注意到，Brass、Moser 和 Pach 的著作 [8] 是离散几何领域众多有趣未决问题的重要宝库，其中许多问题都可以自然地推广到一般的赋范空间。至少有一些

这些思想　本文所发展的方法和工具可能有助于解决这些问题。

其中许多问题都可以自然地针对典型范数提出；从某种意义上说，典型范数在这里所发挥的作用类似于随机图在极值图论中的作用。同样地，正如随机图所展示的那样，我们的结果表明，考察典型范数可以为一般范数下的极值问题提供答案。我们的结果还表明，欧几里得范数在许多方面都非常特殊；与大多数其他范数相比，它在许多此类问题中表现出不同的性质。特别是，根据引言中提到的 $D_{\|.\|_2}(n)$ 和 $U_{\|.\|_2}(n)$ 的已知界，我们的结果表明，就单位距离问题和不同距离问题而言，欧几里得二范数的表现与典型二维范数的表现截然不同，而且这种差异在高维中变得更加明显。鉴于欧几里得范数的对称性，这或许是自然的；但令我们感到惊讶的是，相比之下，对于典型的 d-范数$\|.\|$，$U_{\|.\|}(n)$ 如此之小，而 $D_{\|.\|}(n)$ 却如此之大。

一个引人关注的开放问题是，能否明确描述一种 d范数 $\|.\|$，使得 $U_{\|.\|}(n) = O(dn\log\ n)$，或者使得$D_{\|.\|}(n) \geq (1-o(1))n$ （当 n 足够大时）。请注意，要正式表述这个问题，需要定义此处“明确”的含义。一种自然的定义是：存在一种范数 $\|.\|$，使得可以通过某种标准的实数计算模型中的高效算法，计算任意给定向量 $\|\mathbf{x}\|$ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ 的范数。还要注意，即使存在上述这样的明确的 d范数，也并非显而易见。

作为我们方法的另一项应用，我们解决了 Erdős 和 Moser 关于典型范数的一个经典问题的类似问题。1959 年，Erdős 和 Moser 提出：在欧几里得平面中，处于（严格）凸 位置的 n 个点之间，单位距离的最大可能数量是多少？他们猜想答案为 $O(n)$。Füredi [24] 证明了一个形式为 $O(n\log\ n)$ 的上界，而目前已知的最佳上界仍为这一形式（Aggarwal [1] 将 Füredi 的上界改进了一个常数因子）。目前已知的最佳下界 $2n-7$ 归功于 Edelsbrunner 和 Hajnal [13]。

我们的论证表明，Erdős 和 Moser 的猜想对于大多数平面范数都成立。更具体地说，这些论证表明，对于大多数范数，平面上处于严格凸位置的 n 个点之间的单位距离数量至多为 $4n$。事实上，第 5 节中的论证表明，对于大多数平面范数，给定一列单位向量 $\mathbf{u}_1$、…、$\mathbf{u}_\ell$，张成空间 $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{u}_1$、…、$\mathbf{u}_\ell)$ 中不同方向的单位向量总数至多为 2ℓ（如果两个单位向量除相差一个符号外相同，我们就认为它们具有相同的方向）。对于平面上处于严格凸位置的任意 n 个点，我们可以考虑对应于这些点之间单位距离的图，并在该图中选取一个极大的生成森林（即为图的每个连通分支选取一棵生成树）。设 $\mathbf{u}_1$、…、$\mathbf{u}_\ell$ 是对应于该生成森林各边的单位向量，并注意到 $\ell \leq n-1$。现在，任意一个作为 n个点中两点之间距离出现的单位向量，都可以写成向量 $\mathbf{u}_1$、…、 $\mathbf{u}_\ell$ 中某些向量或其相反向量之和（因为对应边的两个端点可以通过生成森林中的一条路径连接）。因此，作为 n 个点之间距离出现的任意单位向量都必须属于 $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{u}_1$、…、$\mathbf{u}_\ell)$，所以对于典型范数而言，这类单位向量至多有 $2\ell \leq 2n-2$ 个不同方向。另一方面，由于这 n 个点处于严格凸位置，对于任意单位向量 $\mathbf{u}$，距离为 $\pm\mathbf{u}$ 的点对至多有两对。因此，对于典型的平面范数，处于严格凸位置的 n 个点之间的单位距离总数至多为 $4n-4$。

我们提出的另一个有趣的开放问题是：典型 d-范数是否可能存在零一律：对于每个固定的 $d \geq 2$ 和每个固定的图 H，以下两个选项是否恰有一个成立？

- 对于除第一纲集之外的所有 d-范数 $||.||$，$||.||$ 的单位距离图都包含 H 作为子图。
- 对于除第一纲集之外的所有 d-范数 $||.||$，$||.||$ 的单位距离图都不包含 H 作为子图。

最后，我们提到，对于典型的 d-范数 $\|.\|$，我们还有另一种方法来给出 $U_{\|.\|}(n)$ 的上界 $O(d^2n\log\ n)$，但所得上界比定理 1.1 中的结果略弱。这种方法与 Matoušek 的证明 [34] 更为相似；Matoušek 证明了，对于大多数 2-范数 $\|.\|$，有 $U_{\|.\|}(n) \leq O(n\log\ n\log\log\ n)$。特别是，

通过使用精细的多重曝光过程进行概率论证，我们设法改进了 [34, 命题 2.1], 中的图论表述，去除了该命题中的 loglog n 因子（该因子导致了 Matoušek 结果中的 log log n 因子）。虽然所得上界 $O(d^2 n \log n)$（就 d- 依赖性而言）弱于定理 1.1 中的上界，但我们计划在本文的配套短文中写出这一改进版图论引理的证明，因为我们认为该论证可能对其他情形也有用。特别是，该引理的一个略强版本将为所谓的离散 X 射线重建问题给出渐近答案，详见 [35] 。

注记。 在本论文审稿期间，Greilhuber、Schildkraut 和 Tidor [27] 找到了新的构造，将定理 1.2 中函数 $U_{\|\cdot\|}(n)$ 的下界提高到了 $(d/2 - o(1)) \cdot n \log_2 n$。这表明我们的定理 1.1 是渐近紧的。

致谢。 感谢 Karim Adiprasito、Pankaj Agarwal、Xiaoyu He、Bo'az Klartag、Mehtaab Sawhney、József Solymosi、Terence Tao 和 Or Zamir 与我们进行了有益的交流，也感谢 János Kollár 和 Assaf Naor 引导我们查阅参考文献 [17]。第二作者衷心感谢普林斯顿高等研究院以及 Oswald Veblen 基金的支持。我们也非常感谢匿名审稿人认真阅读本文，并提出宝贵的意见和建议。

参考文献

[1] A. Aggarwal, 《凸多边形中的单位距离》, Discrete Math. 338, （2015年）, 第3期, 88–92。[2] N. Alon 和 V. D. Milman, 《有限维巴拿赫空间中的嵌入》, Israel J. Math. 45（1983年）, 第4期, 265–280。[3] N. Alon 和 P. Pudlák, 《 l_p^n中的等距集》, Geom. Funct. Anal. 13（2003年）, 第3期, 467–482。[4] A. Barvinok, 《用多胞体对凸体进行节约近似》, Int. Math. Res. Not. IMRN（2014年）, 第16期, 4341–4356。[5] B. Bollobás 和 I. Leader, 《网格中的边等周不等式》, Combinatorica 11（1991）, 第4期, 299–314。[6] P. Brass, 《赋范空间中的 Erdős 距离问题》, Comput. Geom. 6（1996年）, 第4期, 195–214。[7] P. Brass, 《赋范空间中的等边单纯形》, Beiträge Algebra Geom. 40（1999年）, 第2期, 303–307。[8] P. Brass、W. Moser 和 J. Pach, 《离散几何中的研究问题》, Springer, 纽约, 2005年。[9] K. B. Chilakamarri, 《闵可夫斯基度量空间中的单位距离图》, Geom. Dedicata 37（1991）, 第3期, 345–356。[10] J. Davies, 《平面着色中的奇数距离》, Geom. Funct. Anal. 34（2024年）, 19–31。[11] A. D. N. J. de Grey, 《平面色数至少为5》, Geombinatorics 28（2018年）, 第1期, 18–31。[12] B.V. Dekster, 《闵可夫斯基空间和巴拿赫空间中具有指定边长的单纯形》, Acta Math. Hungar. 86（2000年）, 第4期, 343–358。[13] H. Edelsbrunner 和 P. Hajnal, 《凸多边形顶点之间单位距离数量的下界》, J. Combin. Theory Ser. A 56（1991）, 第2期, 312–316。[14] J. Edmonds, 《将拟阵划分为独立子集的最小划分》, J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B 69B（1965年）, 67–72。[15] J. Edmonds 和 D. R. Fulkerson, 《截集与拟阵划分》, J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B 69B（1965年）, 147–153。[16] C. Elsholtz 和 W. Klotz, 《单位单纯形的最大维数》, Discrete Comput. Geom. 34（2005年）, 第1期, 167–177。

[17] R. Engelking，《有限维与无限维理论》，纯数学 Sigma 系列，第10卷，Heldermann Verlag，莱姆戈，1995年。[18] P. Erdős，《图论在几何学中的一些应用》，《加拿大数学杂志》19（1967），968–971。[19] P. Erdős，《组合几何中的问题与结果》，《离散几何与凸性》（纽约，1982），《纽约科学院年刊》，第440卷，纽约科学院，纽约，1985年，第1–11页。[20] P. Erdős，《 n 点的距离集》，Amer. Math. Monthly 53（1946），248–250。[21] P. Erdős 和 L. Moser，《问题11》，Canad. Math. Bull. 2（1959年），43。[22] G. Exoo 和 D. Ismailescu，《平面色数至少为5：一种新证明》，Discrete Comput. Geom. 64（2020），第1期，216–226。[23] P. Frankl 和 R. M. Wilson，《具有几何推论的交集定理》，Combinatorica 1（1981），第4期，357–368。[24] Z. Füredi，《凸 n边形中的单位距离最大数量》，J. Combin. Theory Ser. A 55（1990），316–320。[25] Z. Füredi 和 J.-H. Kang，《用凸体覆盖 n空间及其色数》，Discrete Math. 308（2008），第19期，4495–4500。[26] J. Garibaldi、A. Iosevich 和 S. Senger，《Erdős 距离问题》，学生数学文库，第56卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，2011年。[27]J. Greilhuber、C. Schildkraut 和 J. Tidor，《任意范数下的更多单位距离》，预印本 arXiv:2410.07557（2024年）。[28] P. M. Gruber，《凸几何与离散几何》，《数学科学基础丛书》 [《数学科学基础》], 第336卷，Springer，柏林，2007年。[29] L. Guth 和 N. H. Katz，《平面中的 Erdős 不同距离问题》，《数学年刊》（第2辑）181（2015年），第1期，155–190。[30] G. Kalai，《组合几何中的一些新老问题 I：围绕 Borsuk 问题》，《组合学综述》，伦敦数学学会讲义丛书，第424卷，剑桥大学出版社，2015年，第147–174页。[31] V. Klee，《赋范线性空间中光滑性与严格凸性的一些新结果》，Math. Ann. 139（1959年），51–63（1959年）。[32] A. Kupavskiy，《 $\mathbb{R}^n$ 在任意范数下的色数》，Discrete Math. 311（2011年），第6期，437–440。[33] J. Matoušek，《离散几何中代数时代的黎明？》，《第27届欧洲计算几何研讨会论文集》，2011年。[34] J. Matoušek，《对于大多数范数，单位距离数量几乎是线性的》，Adv. Math. 226（2011年），第3期，2618–2628。[35] J. Matoušek、A. Přívětivý 和 P. Škovroň，《从 k 投影中可以重构出多少个点？》，SIAM J. Discrete Math. 22（2008），第4期，1605–1623。[36] C. M. Petty，《Minkowski 空间中的等距集》，Proc. Amer. Math. Soc. 29（1971），369–374。[37] D. H. J. Polymath，《Polymath16》，web.archive.org/web/20220216001534/https://asone.ai/polymath/index.php?title=Hadwiger-Nelson_问题。[38] A. Sheffer，《多项式方法与关联理论》，剑桥高等数学研究丛书，第197卷，剑桥大学出版社，剑桥，2022年。[39] J. Solymosi 和 E. Szabó，《曲线的平移副本的排列》，预印本 arXiv:2208.05525（2022年）。[40] J. Solymosi 和 V. H. Vu，《高维中 Erdős 不同距离问题的近最优界》，Combinatorica 28（2008），第1期，113–125。[41] J. Spencer、E. Szemerédi 和 W. Trotter，小，《欧几里得平面中的单位距离》，《图论与组合学》（剑桥，1983），Academic Press，伦敦，1984年，第293–303页。[42] K. J. Swanepoel，《Kusner 关于等距集的一个问题》，《数学文献》（巴塞尔）83（2004），第2期，164–170。

[43] K. J. Swanepoel, 《赋范空间中的组合距离几何》, 《直观几何学新趋势》, Bolyai Soc. Math. Stud., 第27卷, János Bolyai Math. Soc., 布达佩斯, 2018年, 第407–458页。[44] K. J. Swanepoel 和 R. Villa, 《赋范空间等边数的一个下界》, Proc. Amer. Math. Soc. 《136 》(2008), 第1期, 127–131页。[45] L. A.Székely, 《离散几何中的交叉数与棘手的 Erdős问题》, Combin. Probab. Comput.《6》(1997), 第3期, 353–358页。[46] E. Szemerédi, 《Erdős单位距离问题》, 《数学中的开放问题》, Springer, 2016年, 第459–477页。[47] P. Ungar, $2N$ 不共线点至少确定 $2N$ 个方向, J. Combin. Theory Ser. A 《33 》(1982), 第3期, 343–347页。[48] P. Valtr, 《允许产生许多单位距离的严格凸范数及相关相切问题》, 手稿（2005年）。