arXiv:2302.09117v1 [math.OA] 17 Feb 2023

度量谱三元组归纳极限的等距群与 Gromov-Hausdorff 收敛

JACOPO BASSI、ROBERTO CONTI、CARLA FARSI 和 FRÉDÉRIC LATRÉMOLIÈRE

摘要。本文从度量角度研究 Latrémolière 邻近度框架下谱三元组的等距变换群和双 Lipschitz自同构集。特别地，我们证明，相对于诱导逐点收敛拓扑的 Monge-Kantorovich 度量，这些群和集合在谱三元组C^*-代数的自同构群中是紧的。随后，我们证明了各种等距变换群的作用收敛的充要条件。这里的收敛是在 Gromov-Hausdorff 推进距离的协变版本意义下定义的；该距离是 Gromov-Hausdorff 距离的非交换类比，讨论背景为量子紧致度量空间和度量谱三元组的归纳极限。我们通过若干实例展示本文的研究成果，包括 AF 代数和非交换螺旋体。

目录

1. 引言 1致谢 52. 度量谱三元组的等距群 52.1. 量子紧致度量空间的等距群 62.2. 谱三元组的等距群 123. 邻近度与等距群 173.1. 协变邻近度 173.2. 协变桥构造器 194. 应用 294.1. 恒等映射作为桥构造器 304.2. 几乎内自同构 314.3. 带忠实迹的 AF 代数 324.4. 对偶作用与归纳极限 35参考文献 37

1. 引言

谱三元组最初由 Connes 于 1985年 引入，是一种强大的工具，可以将黎曼几何推广到非交换空间和C^*-代数的领域。经典例子是作用于

日期：2023年2月21日。2000 数学学科分类。主要分类：46L89、46L30、58B34。关键词和短语。非交换度量几何、等距群、量子格罗莫夫-豪斯多夫距离、C*-代数的归纳极限、蒙日-康托洛维奇距离、量子度量空间、谱三元组、紧致 C*-度量空间、AF 代数、扭曲群 C*-代数。

闭流形的旋量丛上的狄拉克算子。此后，许多作者针对多种不同类型的（含单位元）C^*-代数引入了许多谱三元组。谱三元组的重要性在于，它们在将微分几何和谱几何推广到各种新情形方面具有公认的强大能力，适用范围从叶空间，到量子环面、量子球面及其他量子空间上的几何，并在数学物理中有着广泛的应用。尤其是，作为其他谱三元组的归纳极限而得到的谱三元组，近年来受到了广泛关注。例如，AF代数上的谱三元组最早由 Christensen-Ivan 于[6]引入；另见 [7], [8], [18], [1], [3] （以及许多其他参考文献），其中进一步研究了这些谱三元组及其推广。在一个相当不同的方向上，扭曲群 C*-代数的归纳极限上的谱三元组由本文最后两位作者与 J. Packer 共同在 [12] 中引入，其中的例子包括 Bunce-Deddens代数 和非交换螺旋体（量子环面的归纳极限）——C^*-代数，它们并非 AF 代数。这些构造受到了 [14] 和 [13]中工作的启发。在本文中，我们研究与量子紧度量空间及度量谱三元组相关联的某些自然等距变换群的几何，尤其关注谱三元组的归纳极限。

谱三元组会在其底层（含单位元的）C*-代数的状态空间上诱导出一种扩展的伪度量，称为 *Connes* 度量。在非交换度量几何中，人们特别关注这样的谱三元组：其 Connes 伪度量实际上是一个能够诱导弱*拓扑的度量；因此得名度量谱三元组。度量谱三元组进而为量子紧致度量空间提供了实例，后者是紧致度量空间上 Lipschitz函数代数的非交换类比。量子紧致度量空间由一个赋予了 Lipschitz半范数非交换类比的含单位元的 C*-代数构成，其主要性质是：通过对偶性，它在 C*-代数的状态空间上诱导出一种距离，并以类似 Kantorovich度量的方式使弱*拓扑度量化。这一度量称为量子紧致度量空间的 *Monge-Kantorovich*度量 。

受 Connes 思想的启发，Rieffel 于 2004 年在 [33] 中通过引入量子 Gromov-Hausdorff 距离，将量子紧度量空间的收敛这一思想形式化（采用了涉及序单位空间而非 C*-代数的更一般定义）。量子 Gromov-Hausdorff 距离是赋予 Monge-Kantorovich度量的量子紧度量空间的状态空间之间的 Gromov-Hausdorff 距离的一种形式。Latrémolière 扩展了 Rieffel 的思想，将 C^*-代数的乘法结构纳入其中，要求量子紧度量空间的 Lipschitz 半范数的类似物满足某种 Leibniz不等式。借助这一关键补充，Latrémolière 得以证明，两个量子紧度量空间之间的距离为零，等价于其底层 C*-代数彼此 $*$-同构，且它们的状态空间彼此等距。这一新距离被称为 （对偶）邻近度 [29]。在一系列论文中，Latrémolière 大幅扩展了邻近度的定义域，使其除了包括量子紧度量空间之外，还包括诸如 C^*-丛 [23, 21], C^*-对应 [21], Lipschitz动力系统（涉及群在量子紧度量空间上的作用） [22, 24], 以及度量谱三元组 [20] 等结构。

在所有这些情形中，距离为零等价于所给结构在自然意义下同构。此外，这些度量在很大的类上是完备的。特别是，对于度量谱三元组这一类所定义的谱邻近度，

[20], 两个度量谱三元组之间的距离为零，当且仅当它们酉等价。此外，该度量支配邻近度，因此意味着与度量谱三元组相关联的量子紧致度量空间的度量收敛。这一最新扩展为在度量谱三元组这一类上使用度量几何工具提供了可能。

在非交换度量几何，尤其是（度量）谱三元组的背景下，一个有趣的问题是：等距变换可能是什么。为此，Latré-molière 引入了量子紧致度量空间上的双 Lipschitz 态射和完全量子等距的概念；参见 [28]。对于谱三元组而言，等距映射的概念相当重要。在狄拉克算子作用于闭流形旋量丛这一经典例子中，等距映射应当就是标准的黎曼度量等距映射。因此，在这一背景下自然会提出这样的问题：谱三元组的等距变换应当是什么，以及它们与 Latrémolière 在谱三元组上定义的度量结构之间有何关系。

文献中已经出现了谱三元组的各种等距变换概念，其背景或为经典群，或为量子群。在本文中，我们将重点讨论两个经典等距群，分别称为Iso 和ISO，参见定义（2.14）、（2.11）。为完整起见，我们指出，还存在等距变换量子群的概念，参见例如[17] 及其中的参考文献；对于零维流形的量子情形，另见 [4] 。Iso 和ISO 都是底层C^*代数的 $*$-自同构群的子群：群ISO 是相关 Monge-Kantorovich度量结构的等距群，而Iso由 Park 在 [31]，中引入，其限制更为严格，要求存在一个酉算子来实现给定的C^*代数自同构，并且该酉算子还与狄拉克算子交换；一般而言，Iso 始终是ISO的子群。此外，我们将重点放在作为归纳极限获得的谱三元组上；在这一背景下，我们利用量子紧致度量空间上适当群作用的协变邻近度，证明某些等距群收敛到等距群的射影极限。为此，首先需要证明量子紧致度量空间的等距群是紧的。对于黎曼流形情形、非交换环面及其他例子，Park 在 [31, 32]，中研究了Iso： 针对与长度函数相关的扭曲约化群C^*代数上的谱三元组，该长度函数由 [9] 中的 Long-Wu 定义；针对 Cuntz 代数上的 Goffeng-Mesland [15] 谱三元组，由 Conti-Rossi 在 [11]，中研究；针对 AF 代数的 Christensen-Ivan [6] 谱三元组，则由 Bassi-Conti 在 [2] 中研究。Conti-Farsi 在 [10] 中同时考察了 Kellendonk-Savinien谱三元组的Iso和ISO 。

本文从双Lipschitz自同构这一更一般的框架出发，然后将谱三元组的ISO 和Iso等距变换群视为双Lipschitz自同构的子集。本文的第一个主要结果是，K-双Lipschitz自同构的集合，以及Iso 和ISO 群，在自同构群 Aut($\mathfrak{A}$) 上定义的 Monge-Kantorovich度量 mkDL 下总是闭的（因而是紧的）。

定理。 （定理 （2.12）、推论 （2.13）以及定理 （2.19）） 设（$\mathfrak{A}$，L）是一个量子紧度量空间。设Aut($\mathfrak{A}$）是 $*$-自同构群，其逐点收敛拓扑由距离度量

$$\forall \alpha,\beta\in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})\quad \mathrm{mkD}_{\mathsf{L}}(\alpha,\beta):=\sup\left\{\left\|\alpha(a)-\beta(a)\right\|_{\mathfrak{A}}: a\in \mathrm{dom}(\mathsf{L}), \mathsf{L}(a)\leqslant 1\right\}.$$

$\left(\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}),\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}}\right)$ 的以下子集和子群是紧的。

(1) 双*Lipschitz*自同构的集合 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A},\mathsf{L},K)$，其中 $K \geqslant 1$：

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{A},\mathsf{L},K) := \left\{\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}) : \alpha \textit{ is } K\textit{-bi-Lipschitz}\right\}.$$

（*2*）子群 ISO（$\mathfrak{A}$，L）：$=\{\alpha \in \mathrm{Aut}$（$\mathfrak{A}$）：是一个完全量子等距。}。

（*3*）对于度量谱三元组 （$\mathfrak{A}$，$\mathscr{H}$，$/D$），由以下方式定义子群 Iso（$\mathfrak{A}$，$\mathscr{H}$，$/D$）：

$$\mathsf{Iso}(\mathfrak{A},\mathscr{H},/D) :=$$

$$\left\{\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}) : \exists U \textit{ unitary on } \mathscr{H} \textit{ s.t. } \mathrm{Ad}_U = \alpha, U\mathrm{dom}(\not{D}) = \mathrm{dom}(\not{D}), [\not{D}, U] = 0\right\}.$$

根据 [12, 定理 2。22]，给定一个量子紧致度量空间的归纳序列，且其极限是一个量子紧致度量空间，我们有：在一个非常自然的假设下，归纳极限上存在一种特殊类型的 $*$-自同构，它相对于量子度量具有良好的性质，这种自同构称为 桥构造器，这等价于给定的量子紧致度量空间序列关于邻近度收敛。此类构造的例子包括非交换螺旋体和有界 Bunce-Deddens代数，参见 [12]。

既然（度量）谱三元组已经被赋予了等距群结构，那么一个自然的问题是，能否扩展 [12] 原有的桥构造器，使其确保相关等距群的收敛性。这正是我们在本文中所做的工作。协变桥构造器确实是归纳极限空间的完全量子等距，并且相对于群作用具有协变性，同时在极限过程中相对于逼近具有良好的性质。详见定义（3.12）。

有了这些准备，我们现在可以陈述本文的第二个主要结果。

定理（定理（*3.14*）和（*3.15*））。对于每个 $n \in N := N \cup \{\infty\}$，设（$\mathfrak{A}_n, L_n$）为一个量子紧致度量空间，使得 $\mathfrak{A}_\infty = cl\left(\bigcup_{n\in N} \mathfrak{A}_n\right)$，其中 $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathfrak{A}_\infty$ 的 C^*-子代数序列，并且对于 $\subseteq$ 递增，其单位元 $\mathfrak{A}_\infty$ 属于 $\mathfrak{A}_0$。假设 $(\mathfrak{A}_n, L_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ 是量子紧致度量空间，并且对于每个 $n \in N$，令 α_n 为群 G_n 在（$\mathfrak{A}_n, L_n$）上的完全量子等距作用，满足假设（*3.11*）。

如果对于这些数据存在一个协变桥构造器，那么

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^{\mathrm{cov}}((\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n, \alpha_n, G_n), (\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty, \alpha_\infty, G_\infty)) = 0. \tag{1.1}$$

反之，如果我们假设存在 $M > 0$ 使得，对于所有 $n \in$ 自然数集，都有 $\frac{1}{M}\mathsf{L}_n \leqslant \mathsf{L}_\infty \leqslant M\mathsf{L}_n$ 在 定义域(L_n)上，并且如果等式（*1.1*）成立，那么就存在一个协变桥构造器。

本文中，定理（3.14）的主要应用是以下收敛结果：

定理。（定理（*3.21*））对于每个 $n \in$ 自然数集 $:=$ 自然数集 $\cup \{\infty\}$，设 $(\mathfrak{A}_n, L_n)$ 是一个量子紧致度量空间，使得 $\mathfrak{A}_\infty = cl(\bigcup_{n\in}$自然数集 $\mathfrak{A}_n)$，其中 $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 C^*-子代数的一个递增（关于 $\subseteq$）序列，且 $\mathfrak{A}_\infty$ 中的单位元属于 $\mathfrak{A}_0$。设 π 是一个同时为桥构造器的完全量子等距。由以下方式定义群 $ISO(A_\infty, L_\infty|\pi)$：

$\mathsf{ISO}(\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty|\pi) := \left\{\alpha \in \mathsf{ISO}(\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty) : \pi \circ \alpha = \alpha \circ \pi \text{ 且 } \forall n \in \mathbb{N} : \alpha_{|\mathfrak{A}_n} \in \mathsf{ISO}(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)\right\}$。是 $*$-自同构$\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_\infty)$ 的紧子群。

此外，若 G_∞ 是 $\mathsf{ISO}(\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty|\pi)$ 的闭子群，并且对所有 $n \in \mathbb{N}$，令 $G_n := \left\{\alpha_{|\mathfrak{A}_n} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_n) : \alpha \in G_\infty\right\}$，则 G_n 是一个闭群，并且

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^{\mathrm{cov}}((\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n, G_n), (\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty, G_\infty)) = 0,$$

其中 Λ^{cov} 是协变邻近度（见 [22]）。

在第4章节中，我们给出第（3）章节结果的一些应用。特别是，当恒等映射是一个协变桥构造器时（见推论（4.1）和（4.2））， 主要问题便归结为将量子等距同构从一个子代数扩展到一个代数。尽管此类扩展并不总是可能的，但我们将重点研究内自同构的情形，因为它们总是可以扩展的。这一观点使我们能够在定理（4.8）中证明，对于与 AF 代数相关的度量谱三元组的归纳极限 [6], , 其 ISO群就是各因子的 ISO群的极限。对于 UHF代数，还可以得到更多结果，并且极限结果也扩展到 Iso 群，这与 [2]一致。也就是说，如果 $\mathfrak{A}_\infty$ 是一个 UHF 代数，且 $\mathfrak{A}_n = \otimes^n{}_{j=0}\mathfrak{M}(\delta_j)$，其中 $\delta_0 = 1$，$(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个自然数集序列，而 $\mathfrak{M}(d)$ 是由$d \times d$阶矩阵构成的 C*-代数，那么对所有 $n \in \mathbb{N}$，定义：

$$\mathsf{Iso}(\mathfrak{A}_n, L^2(\mathfrak{A}_n,\varphi), (\not{D}_\lambda)_{|\mathfrak{A}_n}) = \left\{\otimes^n_{j=0}\mathrm{Ad}_{u_j} : \forall\, j \in \{0,\dots,d\} \quad u_j \in \mathfrak{M}(\delta_j), u_j^* = u_j^{-1}\right\},$$

and

$$\mathsf{Iso}(\mathfrak{A}_\infty, L^2(\mathfrak{A}_\infty,\varphi), \not{D}_\lambda) = \left\{\alpha \in \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{A}_\infty) : \alpha_{|\mathfrak{A}_n} \in \mathsf{Iso}(\mathfrak{A}_n, L^2(\mathfrak{A}_n,\varphi), \not{D}_\lambda)\right\}.$$

然后：

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^{\mathrm{cov}}((\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n, \mathsf{Iso}(\mathfrak{A}_n, L^2(\mathfrak{A}_n,\varphi), \not{D}_n), (\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty, \mathsf{Iso}(\mathfrak{A}_\infty, L^2(\mathfrak{A}_\infty,\varphi), \not{D}_\lambda))) = 0.$$

在第4章节中，我们还研究了非交换螺旋体和Bunce-Deddens代数上的谱三元组；在这种情况下，我们得到了对偶作用的收敛性，见章节（4.4）。

致谢。J.B.得到“算子代数与量子场论”项目资助，CUP：E83C18000100006；他还感谢罗马大学“Tor Vergata”提供的OAQM资助，CUP：E83C22001800005。R.C.得到Sapienza大学2019年和2020年科学研究项目的部分资助。本项工作还得到C. F.的Simons基金会合作资助#523991的部分支持。C.F.还感谢SBAI系、罗马大学Sapienza给予的热情接待。

2. 度量谱三元组的等距群

与度量谱三元组相关联的至少有两类有趣的自同构群，它们都可以称为等距变换群。由于度量谱三元组会产生量子紧致度量空间，这两个群中较大的一个由量子度量的所有完全量子等距自同构组成。另一方面，我们也可以只关注那些与谱三元组本身直接相容的等距映射，即由与狄拉克算子对易的酉算子在空间上实现的自同构。在本章节中，我们研究这两个群的基本拓扑。由于我们的目标是研究量子紧致度量空间上某些等距变换的闭子群的协变收敛，因此必须确认我们的两个等距变换群在自然拓扑下都是紧的；对于我们的目的而言，该拓扑是逐点收敛拓扑，并且可以利用底层量子度量通过Monge-Kantorovich度量的一种形式度量化 [28]。这些结果在定理（2.12）、推论（2.13）和定理（2.19）中得到确立。此外，我们还将证明双 Lipschitz 态射集合的一个紧性结果。

2.1. **量子紧致度量空间的等距群**。量子紧致度量空间是紧致度量空间上 Lipschitz函数代数的一种类比，旨在以与含单位元的 C*-代数推广紧致豪斯多夫空间以及谱三元组推广黎曼流形相同的方式，为紧致度量空间提供量子版本。

记号 2.1。 对于任意含单位元的 C^*-代数 $\mathfrak{A}$，我们将 $\mathfrak{A}$ 中自伴元素的空间 $\{a \in \mathfrak{A} : a = a^*\}$ 记为 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$。此外， $\mathfrak{A}$ 的状态空间记为 $\mathscr{S}(\mathfrak{A})$。 $\mathfrak{A}$ 的范数记为 $\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}_{\mathfrak{A}}$。

定义 2.2 ([9, 35, 34, 27, 26])。 一个量子紧致度量空间 $(\mathfrak{A}, \mathsf{L})$ 是一个有序对，其中 $\mathfrak{A}$ 是一个含单位元的 C*-代数，而 L 是定义在 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$ 的稠密 Jordan-Lie子代数 $\mathrm{dom}(\mathsf{L})$ 上的半范数，并满足：

(1) $\{a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{A}) : \mathsf{L}(a) = 0\} = \mathbb{R}1_{\mathfrak{A}}$；(2) Monge-Kantorovich度量 mk_{L} 定义在 $\mathfrak{A}$ 的状态空间 $\mathscr{S}(\mathfrak{A})$ 上，并且对所有 $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathfrak{A})$：当限制在 $\mathscr{S}(\mathfrak{A})$ 上时，该度量诱导弱 *拓扑；(3) 存在 $\Omega \geq 1$ 和 $\Omega' \geq 0$，使得 L 具有 (Ω, Ω')-拟 Leibniz 性质，即对于所有 a、$b \in \mathrm{dom}(\mathsf{L})$，

$$\max\left\{\mathsf{L}\left(\frac{ab+ba}{2}\right), \mathsf{L}\left(\frac{ab-ba}{2i}\right)\right\} \leq \Omega(\|a\|_{\mathfrak{A}}\mathsf{L}(b) + \mathsf{L}(a)\|b\|_{\mathfrak{A}}) + \Omega'\mathsf{L}(a)\mathsf{L}(b);$$

根据 [35, 定理 1.9], ，我们注意到，条件 (2) 和条件 (3) 等价于以下单一条件：存在一个 $\mathfrak{A}$ 的状态 $\mu \in \mathscr{S}(\mathfrak{A})$，使得集合 $\{a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}) : \mathsf{L}(a) \leq 1, \mu(a) = 0\}$ 在 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$ 中是紧的。

我们将使用以下便于使用的约定。

约定 2.3. 若 $L : D \to \mathbb{R}$ 是某个 Banach空间 E 的稠密子空间 D 上的半范数，则我们规定 $\mathrm{dom}(L) = D$，并且对于所有 $z \in E \setminus D$，令 $L(z) = \infty$。对于 $x \in \mathbb{R}$，我们采用标准约定：$\infty > x$， $\infty + x = x + \infty = \infty$ 对所有 $x \geq 0$ 均成立；而 $x\infty = \infty$ 对 $x > 0$ 成立，同时 $0\infty = 0$。

由于量子紧度量空间的状态空间确实是紧致度量空间，因此它们具有有限直径；这一观察在我们的工作中发挥了重要作用。

记号 2.4。 若（X， d）是一个度量空间，则我们将 X 的直径 定义为 $\mathrm{diam}(X, d) := \sup\{d(x, y) : x, y \in X\}$。若 $B \subseteq E$是赋范向量空间 E 的子集，则我们将 $\mathrm{diam}(B, E)$ 或 $\mathrm{diam}(B, \mathrm{k}\cdot\mathrm{k}_E)$ 定义为 B在由 E 的范数 $\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}_E$ 诱导的度量下的直径。若（$\mathfrak{A}$， L）是一个量子紧致度量空间，则置

$$\mathrm{qdiam}(\mathfrak{A}, \mathsf{L}) := \mathrm{diam}\left(\mathscr{S}(\mathfrak{A}), \mathsf{mk}_{\mathsf{L}}\right).$$

量子紧致度量空间是若干范畴中的对象，其中箭头是 $*$-态射，并且与量子度量数据具有额外的相容性。

定义 2.5 ([34, 33, 28])。 设（$\mathfrak{A}$， $\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}$）和（$\mathfrak{B}$， $\mathsf{L}_{\mathfrak{B}}$）是两个量子紧致度量空间。

一个 *Lipschitz* 态射 π： $(\mathfrak{A}, \mathsf{L}_{\mathfrak{A}}) \to (\mathfrak{B}, \mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$ 是从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 $*$-态射，满足$\pi(\mathrm{dom}(\mathsf{L}_{\mathfrak{A}})) \subseteq \mathrm{dom}(\mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$。

一个 量子等距 $\pi\colon (\mathfrak{A},\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}) \to (\mathfrak{B},\mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$ 是一个 Lipschitz 态射，满足 π 是满射，并且

$$\forall b \in \operatorname{dom}(\mathsf{L}_{\mathfrak{B}}) \quad \mathsf{L}_{\mathfrak{B}}(b) = \inf\{\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}(a) : \pi(a) = b\}.$$

一个完全量子等距 $\pi\colon (\mathfrak{A},\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}) \to (\mathfrak{B},\mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$ 是一个量子等距，且 π 是一个 $*$-同构，而 $\pi^{-1}\colon (\mathfrak{B},\mathsf{L}_{\mathfrak{B}}) \to (\mathfrak{A},\mathsf{L}_{\mathfrak{A}})$ 也是一个量子等距。

注记 2.6。 按照我们的约定（2.3），我们注意到，例如，$\pi\colon (\mathfrak{A},\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}) \to (\mathfrak{B},\mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$ 是一个量子等距，当且仅当 π 是从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的满射 $*$-态射，使得

$$\forall b \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{B}) \quad \mathsf{L}_{\mathfrak{B}}(b) = \inf\{\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}(a) : \pi(a) = b\}.$$

可以构造一个范畴，其中对象是量子紧致度量空间，Lipschitz态射是箭头，因为Lipschitz态射的复合仍是Lipschitz态射，而恒等映射也是Lipschitz态射。正如 [33, 命题 3。7], 所示，量子等距同构的复合也是量子同构（在我们的语境中，我们的等距变换是 $*$-态射，而不是 [33], 中所述的单位元正线性映射，但关于其复合的论证仍然成立）。

如 [28, 推论 2.3], 所示，$*$-态射 $\pi\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 是 Lipschitz 态射，当且仅当存在 $K > 0$，使得对于所有 $a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$，都有 $\mathsf{L}_{\mathfrak{B}} \circ \pi(a) \leq K\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}(a)$。此外，$\pi$ 是完全量子等距，当且仅当 $\pi(\text{定义域}(\mathsf{L}_{\mathfrak{A}})) = \text{定义域}(\mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$，且对于所有 $a \in \text{定义域}(\mathsf{L}_{\mathfrak{A}})$，都有 $\mathsf{L}_{\mathfrak{B}} \circ \pi(a) = \mathsf{L}_{\mathfrak{A}}(a)$。尽管完全量子等距是我们关注的对象，也是适用于我们目的的恰当同构概念，但我们也将使用较弱的双 Lipschitz 同构概念，其定义如下。

定义 2.7。 对于 $K \geq 1$，两个量子紧致度量空间 $(\mathfrak{A},\mathsf{L}_{\mathfrak{A}})$ 和 $(\mathfrak{B},\mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$ 之间的 K-双 *Lipschitz* 同构 $\alpha\colon (\mathfrak{A},\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}) \to (\mathfrak{B},\mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$，是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 $*$- 同构，满足 $\alpha(\text{定义域}(\mathsf{L}_{\mathfrak{A}})) = \text{定义域}(\mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$，并且对于所有 $a \in \text{定义域}(\mathsf{L}_{\mathfrak{A}})$，

$$\frac{1}{K}\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}(a) \leqslant \mathsf{L}_{\mathfrak{B}}(\alpha(a)) \leqslant K\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}(a).$$

特别地，一个 $*$-同构是完全量子等距，当且仅当它是 1-双利普希茨的。我们还注意到，如果 α 是一个 K-双利普希茨同构，那么 α^{-1}也是如此。事实上，由于 $\alpha(\text{定义域}(\mathsf{L}_{\mathfrak{A}})) = \text{定义域}(\mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$，我们得到 $\alpha^{-1}(\text{定义域}(\mathsf{L}_{\mathfrak{B}})) = \text{定义域}(\mathsf{L}_{\mathfrak{A}})$。对于所有$b \in \text{定义域}(\mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$，我们于是有:

$$\frac{1}{K}\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}(\alpha^{-1}(b)) \leqslant \underbrace{\mathsf{L}_{\mathfrak{B}}(\alpha(\alpha^{-1}(b)))}_{=\mathsf{L}_{\mathfrak{B}}(b)} \leqslant K\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}(\alpha^{-1}(b))$$

因此 α^{-1} 也是 K-双利普希茨的。此外，如果 $\alpha : (\mathfrak{A},L_{\mathfrak{A}}) \to (\mathfrak{B},L_{\mathfrak{B}})$ 是 K-双利普希茨的，并且$\beta : (\mathfrak{B},L_{\mathfrak{B}}) \to (\mathfrak{C},L_{\mathfrak{C}})$ 是 H-双利普希茨的，那么 $\beta \circ \alpha$ 是 KH-双利普希茨的。

在配备半范数的含单位元的 C*-代数 $\mathfrak{A}$ 的 $*$-自同构群Aut $(\mathfrak{A})$ 上存在一个自然的Monge-Kantorovich度量，其定义现根据[28, 定理 5.1]回顾如下。

定义 2.8 ([28])。 设 $(\mathfrak{A},\mathsf{L})$ 是一个量子紧致度量空间。对于 $\mathfrak{A}$ 的任意两个 $*$-自同构 α和 β，定义 *Monge-Kantorovich*度量:

$$\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}}(\alpha,\beta) := \sup\left\{\left\|\alpha(a) - \beta(a)\right\|_{\mathfrak{A}} : a \in \operatorname{dom}(\mathsf{L}), \mathsf{L}(a) \leqslant 1\right\}. \tag{2.1}$$

以下关于 $*$-自同构群上的 Monge-Kantorovich度量的基本拓扑性质已在 [28] 中建立。

定理 *2.9*（[28, 定理 *5.2*]）。若（$\mathfrak{A}$,L）是一个量子紧致度量空间，则 *mkDL* 是群 *Aut(*$\mathfrak{A}$*)* 上的一个度量，其中 *Aut(*$\mathfrak{A}$*)* 是 $\mathfrak{A}$ 的 $*$-自同构群；该度量诱导强收敛拓扑，即对于 *Aut(*$\mathfrak{A}$*)* 中的序列（α_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\alpha \in$*Aut(*$\mathfrak{A}$*)*，当且仅当对所有 $a \in \mathfrak{A}$ 都有 $lim_{n\to\infty} mkDL(\alpha_n, \alpha) = 0$ 且 $lim_{n\to\infty} k\alpha_n(a) - \alpha(a)k_{\mathfrak{A}} = 0$ 时，……此外，若 $C > 0$，则集合 $\{\alpha \in Aut(\mathfrak{A}) : L \circ \alpha \leq C L\}$ 关于 *mkDL* 是全有界的。

定义（2.8）中的距离由自同构群上的长度函数诱导，而对于任意 $K \geq 1$，自同构的逆运算在双 Lipschitz 态射集合上是双利普希茨的。

引理 2.10。设 $(\mathfrak{A}, \mathsf{L})$ 是一个量子紧致度量空间。对所有 $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$，定义 $\mathrm{mk}\ell_{\mathsf{L}}$ 上的 *Monge-Kantorovich* 长度 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ 如下：

$$\mathrm{mk}\ell_{\mathsf{L}}(\alpha) := \sup\{\|\alpha(a) - a\|_{\mathfrak{A}} : a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}), \mathsf{L}(a) \leq 1\}. \tag{2.2}$$

Then

(1) $\mathrm{mk}\ell_{\mathsf{L}}$ 是 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ 上的长度函数，并且对所有 α，$\beta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$：

$$\mathrm{mk}\ell_{\mathsf{L}}(\beta^{-1} \circ \alpha) = \mathrm{mkD}_{\mathsf{L}}(\alpha, \beta).$$

(2) 对所有 α，$\beta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$，若 α 对某个 $K \geq 1$ 是 *K*-双 *Lipschitz* 的，则有：

$$\frac{1}{K}\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}}(\alpha, \beta) \leq \mathrm{mkD}_{\mathsf{L}}(\alpha^{-1}, \beta^{-1}) \leq K\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}}(\alpha, \beta).$$

（*3*）特别地，如果 $\beta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ 且 α 是一个完全量子等距，我们有

$$\mathrm{mk}\ell_{\mathsf{L}}(\alpha^{-1} \circ \beta \circ \alpha) = \mathrm{mk}\ell_{\mathsf{L}}(\beta).$$

因此，

$$\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}}(\alpha^{-1}, \beta^{-1}) = \mathrm{mkD}_{\mathsf{L}}(\alpha, \beta).$$

证明。现在我们为引理中的每一项提供证明。

（1）由于 $*$-自同构是关于 $\mathfrak{A}$的范数的等距映射，我们注意到，对于所有 $a \in \mathfrak{A}$，有：

$$\|\alpha(a) - \beta(a)\|_{\mathfrak{A}} = \|\beta(\beta^{-1} \circ \alpha(a) - a)\|_{\mathfrak{A}} = \|\beta^{-1} \circ \alpha(a) - a\|_{\mathfrak{A}},$$

因此 $\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}}(\alpha, \beta) = \mathrm{mk}\ell_{\mathsf{L}}(\beta^{-1} \circ \alpha)$。特别地，取 α 为恒等映射，我们看到

$$\|\beta(a) - a\|_{\mathfrak{A}} = \|a - \beta^{-1}(a)\|_{\mathfrak{A}},$$

即，$\mathrm{mk}\ell_{\mathsf{L}}(\beta^{-1}) = \mathrm{mk}\ell_{\mathsf{L}}(\beta)$。

若 $\mathrm{mk}\ell_{\mathsf{L}}(\alpha) = 0$ 则 $\alpha(a) = a$ 对所有 $a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L})$ 且 $\mathsf{L}(a) \leq 1$；因此，由于 $\{a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}) : \mathsf{L}(a) \leq 1\}$ 在 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$ 中稠密，且 α 是连续且线性的，$\alpha(a) = a$ 对所有 $a \in \mathfrak{A}$ 均成立。此外，对于所有 α、$\beta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$，我们有

$$\|\alpha \circ \beta(a) - a\|_{\mathfrak{A}} \leq \|\alpha(\beta(a)) - \alpha(a)\|_{\mathfrak{A}} + \|\alpha(a) - a\|_{\mathfrak{A}} = \|\beta(a) - a\|_{\mathfrak{A}} + \|\alpha(a) - a\|_{\mathfrak{A}},$$

这意味着 $\mathrm{mk}\ell_{\mathsf{L}}(\alpha \circ \beta) \leq \mathrm{mk}\ell_{\mathsf{L}}(\alpha) + \mathrm{mk}\ell_{\mathsf{L}}(\beta)$。

由于 $\mathrm{mk}\ell_{\mathsf{L}}$ 在恒等映射处为零，我们已证明 $\mathrm{mk}\ell_{\mathsf{L}}$ 确实是 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ 上的长度函数。

（2）令 $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ 对某个 *K*-双利普希茨 $K > 0$；根据定义（2.5），这意味着 α^{-1} 也具有 *K*-双利普希茨性质。此外，

$$\{b \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}) : \mathsf{L}(b) \leq 1\} \subseteq \{\alpha(a) : a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}), \mathsf{L}(a) \leq K\}$$

and

$$\{a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}) : \mathsf{L}(a) \leq 1\} \subseteq \left\{\alpha^{-1}(b) : b \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}), \mathsf{L}(b) \leq K\right\}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}}(\alpha^{-1},\beta^{-1}) &= \sup\left\{|\alpha^{-1}(b)-\beta^{-1}(b)| : b\in \mathrm{dom}(\mathsf{L}), \mathsf{L}(b)\leqslant 1\right\}\\ &\leqslant \sup\left\{|\alpha^{-1}(\alpha(a))-\beta^{-1}(\alpha(a))| : a\in \mathrm{dom}(\mathsf{L}), \mathsf{L}(a)\leqslant K\right\}\\ &= \sup\left\{|a-\beta^{-1}(\alpha(a))| : a\in \mathrm{dom}(\mathsf{L}), \mathsf{L}(a)\leqslant K\right\}\\ &= K\,\mathrm{mk}\ell_{\mathsf{L}}(\beta^{-1}\circ\alpha)\\ &= K\,\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}}(\alpha,\beta).\end{aligned}$$

因此，由对称性可得：

$$\frac{1}{K}\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}}(\alpha,\beta)\leqslant \mathrm{mkD}_{\mathsf{L}}(\alpha^{-1},\beta^{-1})\leqslant K\,\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}}(\alpha,\beta).$$

（3）设 α 是 $(\mathfrak{A},\mathsf{L})$ 的完全量子等距，则：

$$\{a\in \mathrm{dom}(\mathsf{L}) : \mathsf{L}(a)\leqslant 1\} = \alpha\left(\{a\in \mathrm{dom}(\mathsf{L}) : \mathsf{L}(a)\leqslant 1\}\right).$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{mk}\ell_{\mathsf{L}}(\alpha^{-1}\circ\beta\circ\alpha) &= \sup\left\{\left\|\alpha^{-1}\circ\beta\circ\alpha(a)-a\right\|_{\mathfrak{A}} : \mathsf{L}(a)\leqslant 1\right\}\\ &= \sup\left\{\left\|\alpha^{-1}(\beta(\alpha(a))-\alpha(a))\right\|_{\mathfrak{A}} : \mathsf{L}(a)\leqslant 1\right\}\\ &= \sup\left\{\left\|\beta(\alpha(a))-\alpha(a)\right\|_{\mathfrak{A}} : \mathsf{L}(a)\leqslant 1\right\}\\ &= \sup\left\{\left\|\beta(a)-a\right\|_{\mathfrak{A}} : \mathsf{L}(a)\leqslant 1\right\}\\ &= \mathrm{mk}\ell_{\mathsf{L}}(\beta).\end{aligned}$$

特别地，

$$\begin{aligned}\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}}(\alpha^{-1},\beta^{-1}) &= \mathrm{mk}\ell_{\mathsf{L}}(\beta\circ\alpha^{-1})\\ &= \mathrm{mk}\ell_{\mathsf{L}}(\alpha^{-1}\circ(\beta\circ\alpha^{-1})\circ\alpha)\\ &= \mathrm{mk}\ell_{\mathsf{L}}(\alpha^{-1}\circ\beta)\\ &= \mathrm{mkD}_{\mathsf{L}}(\beta,\alpha).\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

若（$\mathfrak{A}$，L）是一个量子紧致度量空间，[34, 定理 4.1] 利用L是下半连续这一事实，证明了：$\mathfrak{A}$的一个 $*$-自同构 $\alpha\in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ 当且仅当 α^*：$\varphi\to\varphi\circ\alpha$ 是 $(\mathscr{S}(\mathfrak{A}),\mathsf{mk}_{\mathsf{L}})$ 上的 K-双利普希茨映射，即，

$$\forall\varphi,\psi\in\mathscr{S}(\mathfrak{A})\quad \frac{1}{K}\mathsf{mk}_{\mathsf{L}}(\varphi,\psi)\leqslant \mathsf{mk}_{\mathsf{L}}(\varphi\circ\alpha,\psi\circ\alpha)\leqslant K\mathsf{mk}_{\mathsf{L}}(\varphi,\psi).$$

由此容易看出，特别是，$(\mathfrak{A},\mathsf{L})$ 的完全量子等距的复合仍是 $(\mathfrak{A},\mathsf{L})$ 的完全量子等距。

本文关注的第一个群是量子紧致度量空间的等距变换群，现在我们来定义它。

定义 2.11。 量子紧致度量空间 $(\mathfrak{A},\mathsf{L})$ 的等距变换群 $\mathsf{ISO}(\mathfrak{A},\mathsf{L})$ 是由从 $(\mathfrak{A},\mathsf{L})$ 到其自身的完全量子等距构成、以复合为运算的群。

对于[33], 量子紧致度量空间（$\mathfrak{A}$，L），由于假设L 在$\mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$上是下半连续的，我们注意到

$$\mathsf{ISO}(\mathfrak{A},\mathsf{L}) = \left\{\alpha\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}) : \forall\varphi,\psi\in\mathscr{S}(\mathfrak{A})\quad \mathsf{mk}_{\mathsf{L}}(\varphi\circ\alpha,\psi\circ\alpha)=\mathsf{mk}_{\mathsf{L}}(\varphi,\psi)\right\}.$$

引理（2.10）证明，mkDL 在ISO(𝔄，L）上的限制实际上既是左不变的（因为它由一个长度函数诱导），也是右不变的（因为该长度函数在共轭下不变）。

我们现在证明，量子紧致度量空间的等距群实际上关于定义（2.8）中的Monge-Kantorovich度量是紧的。对于由扭曲离散有限生成群C*代数的谱三元组产生的量子度量这一特殊情形，该结论已在[30]中得到证明。我们的等距群并非以与 Rieffel的等距群相同的方式定义，因为他研究的是序单位空间，而不是 C*-代数；尽管如此，我们的证明与 [33, 命题 6。6]有关。事实上，我们将以下关于双利普希茨自同构集合紧致性的定理作为推论，得到这一结果。

定理2.12。 若(𝔄，L) 是一个量子紧致度量空间，且 $K \geqslant 1$，则集合

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}, \mathsf{L}, K) := \{\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}) : \alpha \textit{ is } K\textit{-bi-Lipschitz}\}$$

关于mkDL是紧的。

证明。 根据定理（2.9），空间 Aut (𝔄,L,K) 关于 mkDL 是全有界的。因此，只需证明 Aut (𝔄, L,K) 关于 mkDL 是完备的。于是，设 $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Aut(𝔄,L,K) 中关于 mkDL 的柯西序列。令

$$B := \{a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}) : \mathsf{L}(a) \leqslant 1, \|a\|_{\mathfrak{A}} \leqslant \mathrm{qdiam}(\mathfrak{A}, \mathsf{L})\}.$$

若 $\mu \in \mathscr{S}(\mathfrak{A})$ 且 a ∈属于 dom(L)，并且 $\mathsf{L}(a) \leqslant 1$，则 $\|a - \mu(a)\|_{\mathfrak{A}} \leqslant \mathsf{L}(a)\mathrm{qdiam}(\mathfrak{A}, \mathsf{L})$ 根据[35]。因此，对任意 α，β ∈Aut(𝔄)，我们有

$$\|\alpha(a) - \beta(a)\|_{\mathfrak{A}} = \|\alpha(a - \mu(a)) - \beta(a - \mu(a))\|_{\mathfrak{A}}$$

蕴含

$$\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}}(\alpha, \beta) = \sup\{\|\alpha(a) - \beta(a)\|_{\mathfrak{A}} : a \in B\}.$$

对于任意a ∈B，序列 $(\alpha_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ 关于 $\|\cdot\|_{\mathfrak{A}_\infty}$ 是柯西序列，因为 $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 关于 mkDL 是柯西序列。由于 𝔄 是完备的，序列 $(\alpha_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛。

此外，若 a ∈ dom(L) 且 $\mathsf{L}(a) \leqslant 1$，则 $(\alpha_n(a - \mu(a)))_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛，因为 $a - \mu(a) \in B$；由于 $\alpha(\mu(a)) = \mu(a)$，我们也可以得出 $(\alpha_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛。

对于 a ∈dom(L)，序列 $\left(\alpha_n\left(\frac{a}{\mathsf{L}(a)+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛，因为 $\mathsf{L}\left(\frac{a}{\mathsf{L}(a)+1}\right) \leqslant 1$。因此，序列 $(\alpha_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ 也收敛，因为对所有n ∈ℕ， α_n 都是线性的。于是，序列 $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of $*$-自同构在 dom(L) 上逐点收敛；令 α 为其逐点极限。

定义 A:={$a + ib$: a,b ∈dom (L)}。由于 dom (L) 在 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$ 中稠密，很容易验证A在 𝔄 中稠密。由于 dom(L) 是 Jordan-Lie代数，我们也很容易验证A是 $*$-子代数 𝔄。我们只需令 α (a+ib) := α(a)+i α(b)，即可将 α 扩张到A；注意，这样定义的 α 确实是良定义的。

此外，如果 $a + ib \in A$，那么 $(\alpha_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(\alpha_n(b))_{n\in\mathbb{N}}$ 分别收敛到 $\alpha(a)$ 和 $\alpha(b)$；因此

$$\alpha_n(a + ib) = \alpha_n(a) + i\alpha_n(b) \xrightarrow{n\to\infty} \alpha(a) + i\alpha(b) = \alpha(a + ib).$$

因此， α是$(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在A上的逐点极限；因此， α 是A上的 $*$-态射。此外，由于对于每个n ∈自然数集， α_n 都是一个 $*$-自同构，所以它是一个等距映射。于是，对于所有a ∈定义域 (L),

$$\|\alpha(a)\|_{\mathfrak{A}} = \lim_{n\to\infty} \|\alpha_n(a)\|_{\mathfrak{A}} = \|a\|_{\mathfrak{A}}.$$

因此， α 在A上是一致连续的，所以它存在一个从 α 到 $\mathfrak{A}$的唯一一致连续延拓；我们仍用 α表示这一延拓。当然， α 又是一个
$*$- $\mathfrak{A}$的态射。

现在，序列（α_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 是关于B上确界距离的柯西序列，即mkL，并且在B上逐点收敛到 α，因此由标准论证可知，α是一致极限序列（α_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 在B上的一致极限，即

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{mkD_L}(\alpha_n, \alpha) = 0.$$

根据引理（2.10），由于对于所有 n ∈ 自然数集，都有 $\alpha_n \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A},\mathrm{L},\mathrm{K})$，序列（$\alpha_n^{-1}$）$_{n\in\mathbb{N}}$ 也是关于 mkDL 的柯西序列。按照上述相同的推理，令 β 为（α_n^{-1}）$_{n\in\mathbb{N}}$的逐点极限，并固定 $\varepsilon > 0$。由于（α_n^{-1}）$_{n\in\mathbb{N}}$ 在 B 上一致收敛到 β，我们可以得出存在 N ∈ 自然数集，使得当 n Ê N 时，$\mathrm{mkDL}(\alpha_n^{-1},\beta) < \frac{\varepsilon}{2}$K。类似地，存在 N′ ∈自然数集，使得当 n Ê N′时，$\mathrm{mkDL}(\alpha_n,\alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$。因此，如果 a ∈B 且 n Ê max{N , N′}，则有：

$$\begin{aligned}
\left\|a-\beta(\alpha(a))\right\|_{\mathfrak{A}} &\leqslant \left\|a-\beta(\alpha_n(a))\right\|_{\mathfrak{A}} + \left\|\beta(\alpha_n(a)-\alpha(a))\right\|_{\mathfrak{A}} \\
&\leqslant \left\|a-\alpha_n^{-1}(\alpha_n(a))\right\|_{\mathfrak{A}} + \left\|\alpha_n^{-1}(\alpha_n(a))-\beta(\alpha_n(a))\right\|_{\mathfrak{A}} + \left\|\beta(\alpha_n(a)-\alpha(a))\right\|_{\mathfrak{A}} \\
&\leqslant 0 + K\left\|\alpha_n^{-1}(\underbrace{K^{-1}\alpha_n(a)}_{\mathrm{L}(K^{-1}\alpha_n(a))\leqslant 1}) - \beta(K^{-1}\alpha_n(a))\right\|_{\mathfrak{A}} + \underbrace{\|\alpha_n(a)-\alpha(a)\|_{\mathfrak{A}}}_{\beta\text{i is }*\text{-morphism}} \\
&\leqslant 0 + K\,\mathrm{mkD_L}(\alpha_n^{-1},\beta) + \mathrm{mkD_L}(\alpha_n,\alpha) \\
&< 0 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

因此，由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，$a = \beta(\alpha(a))$ 也成立。由对称性， $\beta(\alpha(a)) = a$ 同样成立。因此，α 确实是 $\mathfrak{A}$ 的一个 $*$-自同构。固定 a ∈ dom(L)。由于 L 是下半连续的，L($\alpha(a)$) É li minf$_{n\to\infty}$L($\alpha_n(a)$) É KL(a)，对 α^{-1} 也可应用相同的推理。因此，对所有 a ∈dom(L)：

$$\frac{1}{K}\mathrm{L}(a) = \frac{1}{K}\mathrm{L}(\alpha^{-1}(\alpha(a))) \leqslant \mathrm{L}(\alpha(a)) \leqslant K\mathrm{L}(a).$$

现在，由于 α 和 α^{-1} 都将 dom(L) 映射到自身，我们有

$$\mathrm{dom}\,(\mathrm{L}) = \alpha(\alpha^{-1}(\mathrm{dom}\,(\mathrm{L}))) \subseteq \alpha(\mathrm{dom}\,(\mathrm{L})) \subseteq \mathrm{dom}\,(\mathrm{L})$$

因此，α（定义域（L））=定义域（L）。

综上，Aut($\mathfrak{A}$,L,K) 是完备且全有界的，因此对于 mkDL 而言它是紧的。

□

推论2.13. 如果 ($\mathfrak{A}$,L) 是一个量子紧致度量空间，那么 ISO($\mathfrak{A}$,L) 是 mkDL 中的一个紧群。

证明。我们将定理（2.12）应用于 ISO($\mathfrak{A}$,L) = Aut($\mathfrak{A}$,L,1)，这意味着 ISO($\mathfrak{A}$,L) 是一个紧空间。根据引理（2.10），由于 mkℓL 是 ISO($\mathfrak{A}$,L) 上的长度函数，复合也是连续的。由于 ISO($\mathfrak{A}$,L) 是紧的且乘法连续，逆映射也连续：事实上，引理（2.10）证明了逆映射是一个等距映射。□

我们以一个观察结束本章节，以说明我们部分结果的价值。一般而言，对于任意含单位元的 C*-代数 $\mathfrak{A}$ 上 $*$-态射集合的逐点收敛拓扑，Aut($\mathfrak{A}$) 并不是一个闭子集。例如，令 $\mathfrak{A}$ 为

取值于 $\mathbb{C}$ 的所有收敛序列构成的 C*-代数。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，以及每个 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{A}$，我们定义

$$\alpha_n((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) := (x_n, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots).$$

容易验证，α_n 是 $\mathfrak{A}$ 的一个 $*$-自同构，其逆为：

$$\alpha_n((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) := (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}, x_0, x_n, \ldots).$$

由于 $\mathfrak{A}$ 中的元素是收敛序列，因此我们得到

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) = \beta((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) := \left(\lim_{k\to\infty} x_k, x_0, x_1, x_2, \ldots\right).$$

因此特别地，序列 $\left(\begin{smallmatrix} & 1 \\ n+1 & \end{smallmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 不在极限 $*$-态射 β的值域中。

另一方面，Aut($\mathfrak{A}$) 是一个拓扑群。事实上，如果 $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 Aut($\mathfrak{A}$) 中逐点收敛于 α，并且 α 也是 $\mathfrak{A}$ 的一个 $*$-自同构，那么对于所有 $a \in \mathfrak{A}$，我们有

$$\left\|\alpha_n^{-1}(a) - \alpha^{-1}(a)\right\|_{\mathfrak{A}} = \left\|\alpha_n^{-1}(a - \alpha_n(\alpha^{-1}(a)))\right\|_{\mathfrak{A}} = \left\|a - \alpha_n(\alpha^{-1}(a))\right\|_{\mathfrak{A}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

因此，Aut($\mathfrak{A}$) 的逆映射确实是连续的。

现在让我们在这一图景中加入量子度量，并使用一个量子紧$\mathfrak{A}$致L度量空间（$\mathfrak{A}$），即在 Aut($\mathfrak{A}$) 上使用度量 mkDL，从而能够对上述情况有更加精确的理解。事实上，群 Aut($\mathfrak{A}$) 在该度量下并不完备——该度量刻画了逐点收敛拓扑。不过，我们看到，如果将注意力限制在K-双利普希茨自同构的集合上，那么根据定理（2.12），一列 K-双利普希茨 $*$- 自同构的逐点极限确实是一个 $*$- 自同构（并且同样是 K- 双利普希茨的）。因此，加入量子度量数据有助于我们识别自同构的紧集，并使我们能够将自同构构造为其他自同构的逐点极限。

2.2. **谱三元组的等距群**。对于任意谱三元组（$\mathfrak{A}$，$\mathscr{H}$，$/D$），我们在下文定义本文关注的第二个群。非正式地说，这个群是利用某个谱三元组范畴中的态射来定义的，而不是在量子紧致度量空间范畴中定义的。因此，无须立即参照谱三元组的度量性质，也可以定义我们的第二个群。E. Park 在非交换度量几何的早期研究中引入了这个群；[31], 其中计算了非交换二维环面的情形，也计算了 Connes 在离散群上引入的某些谱三元组的情形[9]。此外，[31, 定理1。2]还表明，对于标准谱三元组，这个群确实与黎曼流形的等距变换群一致。

定义2.14([31])。谱三元组（$\mathfrak{A}$，$\mathscr{H}$，$/D$）的等距映射群 Iso($\mathfrak{A}, \mathscr{H}, /D$) 是群 Aut($\mathfrak{A}$) 的以下子群；该群由 $\mathfrak{A}$ 的 $*$-自同构构成：

$$\text{Iso}(\mathfrak{A}, \mathscr{H}, /D) :=$$
$$\left\{\alpha \in \text{Aut}(\mathfrak{A}) : \exists U \text{ unitary on } \mathscr{H} \text{ s.t. } \text{Ad}_U = \alpha, U\,\text{dom}\,(/D) = \text{dom}\,(/D), [/D, U] = 0\right\}.$$

事实上，Iso($\mathfrak{A}, \mathscr{H}$, /D) 是 Aut($\mathfrak{A}$) 的一个子群。为此，固定 $\alpha \in$Iso($\mathfrak{A}, \mathscr{H}$, /D)。根据定义（2.14），存在 $\mathscr{H}$ 上的某个与 /D 对易的酉算子 U，使得 $\alpha = \text{Ad}_U$。显然，$U^* = U^{-1}$ 也与 $/D^* = /D$ 对易，并且 $\alpha^{-1} = \text{Ad}_{U^*}$，因此 $\alpha^{-1} \in$ Iso($\mathfrak{A}, \mathscr{H}$, /D)。此外，如果 $\beta \in$ Iso($\mathfrak{A}, \mathscr{H}$, /D)，那么对于某个 $\mathscr{H}$ 上的同样与 /D 对易的酉算子 V，有 $\beta = \text{Ad}_V$，从而 $\beta \circ \alpha^{-1} = \text{Ad}_{VU^*}$；由于 V U * 是一个与 /D 对易的酉算子，我们

得出 $\beta\circ\alpha^{-1}\in \mathsf{Iso}(\mathfrak{A},\mathscr{H},/D)$。由于恒等映射显然属于 $\mathsf{Iso}(\mathfrak{A},\mathscr{H},/D)$，集合 $\mathsf{Iso}(\mathfrak{A},\mathscr{H},/D)$ 确实是 $\mathfrak{A}$ 的 $*$-自同构群的一个子群。

并且显然，若$a\in\mathfrak{A}$满足a属于 $\mathrm{dom}(/D)$ $\subseteq$属于 $\mathrm{dom}(/D)$，且 $[/D,\ a]$ 有界，则有：

$$\begin{aligned}\|\!|[\mathbb{D},\alpha(a)]|\!\|_{\mathscr{H}} &= \big\|\!\big|[\mathbb{D},UaU^*]\big|\!\big\|_{\mathscr{H}}\\ &= \big\|\!\big|U[\mathbb{D},a]U^*\big|\!\big\|_{\mathscr{H}} = \|\!|[\mathbb{D},a]|\!\|_{\mathscr{H}},\end{aligned}\tag{2.3}$$

其中 $\|\!|T|\!\|_{\mathscr{H}}$是任意线性算子$T$在 $\mathscr{H}$上的通常算子范数。

当然，表达式 (2.3) 表明，$\mathsf{Iso}(\mathfrak{A},\mathscr{H},/D)$ 中的元素会在 $(\mathfrak{A},\mathscr{H},/D)$ 上诱导出保持 Connes 度量不变的等距变换。因此，自然要研究那些导出量子紧致度量空间的谱三元组，称为**度量谱三元组**。它们恰好是这样的谱三元组：其 Connes 度量确实是一个距离，并且在 的状态空间上诱导弱*拓扑（见命题 1。

定义 2.15。若 $(\mathfrak{A},\mathscr{H},/D)$ 是度量的，则 $(\mathfrak{A},\mathsf{L}_{\mathbb{D}})$ 是量子紧致度量空间，其中

$$\mathrm{dom}\,(\mathsf{L}_{\mathbb{D}}) := \{a\in \mathfrak{sa}\,(\mathfrak{A}) : a\,\mathrm{dom}\,(\mathbb{D})\subseteq \mathrm{dom}\,(\mathbb{D}),[\mathbb{D},a]\text{ is bounded}\}$$

并且对所有$a\in$属于 $\mathrm{dom}(\mathsf{L}/_D)$，我们定义

$$\mathsf{L}_{\mathbb{D}}(a) := \|\!|[\mathbb{D},a]|\!\|_{\mathscr{H}}.$$

特别地，状态空间 $\mathscr{S}(\mathfrak{A})$ 关于 Monge-Kantorovich度量 $\mathsf{mkL}_{/D}$（由半范数 $\mathsf{L}/_D$ 诱导）是一个度量空间，该度量定义为：对所有 $\varphi,\psi\in\mathscr{S}(\mathfrak{A})$，有：

$$\mathsf{mk}_{\mathsf{L}_{\mathbb{D}}}(\varphi,\psi) := \sup\left\{\left\|\varphi(a)-\psi(a)\right\|_{\mathfrak{A}} : a\in\mathrm{dom}\,(\mathsf{L}_{\mathbb{D}}),\mathsf{L}_{\mathbb{D}}(a)\leqslant 1\right\}.\tag{2.4}$$

注记 2.16。当 $(\mathfrak{A},\mathscr{H},/D)$ 是一个度量谱三元组时，我们在此记作 $\mathsf{ISO}(\mathfrak{A},\mathsf{L}/_D)$ 的群，在 [2] 中记作 $\mathsf{ISO}(\mathfrak{A},\mathscr{H},/D)$。然而，我们在上一小节中关于量子紧致度量空间的等距变换群的结果，并不依赖于谱三元组结构，除了由其诱导的度量之外，因此采用了更一般的记号。

在处理度量谱三元组时，我们会对记号作一些简化，具体如下所述。

记号 2.17。若 $(\mathfrak{A},\mathscr{H},/D)$ 是一个度量谱三元组，我们将表达式 (2.1) (2.2) 和 (2.4) 中的记号简化为：分别用 $\mathsf{mkD}_{/D}$、$\mathsf{mk}\ell_{/D}$ 和 $\mathsf{mk}_{/D}$ 表示 $\mathsf{mkDL}_{/D}$、$\mathsf{mk}\ell\mathsf{L}_{/D}$ 和$\mathsf{mkL}_{/D}$。我们还用 $\mathrm{qdiam}(\mathfrak{A},/D)$ 表示 $\mathrm{qdiam}(\mathfrak{A},\mathsf{L}/_D)$。

如果谱三元组 $(\mathfrak{A},\mathscr{H},/D)$ 是度量的，那么由表达式 (2.3) 可知，$\mathrm{Iso}(\mathfrak{A},\mathscr{H},/D)$ 是 $\mathsf{ISO}(\mathfrak{A},\mathsf{L}/D)$ 的一个子群。然而，一般而言，$\mathrm{Iso}(\mathfrak{A},\mathscr{H},/D)$ 是 $\mathsf{ISO}(\mathfrak{A},\mathsf{L}/D)$ 的真子群。下面的例子说明了这一点，它改编自[2, 命题 2。4], 不过，后一个例子并非度量谱三元组的例子。

例 2.18。设 $\mathfrak{A}_2$为 C*-代数 $M_2(\mathbb{C})$，由$\mathbb{C}^4$ 上的 $*$-表示 π表示为：$a\in M_2(\mathbb{C})\mapsto\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}$。我们还定义以下两个酉自伴对合：

$$S := \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\quad\text{and}\quad J := \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

以及狄拉克算子

$$\mathbb{D} := \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}.$$

当然，$(\mathfrak{A}_2, \mathbb{C}^4, /D)$ 是一个谱三元组。此外，对于所有 $a \in \mathfrak{A}_2$，我们有：

$$[\mathbb{D}, \pi(a)] = \begin{pmatrix} [S,a] & 0 \\ 0 & [J,a] \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

这意味着 $[/D, \pi(a)] = 0$ 当且仅当 a 与 S 和 J 都对易，而这等价于

$$a = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}, \text{ for some } x, y \in \mathbb{C}, \text{ and}$$
$$a = \begin{pmatrix} x' & 0 \\ 0 & y' \end{pmatrix} \text{ for some } x', y' \in \mathbb{C}.$$

因此，$[/D, \pi(a)] = 0$ 当且仅当 $a = x1$，其中某个 $x \in \mathbb{C}$。于是，对所有 $a \in \mathfrak{A}$，令 $\mathsf{L}/_D(a) := \|[/D, \pi(a)]\|_{\mathbb{C}^4}$，则 $(\mathfrak{A}, \mathsf{L}_{\mathbb{D}})$ 是一个量子紧致度量空间。

现在，直接计算可得 $[S, JaJ] = -J[S,a]J$。因此，若定义酉对合 $U := \pi(J)$，则根据公式（2.5）可知，对于所有 $a \in \mathfrak{A}_2$：

$$[\mathbb{D}, \pi(JaJ^*)] = [\mathbb{D}, U\pi(a)U^*] = \begin{pmatrix} -J[S,a]J & 0 \\ 0 & -[J,a] \end{pmatrix}.$$

因此 $\mathsf{L}/_D(JaJ) = \mathsf{L}/_D(a)$，这表明 Ad_J 是完全量子等距，即 $\mathrm{Ad}_J \in \mathsf{ISO}(\mathfrak{A}, \mathsf{L}/_D)$。

我们还注意到 $[/D, U] \neq 0$，因为 $[S, J] \neq 0$。此外，我们断言不存在与 $/D$ 对易并在 $\pi(\mathfrak{A}_2)$ 上实现 Ad_U 的酉算子 $V \in M_4(\mathbb{C})$。

事实上，反设 V 是 $\mathrm{M}_4(\mathrm{C})$ 中的一个酉算子，使得 Ad_V 在 $\pi(\mathfrak{A}_2)$ 上按 Ad_U 作用。因此，Ad_{VU^*} 在 $\pi(\mathfrak{A}_2)$ 上的作用是恒等映射。现在，若 $\mathrm{W} = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_4 \\ \mathrm{a}_3 & \mathrm{a} \end{pmatrix}$，其中 $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \mathrm{a}_4 \in \mathfrak{A}_2$，是一个使 Ad_W 在 $\pi(\mathfrak{A}_2)$ 上平凡作用的酉算子，则 $\mathrm{W} \begin{pmatrix} \mathrm{a} & 0 \\ 0 & \mathrm{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & 0 \\ 0 & \mathrm{a} \end{pmatrix} \mathrm{W}$，从而对于 $\mathrm{j} \in \{1,2,3,4\}$ 及所有 $\mathrm{a} \in \mathfrak{A}_2$，有 $[\mathrm{a}j, \mathrm{a}] = 0$。因此，$\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \mathrm{a}_4 \in \mathrm{C}1$，这意味着：

$$V = \begin{pmatrix} a_1 J & a_2 J \\ a_3 J & a_4 J \end{pmatrix}.$$

现在，如果 $[/D, V] = 0$，那么我们还必须有 $Sa_2J = a_2J^2 = a_2$。由于 $SJ \notin \mathbb{C}$，我们得出 $a_2 = 0$。类似地，$a_3 = 0$。此外，$Sa_1J = a_1JS$ 意味着 $a_1 = 0$ 同样成立。因此，V 不可能是酉算子。

因此，不存在与 $/D$ 对易并在 $\pi(\mathfrak{A}_2)$ 上实现 Ad_U 的酉算子，这意味着 $\mathrm{Ad}_U \in \mathsf{ISO}(\mathfrak{A}, \mathsf{L})$，但 $\mathrm{Ad}_U \notin \mathsf{Iso}(\mathfrak{A}, \mathscr{H}, /D)$。

度量谱三元组的等距群虽然可能是其底层量子紧致度量空间的等距群的真子群，但对于定义（2.8）中的蒙日-康托洛维奇距离而言，总是一个闭子群。

定理 2.19. 群 $\mathsf{Iso}(\mathfrak{A}, \mathscr{H}, /D)$ 是 $\mathsf{ISO}(\mathfrak{A}, \mathsf{L}/D)$ 中的闭子群——特别是，它是紧的——对于度量 mkD/D。

证明。正如我们已经指出的，根据表达式 (2.3)，很容易看出 Iso($\mathfrak{A}, \mathscr{H}$, /D) 是 Aut ($\mathfrak{A}$) 的子群，且包含于 ISO($\mathfrak{A}$,L /D) 中。因此，只需证明 Iso($\mathfrak{A}, \mathscr{H}$, /D) 在群 ISO($\mathfrak{A}$,L /D) 中是闭的；根据定理（2.12），该群关于 mkD /D 是紧的。为此，对所有 $\xi \in$ ∈定义域(/D)：

$$\mathsf{DN}(\xi) := \|\xi\|_{\mathscr{H}} + \|\not{D}\xi\|_{\mathscr{H}}$$

设 $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Iso($\mathfrak{A}, \mathscr{H}$, /D) 中的一个序列，它在 Monge-Kantorovich 度量 mkD $/_D$ 下收敛于 $\alpha \in$ ISO($\mathfrak{A}$,L $/_D$)。我们的目标是证明 $\alpha \in$ Iso($\mathfrak{A}, \mathscr{H}$, /D)。

根据定义，对每个 $n \in$ 自然数集，都存在一个酉算子 $U_n \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$，使得 $U_n$dom(/D) =dom(/D)，$[/D, U_n] = 0$ 且 $\alpha_n = \mathrm{Ad}_{U_n}$。定义

$$B := \{\xi \in \mathrm{dom}\,(\not{D}) : \mathsf{DN}(\xi) \leqslant 1\}.$$

由于 /D 具有紧预解式，集合 B 在 $\mathscr{H}$中由 [20, 定理 2.7] 得到紧性。由于对所有 $n \in$自然数集，$U_n$dom(/D) = dom(/D)，因此对所有 $\xi \in B$:

$$\begin{aligned}\mathsf{DN}(U_n\xi) &= \|U_n\xi\|_{\mathscr{H}} + \|\not{D}U_n\xi\|_{\mathscr{H}}\\ &= \underbrace{\|\xi\|_{\mathscr{H}}}_{U_n \text{ is unitary}} + \underbrace{\|U_n\not{D}\xi\|_{\mathscr{H}}}_{[\not{D},U_n]=0}\\ &= \|\xi\|_{\mathscr{H}} + \|\not{D}\xi\|_{\mathscr{H}} = \mathsf{DN}(\xi).\end{aligned}$$

因此，$U_n B \subseteq B$。

因此，集合 {U$_n$: n ∈ 自然数集} 是集合 C (B,B) 的等度连续子集；C (B,B) 由 B 上取值于 B 的连续函数构成，并赋予标准算子范数 $|||\cdot|||_B$。由于 B 是紧的，根据 Arzelà-Ascoli定理，{U$_n$: n ∈ 自然数集} 关于 $|||\cdot|||_B$ 全有界。因此，存在 (U$_f$(n))$_{n\in\mathbb{N}}$，它是 (U$_n$)$_{n\in\mathbb{N}}$ 关于 $|||\cdot|||_B$ 的一个柯西子序列。由于 C (B,B) ⊆C (B,$\mathscr{H}$)，且 $\mathscr{H}$完备，C (B,$\mathscr{H}$) 关于 $|||\cdot|||_B$ 是完备的。因此，柯西序列 (U$_f$(n))$_{n\in\mathbb{N}}$ 在 C (B,$\mathscr{H}$) 中关于 $|||\cdot|||_B$（一致）收敛。记其极限为 V——目前，V 仅定义在 B 上；由于 B 是闭的，我们注意到 V B ⊆ B。

根据 $|||\cdot|||_B$ 的定义，对于所有 $\xi \in$B，特别有 $\lim_{n\to\infty}$kU$_n\xi$ –V ξk$_{\mathscr{H}}$ =0。现在，取 $\xi \in$定义域 (/D) \ {0}。由于 ^{1}DN(ξ) $\xi \in$B，~~且对于~~所有 n ∈自然数集，U$_n$ 都是线性的，我们得出 (U$_f$(n)ξ)$_{n\in\mathbb{N}}$ 在范数意义下收敛到 DN(ξ)V (DN(ξ)$^{-1}\xi$)——我们将最后这个表达式记为 V ξ。因此，由于 V 是线性映射序列 (U$_f$(n))$_{n\in\mathbb{N}}$ 的逐点极限，V 在定义域 (/D) 上也是线性的。由于对于所有 n ∈自然数集，U$_n$ 都是酉算子，对于所有 $\xi \in$定义域(/D)，我们有 kU$_n\xi$k$_{\mathscr{H}}$ = kξ k$_{\mathscr{H}}$，因此得出 kV ξk$_{\mathscr{H}}$ = kξk$_{\mathscr{H}}$。所以，V 可以延拓为 $\mathscr{H}$ 上范数为 1 的连续线性映射。

由于 dom(/D) 是稠密的，固定 $\xi \in \mathscr{H}$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $\eta \in$ dom(/D) 使得 $\|\xi - \eta\|_{\mathscr{H}} < \frac{\varepsilon}{3}$。此外，由于 $U_f(n) \to V$ 在 B 上一致收敛，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于所有 nÊ N，都有 $\|U_f(n)\eta - V\eta\|_{\mathscr{H}} < \frac{\varepsilon}{3}$。因此：

$$\|U_{f(n)}\xi - V\xi\|_{\mathscr{H}} \leqslant \|U_{f(n)}(\xi-\eta)\|_{\mathscr{H}} + \|U_{f(n)}\eta - V\eta\|_{\mathscr{H}} + \|V(\eta-\xi)\|_{\mathscr{H}} < \varepsilon.$$

因此，V 是序列 $(U_f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ 的强算子逐点极限。特别地，V 是一个等距映射，因为 k$V\,\xi$k$_{\mathscr{H}}$ = $\lim_{n\to\infty}\|U_f(n)\xi\|_{\mathscr{H}}$。

根据引理（2.10），我们注意到 $(\alpha_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ 在 mkDL 下收敛于 α^{-1}。当然，对于所有 n ∈自然数集，都有 $\alpha_n^{-1} = \mathrm{Ad}_{U_n^*}$。此外，U *n 的定义域 (/D) = 包含于定义域 (/D)，并且 [/D,U *n] = −[/D,U$_n$] = 0，因为 /D 是自伴的。应用上述方法，我们得出结论：存在一个收敛子列 (U* f (g(n)))$_{n\in\mathbb{N}}$，它是 (U* f (n))$_{n\in\mathbb{N}}$ 的子列，并且关于 $|||\cdot|||_B$ 在强算子拓扑下收敛。从现在起，我们记 h = f ◦ g。令 W 为 (U* h(n))$_{n\in\mathbb{N}}$ 的强算子拓扑极限；W 仍然是 $\mathscr{H}$ 上的一个等距映射。与上面相同，我们还注意到 W B ⊆B。

综合以上所有结果可知，对于任意固定的 $\varepsilon > 0$，存在自然数集 ∈自然数集，使得若 nÊ 自然数集，则 $\left|\left|\left|U_{h(n)} - V\right|\right|\right|_B < \frac{\varepsilon}{2}$；并且存在 自然数集′ ∈自然数集，使得若$n$Ê 自然数集 ′，则 $\left|\left|\left|U^*{}_{h(n)} - W\right|\right|\right|_B < \frac{\varepsilon}{2}$。因此，对于所有满足 nÊ max{自然数集 , 自然数集′} 的 n，以及所有 $\xi \in B$，都有：

$$\begin{aligned}
\|\xi - VW\xi\|_{\mathscr{H}} &\leqslant \|\xi - U_{h(n)}W\xi\|_{\mathscr{H}} + \underbrace{\|U_{h(n)}W\xi - VW\xi\|_{\mathscr{H}}}_{\text{note: } W\xi \in B} \\
&\leqslant \left\|\xi - U_{h(n)}U^*_{h(n)}\xi\right\|_{\mathscr{H}} + \left\|U_{h(n)}(U^*_{h(n)} - W)\xi\right\|_{\mathscr{H}} + \left|\left|\left|U_{h(n)} - V\right|\right|\right|_B \\
&\leqslant 0 + \left|\left|\left|U^*_{h(n)} - W\right|\right|\right|_B + \left|\left|\left|U_{h(n)} - V\right|\right|\right|_B \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

因此，对于所有 $\xi \in VW\xi = \xi B$，均成立，因为 $\varepsilon > 0$ 是任意的。由于 B 在 $\mathscr{H}$ 中是稠密的，且 VW 是连续的线性算子，我们得出对于所有 $\xi \in \mathscr{H}$，$VW\xi = \xi$。因此，V 是满射；由于 V 是等距映射，我们得出 V 是 $\mathscr{H}$ 上的酉算子。

此外，固定 $\xi \in \mathrm{dom}(/D)$，序列 $(U_{f(n)}\xi)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 $V\xi$。另一方面，对于所有 $n \in \mathbb{N}$：

$$\not{D}U_{f(n)}\xi = U_{f(n)}\not{D}\xi$$

收敛于 $V/D\xi$。由于 $/D$ 是闭集，我们得出 $V\xi \in \mathrm{dom}(/D)$ 且 $/DV\xi = V/D\xi$。因此，$V\mathrm{dom}(/D) \subseteq \mathrm{dom}(/D)$ 且 $[/D, V] = 0$。

我们的下一个目标是证明 $\alpha = \mathrm{Ad}_V$。取一个 ∈L 的定义域中的元素，满足 L(a) É 1 2 且 kak$_{\mathfrak{A}}$ É 1 2。若$\xi \in$B，则 DN(aξ) É (kak$_{\mathfrak{A}}$ + L(a))DN(ξ) É 1。因此 aB ⊆B；此外，V $^*\xi$ and U*f (n)ξ 也始终属于 B。取 $\varepsilon > 0$，并令 N ∈N，使得当 n Ê N 时，$\left|\left|\left|U_{h(n)} - V\right|\right|\right|_B < \frac{\varepsilon}{2}$ and$\left|\left|\left|U^*h(n) - V^* \right|\right|\right|_B \leq_2 {}^{\varepsilon}(\mathrm{kak}_{\mathfrak{A}}+1)$。于是，对于所有 $\xi \in$B 以及 n Ê N，我们得出：

$$\begin{aligned}
\left\|U_{h(n)}aU^*_{h(n)}\xi - VaV^*\xi\right\|_{\mathscr{H}} &= \left\|(U_{h(n)} - V)aU^*_{h(n)}\xi\right\|_{\mathscr{H}} + \left\|VaU^*_{h(n)}\xi - VaV^*\xi\right\|_{\mathscr{H}} \\
&\leqslant \left|\left|\left|U_{h(n)} - V\right|\right|\right|_B \|a\|_{\mathfrak{A}} + \|a\|_{\mathfrak{A}}\left|\left|\left|U^*_{h(n)} - V^*\right|\right|\right|_B \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

因此，α和 Ad_V在全集 $\{a \in \mathrm{dom}(\mathrm{L}) : \mathrm{L}(a)$ É 1 2，kak$_{\mathfrak{A}}$ É $\frac{1}{2}\}$ of $\mathfrak{A}$上一致。由连续性可知，α 和 Ad_V在 $\mathfrak{A}$上一致。

由此我们证明了 $\alpha \in \mathrm{Iso}(\mathfrak{A}, \mathscr{H}, /D)$，如所要求。因此 Iso($\mathfrak{A}$, $\mathscr{H}$, $/D$) 在 ISO($\mathfrak{A}$,L)（关于 mkDL）中是闭的，因此关于同一度量它是紧的，因为 ISO($\mathfrak{A}$,L) 根据定理（2.12）是闭的。
□

我们以两个观察结束本章节。首先，正如我们在上一小节关于 $*$-自同构和逐点收敛的讨论中所观察到的，酉算子的强算子拓扑极限通常是等距映射，但不一定是酉算子（事实上，在希尔伯特空间上，酉算子群关于强算子拓扑的闭包就是该空间的所有线性等距算子组成的空间）。一个例子可以通过与我们对自同构所采用的基本相同的构造给出：在 ℓ^2(自然数集) 上，对每个 n ∈自然数集，定义$U_n((x_k)_{k\in\mathbb{N}})$：=($x_n$, $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, \ldots\ldots$)；对于每个 $n \in$自然数集，算子U_n都是酉算子，并且 $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 ℓ^2(自然数集) 上的单边移位算子。因此，再一次地，量子度量使我们能够在强算子拓扑下处理酉算子的紧集，并保证某些酉算子序列的强算子拓扑极限仍然是酉算子。

其次，我们注意到，Park 在 [31, 定理 4.2] 中证明了，存在一个谱三元组（C^*（S），ℓ^2（ℕ），$/D$），它定义在由单边移位算子生成的 C*-代数 C^*（S）上

S 作用于 ℓ^2(N) 上，其群 Iso(C*(S), ℓ^2(N), /D) 在逐点收敛拓扑下不是紧的。狄拉克算子 /D 被定义为以下算子的闭包：对所有有限支撑的 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$(N)，/D$((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$:=$(nx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 。容易检查，/D 与所有形如 $S^n(S^*)^n$ （其中 n ∈N）的算子交换；这些算子张成了 C*(S) 的一个无限维 C*-子代数。因此，（C*(S), ℓ^2(S), /D）远非一个度量谱三元组。事实上，[31] 中的其他所有例子都围绕度量谱三元组构造（当时这一概念尚未被发现），因而给出了紧的等距群。我们看到，对少数有趣例子的这一早期观察，实际上是度量谱三元组的一个普遍现象。

3. 邻近度与等距群

现在我们将讨论量子紧致度量空间和度量谱三元组的等距群的逼近问题。事实上，我们不仅希望逼近这些群本身，还希望逼近它们在量子紧致度量空间底层 C*-代数上的作用。为此，我们选择的工具是将格罗莫夫–豪斯多夫邻近度扩展到某些适当度量群作用（更一般地，也可扩展到适当幺半群的作用，尽管这不是本文的重点）；这一扩展称为协变邻近度，由最后一位作者在 [22] 中引入。我们首先将看到，这一度量的一般理论对等距群有一些有趣的推论。随后，我们将转向量子紧致度量空间和度量谱三元组的归纳极限这一具体情形，在那里可以得到更清晰的图景。

在本文余下部分，我们将在以下假设下研究量子紧致度量空间族。

约定3.1。 在本文其余部分中，我们固定定义（$\Omega \geqslant 1, \Omega' \geqslant 0$（见定义（2.2））中的常数：本文所考虑的所有量子紧致度量空间都将满足这一固定的（Ω，Ω′）-拟 Leibniz 性质。

3.1. **协变邻近度**。 我们对量子紧致度量空间的主要兴趣在于，我们能够在所有量子紧致度量空间组成的空间上构造一种度量，称为（对偶 *Gromov-Hausdorff*）邻近度；其构造方式类似于在紧致度量空间类上定义 Gromov-Hausdorff 距离。

定义 3.2 （[29, 25]）。 两个量子紧致度量空间 $(\mathfrak{A}、\mathsf{L}_{\mathfrak{A}})$ 和 $(\mathfrak{B}、\mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$ 之间的（对偶）邻近度 Λ^* 是以下非负数：

$$\Lambda^*((\mathfrak{A},\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}),(\mathfrak{B},\mathsf{L}_{\mathfrak{B}})) = \inf\Big\{ \max_{j\in\{1,2\}} \mathsf{Haus}[\mathsf{L}_{\mathfrak{D}}]\left(\mathscr{S}(\mathfrak{D}),\{\varphi\circ\pi_j : \varphi\in\mathscr{S}(\mathfrak{A}_j)\}\right) :$$
$$(\mathfrak{D},\mathsf{L}_{\mathfrak{D}}) \text{ is a quantum compact metric space, and}$$
$$\pi_j : (\mathfrak{D},\mathsf{L}_{\mathfrak{D}}) \to (\mathfrak{A}_j,\mathsf{L}_j) \text{ are quantum isometries for } j\in\{1,2\}\Big\},$$

其中，$\mathsf{Haus}[\mathsf{L}_{\mathfrak{D}}]$ 是由 Monge-Kantorovich度量$\mathsf{mk}\mathsf{L}_{\mathfrak{D}}$ 在任意量子紧致度量空间 $(\mathfrak{D}、\mathsf{L}_{\mathfrak{D}})$ 上诱导的豪斯多夫距离。

定理3.3 ([29])。 邻近度在量子紧致度量空间类上是一个模去完全量子等距的完备度量，其对经典紧度量空间的限制诱导出 *Gromov-Hausdorff* 距离的拓扑。

协变邻近度 Λ^{cov} 通过 Lipschitz线性映射 [22]将邻近度的构造推广到适当度量幺半群对量子紧度量空间的作用；我们在此聚焦于由 Lipschitz $*$-态射给出的作用。我们回顾一下，一个适当的

度量群（G, δ）是一个赋予左不变度量 δ 的群G，使得 G在 δ的拓扑下成为拓扑群，并且 δ 的闭球是紧的。

记号 3.4. 对于任意 $r \hat{\mathrm{E}}\, 0$，以及任意度量群G，我们将中心为r且以单位元 e_G为中心的G的闭球记为 $G[r]$。

定义 3.5. 一个*Lipschitz*动力系统 $(\mathfrak{A},\mathsf{L}_{\mathfrak{A}},G,\delta,\alpha)$是一个五元组，其中 $(\mathfrak{A},\mathsf{L}_{\mathfrak{A}})$ 是一个量子紧致度量空间，(G,δ) 是一个适当幺半群，并且 α 是G在 $(\mathfrak{A},\mathsf{L}_{\mathfrak{A}})$ 上通过Lipschitz态射给出的作用，使得

(1) $\forall a \in \mathfrak{A} \quad \forall g \in G \lim_{h\to g} \left\|\alpha^h(a) - \alpha^g(a)\right\|_{\mathfrak{A}} = 0$，即 α 是强连续的；(2) $\forall g \in G \quad \exists D > 0 \quad \exists x > 0 \quad \forall h \in G \quad \delta(h,g) < x \implies \mathsf{L}_{\mathfrak{A}} \circ \alpha^h \hat{\mathrm{E}}\, D\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}$，即 α具有局部有界膨胀因子。

记号 3.6. 设 $(\mathfrak{A},\mathsf{L}_{\mathfrak{A}},G,\delta,\alpha)$ 为一个 Lipschitz动力系统。当度量可以从上下文中明确时，我们将简写为 $(\mathfrak{A},\mathsf{L},G,\alpha)$；当$G$ 上的度量明确时，甚至简写为 $(\mathfrak{A},\mathsf{L},G)$。如果$G$ 上的度量明确，且G 被给定为 $\mathfrak{A}$ 的自同构群，则其作用自然是指G在 $\mathfrak{A}$ 上的自然作用。

为了我们的目的，我们只需回顾 [22]：对于任意固定的$n \in$ 自然数集以及任意 $\varepsilon > 0$,

$$\Lambda^{\mathrm{cov}}((\mathfrak{A}_n,\mathsf{L}_n,G_n,\delta_n,\alpha_n),(\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty,G_\infty,\delta_\infty,\alpha_\infty)) < \varepsilon$$

每当

(1) 存在一个量子紧致度量空间 $(\mathfrak{D},\mathsf{L}_{\mathfrak{D}})$，以及两个量子等距映射 $\psi_n\colon(\mathfrak{D},\mathsf{L}_{\mathfrak{D}}) \to (\mathfrak{A}_n,\mathsf{L}_n)$ 和 $\pi_n\colon(\mathfrak{D},\mathsf{L}_{\mathfrak{D}}) \to (\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty)$，使得
$\max\{豪斯[多夫度量_{\mathfrak{D}}](\mathscr{S}(\mathfrak{D}),\psi_n^*\mathscr{S}(\mathfrak{A}_n)),豪斯[多夫度量_{\mathfrak{D}}](\mathscr{S}(\mathfrak{D}),\pi_n^*\mathscr{S}(\mathfrak{A}_\infty))\} < \varepsilon$,

(2) 存在 $m \hat{\mathrm{E}}\, \frac{1}{\varepsilon}$，以及幺正映射 $f_n\colon G_\infty \to G_n$和 $\xi_n\colon G_n \to G_\infty$，使得

$$\sup_{g,g'\in G_\infty[r_n]} \sup_{h\in G_n[r_n]} \left|\delta_n(f_n(g)f_n(g'),h) - \delta_\infty(gg',\xi_n(h))\right| < \varepsilon, \tag{3.1}$$

and

$$\sup_{g,g'\in G_n[r_n]} \sup_{h\in G_\infty[r_n]} \left|\delta_\infty(\xi_n(g)\xi_n(g'),h) - \delta_n(gg',f_n(h))\right| < \varepsilon, \tag{3.2}$$

即，(f_n,ξ_n) 按照 [22,定义 2.5],的含义，是一个m_n-局部 ε-近似等距同构

(3) 以下内容成立:

$$\sup_{\varphi\in\mathscr{S}(\mathfrak{A}_\infty)} \inf_{\mu\in\mathscr{S}(\mathfrak{A}_n)} \sup_{g\in G_\infty[r_n]} \mathsf{mk}_{\mathsf{L}_{\mathfrak{D}}}(\varphi\circ\alpha_\infty^g\circ\pi_n,\mu\circ\alpha_n^{f_n(g)}\circ\psi_n) < \varepsilon$$

and

$$\sup_{\varphi\in\mathscr{S}(\mathfrak{A}_n)} \inf_{\mu\in\mathscr{S}(\mathfrak{A}_\infty)} \sup_{g\in G_n[r_n]} \mathsf{mk}_{\mathsf{L}_{\mathfrak{D}}}(\varphi\circ\alpha_n^g\circ\psi_n,\mu\circ\alpha_\infty^{\xi_n(g)}\circ\pi_n) < \varepsilon.$$

记号 3.7。 我们将如[20, 定义 2.17]所述，把一个 $\frac{1}{\varepsilon}$-局部 ε-近似等距同构简称为 ε-等距同构。

两个 Lipschitz动力系统（$\mathfrak{A}$, $\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}$, G, δ_G, α）和（$\mathfrak{B}$, $\mathsf{L}_{\mathfrak{B}}$, H, δ_H, β）之间的协变邻近度为零，当且仅当存在一个完全量子等距 π：（$\mathfrak{A}$, $\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}$）→（$\mathfrak{B}$, $\mathsf{L}_{\mathfrak{B}}$）以及一个等距群同构 γ：G → H，使得对于所有 g ∈G，都有 $\pi \circ \alpha^g = \beta^{\gamma(g)} \circ \pi$。除此之外（详见 [22]），我们注意到，如果（$\mathfrak{A}_n$, L_n, G_n, δ_n, α_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于（$\mathfrak{A}$, L, G, δ, α）的协变

邻近度，那么该收敛唯一确定了等距映射以及群G的同构类。

研究协变邻近度的完备性问题很有意义；已有结果表明，许多 Lipschitz动力系统子类关于 Λ^{cov} 在[24]下是完备的。这里回顾以下推论，作为完备性结果的一个有用示例，该推论出自 [24], 。

定理3.8 ([22, 推论4。6])。 对于每个 $n \in$ 自然数集，设 $(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n, G_n, \delta_n, \alpha_n)$ 是一个 *Lipschitz*动力系统，满足：

(1) $(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n, G_n, \delta_n, \alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是关于 Λ^{cov}的柯西序列，*(2)* 对所有 $\varepsilon > 0$，存在 $\omega > 0$和 $N \in$ 自然数集，使得对于所有 $n \geqslant N$，若 $g, h \in G_n$且$\delta_n(g, h) < \omega$，则 $\delta_n(g^{-1}, h^{-1}) < \varepsilon$，*(3)* 对所有 $\varepsilon > 0$，存在 $\omega > 0$且 $N \in$ 自然数集，使得对于所有 $n \geqslant N$，若 g，$h \in G_n$且$\delta_n(g, h) < \omega$，则 $mkDL_n(\alpha_n^g, \alpha_n^h) < \varepsilon$，*(4)* 存在一个局部有界函数 D：$[0,\infty) \to [1,\infty)$，使得对于所有 $n \in$自然数集及所有 $g \in G_n$，都有 $L_n \circ \alpha_n^g \leqslant D(\delta_n(e_n, g))L_n$。

于是存在一个*Lipschitz*动力系统$(\mathfrak{A}, \mathsf{L}, G, \delta, \alpha)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^{\mathrm{cov}}((\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n, G_n, \delta_n, \alpha_n), (\mathfrak{A}, \mathsf{L}, G, \delta, \alpha)) = 0.$$

现在我们回到等距群的问题，以下一般性结果成立：

推论3.9。 若$(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n, G_n, \delta_n, \alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是关于 Λ^{cov}的*Lipschitz*动力系统的一个柯西序列，其中对每个 $n \in\mathbb{N}$，我们假设G_n 是群$\mathsf{ISO}(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)$的闭子群，并且 $\delta_n = \mathrm{mkD}_{\mathsf{L}_n}$，那么存在一个适当度量群$G$，以及$G$通过完全量子等距同构在$(\mathfrak{A}, \mathsf{L})$ 上的一个作用，使得

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^{\mathrm{cov}}((\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n, G_n, \mathrm{mkD}_{\mathsf{L}_n}, \alpha_n), (\mathfrak{A}, \mathsf{L}, G, \mathrm{mkD}_{\mathsf{L}}, \alpha)) = 0.$$

证明。 注意，根据引理（2.10），确实是左不变的。由于对于所有 $n \in\mathbb{N}$，群 $\mathsf{ISO}(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)$ 是紧的，闭子群G_n 也必然是紧的，因而是适当的。按照我们对度量的选择，定理（3.8）的第三个条件显然满足。定理（3.8）的第二个条件也由引理（2.10）满足。

我们注意到 $\mathsf{L}_n \circ \alpha_n^g = \mathsf{L}_n$对所有 $g \in G_n$ 以及对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立，因此定理（3.8）的第四个条件得到满足。

因此，对于量子等距群的闭群的群作用，我们得出定理（3.8）适用。于是，存在一个适当度量群G 以及G 在（$\mathfrak{A}$,L）上的一个作用，该作用由 Lipschitz $*$-自同态给出，使得

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^{\mathrm{cov}}((\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n, G_n, \alpha_n, \mathrm{mkD}_{\mathsf{L}_n}), (\mathfrak{A}, \mathsf{L}, G, \alpha, \mathrm{mkD}_{\mathsf{L}})) = 0.$$

根据 [24, 定理 4.2], , 我们还可得出，$\{\alpha^g : g \in G\}$ 确实是（$\mathfrak{A}$,L）的完全量子等距的一个子群。

□

3.2. **协变桥构造器**。我们现在希望在 C*-代数归纳极限的框架下，得到一些有趣的量子等距变换闭子群收敛的例子。在 [12], 中，最后两位作者与 J. Packer 共同证明了：对于量子紧致度量空间的归纳极限，其关于邻近度收敛的充要条件，可用某些称为桥构造器的 $*$-自同构来刻画，定义如下。

定义 3.10。设 $\mathfrak{A}_\infty := \mathrm{cl}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_n)$，其中 $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是含单位元的 C*-代数 $\mathfrak{A}_\infty$ 的一个递增 C*-子代数序列，且 $\mathfrak{A}_\infty$ 的单位元属于 $\mathfrak{A}_0$。

对于 $((\mathfrak{A}_n,\mathsf{L}_n),(\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty))$，桥构造器 π 是一个 $*$-自同构，具有如下性质：对于所有 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得当 $n \geq N$ 时，

(3.3) $\forall a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)\quad \exists b\in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n)$：$\mathsf{L}_n(b)\leq \mathsf{L}_\infty(a)$ 且 $\|\pi(a)-b\|_{\mathfrak{A}_\infty}<\varepsilon\mathsf{L}_\infty(a)$

and

(3.4) $\forall b \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n)\quad \exists a\in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$：$\mathsf{L}_\infty(a)\leq \mathsf{L}_n(b)$ 且 $\|\pi(a)-b\|_{\mathfrak{A}_\infty}<\varepsilon\mathsf{L}_n(b)$。

采用定义（3.10）中的记号，[12, 定理 2.22] 表明，若假设存在某个 $M>0$，使得对于所有 $n\in\mathbb{N}$，都有 $^1_M\mathsf{L}_n \leq \mathsf{L}_\infty \leq M\mathsf{L}_n$ 在 $\mathrm{dom}(\mathsf{L}_n)$ 上成立，则桥构造器的存在性等价于 $(\mathfrak{A}_n,\mathsf{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 到 $(\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty)$ 的收敛，其中收敛是指关于邻近度的收敛。此外，若找到一个完全量子等距的桥构造器，并且量子度量由度量谱三元组诱导，那么 [12, 定理 3.17] 证明了谱三元组本身以更强的谱邻近度意义收敛——关于谱邻近度的构造及其性质，参见 [20, 19]。

现在我们希望定义协变版本的桥构造子。在某些自然情形下，它们将对协变邻近度发挥与桥构造子类似的作用。为此，我们将在以下框架内进行研究。

假设 3.11。对于每个 $n\in$ 自然数集$:=$ 自然数集$\cup\{\infty\}$，令 $(\mathfrak{A}_n,\mathsf{L}_n)$ 为一个量子紧致度量空间，使得 $\mathfrak{A}_\infty=\mathrm{cl}(\bigcup_{n\in\text{自然数集}}\mathfrak{A}_n)$，其中 $\mathfrak{A}_n(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\subseteq$上的递增（就 $\subseteq$而言）的 C^*-子代数序列，且 $\mathfrak{A}_\infty$ 的单位元属于 $\mathfrak{A}_0$。

对于每个 $n\in$自然数集，令 α_n 为适当度量群 $(G_n,\ \delta_n)$ 在 $(\mathfrak{A}_n,\ L_n)$ 上通过完全量子等距所施加的作用；对于所有 $n\in$ 自然数集，令 $(f_n,\ \xi_n)$ 为从 G_∞ 到 G_n 的 ε_n-iso-iso，具体含义见记号 (3.7)，且满足 $lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$。我们记 $r_n:=\frac{1}{\epsilon_n}$。

此外，我们假设，对于所有 $\varepsilon>0$，存在 $\omega>0$ 以及 $N\in\mathbb{N}$，使得对于所有 $n\geqslant N$，若 $g,h\in G_n\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ 且 $\delta_n(g,h)<\omega$，则 $\mathrm{mkDL}_n(\alpha^g n,\alpha^h_n)<\varepsilon$。

本章节的核心概念由下面的定义给出。

定义 3.12。对于假设（3.11）中详述的数据，协变桥构造器 π 是一个 $*$-自同构，并满足以下性质：对于所有 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得若 $n\geq N$，则：

（1）对于每个 $a\in\mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$，存在 $b\in\mathrm{dom}(\mathsf{L}_n)$，使得 $\mathsf{L}_n(b)\leq\mathsf{L}_\infty(a)$，并且

$$\sup_{g\in G_\infty[r_n]}\left\|\pi(\alpha^g_\infty(a))-\alpha_n^{f_n(g)}(b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}<\varepsilon\mathsf{L}_\infty(a),$$

（2）对于每个 $b\in\mathrm{dom}(\mathsf{L}_n)$，存在 $a\in\mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$，使得 $\mathsf{L}_\infty(a)\leq\mathsf{L}_n(b)$，并且

$$\sup_{g\in G_n[r_n]}\left\|\pi(\alpha^{\xi_n(g)}_\infty(a))-\alpha_n^{g}(b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}<\varepsilon\mathsf{L}_n(b).$$

定义（3.13）中表面上的不对称性可以通过下面的引理得到部分解决，该引理将有助于后续的计算。

引理 3.13。假设假设（3.11）。令 π 为 $\mathfrak{A}_\infty$ 的自同构。那么，如果对于所有 $\varepsilon>0$，存在 $N\in$自然数集，使得对于所有 $n\geqslant N$，存在 $a\in$定义域(L_∞)，并且对于所有 $b\in$定义域(L_n)，满足 $\max\{\mathsf{L}_\infty(a),\mathsf{L}_n(b)\}\leq 1$，使得

$$\sup_{g\in G_n[r_n]}\left\|\pi(\alpha^{\xi_n(g)}_\infty(a))-\alpha_n^{g}(b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}<\frac{\varepsilon}{2},$$

then

$$\sup_{g\in G_\infty[r_n]}\left\|\pi(\alpha_\infty^g(a))-\alpha_n^{f_n(g)}(b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}<\varepsilon.$$

证明。令 $\varepsilon>0$。根据关于 α_∞ 的假设，存在 $\omega>0$，使得对于所有 g、g′ ∈G∞，如果 $\delta_\infty(g、g')<\omega$，那么 mkDL∞($\alpha_\infty^g,\alpha_\infty^{g'}$) $<\frac{\varepsilon}{2}$。另一方面，存在 N ∈ 自然数集，使得如果 n Ê N，那么 (f_n,ξ_n) 是一个 $\frac{\varepsilon}{2}$-等距同构。因此，特别地，根据 [22,引理 2.10],，我们有 $\delta_\infty(g、\xi_n(f_n(g)))<\omega$，对于所有 g ∈$G_\infty[r_n]$。因此：

$$\begin{aligned}\left\|\pi(\alpha_\infty^g(a))-\alpha_n^{f_n(g)}(b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}&\leqslant\left\|\pi(\alpha_\infty^g(a)-\alpha_\infty^{\xi_n(f_n(g))}(b))\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}\\&\quad+\left\|\pi(\alpha_\infty^{\xi_n(f_n(g))}(a))-\alpha_n^{f_n(g)}(b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

我们的证明至此完成。 □

现在，协变桥构造器的存在性蕴含了关于协变邻近度的收敛性。

定理 *3.14.* 对于每个 n ∈自然数集 := 自然数集 ∪ {∞}，设 $(\mathfrak{A}_n,L_n)$ 为一个量子紧致度量空间，使得 $\mathfrak{A}_\infty=cl(\bigcup_{n\in}$自然数集 $\mathfrak{A}_n)$，其中 $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 ⊆ 下递增的 C*-子代数序列，其单位元属于 $\mathfrak{A}_\infty$，且 $\mathfrak{A}_\infty$ 的单位元在 $\mathfrak{A}_0$ 中。假设 $(\mathfrak{A}_n,L_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ 是量子紧致度量空间，并且对于每个 n ∈自然数集，令 α_n 为群 G_n 在 $(\mathfrak{A}_n,L_n)$ 上按完全量子等距的作用，满足假设（*3.11*）。

如果该数据存在协变桥构造器，则

$$\lim_{n\to\infty}\Lambda^{\mathrm{cov}}((\mathfrak{A}_n,\mathsf{L}_n,\alpha_n,G_n),(\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty,\alpha_\infty,G_\infty))=0.$$

证明。令 π 为一个协变桥构造器，并令 $\varepsilon>0$。根据假设，存在 $\delta>0$ 以及 自然数集$_0$ ∈ 自然数集，使得对于所有 n ∈自然数集 且 nÊ 自然数集$_0$,，以及所有 g、$g_\prime$ ∈$G_\infty\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，若 $\delta_n($ g，$g_{g\prime})<\delta$，则 mkDL$_n$($\alpha^g{}_n,\alpha_n^h$)$<\frac{\varepsilon}{2}$。

由于 lim$_{n\to\infty}r_n=\infty$，存在 N_1 ∈ 自然数集，使得当 nÊ N_1, 时，有 $r_n>\max\{\frac{1}{\delta},\frac{1}{\varepsilon}+\varepsilon\}$，并且

$$\sup_{g,g'\in G_n[r_n]}\sup_{h\in G_\infty[r_n]}\left|\delta_\infty(\xi_n(g)\xi_n(g'),h)-\delta_n(gg',f_n(h))\right|<\min\{\delta,\varepsilon\},$$

and

$$\sup_{g\in G_\infty[r_n]}\sup_{h,h'\in G_n[r_n]}\left|\delta_\infty(g,\xi_n(h')\xi_n(h))-\delta_n(f_n(g),hh')\right|<\min\{\delta,\varepsilon\}.$$

根据 [22,引理 2.10],我们有 $\delta_\infty(\xi_n(f_n(g)),g)<\delta$ 对所有 $g\in G_\infty\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ 均成立。因此，对所有a ∈ 定义域 (L∞)，若 L∞(a) Ê 1，

$$\left\|\alpha_\infty^g(a)-\alpha_\infty^{\xi_n(f_n(g))}(a)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}\leqslant\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}_\infty}(\alpha_\infty^g,\alpha_\infty^{\xi_n(f_n(g))})<\frac{\varepsilon}{2},\tag{3.5}$$

此外，由于对所有 g ∈$G_n\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，$\delta_n(f_n(\xi_n(g)),g)<\delta$ 均成立，因此对所有 a ∈定义域(L $_n$)，若L$_n$(a) Ê 1，

$$\left\|\alpha_n^g(a)-\alpha_n^{f_n(\xi_n(g))}(a)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}\leqslant\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}_n}(\alpha_n^g,\alpha_n^{f_n(\xi_n(g))})<\frac{\varepsilon}{2}.\tag{3.6}$$

此外，根据协变桥构造器的定义，存在 N_2 ∈自然数集，使得当nÊN_2, 时：

(1) 对每个 a ∈属于L∞ 的L∞定义域，都存在 b ∈属于L $_n$ 的L $_n$定义域，使得 L$_n$(b) Ê L∞(a)，并且

$$\sup_{g\in G_\infty[r_n]}\left\|\pi(\alpha_\infty^g(a))-\alpha_n^{f_n(g)}(b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}<\frac{\varepsilon}{2}\mathsf{L}_\infty(a),\tag{3.7}$$

(2) 对每个 $b \in$ 属于L $_n$的L $_n$定义域，都存在 $a \in$ 属于L∞ 的L∞定义域，使得 L∞(a) ÉL$_n$(b)，并且

$$\sup_{g\in G_n[r_n]} \left\| \pi(\alpha_\infty^{\xi_n(g)}(a)) - \alpha_n^g(b) \right\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \frac{\varepsilon}{2} \mathsf{L}_n(b). \tag{3.8}$$

固定 nÊ $N := \max\{N_0, N_1, N_2\}$。令 $\mathfrak{D}_n := \mathfrak{A}_\infty \oplus \mathfrak{A}_n$，并对所有 $a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$ 以及 $b \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n)$，定义

$$\mathsf{T}_n(a,b) := \max\left\{ \mathsf{L}_\infty(a), \mathsf{L}_n(b), \frac{1}{2\varepsilon} \sup_{g\in G_\infty[\varepsilon^{-1}]} \left\| \pi \circ \alpha_\infty^g(a) - \alpha_n^{f_n(g)}(b) \right\|_{\mathfrak{A}_\infty} \right\}.$$

最后，令 $p_n : (a,b) \in \mathfrak{D}_n \mapsto a \in \mathfrak{A}_\infty$，以及 $q_n : (a,b) \in \mathfrak{D}_n \mapsto b \in \mathfrak{A}_n$。

现在我们遵循 [12, 命题 2.21]中的论证。首先，我们看到 p$_n$ 和 q$_n$是量子等距同构。根据表达式 (3.7)，如果 a $\in$ dom(L∞) 且 L∞(a) = 1，那么存在 b $\in$ dom(L $_n$)，使得 L$_n$(b) É 1 且 sup$_{g\in G_\infty[r}$ $_{n]}$ $\left\| \pi \circ \alpha_\infty^g(a) - \alpha^{f_n}(g)\, n\,(b) \right\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$。因$n$此，T$_n$(a,b) = 1 =L∞(a)。所以 p$_n$ 是一个量子等距同构。

另一方面，根据表达式（3.8），如果 $b \in$ 定义域(L $_n$) 且 L$_n$(b) = 1，那么存在 $a \in$ 定义域(L∞)，使得 L∞(a) É 1，并且

$$\sup_{g\in G_n[r_n]} \left\| \pi(\alpha_\infty^{\xi_n(g)}(a)) - \alpha_n^g(b) \right\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

今后，根据引理（3.13），我们得到：

$$\sup_{g\in G_\infty[r_n]} \left\| \pi(\alpha_\infty^g(a)) - \alpha_n^{f_n(g)}(b) \right\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \varepsilon.$$

因此，T$_n$(a,b) = 1 =L$_n$(b)，所以 $*$-态射 q_n 是从 $(\mathfrak{D}_n, \mathsf{T}_n)$ 到 $(\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty)$ 的量子等距。

关于 [12, 定理 2.22] 中关于 Haus[T$_n$]($\mathscr{S}(\mathfrak{D}_n)$, $p_n^*(\mathscr{S}(\mathfrak{A}_n))$) É$\frac{\varepsilon}{2}$以及 Haus[T$_n$]($\mathscr{S}(\mathfrak{D}_n)$, $q_n^*(\mathscr{S}(\mathfrak{A}_n))$) É $\frac{\varepsilon}{2}$ 的证明，可参见该定理。这是由以下事实推出的：如果 $(a,b) \in$ 定义域 (T $_n$) 且 T$_n$(a,b) É 1，那么特别地，k$\pi(a) - b$k$_{\mathfrak{A}_\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$。

现在固定 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathfrak{A}_n)$，并令 $g \in G_n[r_n]$。如果 $(a,b) \in$ 定义域 (T $_n$)，且 T$_n$(a,b) É 1，那么$\left\| \pi \circ \alpha_\infty^g(a) - \alpha^{f_n}(g)\, n\,(b) \right\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \varepsilon$。因此，如果 φ'是 $\mathfrak{A}_\infty$的一个状态，其通过使用 Hahn-Banach 定理将 φ延拓到 $\mathfrak{A}_\infty$得到，并令 $\psi := \varphi' \circ \pi$，那么 $\psi \in \mathscr{S}(\mathfrak{A}_\infty)$，并且

$$\begin{aligned}
\left| \varphi \circ \alpha_n^g \circ q_n(a,b) - \psi \circ \alpha_\infty^{\xi_n(g)} \circ p_n(a,b) \right| &= \left| \varphi \circ \alpha_n^g(b) - \varphi' \circ \pi \circ \alpha_\infty^{\xi_n(g)}(a) \right| \\
&= \left| \varphi'(\alpha_n^g(b) - \pi \circ \alpha_\infty^{\xi_n(g)}(a)) \right| \\
&\leqslant \left\| \alpha_n^g(b) - \pi(\alpha_\infty^{\xi_n(g)}(a)) \right\|_{\mathfrak{A}_\infty} \\
&\leqslant \underbrace{\left\| \alpha_n^g(b) - \alpha_n^{f_n(\xi_n(g))} \right\|_{\mathfrak{A}_\infty}}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ by Exp. (3.6)}} \\
&\quad + \underbrace{\left\| \alpha_n^{f_n(\xi_n(g))}(a) - \pi(\alpha_\infty^{\xi_n(g)}(a)) \right\|_{\mathfrak{A}_\infty}}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ since } \mathsf{T}_n(a,b)\leqslant 1} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

因此，sup$_{g\in G_n[r_n]}$ mkT$_n$($\varphi \circ \alpha^g \circ q_n, \psi \circ \alpha^{\xi_n}(g) \circ p_n$) $< \varepsilon$。

现在固定 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathfrak{A}_\infty)$。令 $\psi=\varphi\circ\pi^{-1}$ 限制在 $\mathfrak{A}_n$ 上：于是， $\psi\in\mathscr{S}(\mathfrak{A}_n)$，此外，对于 $g\in G_\infty[r_n]$:

$$\begin{aligned}\left|\varphi\circ\alpha_\infty^g\circ p_n(a,b)-\psi\circ\alpha_n^{f_n(g)}\circ q_n(a,b)\right| &= |\varphi(\alpha_\infty^g(a)-\pi^{-1}(\alpha_n^{f_n(g)}(b)))|\\ &\leqslant \left\|\alpha_\infty^g(a)-\pi^{-1}(\alpha_n^{f_n(g)}(b))\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}\\ &= \left\|\pi(\alpha_\infty^g(a))-\alpha_n^{f_n(g)}(b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}\\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

因此 $\sup_{g\in G_\infty[r_n]}\mathsf{mk}_{\mathsf{T}_n}(\varphi\circ\alpha_\infty^g\circ p_n,\psi\circ\alpha^{f_n}(g)_n\circ q_n)<\varepsilon$。

因此，我们的定理得证。 □

在相当温和的假设下，协变桥构造器实际上是收敛所必需的，因此它们为基于归纳序列构造的Lipschitz动力系统的协变收敛提供了相当令人满意的图景。

定理*3.15*。对于每个 $n\in$ 自然数集 $:=$ 自然数集 $\cup\{\infty\}$，设 $(\mathfrak{A}_n,L_n)$ 为一个量子紧致度量空间，使得 $\mathfrak{A}_\infty=cl(\bigcup_{n\in\text{自然数集}}\mathfrak{A}_n)$，其中 $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\subseteq$ 的递增 C^*-子代数序列，并且 $\mathfrak{A}_\infty$ 的单位元属于 $\mathfrak{A}_0$。此外，对于每个 $n\in$自然数集，设 α_n 是适当度量群 (G_n,δ_n) 在 $(\mathfrak{A}_n,L_n)$ 上通过完全量子等距同构给出的作用；对于所有 $n\in$ 自然数集，设 (f_n,ξ_n) 是从 G_∞ 到 G_n 的 ε_n-等距同构，其含义见记号（*3.7*），且 $lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$。进一步假设 G_n，α_n、$f_n: G_\infty\to G_n$ 以及 $\xi_n: G_n\to G_\infty$ 满足假设（*3.11*）。如果

$$\lim_{n\to\infty}\Lambda^{\text{cov}}((\mathfrak{A}_n,\mathsf{L}_n,G_n,\alpha_n),(\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty,G_\infty,\alpha_\infty))=0,$$

并且，如果存在 $M>0$ 使得对所有 $n\in$自然数集

$$\frac{1}{M}\mathsf{L}_n\leqslant\mathsf{L}_\infty\leqslant M\mathsf{L}_n \text{ on } \text{dom}(\mathsf{L}_n),$$

那么，存在一个与这些数据相关联的协变桥构造器。

证明。 由于 $(\mathfrak{A}_n,\mathsf{L}_n,G_n,\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 关于协变邻近度收敛到 $(\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty,G_\infty,\alpha_\infty)$，因此存在一个序列 $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其元素属于 $(0,\infty)$；还存在一个序列 $(\tau_n,f_n,\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中对每个 $n\in$自然数集：

- $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$,
- (f_n,ξ_n) 是一个ε_n-等距同构,
- $\tau_n:=(\mathfrak{D}_n,\mathsf{T}_n,\Theta_n,\theta_n)$ 是一条隧道 [29]，从 $(\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty)$ 到 $(\mathfrak{A}_n,\mathsf{L}_n)$，其幅度相对于 (f_n,ξ_n) 不超过ε_n，具体含义见 [22, 定义 3.11]；现在我们来回顾这些术语在本文中的含义。对 $(\mathfrak{D}_n,\mathsf{T}_n)$ 而言，它是一个量子紧致度量空间，并且存在两个量子等距同构 $\Theta_n:(\mathfrak{D}_n,\mathsf{T}_n)\to(\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty)$ 和 $\theta_n:(\mathfrak{D}_n,\mathsf{T}_n)\to(\mathfrak{A}_n,\mathsf{L}_n)$，使得：

$$\sup_{\varphi\in\mathscr{S}(\mathfrak{A}_\infty)}\inf_{\psi\in\mathscr{S}(\mathfrak{A}_n)}\sup_{g\in G_\infty[r_n]}\mathsf{mk}_{\mathsf{T}_n}(\varphi\circ\alpha_\infty^g\circ\Theta_n,\psi\circ\alpha_n^{f_n(g)}\circ\theta_n)<\varepsilon_n, \tag{3.9}$$

and

$$\sup_{\psi\in\mathscr{S}(\mathfrak{A}_n)}\inf_{\varphi\in\mathscr{S}(\mathfrak{A}_\infty)}\sup_{g\in G_n[r_n]}\mathsf{mk}_{\mathsf{T}_n}(\varphi\circ\alpha_\infty^{\xi_n(g)}\circ\Theta_n,\psi\circ\alpha_n^g\circ\theta_n)<\varepsilon_n. \tag{3.10}$$

我们注意到，根据 [22, 定义 3。10], 隧道 τ_n 的协变可达度是方程（3.9）和（3.10）中两个上确界中的较大者。

根据 [12, 定理 2.22], 归纳序列关于邻近度的收敛意味着桥构造器的存在。具体而言，在将 $(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}n)_{n\in\mathbb{N}}$ 替换为一个子序列后，对于所有 $a \in \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}\infty)$，我们回顾一下，$\{\pi(a)\}$ 是 $(\mathfrak{t}_n(a|l))_{n\in\mathbb{N}}$ （其中 l Ê $\mathsf{L}\infty(a)\}$ 的极限，这里的极限是指由 $\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}_{\mathfrak{A}_\infty}$ 在 $\mathfrak{A}_\infty$ 的闭子集上诱导的豪斯多夫距离意义下的极限，并且目标集 $\mathfrak{t}_n(a|l)$ 是在 [27] 中定义的，如下所示：

$$\mathfrak{t}_n(a|l) := \{\Theta_n(d) : d \in \mathrm{dom}(\mathsf{T}_n), \mathsf{T}_n(d) \leqslant l, \theta_n(d) = a\}.$$

设 $a \in$ 定义域$(\mathsf{L}\infty)$，并设 $\varepsilon > 0$。那么存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于所有 n Ê N，都有 $\mathrm{k}\pi(a) - b\mathrm{k}_{\mathfrak{A}_\infty} < \frac{\varepsilon}{6}$，其中 $b \in \mathfrak{t}_n$ 属于 $(a|\mathsf{L}\infty(a))$。

设 $g \in G_\infty[r_n]$ 并设 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathfrak{A}_\infty)$。设 $\varphi' := \varphi_{|\mathfrak{A}_n}$。因此，由方程（3.9）和（3.10），存在 $\psi \in \mathscr{S}(\mathfrak{A}_\infty)$，使得

$$\sup_{g\in G_n[r_n]} \mathrm{mk}_{\mathsf{T}_n}(\varphi \circ \alpha_\infty^{\xi_n(g)} \circ \Theta_n, \psi \circ \alpha_n^g \circ \theta_n) < \frac{\varepsilon}{6}.$$

设 $a \in$ 定义域$(\mathsf{L}\infty)$，且 $\mathsf{L}\infty(a)$ É 1。由于 $\mathsf{L}\infty(a) = \mathsf{L}\infty \circ \alpha_\infty^g(a)$，存在 $c_n \in \mathfrak{t}_n\left(\alpha_\infty^g(a)\middle|\mathsf{L}\infty(a)\right)$。设 $b \in \mathfrak{t}_n(a|\mathsf{L}\infty(a))$。于是，对于 $g \in G_n[r_n]$，我们计算得：

$$\begin{aligned}
\left|\varphi(\pi(\alpha_\infty^{\xi_n(g)}(a)) - \alpha_n^g(b))\right| &\leqslant \left|\varphi(\pi(\alpha_\infty^{\xi_n(g)}(a)) - c_n)\right| + \underbrace{|\varphi'(c_n - \alpha_n^g(b))|}_{c_n - \alpha_n^g(b) \in \mathfrak{A}_n} \\
&< \frac{\varepsilon}{6} + |\varphi'(c_n) - \psi(\alpha_\infty^{\xi_n(g)}(a))| + |\psi(\alpha_\infty^{\xi_n(g)}(a)) - \varphi'(\alpha_n^g(b))| \\
&< \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

由于 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathfrak{A}_\infty)$ 是任意的，并且由于 $\pi(\alpha^{\xi_n}(g)_\infty(a)) - \alpha^g{}_n(b) \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_\infty)$，我们得出结论：

$$\sup_{g\in G_n[r_n]} \left\|\pi(\alpha_\infty^{\xi_n(g)}(a)) - \alpha_n^g(b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

根据引理（3.13），存在自然数集 $\in$ 自然数集，使得若 n Ê 自然数集，则

$$\sup_{g\in G_\infty[r_n]} \left\|\pi(\alpha_\infty^g(a)) - \alpha_n^{f_n(g)}(b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \varepsilon.$$

我们现在选取 $\mathrm{b} \in$ 定义域(L_n)，使得 $\mathsf{L}_n(\mathrm{b})$ É 1。令 $\mathrm{a} \in$ 定义域 $(\mathsf{L}\infty)$，使得 $\mathrm{b} \in \mathfrak{t}_n(\mathrm{a}|\mathsf{L}_n(\mathrm{b}))$；根据 [12, 定理 2.22],，我们有 $\mathrm{k}\pi(\mathrm{a}) - \mathrm{bk}_{\mathfrak{A}_\infty} < \frac{\varepsilon}{3}$。因此

$$\begin{aligned}
\left|\varphi(\pi(\alpha_\infty^{\xi_n(g)}(a)) - \alpha_n^g(b))\right| &\leqslant \left|\varphi(\pi(\alpha_\infty^g(a)) - c_n)\right| + \underbrace{|\varphi'(c_n - \alpha_n^{f_n(g)}(b))|}_{c_n - \alpha_n^{f_n(g)}(b) \in \mathfrak{A}_n} \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + |\varphi'(c_n) - \psi(\alpha_\infty^g(a))| + |\psi(\alpha_\infty^g(a)) - \varphi'(\alpha_n^{f_n(g)}(b))| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

至此，我们的证明完成。 □

现在我们将关注一种适用于许多后续示例的情形。我们通过要求群构成一个射影序列，并对我们的等距同构采用更具体的形式，来缩小假设（3.11）。

假设 3.16。对于每个 $n \in$ 自然数集 $:=$ 自然数集 $\cup \{\infty\}$，令 $(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}n)$ 为一个量子紧致度量空间，使得 $\mathfrak{A}_\infty = \mathrm{cl}(\bigcup n \in \text{自然数集}\, \mathfrak{A}_n)$，其中 $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\subseteq$下递增的 C^*-子代数序列，且 $\mathfrak{A}_\infty$ 的单位元属于 $\mathfrak{A}_0$。

Let

$$G_0 \xleftarrow{j_0} G_1 \xleftarrow{j_1} G_2 \xleftarrow{j_2} G_3 \xleftarrow{j_3} \cdots$$

构成一个群的射影序列，使得对于所有 $m \in$自然数集，j_m 都是满射，并令 G_∞ 为其射影极限。令 $f_m\colon G_\infty \to G_m$ 为对于所有 $m \in$ 自然数集的典范满群同态，使得对于所有 $m \in$ 自然数集 $\setminus\{0\}$，$j_{m-1}\circ f_m = f_{m-1}$。

假设对于每个 $n \in$ 自然数集，群 G_n 均赋予了一个适当的左不变度 δ_n，并且给定了一个 α_n 由 G_n 通过 $(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}n)$ 的完全量子等距所定义的作用。

此外，假设对于所有 $n \in$ 自然数集，存在一个单位映射 $\xi_n\colon G_n \to G_\infty$ 以及 $r_n > 0$，使得 极限$_{n\to\infty} r_n = \infty$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{g,g'\in G_n[r_n]} \sup_{h\in G_\infty[r_n]} \left|\delta_\infty(\xi_n(g)\xi_n(g'),h) - \delta_n(gg', f_n(h))\right| = 0.$$

我们首先注意到，假设（3.16）确实提供了 ε-等距同构映射，从而包含了群序列 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在适当幺半群意义下关于 Gromov-Hausdorff 距离的收敛。

引理3.17。设 G 和 H 是两个适当度量群，其单位元分别为 e_G 和 e_H，相应的（左不变）度量分别为 δ_G 和 δ_H。假设存在一个满群同态 $f\colon G \to H$。若 $\xi\colon H \to G$ 是一个映射，满足 $\xi(e_H) = e_G$，并且存在 $r > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，使其具有以下性质：

$$\sup_{h,h'\in H[r]} \sup_{g\in G[r]} \left|\delta_G(\xi(h)\xi(h'),g) - \delta_H(hh', f(g))\right| < \varepsilon,$$

那么 (f, ξ) 是从 G 到 H 的 $r2$-局部 ε-几乎等距同构，其含义见方程（3.1）和（3.2）。

证明。我们已经假设了该命题的一半，因此只需检查以下内容。

设 $h \in H\left[r\frac{}{2}\right]$ 以及 g、$g' \in G\left[r\frac{}{2}\right]$。由于 δ_G 是左不变的，我们得到

$$\delta_G(gg', e_G) \leqslant \delta_G(gg', g) + \delta_G(g, e_G) = \delta_G(g', e_G) + \delta_G(g, e_G) \leqslant \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

因此，为清晰起见，令 $z := gg' \in G\left[r\frac{}{2}\right]$；根据关于 f 和 ξ 的假设，我们看到

$$\begin{aligned}\left|\delta_G(gg', \xi(h)) - \delta_H(f(g)f(g'), h)\right| &= \left|\delta_G(gg', \xi(h)) - \delta_H(\underbrace{f(gg')}_{f\text{group morphism}}, h)\right| \\ &= \left|\delta_G(z, \xi(h)\underbrace{\xi(e_H)}_{=e_G}) - \delta_H(f(z), he_H)\right| \\ &< \varepsilon \text{ by assumption on } \xi.\end{aligned}$$

这就完成了我们的证明。 □

推论 3.18。如果我们假设假设（*3.16*），那么

$$\lim_{n\to\infty} \Upsilon((G_n,\delta_n),(G_\infty,\delta_\infty)) = 0,$$

其中我们将其记作 Υ *Gromov–Hausdorff*么半群距离，见[22, 定义 2。7]。

证明。令 $\varepsilon > 0$。则存在 自然数集 $\in$自然数集，使得当 $n\hat{\mathrm{E}}$ 自然数集 时，有 $m\hat{\mathrm{E}}\ \frac{2}{\varepsilon} + \varepsilon$，并且

$$\sup_{g,g'\in G_n[r_n]} \sup_{h\in G_\infty[r_n]} \left|\delta_\infty(\xi_n(g)\xi_n(g'),h) - \delta_n(gg', f_n(h))\right| < \varepsilon.$$

因此，根据引理（3.17），（f_n，ξ_n）是一个 $\frac{1}{\varepsilon}$-局部 ε-几乎等距同构。所以根据[22, 定义 2.7], 我们得出 Υ（（G_n，δ_n），（G_∞，δ_∞））$< \varepsilon$。推论（3.18）的证明至此完成。□

推论 3.19。在定理（*3.14*）中的相同假设下，如果存在桥构造器 π 使得

(1) 对每个 $n \in$ 自然数集，对所有 $g \in G_n$，$*$-自同构 α^g_n 与 π 可交换；*(2)* 对所有 $g \in G_\infty$，以及对所有 $n \in$ 自然数集，$*$-自同构 α^g_∞ 在 $\mathfrak{A}_n$ 上的限制等于 $\alpha^{f_n(g)}_n$，

then

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^{\mathrm{cov}}((\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n, \alpha_n, G_n), (\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty, \alpha_\infty, G_\infty)) = 0.$$

证明。令 $\varepsilon > 0$；根据 π的定义，存在 自然数集 $\in$ 自然数集，使得对于所有 $n \in$ 自然数集，表达式（3.7）和（3.8）对 $\frac{\varepsilon}{2}$ 而非 ε成立。令 $\delta > 0$ 以及 自然数集$_0 \in$ 自然数集，使得对于所有 n Ê 自然数集$_0$, 若g、g' $\in G_n$满足 δ_n（g、g'）$< \delta$，则

$$\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}_n}(\alpha^g_n, \alpha^{g'}_n) < \varepsilon. \tag{3.11}$$

此外，根据假设（3.11）和引理（3.17），存在 $N_1 \in \mathbb{N}$，使得对于所有 n Ê N_1,，我们都有 $r_n > \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon$；对于所有 g、g' $\in G_\infty\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，以及对于所有 $h \in G_n\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,

$$\left|\delta_n(f_n(gg'), h) - \delta_\infty(gg', \xi_n(h))\right| < \varepsilon.$$

令 $a \in$ 定义域(L$_\infty$)。由于 π 是桥构造器，因此存在 $b \in$ 定义域(L $_n$)，满足 L$_n$(b) ÉL$_\infty$(a)，使得 kπ(a) $-b$k$_{\mathfrak{A}_\infty} < \frac{\varepsilon}{2}L_\infty$($a$)。于是，对于所有 $g \in G_\infty[r_n]$,

$$\begin{aligned}
\left\|\pi(\alpha^g_\infty(a)) - \alpha^{f_n(g)}_n(b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty} &= \underbrace{\left\|\alpha^g_\infty(\pi(a)) - \alpha^{f_n(g)}_n(b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}}_{[\pi,\alpha^g]=0} \\
&\leqslant \left\|\alpha^g_\infty(\pi(a) - b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty} + \left\|\alpha^g_\infty(b) - \alpha^{f_n(g)}_n(b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty} \\
&\leqslant \|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty} + 0 \\
&< \varepsilon \mathsf{L}_\infty(a).
\end{aligned}$$

因此，我们已经证明，对于所有 $a \in$ 定义域 (L$_\infty$)，存在 $b \in$ 定义域(L $_n$)，满足 L$_n$(b) ÉL$_\infty$ (a)，并且

$$\sup_{g \in G_\infty[r_n]} \left\|\pi(\alpha^g(a)) - \alpha^{f_n(g)}(a)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \varepsilon \mathsf{L}_\infty(a).$$

现在固定 b $\in$dom (L $_n$)。由于 π是桥构造器，根据我们对 n Ê 自然数集的选择，存在一个 a $\in$dom (L$_\infty$)，使得 L$_\infty$(a) É L$_n$(b)，且 kπ(a) $-$bk$_{\mathfrak{A}_\infty} < \frac{\varepsilon}{2}L_n$(b)。对于所有 g $\in$G$_n$[r$_n$], 由于 f$_n$ 是满射，存在 h $\in$G$_\infty$，使得 g $=$f$_n$(h)。由于 α^gn 与 π 可交换,

我们得到：

$$\begin{aligned}
\left\|\pi(\alpha_\infty^{\xi_n(g)}(a))-\alpha_n^g(b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty} &\leqslant \left\|\alpha_\infty^{\xi_n(g)}(\pi(a)-b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}+\left\|\alpha_\infty^{\xi_n(g)}(b)-\alpha_n^g(b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}\\
&= \|\pi(a)-b\|_{\mathfrak{A}_\infty}+\left\|\alpha_\infty^{\xi_n(f_n(h))}(b)-\alpha_n^{f_n(h)}(b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}\\
&\leqslant \|\pi(a)-b\|_{\mathfrak{A}_\infty}+\underbrace{\left\|\alpha_\infty^{\xi_n(f_n(h))}(b)-\alpha_\infty^{h}(b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}}_{\text{by Eq. (3.11)}}\\
&\quad+\underbrace{\left\|\alpha_\infty^{h}(b)-\alpha_n^{f_n(h)}(b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}}_{=0 \text{ by (2)}}\\
&= \|\pi(a)-b\|_{\mathfrak{A}_\infty}+\frac{\varepsilon}{2}\mathsf{L}_n(b)+0\\
&< \varepsilon\mathsf{L}_n(b).
\end{aligned}$$

因此， π 实际上是一个协变桥构造器，因此满足定理（3.14）的假设，故推论得证。□

现在我们将注意力集中于量子等距变换群。若$G \subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$在点态收敛拓扑下是$\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$的闭子群，其中$(\mathfrak{A},\mathsf{L})$是一个量子紧致度量空间，则我们将由显然的$G$ 在 $\mathfrak{A}$上的作用所诱导的相应李普希茨动力系统$(\mathfrak{A},\mathsf{L},G)$简记为此形式。在这种情况下，借助下面的定理，我们可以进一步简化问题。该定理的主要启示是，只要能够将归纳极限中某个 C*-子代数上的量子等距同构延拓到整个极限上，我们就能得到各种量子等距变换群及其作用的收敛。

定义 3.20。对于每个$n \in$ 自然数集 $:=$ 自然数集$\cup\{\infty\}$，设$(\mathfrak{A}_n,\mathsf{L}_n)$是一个量子紧致度量空间，满足 $\mathfrak{A}_\infty = \mathrm{cl}(\bigcup_{n\in\text{自然数集}}\mathfrak{A}_n)$，其中$(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\subseteq$意义下递增的 $\mathfrak{A}_\infty$的 C*-子代数序列，且 $\mathfrak{A}_\infty$ 的单位元属于 $\mathfrak{A}_0$。若 π 是 $\mathfrak{A}_\infty$的任意 $*$-自同构，则定义如下：

$$\mathsf{ISO}(\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty|\pi) := \left\{\alpha\in\mathsf{ISO}(\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty) : \pi\circ\alpha=\alpha\circ\pi \text{ and, } \forall n\in\mathbb{N}\quad \alpha_{|\mathfrak{A}_n}\in\mathsf{ISO}(\mathfrak{A}_n,\mathsf{L}_n)\right\}.$$

定理 3.21。对于每个 $n \in$ 自然数集 $:=$ 自然数集 $\cup\{\infty\}$，令 $(\mathfrak{A}_n,\mathsf{L}_n)$ 为一个量子紧致度量空间，使得 $\mathfrak{A}_\infty = \mathrm{cl}(\bigcup_{n\in\text{自然数集}}\mathfrak{A}_n)$，其中 $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\subseteq$意义下递增的 C^*-子代数序列，且 $\mathfrak{A}_\infty$ 的单位元属于 $\mathfrak{A}_0$。令 π 为一个同时也是桥构造器的完全量子等距。群 $\mathsf{ISO}(\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty|\pi)$ 是 $\mathfrak{A}_\infty$的自同构群中的一个紧子群
$*$-自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_\infty)$。

此外，若 G_∞ 是 $\mathsf{ISO}(\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty|\pi)$ 的一个闭子群，并且对于所有 $n \in$自然数集，我们设 $G_n := \left\{\alpha_{|\mathfrak{A}_n}\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_n) : \alpha\in G_\infty\right\}$，则 G_n 是一个闭群，并且

$$\lim_{n\to\infty}\Lambda^{\mathrm{cov}}((\mathfrak{A}_n,\mathsf{L}_n,G_n),(\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty,G_\infty))=0.$$

证明。若 $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathsf{ISO}(\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty|\pi)$ 中的一个序列，并且在 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_\infty)$ 中收敛于某个 α （关于 mkDL_∞），那么对于所有 $\mathrm{a} \in \mathfrak{A}_n$，序列 $(\alpha_n(\mathrm{a}))_{n\in\mathbb{N}}$ 按范数收敛，因此 $\alpha_\infty(\mathrm{a}) \in \mathfrak{A}_n$，因为 $\mathfrak{A}_n$ 在 $\mathfrak{A}_\infty$中是闭的；此外，由连续性，对于所有 $\mathrm{a} \in \mathfrak{A}_\infty$，有 $\alpha(\pi(\mathrm{a})) = \pi(\alpha(\mathrm{a}))$。因此，$\alpha \in \mathsf{ISO}(\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty|\pi)$。所以 $\mathsf{ISO}(\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty|\pi)$ 是 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_\infty)$ 的闭子集。由于根据定理（2.19），$\mathsf{ISO}(\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty)$ 是一个紧致度量群，因此 $\mathsf{ISO}(\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty|\pi)$ 是 $\mathsf{ISO}(\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty)$ 的一个紧子群。

固定$n \in$ 自然数集。对于 $\alpha \in G_\infty$，我们简单地将 $\alpha_{|\mathfrak{A}_n}$ 在 $\mathfrak{A}_n$上的限制写作$f_n(\alpha)$，因此$f_n(\alpha) \in G_n$。于是，f_n 是一个满群同态。另一方面，如果 $\beta \in G_n$，那么

根据定义，存在 $\alpha \in G_\infty$，使得 $\beta = f_n(\alpha)$；对于这样的选择，我们令 $\xi_n(\beta) := \alpha$（一般而言，这一选择绝非唯一）。

根据构造，在 G_∞（分别地，G_n）上由 mkDL_∞（分别地，mkDL_n）诱导的拓扑是逐点收敛拓扑，并且 f_n 在这些拓扑下是连续的。由于 $\mathsf{G}_n = \mathsf{f}_n(\mathsf{G}_\infty)$，群 G_n 也是紧的，因为紧集 G_∞ 的连续像是紧的（事实上，G_∞ 是紧的，因为它是紧群 $\mathrm{ISO}(\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty)$ 的闭子集，参见定理（2.19））。因此 G_n 是紧的，从而也是闭的，因为 G_n 上的拓扑可度量化，因而是豪斯多夫的。

现在我们检查（f_n，ξ_n）对于所有 $n \in$ 自然数集 $\mathbb{N}$，均是局部几乎等距同构，正如[22, 定义 25]中所述。

固定 $\varepsilon > 0$，并令 $N \in \mathbb{N}$ 由桥构造性质给出。令 $\beta, \beta' \in G_n$ 和 $\alpha \in G_\infty$。现在，令 $a \in$ 属于定义域(L_∞)，且 $\mathsf{L}_\infty(a) \dot{<} 1$。由于 π 是桥构造器，存在 $b \in \mathfrak{A}_n$，使得 $\mathsf{L}_n(b) \dot{<} 1$，且 $\mathsf{k}\pi(a) - b\mathsf{k}_{\mathfrak{A}_\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$。因此

$$
\begin{aligned}
\left\|\xi_n(\beta)\circ\xi_n(\beta')(a)-\alpha(a)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty} &= \underbrace{\left\|\pi\left(\xi_n(\beta)\circ\xi_n(\beta')(a)-\alpha(a)\right)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}}_{\text{since } \pi \text{ is an isometry for } \|\cdot\|_{\mathfrak{A}_\infty}} \\
&\leqslant \left\|\pi\left(\xi_n(\beta)\circ\xi_n(\beta')(a)-\xi_n(\beta)\circ\xi_n(\beta')(\pi^{-1}(b))\right)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty} \\
&\quad + \left\|\pi\left(\xi_n(\beta)\circ\xi_n(\beta')(\pi^{-1}(b))-\alpha(a)\right)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty} \\
&\leqslant \underbrace{\left\|\xi_n(\beta)\circ\xi_n(\beta')(\pi(a)-b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}}_{\text{since } \pi \text{ commutes with elements in } G_\infty} \\
&\quad + \underbrace{\left\|\xi_n(\beta)\circ\xi_n(\beta')(b)-\alpha(\pi(a))\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}}_{\text{since } \pi \text{ commutes with elements in } G_\infty} \\
&\leqslant \underbrace{\|\pi(a)-b\|_{\mathfrak{A}_\infty}}_{\xi_n(\beta)\circ\xi_n(\beta')\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_\infty)} + \underbrace{\left\|\beta\circ\beta'(b)-\alpha(\pi(a))\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}}_{b\in\mathfrak{A}_n} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \left\|\beta\circ\beta'(b)-\alpha(b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty} + \|\alpha(b)-\alpha(\pi(a))\|_{\mathfrak{A}_\infty} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\left\|\beta\circ\beta'(b)-f_n(\alpha)(b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}}_{\text{by def. of } f_n} + \underbrace{\|b-\pi(a)\|_{\mathfrak{A}_\infty}}_{\alpha\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_\infty)} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \mathrm{mkD}_{\mathsf{L}_n}(\beta\circ\beta', f_n(\alpha)) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \mathrm{mkD}_{\mathsf{L}_n}(\beta\circ\beta', f_n(\alpha)) + \varepsilon.
\end{aligned}
$$

因此

$$\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}_\infty}(\xi_n(\beta)\circ\xi_n(\beta'), \alpha) < \mathrm{mkD}_{\mathsf{L}_n}(\beta\circ\beta', f_n(\alpha)) + \varepsilon.$$

另一方面，令 $b \in$ 属于定义域(L $_n$)，且 L$_n$(b) É 1。同样地，由于 π 是桥构造器，存在 $a \in$ 属于定义域(L∞)，使得 L∞(a) É 1，且 kπ(a) $-b$k$_{\mathfrak{A}_\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$。此外，根据假设，L∞($\pi$($a$)) É L∞($a$) É 1。因此，我们得出：

$$\begin{aligned}
\left\|\beta\circ\beta'(b)-f_n(\alpha)(b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty} &\leqslant \left\|\beta\circ\beta'(b)-\xi_n(\beta)\circ\xi_n(\beta')(\pi(a))\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}\\
&\quad+\left\|\xi_n(\beta)\circ\xi_n(\beta')(\pi(a))-\alpha(\pi(a))\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}+\|\alpha(\pi(a))-\alpha(b)\|_{\mathfrak{A}_\infty}\\
&\leqslant \left\|\xi_n(\beta)\circ\xi_n(\beta')(b-\pi(a))\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}+\underbrace{\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}_\infty}(\xi_n(\beta)\circ\xi_n(\beta'),\alpha)}_{\mathsf{L}_\infty(\pi(a))\leqslant 1}\\
&\quad+\underbrace{\|\pi(a)-b\|_{\mathfrak{A}_\infty}}_{\alpha\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})}\\
&\leqslant \underbrace{\|\pi(a)-b\|_{\mathfrak{A}_\infty}}_{\xi_n(\beta)\circ\xi_n(\beta')\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_\infty)}+\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}_\infty}(\xi_n(\beta)\circ\xi_n(\beta'),\alpha)+\frac{\varepsilon}{2}\\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}_\infty}(\xi_n(\beta)\circ\xi_n(\beta'),\alpha)+\frac{\varepsilon}{2}\\
&=\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}_\infty}(\xi_n(\beta)\circ\xi_n(\beta'),\alpha)+\varepsilon.
\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}_n}(\beta\circ\beta',f_n(\alpha))<\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}_\infty}(\xi_n(\beta)\circ\xi_n(\beta),\beta)+\varepsilon.$$

所以

$$\left|\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}_n}(\beta\circ\beta',f_n(\alpha))-\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}_\infty}(\xi_n(\beta)\circ\xi_n(\beta'),\alpha)\right|<\varepsilon.$$

现在，设 $\alpha,\alpha'\in G_\infty$ 以及 $\beta\in G_n$。取 $b \in \in$定义域(L $_n$)，且 L$_n$(b) $\in$ 1。由于 $b \in \mathfrak{A}_n$，映射 f_n 是到 $\mathfrak{A}_n$的限制，而 ξ_n 扩展了 $\mathfrak{A}_n$的自同构，我们得出：

$$\left\|f_n(\alpha\circ\alpha')(b)-\beta(b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}=\left\|\alpha\circ\alpha'(b)-\xi_n(\beta)(b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}\leqslant\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}_\infty}(\alpha\circ\alpha',\xi_n(\beta)),$$

因此 mkDL$_n$(f_n($\alpha\circ\alpha'$),β) É mkDL∞($\alpha\circ\alpha'$,ξ_n(β))。

最后，如果 $a \in \in$定义域(L∞) 且 L∞(a) $\in$ 1，则存在 $b \in \in$定义域(L $_n$)，使得 L$_n$(b) $\in$ L∞(a) $\in$ 1，并且 kπ(a) $-b$k$_{\mathfrak{A}_\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$。于是我们有：

$$\begin{aligned}
\left\|\alpha\circ\alpha'(a)-\xi_n(\beta)(a)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty} &= \underbrace{\left\|\pi\left(\alpha\circ\alpha'(a)-\xi_n(\beta)(a)\right)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}}_{\pi\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_\infty)}\\
&\leqslant \underbrace{\left\|\alpha\circ\alpha'(\pi(a))-\alpha\circ\alpha'(b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}}_{\pi\text{ commutes with }\alpha\circ\alpha'}+\left\|\alpha\circ\alpha'(b)-\beta(b)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}\\
&\quad+\left\|\beta(b)-\xi_n(\beta)(\pi(a))\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}\\
&\leqslant \underbrace{\|\pi(a)-b\|_{\mathfrak{A}_\infty}}_{\alpha\circ\alpha'\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})}+\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}_n}(f_n(\alpha\circ\alpha'),\beta)+\|b-\pi(a)\|_{\mathfrak{A}_\infty}\\
&<\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}_n}(f_n(\alpha\circ\alpha'),\beta)+\varepsilon.
\end{aligned}$$

由此我们证明了 mkDL∞($\alpha\circ\alpha'$,ξ_n(β)) $\in$ mkDL$_n$(f_n($\alpha\circ\alpha'$),β)+ε。今后，

$$\left|\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}_\infty}(\alpha\circ\alpha',\xi_n(\beta))-\mathrm{mkD}_{\mathsf{L}_n}(f_n(\alpha\circ\alpha'),\beta)\right|<\varepsilon.$$

根据构造，我们的结果现由推论（3.19）得出。 □

4. Applications

现在，我们将关于协变桥构造器的研究应用于如下情形：对于某些量子紧致度量空间的归纳序列，证明等距变换群度量收敛于其射影极限。

4.1. **恒等映射作为桥构造器**。 定理（3.21）的一种特殊应用情形是，恒等映射本身就是一个协变桥构造器——事实上，本章节后文包含的若干示例正是如此。于是，定理（3.21）的交换性要求便自动得到满足。因此，我们得到以下漂亮的收敛结果；剩下的主要问题是，我们能否将量子等距同构从一个子代数扩展到整个代数。为此，我们研究由归纳极限的量子等距变换群，该群由如下自同构组成：它们限制在归纳序列的每个因子上时，都是量子等距同构。本章节的第一个结果涉及一般的量子等距同构，是定理（3.21）的直接推论。

推论 4.1. 对于每个 $n \in$ 自然数集 $:= \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，设 $(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)$ 是一个量子紧致度量空间，满足 $\mathfrak{A}_\infty = \mathrm{cl}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_n)$，其中 $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个递增的（相对于 $\subseteq$）C^*-子代数序列，且这些子代数是 $\mathfrak{A}_\infty$ 的 C^*-子代数，$\mathfrak{A}_\infty$ 的单位元属于 $\mathfrak{A}_0$。假设 $\mathfrak{A}_\infty$ 的恒等自同构也是一个桥构造器。定义：

$$G_\infty := \left\{\alpha \in \mathsf{ISO}(\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty) : \forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_{|\mathfrak{A}_n} \in \mathsf{ISO}(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)\right\}.$$

如果对每个 $n \in$ 自然数集，我们定义：

$$G_n := \left\{\alpha_{|\mathfrak{A}_n} \in \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{A}_n) : \alpha \in G_\infty\right\},$$

then

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^{\mathrm{cov}}((\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty, G_\infty)), (\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n, G_n)) = 0.$$

现在我们可以更仔细地考察度量谱三元组的量子等距同构群。当然，这些都是由此诱导的量子紧度量空间的量子等距同构群的紧子群的特殊情形，但我们希望找到某种合理的条件，以确保我们的收敛完全发生在谱三元组的语境中。

以下结果也是定理（3.21）的推论。

推论 4.2。 设 $\mathfrak{A}_\infty :=$ $\mathrm{cl}(\bigcup_{n\in$自然数集$} \mathfrak{A}_n)$，其中 $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\subseteq$意义下的递增 C^*-子代数序列，且 $\mathfrak{A}_\infty$ 的单位元属于 $\mathfrak{A}_0$。假设 $\mathfrak{A}_\infty$ 的恒等自同构也是桥构造器。设 $(\mathfrak{A}_\infty, \mathscr{H}_\infty, /\!\!D_\infty)$ 是 $\mathfrak{A}_\infty$上的任意度量谱三元组。假设 $(\mathscr{H}_n)$ 是 $\mathscr{H}_\infty$ 的递增希尔伯特子空间序列，并具有以下性质：

（*1*）对于所有 $n \in$自然数集：$\mathfrak{A}_n\mathscr{H}_n \subseteq \mathscr{H}_n$，（*2*）$\mathscr{H}_\infty = \mathrm{cl}(\bigcup_{n\in$自然数集$} \mathscr{H}_n)$，（*3*）$/\!\!D_\infty$ 与 $\mathscr{H}_n$上的投影对易，且对每个 $n \in$自然数集均成立，（*4*）$(\mathfrak{A}_n, \mathscr{H}_n, /\!\!D_n)$对每个 $n \in$自然数集都是度量的。

Let:

$$J_\infty := \left\{\alpha \in \mathsf{Iso}(\mathfrak{A}_\infty, \mathscr{H}_\infty, \not{D}_\infty) : \forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_{|\mathfrak{A}_n} \in \mathsf{ISO}(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)\right\}$$

and

$$G_\infty := \left\{\alpha = \mathrm{Ad}_U \in \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{A}_\infty) :\ U \in \mathscr{U}(\mathscr{H}_\infty), [\not{D}_\infty, U] = 0 \textit{ with the property:}\right.$$
$$\left.\forall n \in \mathbb{N} \quad U\mathscr{H}_n \subseteq \mathscr{H}_n \textit{ and } \alpha(\mathfrak{A}_n) \subseteq \mathfrak{A}_n\right\},$$

其中，$\mathscr{U}(\mathscr{H}_\infty)$是作用于 $\mathscr{H}_\infty$。上的酉算子集合。

如果我们对每个 $n \in$自然数集 定义：

$$J_n := \left\{\alpha_{|\mathfrak{A}_n} \in \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{A}_n) : \alpha \in J_\infty\right\} \textit{ and } G_n := \left\{\alpha_{|\mathfrak{A}_n} \in \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{A}_n) : \alpha \in G_\infty\right\},$$

那么，对所有 n ∈自然数集：

$$G_n \subseteq \mathsf{Iso}(\mathfrak{A}_n, \mathscr{H}_n, \mathbb{D}_n)$$

and

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^{\mathrm{cov}}((\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty, J_\infty), (\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n, J_n)) = 0, \tag{4.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^{\mathrm{cov}}((\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty, G_\infty), (\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n, G_n)) = 0, \tag{4.2}$$

证明。 公式（4.1）由定理（3.21）立即得到，因为群 J_∞ 按构造是闭的。

为证明公式（4.2），首先注意到，根据定义，G∞ 是 Iso($\mathfrak{A}_\infty$,$\mathscr{H}_\infty$, /D∞) 的子群。接下来，G∞ 在 mkD$\mathbb{D}_\infty$中是闭的。为证明这一点，设 α_n 是 G∞ 中的一个序列，并且该序列关于 mkD /D∞收敛于 α。首先注意，对于所有 k,n ∈ N，都有 $\alpha_n(\mathfrak{A}_k) \subseteq \mathfrak{A}_k$，这意味着 $\alpha(\mathfrak{A}_k) \subseteq \mathfrak{A}_k$，因为 $\mathfrak{A}_k$ 是闭的。现在，对于所有 n ∈N，都存在作用于 $\mathscr{H}_\infty$ 上的酉算子 U$_n$，使得 $\alpha_n = \mathrm{Ad}_{U_n}$，其中 [U$_n$、/D$_\infty$] = 0 以及 U$_n\mathscr{H}_k \subseteq \mathscr{H}_k$对所有 k ∈ N 都成立。根据定理（2.19）的证明，U$_n$ 存在一个子序列，该子序列在强算子拓扑下收敛于 $\mathscr{H}_\infty$ 上的某个酉算子 U，并满足 $\alpha = \mathrm{Ad}_U$ 以及 [/D∞、U] = 0。由于 $\mathscr{H}_k$对所有 k ∈N 都是闭的，因此 U$\mathscr{H}_k \subseteq \mathscr{H}_k$。所以 α ∈G∞。应用定理（3.21）即可完成证明。□

4.2. **几乎内自同构**。 上一章节的一个关键观察是，我们的收敛结果涉及归纳极限的因子上的量子等距同构，而这些量子等距同构在某种程度上可以扩展到归纳极限上，成为量子等距同构。

一般而言，这当然是一个棘手的问题：自同构通常无法从子代数扩展到整个代数。不过，在某些简单情形下，这种扩展几乎是可能的：内自同构显然可以扩展。

现在我们将看到，量子度量结构使我们能够找到其他可从子代数扩展到整个代数的自同构。

定理 4.3。 设 ($\mathfrak{A}$，L) 是一个量子紧致度量空间，且 $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的一个 C^*-子代数，并且满足 $1 \in \mathfrak{B}$。设 $K > 0$。如果 $\beta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{B})$ 是 $\mathfrak{B}$ 的一个 $*$-自同构，并且是 $\mathfrak{B}$的 $*$-自同构的逐点极限，其中每个自同构都可扩展为 $\mathfrak{A}$ 上的 K-双 *Lipschitz* 态射，那么存在一个 K-双 *Lipschitz* 的 $*$-自同构 $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$，其在 $\mathfrak{B}$ 上的限制为 β。

证明。 设 $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的一列 $*$-自同构，逐点收敛于 β。根据假设，对于每个 $n \in$ 自然数集，存在一个 K-双利普希茨自同构 α_n of ($\mathfrak{A}$,L)，其对 $\mathfrak{B}$ 的限制为 α_n。根据定理（2.12），($\mathfrak{A}$,L) 的 K-双利普希茨自同构集合在逐点收敛拓扑下是紧的，因此存在一个子序列 $(\alpha_{f(n)})_{n\in\mathbb{N}}$，其逐点收敛于 $\mathfrak{A}$ 的一个 K-双利普希茨自同构α。根据构造，α 在 $\mathfrak{B}$ 上的限制为 β。□

我们可以将定理（4.3）应用于内自同构量子等距映射。首先，我们简要讨论一下如何延拓近内自同构。

推论 4.4。 设 ($\mathfrak{A}$，L) 是一个量子紧致度量空间，并设 $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的一个 C^*-子代数，且满足 $1 \in \mathfrak{B}$。令 $K > 0$。我们定义集合

$$\mathscr{U}(\mathfrak{B}|\mathfrak{A}, \mathsf{L}, K) := \{u \in \mathscr{U}(\mathfrak{B}) : \forall a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}) \quad \mathsf{L}(uau^*) \leqslant K\mathsf{L}(a)\}.$$

若 $\beta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{B})$ 是由形如 Ad_u（其中 $u \in \mathscr{U}(\mathfrak{B})$）的内自同构构成的逐点极限，则存在 $\mathfrak{A}$ 的一个 K-双利普希茨自同构，其对 $\mathfrak{B}$的限制为 β。

证明。 根据假设，形如 Ad$_u$（其中 $u \in \mathscr{U}(\mathfrak{B}|\mathfrak{A}, \mathsf{L}, K)$ 的每个内自同构都可以延拓为 $\mathfrak{A}$（因为它是内自同构）一个 K-双利普希茨自同构。然后我们应用定理（4.3）。□

注记 4.5。假设 L 是定义在含单位元的 C*-代数 $\mathfrak{A}$ 的稠密子代数上的半范数，使得（$\mathfrak{A}$，L$|_{\mathrm{sa}(\mathfrak{A})}$）是一个量子紧致度量空间，并且对于所有 a、b ∈L 的定义域，我们都有 L(ab) É L(a)kbk$_{\mathfrak{A}}$ + kak$_{\mathfrak{A}}$ L(b) —— 例如，L(a) = |||[/D, a]||| 对于所有满足 a dom(/D) ⊆ dom(/D) 且 [/D, a] 有界的 a ∈$\mathfrak{A}$，其中（$\mathfrak{A}$、$\mathscr{H}$、/D）是一个度量谱三元组。假设对于所有 a ∈ L 的定义域，都有 L(a) = L(a*)。设 $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$、K > 0，并令 u 是 $\mathfrak{B}$ 中的一个酉算子，使得 L(u) É K 2qdiam($\mathfrak{A}$, L)$^{K+1}$。固定 $\overline{\mu \in \mathscr{S}(\mathfrak{A})}$。那么对于所有 a ∈L 的定义域，我们得到

$$\mathsf{L}(uqu^*) = \mathsf{L}(u(a-\mu(a))u^*) \leqslant 2\left\|a-\mu(a)\right\|_{\mathfrak{A}}\mathsf{L}(u) + \mathsf{L}(a) \leqslant (2\mathrm{qdiam}(\mathfrak{A},\mathsf{L})K+1)\mathsf{L}(a).$$

因此，$\left\{u \in \mathscr{U}(\mathfrak{B}) : \mathsf{L}(u) \text{ É } K2\mathrm{qdiam}(\mathfrak{A},\mathsf{L})^{K+1}\right\} \subseteq \mathscr{U}(\mathfrak{B}|\mathfrak{A},\mathsf{L},K)$。

特别地，如果 $\mathfrak{B}$ 是有限维的，那么L 等价于 $\mathfrak{B}/\mathbb{C}$上的商范数，因此存在$R > 0$，使得对所有酉算子$u \in \mathfrak{B}$都有L(u) ÉR，从而$\mathscr{U}(\mathfrak{B}|\mathfrak{A},\mathsf{L},2\mathrm{qdiam}(\mathfrak{A},\mathsf{L})R+1)$实际上是 $\mathfrak{B}$的整个酉群。

现在我们可以将上述观察结合起来，从而得到关于某些本质上为内量子等距同构的群的收敛结果。事实上，下面的推论是定理（4.3）与本章节中证明的其他结果相结合的结论。

推论4.6。 对于每个 n ∈ 自然数集 := 自然数集 ∪ {∞}，令($\mathfrak{A}_n$,L$_n$) 为一个量子紧致度量空间，使得 $\mathfrak{A}_\infty = \mathrm{cl}(\bigcup_{n\in\text{自然数集}} \mathfrak{A}_n)$，其中$(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 ⊆意义下递增的 C*-子代数序列，且 $\mathfrak{A}_\infty$ 的单位元属于 $\mathfrak{A}_0$。假设 $\mathfrak{A}_\infty$ 的恒等自同构也是一个桥构造器。若我们对所有 n ∈自然数集定义，

$$H_n := \Big\{\mathrm{Ad}_u \in \mathrm{ISO}(\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty) : u \in \mathscr{U}(\mathfrak{A}_\infty),$$
$$\forall k \in \{0,1,\ldots,n-1\} \quad \forall a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_k) \quad \mathsf{L}_k(uau^*) = \mathsf{L}_k(a)\Big\}.$$

then

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^{\mathrm{cov}}\left((\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n, \mathrm{cl}(H_n)), \left(\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty, \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n\right)\right)\right) = 0,$$

其中，闭包 cl(·) 是在逐点收敛拓扑下取的。

证明。令 G∞ := cl(⋃n∈NH $_n$)，并对所有 n ∈ N 令 G$_n$:= cl(H $_n$)，由定理（4.3）可得 G$_n$ = $\{\alpha \in$G∞ : $\alpha_{\mathfrak{A}_n} \in$ ISO($\mathfrak{A}_n$,L$_n$)$\}$，因为 $\mathfrak{A}_n$ 的内自同构显然可延拓到 $\mathfrak{A}_\infty$。由于恒等映射是桥构造器，结论由推论（4.1）立即得出。□

4.3. **具有忠实迹的 AF 代数**。 Antonescu/Ivan 和 Christensen 构造了[6] 一个 AF 代数上的度量谱三元组。现在，我们应用一些结果来证明其谱三元组的等距群收敛。我们首先介绍 [6]。

令 $\mathfrak{A} = \mathrm{cl}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_n)$ 为一个含单位元的 C*-代数，它是由一列递增的有限维 C*-子代数之并的闭包得到的——即，$\mathfrak{A}$ 是一个 AF 代数。为方便起见，我们假设 $\mathfrak{A}_0 = \mathbb{C}1$，其中 1 是 $\mathfrak{A}$的单位元。令 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathfrak{A})$ 为 $\mathfrak{A}$的一个忠实状态，并令 $L^2(\mathfrak{A},\varphi)$ 为 GNS希尔伯特空间，它由 $\mathfrak{A}$ 关于内积 $a,b \in \mathfrak{A} \mapsto \varphi(b^*a)$ 完备化得到。当然，$\mathfrak{A}$ 通过左乘作用在 $L^2(\mathfrak{A},\varphi)$ 上。对于 $\mathfrak{A}$ 的单位元 1，将其视为 $L^2(\mathfrak{A},\varphi)$ 中的向量时，我们记作 Ω；此时它是 $\mathfrak{A}$ 的循环分离向量。

对于每个 n ∈N，我们将 $L^2(\mathfrak{A}_n,\varphi)$ 视为 $L^2(\mathfrak{A},\varphi)$ 中 $\mathfrak{A}_n\Omega$ 的闭包，并将 $L^2(\mathfrak{A},\varphi)$ 到 $L^2(\mathfrak{A}_n,\varphi)$ 的正交投影记为 P_n。对于所有 a ∈ $\mathfrak{A}$，令 E_n(a) 由下式定义： ∀a ∈ $\mathfrak{A}_n$ E_n(a)Ω: = P_n(aΩ) ——由于 Ω是分离的，这确实定义良好。由于 $\mathfrak{A}_n$ 是有限维的，它作为向量空间与 $L^2(\mathfrak{A}_n,\varphi)$ 一致，因此 E_n(a) ∈ $\mathfrak{A}_n$。容易验证，如此定义的 E_n 是一个连续线性函数。事实上，当 φ 同时也是一个迹时，E_n 是从 $\mathfrak{A}_\infty$ 到 $\mathfrak{A}_n$的唯一条件期望，满足 $\varphi \circ E_n = \varphi$（见 [16, 命题 2.6.2]）。

现在我们遵循 [6] 中给出的 AF代数上的谱三元组构造。对于每个 n ∈N \ {0}，令 $Q_n := P_n - P_{n-1}$；显然，由于 P_n 和 P_{n-1} 可交换且根据构造有 P_n Ê P_{n-1}，Q_n 是一个投影。现在固定一个 ∈ $\mathfrak{A}_n$，使得 aΩ ∈ $L^2(\mathfrak{A}_n,\varphi)$。根据构造，$P_m$(aΩ) = aΩ，因此对于所有 m > n，有 Q_m(aΩ) = 0。由 Q_m 的连续性，我们于是得出，对于所有 m > n，$Q_m L^2(\mathfrak{A}_n,\varphi)$ = {0}。这使我们能够定义如下算子。

对于任意严格递增序列 $\lambda := (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中各项均为正实数，我们定义

$$\forall \xi \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^2(\mathfrak{A}_n,\varphi) \quad D_\lambda \xi := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n Q_n \text{ on } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^2(\mathfrak{A}_n,\varphi), \tag{4.3}$$

注意到，由于 $(L^2(\mathfrak{A}_n,\varphi))_{n\in\mathbb{N}}$ 关于包含关系递增，集合 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^2(\mathfrak{A}_n,\varphi)$ 是 $L^2(\mathfrak{A},\varphi)$ 的一个子空间。由于 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^2(\mathfrak{A}_n,\varphi)$ 在 $L^2(\mathfrak{A},\varphi)$ 中稠密，算子 D_λ 定义在一个稠密子空间上。根据构造，它显然是对称的；事实上，如果

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} ((\lambda_n + i)^{-1}) Q_n$$

若级数在范数意义下收敛，则T有界，并且对所有 $\xi \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^2(\mathfrak{A}_n,\varphi)$，都有$T(D_\lambda + i)\xi = \xi$。因此，$D_\lambda$ 是本质自伴的。令 $\overline{D_\lambda}$ 为D_λ的闭包。于是容易看出，$\overline{D_\lambda}$是自伴算子，而T是 $\overline{D_\lambda} + i$的逆。由于T是紧的，$\overline{D_\lambda}$ 具有紧预解式。

现在固定$a \in \mathfrak{A}_n$。注意到，按照构造，对于k Ê n，a与P_k交换，因为对于所有满足k Ên的$b \in \mathfrak{A}_k$，都有$ab \in \mathfrak{A}_k$。进而，这说明

$$[\not{D}_\lambda, a] = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j [Q_j, a] = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j [Q_j, a] \tag{4.4}$$

$$= P_k \left(\sum_{j=0}^{\infty} [Q_j, a] \right) P_k = P_k [\not{D}_\lambda, a] P_k. \tag{4.5}$$

由此可见，{a ∈ $\mathfrak{A}_\infty$: a dom($\overline{D_\lambda}$) ⊆ dom($\overline{D_\lambda}$)} 在 $\mathfrak{A}_\infty$ 中稠密，因为它包含⋃n∈N $\mathfrak{A}_n$，因此 ($\mathfrak{A}_\infty$, $L^2(\mathfrak{A}_\infty,\varphi)$, $\overline{D_\lambda}$) 是一个谱三元组。此外，($\mathfrak{A}_n$,$L^2(\mathfrak{A}_n,\varphi)$, $\overline{D_n}$) 也是谱三元组，其中 $\overline{D_n}$ 是 $\overline{D_\infty}$ 在 $L^2(\mathfrak{A}_n,\varphi)$ 上的限制；后者现在是一个有界自伴算子。此外，根据公式（4.4），对所有 a ∈ $\mathfrak{A}_n$，我们有：

$$\|\!|\!| [\not{D}_n, a] |\!|\!|_{L^2(\mathfrak{A}_n,\varphi)} = \|\!|\!| [\not{D}_\infty, a] |\!|\!|_{L^2(\mathfrak{A}_\infty,\varphi)}.$$

并非所有如上所述的序列 λ 选择都会导出一个度量谱三元组。下面的结果将在 [6]中处理这一问题。

定理 4.7 (定理 2.1)。 存在一个严格递增序列 $\lambda := (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其元素为正数；还存在一个可求和序列$(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得

$$\forall a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_\infty) \qquad \|\mathbb{E}_n(a) - \mathbb{E}_{n+1}(a)\|_{\mathfrak{A}} < \beta_n \|\!|\!| [\not{D}_\lambda, a] |\!|\!|_{L^2(\mathfrak{A}_\infty,\varphi)}. \tag{4.6}$$

因此，对于序列 λ 的这一选择，谱三元组 $\left(\mathfrak{A}_n,\ L^2(\mathfrak{A}_n,\ \varphi),(\not{D}_\lambda)|_{L^2(\mathfrak{A}_n,\ \varphi)}\right)$对于所有 n ∈ 自然数集 ∪ {∞} 都是度量的。

由于我们已经构造了度量谱三元组，因此也构造了量子紧致度量空间，并且可以询问它们关于邻近度的收敛性。事实上，我们现在证明谱三元组关于谱邻近度 Λ^{spec} 的一个收敛性结果，该结果蕴含了底层量子紧致度量空间的收敛性。

此外，根据 [12, 定理 3.17], 为了证明收敛性，只需找到一个同时也是完全量子等距的桥构造器即可。

关于谱邻近度的定义，请参见 [20] ；关于定理 3，请参见 [12,Theorem 3.17] ，以了解在 AF 代数的背景下，要得到以下结果，只需找到一个同时也是完全量子等距的桥构造器即可。

定理 4.8。 设 $\mathfrak{A} = \mathrm{cl}(\bigcup_{n\in\text{自然数集}}\mathfrak{A}_n)$ 是一个含单位元的 C^*-代数，它由有限维 C^*-子代数的一个递增序列的并构成，其中 $\mathfrak{A}_n$ 满足 $\mathfrak{A}_0 = \mathbb{C}1$。设 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathfrak{A})$是 $\mathfrak{A}$上的一个忠实态。

若 $\lambda := (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个正实数的严格递增序列，并且（$\mathfrak{A}_\infty$，L^2（$\mathfrak{A}_\infty$，φ），$\not{D}_\lambda$）是一个度量谱三元组，那么，令$\not{D}_n$ 为$\not{D}_\lambda$在$\mathrm{dom}(\not{D}_\lambda) \cap \mathscr{H}_n$上的限制，我们有（$\mathfrak{A}_n$，$\mathscr{H}_n$，$\not{D}_n$）是一个度量谱三元组，并且

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^{\text{spec}}((\mathfrak{A}_n, L^2(\mathfrak{A}_n,\varphi), \not{D}_n), (\mathfrak{A}_\infty, L^2(\mathfrak{A}_\infty,\varphi), \not{D}_\lambda))) = 0,$$

因此，特别地，

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^*\left(\left(\mathfrak{A}_n, |||[(\not{D}_n,\cdot]|||_{L^2(\mathfrak{A}_n,\varphi)}\right), \left(\mathfrak{A}_\infty, |||[\not{D}_\lambda,\cdot]|||_{L^2(\mathfrak{A}_\infty,\varphi)}\right)\right) = 0.$$

证明。我们将证明 $\mathfrak{A}_\infty$ 的恒等映射是一个桥构造器。首先，我们注意到，对于所有 a ∈ ⋃n∈自然数集 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_n)$ ⊆dom (L∞)，序列 $(\mathrm{E}_n(\mathrm{a}))_{n\in\mathbb{N}}$最终恒定为 a，因此 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}_n$ (a) = a。如果 a ∈ $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$，那么对于所有 $\varepsilon > 0$，存在 a′ ∈ ⋃n∈自然数集 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_n)$，使得 $\|$ a $-$a′$\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$；令 N ′ ∈自然数集，使得 a′ ∈ $\mathfrak{A}_n$对所有 n Ê N ′成立。于是

$$\begin{aligned}\|a - \mathbb{E}_n(a)\|_{\mathfrak{A}_\infty} &\leqslant \|a - a'\|_{\mathfrak{A}_\infty} + \|a' - \mathbb{E}_n(a')\|_{\mathfrak{A}_\infty} + \|\mathbb{E}_n(a' - a)\|_{\mathfrak{A}_\infty} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

因此，对于所有$a \in \mathfrak{A}$，$\lim_{n\to\infty}\mathrm{k}\mathbb{E}_n(a) - a\mathrm{k}_{\mathfrak{A}_\infty} = 0$。

现在，固定 $\varepsilon > 0$。令$N \in \mathbb{N}$，使得如果n Ê N，则 $\sum_{n\geqslant N}\beta_m < \varepsilon$。对于所有$\overline{n} \in \mathbb{N}$，令L$_n$定义为L $/_{D_n}$。

令a ∈dom(L∞）。根据方程（4.4），有

$$[\not{D}_n, \mathbb{E}_n(a)] = P_n[\not{D}, a]P_n,$$

因此L$_n$($\mathbb{E}_n(a)$) ÉL∞(a)。另一方面，

$$\|a - \mathbb{E}_n(a)\|_{\mathfrak{A}} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty}\|\mathbb{E}_{k+1}(a) - \mathbb{E}_k(a)\|_{\mathfrak{A}} \leqslant \mathrm{L}_\infty(a)\sum_{k=n}^{\infty}\beta_k < \varepsilon\mathrm{L}_\infty(a).$$

此外，如果一个 ∈ 定义域(L $_n$)，那么我们只需注意到L∞(a) = L$_n$(a)，并且$\|a - a\|_{\mathfrak{A}_\infty} = 0$。我们已经证明，恒等映射是桥梁构建者；当然，它也是完全量子等距。因此，根据[12, 定理 3.17], ，我们得到了所声称的收敛。□

现在，假设我们的状态 φ 实际上是一个迹态。定理 3.1 的 [2] 给出了群$\mathrm{Iso}(\mathfrak{A}_\infty, L^2(\mathfrak{A}_\infty, \varphi), /D_\lambda)$的如下描述：

$$\mathrm{Iso}(\mathfrak{A}_\infty, L^2(\mathfrak{A}_\infty, \varphi), \not{D}_\lambda) = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_\infty) : \varphi \circ \alpha = \varphi, \forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha(\mathfrak{A}_n) = \mathfrak{A}_n\}.$$

因此设 G_∞ 是 $\mathrm{Iso}(\mathfrak{A}_\infty, L^2(\mathfrak{A}_\infty, \varphi), /D_\lambda)$ 的任意闭子群，并且若 $G_n := \{\alpha_{|\mathfrak{A}_n} : \alpha \in G_\infty\}$，则根据定理 (2.12)：

- G_n 是 $\mathrm{Iso}(\mathfrak{A}_n, L^2(\mathfrak{A}_n, \varphi), /D_n)$ 的紧子群——事实上，它是 $\mathrm{ISO}(\mathfrak{A}_n, L_n)$ 的紧子群；此外，显然，如果 $\alpha \in G_n$，那么$\alpha(\mathfrak{A}_k) = \mathfrak{A}_k$ 对所有 $k \in \{0, \ldots, n\}$ 都成立，因此根据与 [2, 定理 3.1],$\alpha \in \mathrm{Iso}(\mathfrak{A}_n, L^2(\mathfrak{A}_n, \varphi), /D_n)$ 相同的观察可得；

- 我们有 $\lim_{n\to\infty} \Lambda\mathrm{cov}((\mathfrak{A}_n, L_n, G_n), (\mathfrak{A}_\infty, L_\infty, G_\infty)) = 0$。

在特殊情形下，当 $G_\infty = \mathrm{Iso}(\mathfrak{A}_\infty, L^2(\mathfrak{A}_\infty, \varphi), /D_\lambda)$ 时，$\mathrm{Iso}(\mathfrak{A}_\infty, L^2(\mathfrak{A}_\infty, \varphi), /D_\lambda)$ 特别地是当 Υ 时，通过将 G_∞ 的元素限制到 $\mathfrak{A}_n$ 而得到的群的极限。由于 Υ 是适当度量群在等距同构意义下的一个度量，我们注意到，若 $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是任何一个收敛到 $\mathrm{Iso}(\mathfrak{A}_\infty, L^2(\mathfrak{A}_\infty, \varphi), /D_\lambda)$ 的适当度量群序列，则有 $\lim_{n\to\infty} \Upsilon(H_n, G_n) = 0$。同样值得注意的是，对于所有 $n \in$自然数集，$\mathrm{Iso}(\mathfrak{A}_\infty, L^2(\mathfrak{A}_\infty, \varphi), /D_\lambda)$ 上的度量 mkDL_n 都是~~双~~不变度量，并且，将 Υ 限制到赋予双不变度量的适当幺半群类上是完备的。

此外，如果 $\mathfrak{A}_\infty$ 实际上是一个 UHF代数，且 $\mathfrak{A}_n = \otimes^n{}_{j=0} \mathfrak{M}(\delta_j)$ 中 $\delta_0 = 1$，$(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个自然数集序列，并且 $\mathfrak{M}(d)$ 是 $d \times d$ 阶矩阵的 C*-代数，那么对于所有 $n \in \mathbb{N}$，

$$\mathrm{Iso}(\mathfrak{A}_n, L^2(\mathfrak{A}_n, \varphi), (\not{D}_\lambda)_{|\mathfrak{A}_n}) = \left\{\otimes_{j=0}^n \mathrm{Ad}_{u_j} : \forall j \in \{0, \ldots, d\} \quad u_j \in \mathfrak{M}(\delta_j), u_j^* = u_j^{-1}\right\},$$

and

$$\mathrm{Iso}(\mathfrak{A}_\infty, L^2(\mathfrak{A}_\infty, \varphi), \not{D}_\lambda) = \left\{\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_\infty) : \alpha_{|\mathfrak{A}_n} \in \mathrm{Iso}(\mathfrak{A}_n, L^2(\mathfrak{A}_n, \varphi), \not{D}_\lambda)\right\}.$$

因此，根据定理（3.21），我们立即得到

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^{\mathrm{cov}}((\mathfrak{A}_n, L_n, \mathrm{Iso}(\mathfrak{A}_n, L^2(\mathfrak{A}_n, \varphi), \not{D}_n), (\mathfrak{A}_\infty, L_\infty, \mathrm{Iso}(\mathfrak{A}_\infty, L^2(\mathfrak{A}_\infty, \varphi), \not{D}_\lambda))) = 0.$$

4.4. **对偶作用与归纳极限**。我们证明，当赋予第 [12]G_∞ 为一个离散阿贝尔群，且 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 G_∞ 的一个递增子群序列，并满足 $G_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $\widehat{G_n}$ 为G_n的 Pontryagin 对偶；特别地，$\widehat{G_n}$ 是一个紧群，而 $\varprojlim \widehat{G_\infty}$ 是 $(\widehat{G_n})_{n\in\mathbb{N}}$ 的射影极限。

令 σ 为 G_∞ 上任意取值于 T 的 2-余循环；我们仍将 σ 在 G_n 上的限制记为 σ，并注意到，对于所有 $n \in$N，它仍然是 G_n 上的 2-余循环。如 [12,章节 4.1]，中所述，我们可以将扭曲卷积 C*-代数 $C^*(G_n, \sigma)$ 识别为 $C^*(G_\infty, \sigma)$ 的一个 C*- 子代数，其中 $1 \in C^*(G_n, \sigma)$，对所有 $n \in$N，此外：$C^*(G_\infty, \sigma) = \mathrm{cl}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C^*(G_n, \sigma))$。我们将 $\widehat{G_n}$ 在 $C^*(G_n, \sigma)$ 上的对偶作用记为 α_n，对所有 $n \in$N。

我们固定一个有限维空间 E，以及作用于 E 上的两个酉算子 γ_1 和 γ_2，使得 $\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = 1$ 和 $\gamma_1\gamma_2 = -\gamma_2\gamma_1$。现在记所有函数 $\xi : G_\infty \to E$ 的空间为 $\sum_{g\in G_\infty} \|\xi(g)\|^2 E < \infty$，记作 $\mathscr{H}_\infty := \ell^2(G_\infty, E)$；对于每个 $n \in$自然数集，我们以显然的方式将 $\ell^2(G_n, E)$ 与 $\mathscr{H}_n := \{\xi \in \ell^2(G_\infty, E) : \forall g \notin G_n : \xi(g) = 0\}$ 这一 $\ell^2(G_\infty, E)$ 的闭子空间等同起来。

现在，设 $\mathbb{L}_H$ 是定义在 G_∞ 上的长度函数，使得 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在由 $\mathbb{L}_H$ 诱导的 Hausdorff 距离下收敛于 G_∞。最后，对于所有 $g \in G_\infty$，令 $\mathbb{F}(g) := \mathrm{scale}(\min\{n \in \text{自然数集} : g \in G_n\})$，其中 $\mathrm{scale} : G_\infty \mapsto [0,\infty)$ 是某个严格递增函数。于是我们定义

$$\mathrm{dom}(\not{D}_\infty) := \left\{ \xi \in \ell^2(G_\infty, E) : \sum_{g\in G_\infty} (\mathbb{L}_H(g)^2 + \mathbb{F}(g)^2) \left\|\xi(g)\right\|_E^2 < \infty \right\}$$

并且，对于所有 $\xi \in \ell^2(G_\infty, E)$，

$$\not{D}_\infty \xi : g \in G_\infty \mapsto \mathbb{L}_H(g)\gamma_1\xi(g) + \mathbb{F}(g)\gamma_2\xi(g).$$

此外，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们令 $\mathrm{dom}(\not{D}_n) := \mathrm{dom}(\not{D}_\infty) \cap \mathscr{H}_n$，并令 $\not{D}_n$ 为 $\not{D}_\infty$ 在 $\mathrm{dom}(\not{D}_n)$ 上的限制。

三元组 $(C^*(G_n,\sigma), \mathscr{H}_n, \not{D}_n)$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均为偶谱三元组，[12, 引理 4.7]。在某些情况下，即当 $\mathbb{L} := \mathbb{L}_H + \mathbb{F}$ 是定义在 G_∞ 上的具有倍增性质的长度函数时，根据 [5],，这些谱三元组实际上是度量的；由 [12,引理 4.15],，此外，恒等映射是这些数据的桥构造器，这是由 [12, 定理 4.16]得到的。因此，特别是，

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^{\mathrm{spec}}((C^*(G_n,\sigma), \mathscr{H}_n, \not{D}_n), (C^*(G_\infty,\sigma), \mathscr{H}_\infty, \not{D}_\infty)) = 0.$$

固定 $n \in \mathbb{N}$。如 [12], 中所述，若我们对所有的 $\omega \in \widehat{G_n}$ 定义酉算子 v^z 作用于 $\ell^2(G_n, E)$，并对所有 $\xi \in \ell^2(G_n,E)$ 令其为：

$$v_n^\omega \xi : g \in G_n \mapsto \omega(g)\xi(g),$$

则对所有 $a \in C^*(G_n,\sigma)$，有 $v_n^\omega a v_n^{\omega *} = \alpha_n^\omega(a)$。此外，$u_n^\omega$ 与 $\not{D}_n$ 可交换，因此对所有 $\omega \in \widehat{G_n}$，有 $\alpha_n^\omega \in \mathrm{Iso}(C^*(G_n,\sigma), \mathscr{H}_n, \not{D}_n)$。

令 $\mathrm{f}_n : \widehat{G_\infty} \to \widehat{G_n}$ 为由对偶性从包含映射 $G_n \hookrightarrow G_\infty$ 诱导出的满射群同态——即，f_n 是从 G_∞ 到 G_n 的限制映射。根据构造，$\alpha^f(\omega)$ n 是 α_∞^ω 在 $C^*(G_n,\sigma)$ 上的限制，因为若 f $\in C_c(G_n)$，则 $\alpha^f(\omega)$ n (f) : g $\in G_n \mapsto f_n(\omega)(g)\xi(g) = \omega(g)\xi(g) = \alpha_\infty^\omega(f)(g)$；再由 $C_c(G_n)$ 在 $C^*(G_n,\sigma)$ 中的稠密性以及对偶作用的连续性可得。因此，若 $\omega \in \widehat{G_\infty}$，则对所有 n $\in \mathbb{N}$，α_∞^ω 限制为 $\mathrm{Iso}(C^*(G_n,\sigma), \mathscr{H}_n, \not{D}_n)$ 中的一个元素。

如果赋予 $\widehat{G_n}$ 距离 $g,g' \in \widehat{G_n} \mapsto \delta_n(g,g') := \mathrm{mkD}_{L_n}(\alpha^g{}_n, \alpha^{g'}{}_n)$，则 δ_n 在 $\widehat{G_n}$ 上诱导出一个紧拓扑，该拓扑与 G_n 上的通常拓扑一致。事实上，mkD_{L_n} 诱导出逐点收敛拓扑。由于对偶作用 α_n 是强连续的，因此可知 δ_n 在标准拓扑下是连续的。因此，由于 δ_n 诱导的拓扑是豪斯多夫的，并且比 $\widehat{G_n}$ 通常的紧拓扑更粗，所以距离 δ_n 使 Pontryagin 对偶 $\widehat{G_n}$ 的通常拓扑度量化，其中 G_n 为其对偶。

因此，我们由定理（3.21）得出：

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^{\mathrm{cov}}((C^*(G_n,\sigma), L_n, \widehat{G_n}, \alpha_n), (C^*(G_\infty,\sigma), L_\infty, \widehat{G_\infty}, \alpha_\infty)) = 0.$$

因此，我们得到 $\mathrm{Iso}(C^*(G_n,\sigma), \mathscr{H}_n, \not{D}_n)$ 中特殊闭子群收敛的一个例子。

这种情形的具体例子是非交换螺旋体，其中 $G_\infty := \left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]\right)^d$，其中 d $\in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$；对于所有 n $\in \mathbb{N}$，令 $G_n := \left\{\frac{1}{p}\mathbb{Z}\right\}^d$。对于任意选择的素数 number p，我们可以选取 G_∞ 的任意 2-余循环。在此情况下，G_n 是一个 2-环面，而 G_∞ 是螺旋体 $\mathbb{Q}_p$，其中螺旋体 $\mathbb{Q}_p$ 是螺旋体群 $\{(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{T}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}\ z_{p\,n+1}{}^p = z_n\}$。

其他例子包括 Bunce-Deddens代数，其中 $G_\infty := Z(p^\infty) \times Z$ 且 $G_n := Z/p^n Z \times Z$，同样地，p 为任意素数，并且 $Z(p^\infty) := \{z \in C : \exists n \in N\ z^{(p^n)} = 1\}$ 是 Prüfer p-群，而 $Z/p^n Z$ 是 C 中 p^n-次单位根所成的群。这里我们选取 2-余循环 $\sigma : ((\zeta, z),(\omega, y)) \in G_\infty^2 \mapsto \omega^z$。有关这些构造的详细信息，请参见 [12]。在此情况下，$\widehat{G_n}$ 是群 $Z/pZ \times T$，而 $\widehat{G_\infty}$ 是群 $Z_p \times T$，其中 Z_p 是 p进整数群。

参考文献

[1] K. Aguilar 和 F. Latrémolière，AF 代数上的量子超度量与 Gromov-Hausdorff 推进距离，Studia Math. 231 (2015)，149–193。[2] J. Bassi 和 R. Conti，关于与 AF 代数和交叉积相关的谱三元组的等距变换，J. Noncomm. Geom，待发表，arXiv:2301。07644 [math.OA]。[3] J. Bassi 和 L. D ąabrowski，Jiang-Su代数上的谱三元组，J. Math. Phys. 59 (2018)，053507，8页。[4] J. Bhowmick、D. Goswami、Debashish 和 A. Skalski，Adam 零维流形的量子等距群，Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011)，901–921。[5] M. Christ 和 M. A. Rieffel，作为紧量子度量空间的幂零群C*代数，Canad.Math. Bull. 60 (2017)，第77–94页，arXiv: 1508.00980。[6] E. Christensen、C. Ivan，AF C **-代数的谱三元组与 Cantor集上的度量，J. Operator Theory 56 (2006)，17–46。[7] E. Christensen、C. Ivan 和 M. Lapidus，曲线上构造的一些分形集的狄拉克算子与谱三元组，Adv. Math. 217 (2008)，42–78。[8] E. Christensen、C. Ivan 和 E. Schrohe，谱三元组与分形几何，J. Noncommut. Geom. 6 (2012)，249–274。[9] A. Connes，紧度量空间、Fredholm模与超有限性，Ergodic Theory Dynam. Sys- tems 9 (1989)，207–220。[10] R. Conti 和 C. Farsi，Kellendonk-Savinien谱三元组的等距变换与 Connes 度量，Internat. J. Math. 33 (2022)，第13号，论文编号2250084，26页。[11] R. Conti、S. Rossi，Cuntz 代数的等距群，Doc. Math. 26 (2021)，1799–1815。[12] C. Farsi、F. Latrémolière 和 J. Packer，谱邻近度下谱三元组归纳序列的收敛性，arXiv:2301.00274，预印本。[13] C. Farsi、T. Landry、N. Larsen 和 J. Packer，非交换螺旋体的谱三元组与 Wiener引理，J. Noncomm. Geom.，待发表，arXiv:2212.07470。[14] R. Floricel 和 A. Ghorbanpour，关于归纳极限谱三元组，Proc. Amer. Math. Soc. 147 (2019)，3611–3619。[15] M. Goffeng 和 B. Mesland，自然数集上的谱三元组，2016 MATRIX annals，183–201，MATRIX Book Ser.，1，Springer，Cham，2018。∅N [16] F. M. Goodman、P. de la Harpe、V. F. R. Jones，Coxeter图与代数塔，Mathematical Sciences Research Institute Publications，14。Springer-Verlag，New York，1989。[17] D. Goswami 和 J. Bhowmick，量子等距群，Infosys Science Foundation Series。Infosys Science Foundation Series in Mathematical Sciences。Springer，New Delhi，2016。[18] M. Lapidus 和 J. Sarhad，调和Sierpinski垫及其他分形集上的狄拉克算子与测地度量，J. Noncommut. Geom. 8 (2014)，947–985。[19] F. Latrémolière，谱邻近度下谱三元组的狄拉克算子的谱的连续性，Submitted (2022)，49页。[20] F. Latrémolière，度量谱三元组的 Gromov-Hausdorff 推进距离，Adv. Math. 404 (2022)，论文编号108393，56页。[21] F. Latrémolière，对偶模Gromov-Hausdorff邻近度与完备性，J. Noncommut. Geom. 15 (2021)，347–398。[22] F. Latrémolière，协变Gromov-Hausdorff邻近度，Studia Math. 251 (2020)，135–169，arXiv: 1805.11229。[23] F. Latrémolière，模Gromov-Hausdorff邻近度，Dissertationes Math. 544 (2019)，1–70，arXiv: 1608.04881。[24] F. Latrémolière，协变Gromov-Hausdorff邻近度下柯西序列的收敛性，J. Math. Anal. Appl. 469 (2019)，378–404，arXiv: 1806.04721。

[25] F. Latrémolière，三角不等式与对偶 *Gromov-Hausdorff* 近密度，Indiana Univ. Math. J. 66 (2017)，297–313，arXiv: 1404.6633。[26] F. Latrémolière，对偶 *Gromov-Hausdorff* 近密度的紧性定理，Indiana Univ. Math. J. 66 (2017)，1707–1753，arXiv: 1501.06121。[27] F. Latrémolière，量子 *Gromov-Hausdorff* 近密度，Trans. Amer. Math. Soc. 368 (2016)，365–411。[28] F. Latrémolière，具有公共定义域的量子度量的等价性，J. Math. Anal. Appl. 443 (2016)，1179–1195，arXiv: 1604.00755。[29] F. Latrémolière，对偶 *Gromov-Hausdorff* 近密度，J. Math. Pures Appl. 103 (2015)，303–351，arXiv: 1311.0104。[30] B. Long、W. Wu，扭曲约化群 C^*-代数的等距群，Internat. J. Math. 28 (2017)，1750101，28页。[31] E. Park，非交换度量空间的等距变换，Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995)，97–105。[32] E. Park，约化群 *C* 上无界 *Fredholm* 模的等距变换 *-代数，Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995)，1839–1843。[33] M. A. Rieffel，量子度量空间的 *Gromov-Hausdorff* 距离，Mem. Amer. Math. Soc. 168 (2004)，1–65，math.OA/0011063。[34] M. A. Rieffel，状态空间上的度量，Doc. Math. 4 (1999)，559–600。[35]M. A. Rieffel，来自紧群作用的状态上的度量，Doc. Math. 3 (1998)，215–229，math.OA/9807084。

数学系，罗马第二大学，00133 罗马，意大利。电子邮箱：bssjcp01@uniroma2.it SBAI 系，Sapienza大学，00161 罗马，意大利。电子邮箱：roberto.conti@sbai.uniroma1.it 数学系，科罗拉多大学博尔德分校，博尔德，CO 80309-0395，美国 电子邮箱：carla.farsi@colorado.edu 数学系，丹佛大学，丹佛，CO 80208 电子邮箱：frederic@math.du.edu 网址：http://www.math.du.edu/~frederic