arXiv:2302.09121v1 [math.AC] 17 Feb 2023

# 具有固定 Frobenius 数的数值半群余簇

M. A. Moreno-Fr´ıas * J. C. Rosales †

摘要

记 m($S$) 为数值半群 $S$ 的重数。余簇 *co-variety* 是一个非空的数值半群族 $\mathscr{C}$，满足以下条件：存在 $\mathscr{C}$ 的最小元，$\mathscr{C}$ 中两个元素的交仍是 $\mathscr{C}$ 中的一个元素，并且对于所有满足 $S \neq \min(\mathscr{C})$ 的 $S \in \mathscr{C}$，都有 $S\backslash\{\mathrm{m}(S)\} \in \mathscr{C}$。在本文中，我们描述了一种算法过程，用于计算 $\mathscr{C}$. 的所有元素。我们证明，包含一组正整数的 $\mathscr{C}$ 存在最小元。我们表明，$\mathscr{A}(F) = \{S \mid S$ 是一个 Frobenius 数为 $F\}$ 的数值半群，是一个余簇，并将前述结果具体应用于该余簇。最后，我们将看到，包含有限个数值半群的余簇存在最小元。

*Keywords:* 数值半群、余簇、Frobenius 数、亏格、秩、重数、算法。

*MSC-class:* 20M14, 11D07

## 1 引言

令 $\mathbb{Z}$ 为整数集，且 $\mathbb{N} = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq 0\}$。$(\mathbb{N}, +)$ 的子幺半群是 $\mathbb{N}$ 的一个子集，该子集在加法下封闭并包含元素 0。数值半群是 $(\mathbb{N}, +)$ 的一个子幺半群 $S$，满足 $\mathbb{N}\backslash S = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin S\}$ 具有有限个元素。

若 $S$ 是一个数值半群，则 $\mathrm{m}(S) = \min(S\backslash\{0\})$，$\mathrm{F}(S) = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \notin S\}$，以及 $\mathrm{g}(S) = \sharp(\mathbb{N}\backslash S)$（其中 $\sharp X$ 表示集合 $X$的基数）是 $S$ 的三个重要不变量，我们分别称它们为 $S$的重数、Frobenius 数和亏格。

如果 $A$ 是 $\mathbb{N}$的非空子集，我们记由 $A$生成的 $(\mathbb{N}, +)$ 的子幺半群为 $\langle A\rangle$，即 $\langle A\rangle = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \mid n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$ 和 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subseteq \mathbb{N}\}$. 在 [13, 引理 2.1]）中证明了，当且仅当 $\gcd(A) = 1$.时，$\langle A\rangle$ 是一个数值半群

如果 $M$ 是 $(\mathbb{N}, +)$ 的子幺半群且 $M = \langle A\rangle$，那么我们称 $A$ 是 $M$ 的生成元系统。此外，如果对于所有 $B \subsetneq A$ 都有 $M \neq \langle B\rangle$，那么我们将称其为

*数学系，理学院，格拉斯大学，E-11510，皇家港（加的斯，西班牙）。部分获得安达卢西亚自治区 FQM-298 小组和 ProyExcel-00868 的资助。电子邮箱：mariangeles.moreno@uca.es。

†代数系，理学院，格拉纳达大学，E-18071，格拉纳达（西班牙）。部分获得安达卢西亚自治区 FQM-343 小组和 ProyExcel-00868 的资助。电子邮箱：jrosales@ugr.es。

$A$ 是 $M$ 的极小生成元系。在 [13, 推论 2.8] 中证明了，$(\mathbb{N}, +)$ 的每个子幺半群都有唯一的极小生成元系，而且该生成元系还是有限的。我们用 msg($M$) 表示 $M$ 的极小生成元系。msg($M$) 的基数称为 $M$ 的嵌入维数，并记作 e($M$)。

弗罗贝尼乌斯问题（见 [9]）旨在根据数值半群的极小生成元系，寻找计算其 Frobenius 数和亏格的公式。对于嵌入维数为 2 的数值半群，该问题已在 [15] 得到解决。如今，对于嵌入维数大于或等于 3 的数值半群，这一问题仍未解决。此外，在这种情况下，计算一般数值半群的 Frobenius 数的问题变成了 NP-困难问题。

如果 $F \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$，那么我们考虑集合 $\mathscr{A}(F) = \{S \mid S$ 是一个数值半群，并且 F($S$) $= F\}$.。对集合 $\mathscr{A}(F)$ 的研究正是本文工作的起源和动机。

将 $\mathscr{A}(F)$ 推广为满足某些性质的数值半群族，引出了以下定义。余簇是一个非空的数值半群族 $\mathscr{C}$，满足以下条件：

1) $\mathscr{C}$有一个最小元，即 $\Delta(\mathscr{C}) = \min(\mathscr{C})$（关于集合包含关系）。

2) 如果 $\{S, T\} \subseteq \mathscr{C}$，那么 $S \cap T \in \mathscr{C}$。

3) 如果 $S \in \mathscr{C}$ 且 $S \neq \Delta(\mathscr{C})$，那么 $S\backslash\{\mathrm{m}(S)\} \in \mathscr{C}$。

$\mathscr{C}$ 的元素称为 $\mathscr{C}$-半群。

在第2节中，我们将看到，每个余簇都是有限的，并且可以对其元素进行排序，使之构成一棵树。此外，我们还将给出这棵树中任意顶点的子节点的刻画。利用这一事实，在第3节中，我们将给出一个相当高效的算法，用于计算 $\mathscr{A}(F)$的所有元素。

如果 $\mathscr{C}$是一个余簇，那么它有有限个极大元 $S_1$，.....，$S_n$。$\mathscr{C}$-集是 $S_i\backslash\Delta(\mathscr{C})$的子集，其中 $i \in \{1, \ldots, n\}$. 在第4节中，我们将证明，如果 $A$ 是一个 $\mathscr{C}$-集，那么 $\mathscr{C}$中存在包含 $A$. 的最小元。该元素记为 $\mathscr{C}(A)$，并称为由 $A$. 生成的$\mathscr{C}$-半群。

如果 $S = \mathscr{C}(A)$，那么我们称 $A$ 是 $\mathscr{C}$ 的生成元系统；此外，如果对于所有 $B \subsetneq A$ 都有 $S \neq \mathscr{C}(B)$，那么我们称 $A$ 是 $\mathscr{C}$ 的极小生成元系统。在第 4 节中，我们将给出一个余簇的例子，其中 $\mathscr{C}$ 的极小生成元系统并不唯一。此外，我们还将在本节证明，每个 $\mathscr{A}(F)$-半群都具有唯一的 $\mathscr{A}(F)$-极小生成元系统。

在第5节中，我们将讨论包含一个数值半群有限族的最小余簇，并给出计算它的算法过程。

如果 $\mathscr{C}$ 是一个余簇，且 $S$ 是一个 $\mathscr{C}$-半群，那么 $\mathscr{C}$ 的 $\mathscr{C}$-秩为 $\mathscr{C}$rank($S$) =min $\{\sharp A \mid A$ 是一个 $\mathscr{C}$-集合，并且 $\mathscr{C}(A) = S\}$.。在第6节中，我们将看到 $\mathscr{C}$rank($S$) $\leq$e($S$)，且当且仅当 $S = \Delta(\mathscr{C})$ 时，$\mathscr{C}$rank($S$) $= 0$。

在第6节中，我们还将看到，如果 $S \in \mathscr{A}(F)$，那么 $\mathscr{A}(F)$秩($S$) $\leq$m($S$) $- 1$. 我们将研究满足 $\mathscr{A}(F)$ 秩 ($S$) $\in\{1,$m($S$) $- 1\}$ 的 $\mathscr{A}(F)$- 数值半群 $S$，并将找到计算这类数值半群亏格的公式，该公式取决于其 $\mathscr{A}(F)$-极小生成元系。

## 2 与余簇相关的树

如果 $T$ 是一个数值半群，那么 $\mathbb{N}\backslash T$ 是一个有限集，因此我们有如下结果。

引理 2.1. 若 $T$ 是一个数值半群，则集合

$$\{S \mid S \text{ is numerical semigroup and } T \subseteq S\}$$

是有限的。

命题 2.2. 每个余簇都具有有限基数。

证明. 若 $\mathscr{C}$ 是一个余簇，则 $\mathscr{C} \subseteq \{S \mid S$ 是一个数值半群，并且 $\Delta(\mathscr{C}) \subseteq S\}$. 根据引理 2.1，我们知道 $\{S \mid S$ 是一个数值半群，且 $\Delta(\mathscr{C}) \subseteq S\}$ 是一个有限集。因此，$\mathscr{C}$ 是有限的。 □

下面的结果是众所周知的，并且很容易证明。

引理 2.3. 设 $S$ 和 $T$ 为数值半群，且 $x \in S$. 则

1. $S \cap T$ 也是数值半群，并且 $\mathrm{F}(S \cap T) = \max\{\mathrm{F}(S), \mathrm{F}(T)\}$. 2. $S\backslash\{x\}$ 是数值半群，当且仅当 $x \in \mathrm{msg}(S)$。3. $\mathrm{m}(S) = \min(\mathrm{msg}(S))$。

作为该引理的推论，我们得到以下结果。

命题 2.4. 如果 $F \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$，则 $\mathscr{A}(F)$ 是一个余簇。此外，

$$\Delta(\mathscr{A}(F)) = \{0, F+1, \rightarrow\},$$

其中，符号 $\rightarrow$ 表示每个大于 $F+1$ 的整数都属于该集合。

图 $G$ 是一对 $(V, E)$，其中 $V$ 是一个非空集合，而 $E$ 是 $\{(u, v) \in V \times V \mid u \neq v\}$ 的子集。$V$ 和 $E$ 的元素分别称为顶点和边。连接 $G$ 中的顶点 $x$ 和 $y$ 的路径（长度为 $n$）是形如 $(v_0, v_1)$、$(v_1, v_2)$.....、$(v_{n-1}, v_n)$ 的不同边序列，并满足 $v_0 = x$ 和 $v_n = y$。

如果存在一个顶点 $r$ （称为 $G$ 的根），使得对于 $G$ 中任意其他顶点 $x$，都存在一条连接 $x$ 和 $r$ 的唯一路径，那么图 $G$ 就是一棵树。如果 $(u, v)$ 是树 $G$ 的一条边，我们称 $u$ 是 $v$ 的子节点。

设 $\mathscr{C}$ 是一个余簇，并令 $S \in \mathscr{C}$. 。递归地定义以下 $\mathscr{C}$-半群序列：

- $S_0 = S$,
- $S_{n+1} = \begin{cases} S_n\backslash\{\mathrm{m}(S_n)\} & \text{如果 } S_n \neq \Delta(\mathscr{C}) \\ \mathscr{C} & \end{cases}$

$\Delta$ $0$，否则。

以下结果的证明是显然的。

引理 2.5. 如果 $\mathscr{C}$ 是一个余簇，$S \in \mathscr{C}$ 且 $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是上述定义的半群序列，那么存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $\Delta(\mathscr{C}) = S_k \subsetneq S_{k-1} \subsetneq \cdots \subsetneq S_0 = S$. 此外，$S_i\backslash S_{i+1}$ 的基数对每个 $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ 都等于 1

如果 $\mathscr{C}$ 是一个余簇，我们按以下方式定义图 G($\mathscr{C}$)：

• G($\mathscr{C}$) 的顶点集合为 $\mathscr{C}$，

• $(S,T) \in \mathscr{C} \times \mathscr{C}$ 是 G($\mathscr{C}$) 的一条边，当且仅当 $T = S\backslash\{\mathrm{m}(S)\}$.

作为引理 2.5 的推论，我们得到以下结果。

命题 2.6. 若 $\mathscr{C}$ 是一个余簇，则 G($\mathscr{C}$) 是一棵以 $\Delta(\mathscr{C})$ 为根的树。

一棵树可以从根开始递归构造，并通过一条边将已经构造的顶点与它们的子节点连接起来。因此，刻画树中任意顶点的子节点是非常有意义的。

沿用 [11], 中引入的术语， $z$ 一个整数 $z$ 是 $S$ 的伪弗罗贝尼乌斯数，如果 $z \notin S$ 且对于所有 $s \in S\backslash\{0\}$. 都有 $z + s \in S$ 。我们用 PF($S$) 表示 $S$. 的伪弗罗贝尼乌斯数集合。PF($S$) 的基数是 $S$ 的一个重要不变量（见 [7] 和 [3]），称为 $S$ 的型，记为 t($S$)。

以下结果是 [13] 中的推论 2.23。

引理 2.7。如果 $S$ 是一个数值半群且 $S \neq \mathbb{N}$，那么 $\mathrm{t}(S) \leq \mathrm{m}(S) - 1$.

给定一个数值半群 $S$，记 $\mathrm{SG}(S) = \{x \in \mathrm{PF}(S) \mid 2x \in S\}$.SG($S$) 的元素称为 $S$. 的特殊间隙。以下结果是 [13] 中的命题 4.33。

引理 2.8。设 $S$ 是一个数值半群且 $x \in \mathbb{N}\backslash S.$ ，则 $x \in \mathrm{SG}(S)$ 当且仅当 $S \cup \{x\}$ 是一个数值半群。

命题 2.9。如果 $\mathscr{C}$ 是一个余簇且 $S \in \mathscr{C}$，那么树 G($\mathscr{C}$) 中由 $S$ 的子节点构成的集合为 $\{S \cup \{x\} \mid x \in \mathrm{SG}(S)\ x < \mathrm{m}(S)$，且 $S \cup \{x\} \in \mathscr{C}\}$.

证明。如果 $T$ 是 $S$ 的子节点，那么 $T \in \mathscr{C}$ 和 $T\backslash\{\mathrm{m}(T)\} = S.$ 因此， $S \cup \{\mathrm{m}(T)\} = T \in \mathscr{C}$， $\mathrm{m}(T) \in \mathrm{SG}(S)$ 且 $\mathrm{m}(T) < \mathrm{m}(S)$。

如果 $x < \mathrm{m}(S)$，那么 $\mathrm{m}(S \cup \{x\}) = x.$ 因此， $S \cup \{x\} \in \mathscr{C}$ 且 $(S \cup \{x\}) \backslash \{\mathrm{m}(S \cup \{x\})\} = S.$ consequently， $S \cup \{x\}$ 是树 G($\mathscr{C}$) 中 $S$ 的子节点。 □

# 3 计算 $\mathscr{A}(F)$ 的算法

设 $S$ 为一个数值半群，且 $n \in S\backslash\{0\}$。 $S$ 中 $n$ 的 Ap´ery 集（为纪念 [2] 而得名）为 $\mathrm{Ap}(S,n) = \{s \in S \mid s - n \notin S\}$。

以下结果由 [13, 引理 2.4] 推导得出。

引理 3.1. 如果 $S$ 是一个数值半群且 $n \in S\backslash\{0\}$，那么 Ap($S,n$)是一个基数为 $n.$ 的集合。此外，$\mathrm{Ap}(S,n) = \{0 = w(0)\ w(1) \ldots, w(n-1)\}$，其中 $w(i)$是 $S$ 中模 $n$与 $i$ 同余的最小元素，对所有 $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

如果 $S$ 是一个数值半群，那么我们在 $\mathbb{Z}$ 上定义如下序关系： $a \leq_S b$ 当且仅当 $b - a \in S.$。以下结果是 [11, 引理 10]。

引理 3.2. 如果 $S$ 是一个数值半群且 $n \in S \setminus \{0\}$. 那么

$$\mathrm{PF}(S) = \{w - n \mid w \in \mathrm{Maximals}_{\leq_S} \mathrm{Ap}(S,n)\}.$$

下面的结果可以直接证明。

引理 3.3. 设 $S$ 为一个数值半群，$n \in S\backslash\{0\}$ 和 $w \in \mathrm{Ap}(S,n)$。则 $w \in \mathrm{Maximals}_{\leq_s}(\mathrm{Ap}(S,n))$ 当且仅当 $w + w' \notin \mathrm{Ap}(S,n)$ 对所有$w' \in \mathrm{Ap}(S,n)\backslash\{0\}$.

下面的结果有一个简单的证明。

引理 3.4. 如果 $S$ 是一个数值半群且 $S \neq \mathbb{N}$，则

$$\mathrm{SG}(S) = \{x \in \mathrm{PF}(S) \mid 2x \notin \mathrm{PF}(S)\}.$$

注释 3.5. 注意，如果 $S$ 是一个数值半群，并且对于某个 $n \in S\backslash\{0\}$我们知道 $\mathrm{Ap}(S,n)$，那么根据引理 3.2、3.3 和 3.4，我们可以很容易地计算出 $\mathrm{SG}(S)$。

我们将通过一个例子说明上述注释的内容。

例 3.6. 设 $S = \{0,5,\rightarrow\}$. 则 $\mathrm{Ap}(S,5) = \{0,6,7,8,9\}$. 通过应用引理 3.3，我们有 $\mathrm{Maximals}_{\leq_s}\mathrm{Ap}(S,5) = \{6,7,8,9\}$. 于是引理 3.2 断言 $\mathrm{PF}(S) = \{1,2,3,4\}$. 最后，利用引理 3.4，我们得到 $\mathrm{SG}(S) = \{3,4\}$.

以下结果易于证明。

引理 3.7. 设 $S$ 为一个数值半群，$n \in S\backslash\{0\}$ 和 $x \in \mathrm{SG}(S)$。则 $x + n \in \mathrm{Ap}(S,n)$。此外，$\mathrm{Ap}(S \cup \{x\},n) = (\mathrm{Ap}(S,n)\backslash\{x+n\}) \cup \{x\}$.

注释 3.8. 注意，由引理 3.7 可知，如果我们知道 $\mathrm{Ap}(S,n)$，那么就可以很容易地计算 $\mathrm{Ap}(S \cup \{x\},n)$。特别地，如果 $\mathscr{C}$ 是一个余簇且 $S \in \mathscr{C}$，那么根据引理 3.7，可以从 $\mathrm{Ap}(S,n)$ 计算集合 $\mathrm{Ap}(T,n)$，其中 $T$ 是树 $\mathrm{G}(\mathscr{C})$ 中 $S$ 的任意子节点（见命题 2.9）。

下面我们通过一个例子来说明这一注释。

例 3.9. 我们再次取数值半群 $S = \{0,5,\rightarrow\}$，其 $\mathrm{Ap}(S,5) = \{0,6,7,8,9\}$.。根据例 3.6，我们知道 $3 \in \mathrm{SG}(S)$。如果 $T = S \cup \{3\}$，那么引理 3.7 断言，$\mathrm{Ap}(T,5) = (\{0,6,7,8,9\}\backslash\{3+5\}) \cup \{3\} = \{0,3,6,7,9\}$.

作为命题 2.4 和 2.9 的推论，我们得到以下结果。

命题 3.10。设 $F \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ 和 $S \in \mathscr{A}(F)$。那么，在树 $\mathrm{G}(\mathscr{A}(F))$ 中，由 $S$ 的子节点构成的集合为 $\{S \cup \{x\} \mid x \in \mathrm{SG}(S)\ x < \mathrm{m}(S)$ 和 $x \neq F\}$.

现在我们可以给出本节标题所指的算法。

算法 3.11 中的伪代码展示了如何对任意正整数 $F$. 计算 $\mathscr{A}(F)$

算法 3.11。

INPUT：正整数 $F$.
OUTPUT：$\mathscr{A}(F)$。

(1) $\mathscr{A}(F) = \{\Delta(\mathscr{A}(F))\}$, $B = \{\Delta(\mathscr{A}(F))\}$ and $\mathrm{Ap}(\Delta(\mathscr{A}(F)), F+1) = \{0, F+2, \ldots, 2F+1\}$.

（2）对于每个 $S \in B$，利用注释 3.5，计算

$$\theta(S) = \{x \in \mathrm{SG}(S) \mid x < \mathrm{m}(S) \text{ and } x \neq F\}.$$

(3) 如果 $\bigcup_{S\in B} \theta(S) = \emptyset$，则返回 $\mathscr{A}(F)$。(4) $C = \bigcup_{S\in B} \{S \cup \{x\} \mid x \in \theta(S)\}$. (5) $\mathscr{A}(F) = \mathscr{A}(F) \cup C$，$B = C$，利用注释 3.8，计算所有 $S \in C$ 的 $\mathrm{Ap}(S, F+1)$，并转到步骤 (2)。

在下面的示例中，我们说明算法 3.11 的用法。

示例 3.12。我们将计算 $\mathscr{A}(5)$。为简化记号，我们将用 $\Delta$ 表示 $\Delta(\mathscr{A}(5))$。

- $\mathscr{A}(5) = \{\Delta = \{0, 6, \rightarrow\}\}$、$B = \{\Delta\}$ 和 $\mathrm{Ap}(\Delta, 6) = \{0, 7, 8, 9, 10, 11\}$.
- $\theta(\Delta) = \{3, 4\}$ 和 $C = \{\Delta \cup \{3\}, \Delta \cup \{4\}\}$.
- $\mathscr{A}(5) = \{\Delta, \Delta \cup \{3\}, \Delta \cup \{4\}\}$, $B = \{\Delta \cup \{3\}, \Delta \cup \{4\}\}$, $\mathrm{Ap}(\Delta \cup \{3\}, 6) = \{0, 3, 7, 8, 10, 11\}$ 以及 $\mathrm{Ap}(\Delta \cup \{4\}, 6) = \{0, 4, 7, 8, 9, 11\}$.
- $\theta(\Delta \cup \{3\}) = \emptyset$, $\theta(\Delta \cup \{4\}) = \{2, 3\}$ 和 $C = \{\Delta \cup \{2, 4\}, \Delta \cup \{3, 4\}\}$.
- $\mathscr{A}(5) = \{\Delta, \Delta \cup \{3\}, \Delta \cup \{4\}, \Delta \cup \{2, 4\}, \Delta \cup \{3, 4\}\}$, $B = \{\Delta \cup \{2, 4\}, \Delta \cup \{3, 4\}\}$, $\mathrm{Ap}(\Delta \cup \{2, 4\}, 6) = \{0, 2, 4, 7, 9, 11\}$ 以及 $\mathrm{Ap}(\Delta \cup \{3, 4\}, 6) = \{0, 3, 4, 7, 8, 11\}$.
- $\theta(\Delta \cup \{2, 4\}) = \emptyset$ 和 $\theta(\Delta \cup \{3, 4\}) = \emptyset$. 因此算法返回 $\mathscr{A}(5) = \{\Delta, \Delta \cup \{3\}, \Delta \cup \{4\}, \Delta \cup \{2, 4\}, \Delta \cup \{3, 4\}\}$.

# 4 包含一个 $\mathscr{C}$-集的最小 $\mathscr{C}$-半群

在本节中，$\mathscr{C}$表示一个余簇，而 $\{M_1, \ldots, M_n\}$ 是由 $\mathscr{C}$中关于集合包含的极大元构成的集合。回顾一下，$\mathscr{C}$-集是 $M_i \backslash \Delta(\mathscr{C})$的一个子集，其中 $i \in \{1, \ldots, n\}$.

若 $A$ 是一个 $\mathscr{C}$-集，则我们用 $\mathscr{C}(A)$表示所有包含 $A$. 的 $\mathscr{C}$-半群的交。由于 $\mathscr{C}$ 是有限的，因此 $\mathscr{C}$-半群的交也是一个 $\mathscr{C}$-半群。于是，我们可以给出以下结果。

命题 4.1。如果 $A$ 是一个 $\mathscr{C}$-集，那么 $\mathscr{C}(A)$ 是包含 $A$. 的最小（关于集合包含关系的） $\mathscr{C}$-半群

命题 4.2。如果 $S \in \mathscr{C}$，那么 $A = \{x \in \mathrm{msg}(S) \mid x \notin \Delta(\mathscr{C})\}$ 是一个 $\mathscr{C}$-集，并且 $\mathscr{C}(A) = S$.

证明。显然，$A$ 是一个 $\mathscr{C}$-集。由于 $S \in \mathscr{C}$ 且 $A \subseteq S$，因此 $\mathscr{C}(A) \subseteq S$. 如果 $T \in \mathscr{C}$ 且 $A \subseteq T$，那么 $A \cup \Delta(\mathscr{C}) \subseteq T$. 因此，$\mathrm{msg}(S) \subseteq T$，从而$S \subseteq T$. 所以 $S \subseteq \mathscr{C}(A)$。我们得出 $S = \mathscr{C}(A)$。 □

作为命题 4.2 的推论，我们得到以下结果。

推论 4.3。在沿用上述记号的情况下，$\mathscr{C} = \{\mathscr{C}(A) \mid A$ 是一个 $\mathscr{C}$-集$\}$.

若 $A$ 是一个 $\mathscr{C}$-集且 $S = \mathscr{C}(A)$，则称 $A$ 为 $S$. 的 $\mathscr{C}$-生成元系统。进一步，如果对所有 $B \subsetneq A$都有 $S \neq \mathscr{C}(B)$，则称 $A$ 是 $S$.的 $\mathscr{C}$-极小生成元系。

一般而言，$\mathscr{C}$-极小生成元系并不唯一，下面的例子将说明这一点。

例4.4. 设 $\mathscr{C} = \{S \mid S$ 是一个数值半群，$\mathrm{m}(S) \geq 6$ 且 $\mathrm{F}(S) \leq 11\} \cup \{S_1 = \{0, 5, 6, 7, 10, \to\}, S_2 = \{0, 5, 8, 9, 10, \to\}, S_3 = \{0, 5, 10, \to\}\}$.

显然，$\Delta(\mathscr{C}) = \{0, 12, \to\}$ 是 $\mathscr{C}$.的最小元。

- 我们可以直接看出，$\mathscr{C}$ 中两个元素的交仍是 $\mathscr{C}$.中的一个元素
- 显然，如果 $S \in \mathscr{C}$ 且 $S \neq \Delta(\mathscr{C})$，那么 $S\backslash\{\mathrm{m}(S)\} \in \mathscr{C}$.
- 由前面三个结论可知，$\mathscr{C}$ 是一个协变体。
- 容易验证，$\mathscr{C}(\{5, 6\}) = \mathscr{C}(\{5, 7\}) = S_1$, $\mathscr{C}(\{5\}) = S_3$,$\mathscr{C}(\{6\}) = \{0, 6, 12, \to\})$ $\mathscr{C}(\{7\}) = \{0, 7, 12, \to\})$ 以及 $\mathscr{C}(\{\emptyset\}) = \{0, 12, \to\}$.

因此，集合 $\{5, 6\}$ 和 $\{5, 7\}$ 是 $S_1$的 $\mathscr{C}$-极小生成元系

最后请注意，上述例子还表明，一般来说，集合$\{x \in \mathrm{msg}(S) \mid x \notin \Delta(\mathscr{C})\}$ 不是 $S$. 的极小生成元系。事实上，$\{x \in \mathrm{msg}(S_1) \mid x \notin \{0, 12, \to\}\} = \{5, 6, 7\}$ 且 $\mathscr{C}(\{5, 7\}) = S_1$.

本节接下来的目标是证明，每个 $\mathscr{A}(F)$-半群都存在唯一的 $\mathscr{A}(F)$-极小生成元系。

命题 4.5。如果 $F \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ 且 $S \in \mathscr{A}(F)$，那么集合 $A = \{x \in \mathrm{msg}(S) \mid x \notin \Delta(\mathscr{A}(F))\}$ 是 $S$.唯一的 $\mathscr{A}(F)$-极小生成元系

证明。根据命题 4.2，我们知道 $A$ 是一个 $\mathscr{A}(F)$-集，并且 $\mathscr{A}(F)(A) = S$.。为了完成证明，我们将证明：如果 $B$ 是一个 $\mathscr{A}(F)$-集且 $\mathscr{A}(F)(B) = S$，那么 $A \subseteq B$.。事实上，如果 $x \in A\backslash B$，那么 $S\backslash\{x\}$ 是一个 $\mathscr{A}(F)$-半群，并且$B \subseteq S\backslash\{x\}$.。因此，$\mathscr{A}(F)(B) \subseteq S\backslash\{x\}$，这不可能。 □

我们以刻画余簇$\mathscr{A}(F)$的极大元来结束本节。

如果一个数值半群不能表示为两个严格包含它的数值半群的交集，则称其为不可约。这个概念在 [12] 中被引入，该文也证明了以下结果。

命题 4.6. 设 $S$ 为一个数值半群。则 $S$ 不可约，当且仅当 $S$ 是 $\mathscr{A}(\mathrm{F}(S))$中的一个极大元。

不可约数值半群备受关注，因为由 [3]和 [7], 可以推得，数值半群 $S$ 不可约，当且仅当 $S$ 是对称或伪对称数值半群。这类半群在文献中得到了广泛研究，因为一维局部整环解析不可约，当且仅当其为 Gorenstein（分别为

Kunz）当且仅当其值半群是对称的（分别是伪对称的），参见 [8] 和 [3]。最后，我们要提到， [5] 中给出了一种算法，用于计算所有 Frobenius 数固定的不可约数值半群。这些结果在 [4] 中被用于给出一种算法，以计算 $\mathscr{A}$（$F$）的所有元素。

# 5 由有限族数值半群生成的余簇

一般而言，余簇的交并不是余簇。事实上，如果 $S$ 和 $T$ 是满足 $S \neq T$ 的数值半群，那么 $\mathscr{C}_1 = \{S\}$ 和 $\mathscr{C}_1 = \{T\}$ 是余簇，而 $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \emptyset$ 不是余簇。

下面的结果可直接证明。

引理 5.1. 设 $\{\mathscr{C}_i\}_{i\in I}$ 是余簇族，使得对所有 $i \in I$ 都有 $\Delta(\mathscr{C}_i) = \Delta$，则 $\bigcap_{i\in I} \mathscr{C}_i$ 是一个余簇，且 $\Delta$ 是其最小元素。

若 $F \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$，则记

$$\mathscr{B}(F) = \{S \mid S \text{ is a numerical semigroup and } \mathrm{F}(S) \leq F\}.$$

下面的结果显然易证。

引理 5.2. 若 $F \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$，则 $\mathscr{B}(F)$是一个余簇，其最小元是$\Delta(\mathscr{B}(F))$ $= \{0, F+1, \to\}$.

下面的结果可直接证明。

引理 5.3. 若 $S_1$，...，$S_n$ 是数值半群，且 $F = \max\{\mathrm{F}(S_1)$ ...，$\mathrm{F}(S_n)\}$，则 $\{S_1, \ldots, S_n\} \subseteq \mathscr{B}(F)$。

若 $\{S_1, \ldots, S_n\}$ 是有限个数值半群组成的集合，且 $F = \max\{\mathrm{F}(S_1)$ ...，$\mathrm{F}(S_n)\}$，则我们将包含 $\{S_1, \ldots, S_n\}$ 且以 $\{0, F+1, \to\}$ 为最小元的所有余簇的交记为 $\langle\{S_1, \ldots, S_n\}\rangle$。

由引理 5.1、5.2 和 5.3，可得以下结果。

命题 5.4。如果 $S_1$、.....、$S_n$ 是数值半群，那么 $\langle\{S_1, \ldots, S_n\}\rangle$ 是包含 $\{S_1, \ldots, S_n\}$ 且以 $\{0, F+1, \to\}$ 为最小元的最小余簇（关于集合包含）。

余簇 $\langle\{S_1, \ldots, S_n\}\rangle$ 称为由 $\{S_1, \ldots, S_n\}$. 生成的余簇。我们的主要目标是给出一个算法过程，以从 $\{S_1, \ldots, S_n\}$. 计算出 $\langle\{S_1, \ldots, S_n\}\rangle$ 的所有元素。

对于所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$，我们递归地定义以下序列：

- $S_i^0 = S_i$,
- $S_i^{n+1} = \begin{cases} S_i^n \backslash \{\mathrm{m}(S_i^n)\} & \text{if } S_i^n \neq \{0, F+1, \to\}, \\ \{0, F+1, \to\} & \text{otherwise.} \end{cases}$

以下结果的证明是直接的。

引理 5.5. 对于每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，存在 $P_i = \min\{k \in \mathbb{N} \mid S_i^k = \{0, F+1, \to\}\}$.

对于所有 $i \in \{1,\dots,n\}$，我们将 Cad($S_i$) 记为 $= \{S_i^0,\dots,S_i^{P_i}\}$. 注意 $\{0, F+1, \to\} = S_i^{P_i} \subsetneq S_i^{P_i-1} \subsetneq \cdots \subsetneq S_i^0 = S_i$ 以及 $\sharp(S_i^k \backslash S_i^{k+1}) = 1$ 对每个 $k \in \{0,\dots,P_i-1\}$.

以下命题给出了我们此前宣布的结果。

命题 5.6. 如果 $S_1$、.....、$S_n$ 是数值半群，那么对于所有 $b \in B\}_{b\in B}$，有 $\langle\{S_1,\dots,S_n\}\rangle = \{\bigcap T_b \mid \emptyset \neq B \subseteq \{1,\dots,n\}$ 且 $T_b \in$ Cad($S_b$)

证明。要证明该命题，只需说明对于所有 $b \in B\}$， $\mathscr{C} = \{\bigcap_{b\in B} T_b \mid \emptyset \neq B \subseteq \{1,\dots,n\}$ 且 $T_b \in$ Cad($S_b$) 是一个余簇。

- 我们可以看到， $\{0, F+1, \to\}$ 是 $\mathscr{C}$. 的最小元
- 显然，Cad($S_i$) 中两个元素的交仍然是 Cad($S_i$) 的一个元素。

- 由前一个集合可知，我们很容易得到， $\mathscr{C}$ 中两个元素的交仍然是 $\mathscr{C}$. 的一个元素
- 现在，我们将看到，如果 $T \in \mathscr{C}$ 且 $T \neq \{0, F+1, \to\}$，那么 $T\backslash\{$m($T$)$\} \in \mathscr{C}$.事实上，如果 $T \in \mathscr{C}$，则存在 $\emptyset \neq B \subseteq \{1,\dots,n\}$，并且对于所有满足 $b \in B$ 的 $T_b \in$ Cad($S_b$)，都有 $T = \bigcap_{b\in B} T_b$. 由于 m($T$) $\in T$，因此对于所有 $b \in B.$，均有 m($T$) $\in S_b$ 对于每个 $b \in B$，记 $T_b' = \{x \in T_b \mid x >$ m($T$)$\} \cup \{0\}$. 显然，对于所有 $b \in B$， $T_b' \in$ Cad($S_b$)，且 $T\backslash\{$m($T$)$\} = \bigcap_{b\in B} T_b'$. 因此， $T\backslash\{$m($T$)$\} \in \mathscr{C}$.

- 作为前述各点的推论，我们得到 $\mathscr{C}$ 是一个余簇。

□

以下结果是命题 5.6 的直接推论。

推论 5.7. 如果 $S$ 是一个数值半群，那么 $\langle\{S\}\rangle =$ Cad($S$)。

我们通过给出一个阐释命题 5.6 内容的例子来结束本节。

例 5.8. 设 $S_1 = \langle 5,7,9\rangle = \{0,5,7,9,10,12,14,\to\}$ 和 $S_2 = \langle 4,6,9\rangle = \{0,4,6,8,9,10,12,\to\}$. 那么 $13 =$ max{F($S_1$) $= 13$,F($S_2$) $= 11\}$, Cad($S_1$) $= \{S_1, S_1\backslash\{5\}, S_1\backslash\{5,7\}, S_1\backslash\{5,7,9\}, S_1\backslash\{5,7,9,10\}, S_1\backslash\{5,7,9,10,12\}\}$ 且 Cad($S_2$) $= \{S_2, S_2\backslash\{4\}, S_2\backslash\{4,6\}, S_2\backslash\{4,6,8\}, S_2\backslash\{4,6,8,9\}, S_2\backslash\{4,6,8,9,10\}, \{S_2\backslash\{4,6,8,9,10,12\}, S_2\backslash\{4,6,8,9,10,12,13\}\}$.

应用命题 5.6，我们得到 $\langle\{S_1,S_2\}\rangle =$ Cad($S_1$)$\cup$Cad($S_2$)$\cup\{T_1 \cap T_2 \mid T_1 \in$ Cad($S_1$) 以及 $T_2 \in$ Cad($S_2$)$\}$.

# 6 $\mathscr{C}$-半群的 $\mathscr{C}$-秩

如果 $\mathscr{C}$ 是一个协变簇，并且 $S$ 是一个 $\mathscr{C}$-半群，那么 $S$ 的 $\mathscr{C}$-秩为 $\mathscr{C}_{\mathrm{rank}}(S) =$ min$\{\sharp A \mid A$ 是一个 $\mathscr{C}$-集合，并且 $\mathscr{C}(A) = S\}$.

作为命题 4.2 的推论，我们有以下结果。

命题 6.1. 如果 $\mathscr{C}$ 是一个余簇，且 $S$ 是一个 $\mathscr{C}$-半群，那么 $\mathscr{C}_{\mathrm{rank}}(S) \leq$ e($S$)。

以下结果可直接证明。

命题 6.2. 设 $\mathscr{C}$ 是一个余簇，且 $S \in \mathscr{C}$.。那么 $\mathscr{C}_{\mathrm{rank}}(S) = 0$ 当且仅当 $S = \Delta(\mathscr{C})$。

引理 6.3. 设 $\mathscr{C}$ 是一个余簇，且 $S \in \mathscr{C}$ 满足 $S \neq \Delta(\mathscr{C})$。若 $A$ 是一个 $\mathscr{C}$-集，且 $\mathscr{C}(A) = S$，则 $\mathsf{m}(S) \in A$.

证明。若 $\mathsf{m}(S) \notin A$，则 $S\backslash\{\mathsf{m}(S)\}$ 是一个包含 $A$. 的 $\mathscr{C}$-半群。因此，$\mathscr{C}(A) \subseteq S\backslash\{\mathsf{m}(S)\}$，这显然矛盾。 □

命题 6.4. 设 $\mathscr{C}$ 是一个余簇，且 $S \in \mathscr{C}$ 满足 $S \neq \Delta(\mathscr{C})$。那么以下条件等价。

1. $\mathscr{C}_{\mathrm{rank}}(S) = 1$. 2. 存在 $a \in S$ 使得 $S = \mathscr{C}(\{a\})$。 3. $S = \mathscr{C}(\{\mathsf{m}(S)\})$。

证明。1) 推出 2)。显然。
2) 推出 3)。这是引理 6.3 的推论。3) 推出 1)。这由命题 6.2 得出。 □

由命题 4.5，我们得到以下结果。

命题 6.5。设 $\{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} = F\} \subseteq \mathbb{N}$ 其中 $0 < a_1 < \cdots < a_n < a_{n+1}$ 且 $a_{i+1} \notin \langle\{a_1, \ldots, a_i\}\rangle$ 对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$. 则 $\langle\{a_1, \ldots, a_n\}\rangle \cup \{F+1, \to\}$ 是一个 $\mathscr{A}(F)$-半群，其 $\mathscr{A}(F)$-秩等于 $n$. 此外，每个 $\mathscr{A}(F)$-半群，其 $\mathscr{A}(F)$-秩等于 $n$，都具有这种形式。

对于整数 $a$ 和 $b$，我们称 $a$ 整除 $b$，如果存在一个整数 $c$ 使得 $b = ca$，并将其记作 $a \mid b$.。否则，$a$ 不整除 $b$，并将其记作 $a \nmid b$。

由命题 6.5 可直接得到以下结果。

推论 6.6. 若 $\{m, F\} \subseteq \mathbb{N}$ 满足 $0 < m < F$ 和 $m \nmid F$，则 $\langle m\rangle \cup \{F+1, \to\}$ 是一个秩为一的 $\mathscr{A}(F)$-半群。此外，每个秩为一的 $\mathscr{A}(F)$-半群，其中 $\mathscr{A}(F)$，都具有这种形式。

若 $q$ 是有理数，则 $\lfloor q \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq q\}$.

命题 6.7. 若 $F \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$、$S \in \mathscr{A}(F)$ 和 $\mathscr{A}(F)_{\mathrm{rank}\,(S)} = 1$，则 $\mathsf{g}(S) = F - \left\lfloor \dfrac{F}{\mathsf{m}(S)} \right\rfloor$.

证明。根据推论 6.6，我们可以推出 $S = \langle\mathsf{m}(S)\rangle \cup \{F+1, \to\}$. 因此，$S = \left\{0, \mathsf{m}(S), 2\mathsf{m}(S) \ldots\ldots, \left\lfloor \frac{F}{\mathsf{m}(S)} \right\rfloor \mathsf{m}(S)\right\} \cup \{F+1, \to\}$. 所以，$\mathsf{g}(S) = F - \left\lfloor \frac{F}{\mathsf{m}(S)} \right\rfloor$. □

例 6.8. 令 $\mathscr{A}(15)(\{6\})$。应用命题 6.7，我们有 $\mathsf{g}(S) = 15 - \left\lfloor \dfrac{15}{6} \right\rfloor = 15 - 2 = 13$.

令 $P_1$、...、$P_r$ 为正素数，且 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}\subseteq\mathbb{N}.$。我们知道，$P_1^{\alpha_1}\ldots P_r^{\alpha_r}$ 的正因子个数为 $(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_r+1)$。因此，根据推论 6.6，我们得到以下结果。

命题 6.9。设 $F$ 是一个整数，使得 $F\geq 2.$若 $F=P_1^{\alpha_1}\ldots P_r^{\alpha_r}$ 是 $F$ 的素数分解，则集合 $\{S\in\mathscr{A}(F)\mid\mathscr{A}(F)_{\mathrm{rank}\ (S)}=1\}$的基数为 $F-(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_r+1)$。

例 6.10。由于 $72=2^3\cdot 3^2$，根据命题 6.9，集合 $\{S\in\mathscr{A}(72)\mid\mathscr{A}(72)_{\mathrm{rank}\,(S)}=1\}$ 的基数为 $72-(3+1)\cdot(2+1)=72-12=60.$

接下来的目标是研究具有最大秩的 $\mathscr{A}(F)$-半群。为此，我们需要引入一些概念和结果。

下述结果由 [13, 命题 2。10] 推导得到。

引理 6.11. 设 $S$ 为一个数值半群。则 $\mathsf{e}(S)\leq\mathsf{m}(S)$。

如果一个数值半群 $S$ 满足 $\mathsf{e}(S)=\mathsf{m}(S)$，则称其为最大嵌入维数半群（以下简称 MED-半群）。

文献中有大量工作通过一维解析不可约局部整环的值半群研究这类环。采用这种方法研究的环性质之一，是其是否具有最大嵌入维数（见 [ [1], [3], [6] 和 [14]]）。

下面的结果由 [13, 推论 3.2] 推出。

引理 6.12. 如果 $S$ 是一个 MED-半群，则 $\mathsf{F}(S)=\max(\mathsf{msg}(S))-\mathsf{m}(S)$。

命题 6.13. 设 $F\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ 和 $S\in\mathscr{A}(F)$。则 $\mathscr{A}(F)_{\mathrm{rank}}(S)\leq\mathsf{m}(S)-1.$

证明。根据命题 6.1，我们知道 $\mathscr{A}(F)_{\mathrm{rank}\,(S)}\leq\mathsf{e}(S)$；根据引理 6.11，有 $\mathsf{e}(S)\leq\mathsf{m}(S)$。如果 $\mathsf{e}(S)=\mathsf{m}(S)$，那么应用引理 6.12，可推出 $F<\max(\mathsf{msg}(S))$。利用命题 4.5，我们得出$\mathscr{A}(F)_{\mathrm{rank}}(S)\leq\mathsf{e}(S)-1=\mathsf{m}(S)-1$。□

如果 $S\in\mathscr{A}(F)$ 且 $\mathscr{A}(F)_{\mathrm{rank}}(S)=\mathsf{m}(S)-1$，那么我们称 $S$为一个 $\mathscr{A}(F)$-半群，其最大值为 $\mathscr{A}(F)_{\mathrm{rank}}$（下文称为 M$\mathscr{A}(F)$R-半群）。

命题 6.14。设 $S$ 为一个 MED-半群，且 $F=\max(\mathsf{msg}(S))$。则$S\backslash\{F\}$是一个 M$\mathscr{A}(F)$R-半群。此外，每个 M$\mathscr{A}(F)$R-半群都具有这种形式。

证明。根据引理 6.12，我们知道 $S\backslash\{F\}\in\mathscr{A}(F)$ 和 $\{x\in\mathsf{msg}(S\backslash\{F\})\mid x\notin\Delta(\mathscr{A}(F))\}=\mathsf{msg}(S)\backslash\{F\}.$根据命题 4.5，我们有 $\mathscr{A}(F)_{\mathrm{rank}}(S\backslash\{F\})=\mathsf{m}(S\backslash\{F\})-1.$

如果 $S\in\mathscr{A}(F)$ 且 $\mathscr{A}(F)_{\mathrm{rank}}(S)=\mathsf{m}(S)-1$，那么应用命题 4.5 可推出 $S\cup\{F\}$ 是一个 MED-半群，并且 $F=\max(\mathsf{msg}(S\cup\{F\}))$。□

如果 $A$ 和 $B$ 是 $\mathbb{Z}$ 的非空子集，我们记 $A+B=\{a+b\mid a\in A,b\in B\}.$

以下结果由 [3, 命题 I.2.9] 推出。

引理 6.15. 设 $S$ 是一个数值半群。当且仅当 $(S\backslash\{0\})+\{-\mathsf{m}(S)\}$ 是一个数值半群时，$S$ 是一个 MED-半群。

以下结果由 [10, 命题 2] 推出。

引理 6.16. 设 $S$ 是一个数值半群且 $m \in S\backslash\{0\}$. 则 $(\{m\}+S)\cup\{0\}$ 是一个重数为 $m$ 且 Frobenius 数为 $\mathrm{F}(S)+m$.的 MED-半群。

命题 6.17. 设 $S$ 为数值半群，$m \in S\backslash\{0\}$且 $F = \mathrm{F}(S)+2m$. 则 $T = (\{m\}+S)\cup\{0\}$ 是 MED-半群，并且 $\max(\mathrm{msg}(T)) = F$. 此外，如果 $P$ 是 MED-半群且 $\max(\mathrm{msg}(P)) = F$，那么 $P$ 具有此形式。

证明。• 由引理 6.16，我们知道 $T$ 是一个重数为 $m$ 且 Frobenius 数为 $\mathrm{F}(S)$ 的 MED-半群。$+m$. 利用引理 6.12，我们得到 $\max(\mathrm{msg}(T)) = \mathrm{F}(S) + m + m = F$.

• 由引理 6.15，我们知道 $S = (P\backslash\{0\}) + \{-\mathrm{m}(P)\}$ 是一个数值半群，且 $\mathrm{m}(P) \in S\backslash\{0\}$. 此外，应用引理 6.12，我们得到 $\mathrm{F}(S) = F - 2\mathrm{m}(P)$。最后，显然 $P = (\{\mathrm{m}(P)\}+S)\cup\{0\}$.

□

例 6.18。设 $S = \langle 5,\ 7,\ 9\rangle = \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14, \to\}$. 那么，通过应用命题 6.17，我们有 $T = (\{7\}+S) \cup \{0\}$ 是一个 MED-半群，且 $\max(\mathrm{msg}(T)) = \mathrm{F}(S)+2\cdot 7 = 13+14 = 27$. 因此，通过应用命题 6.14，我们得到 $T\backslash\{27\}$ 是一个 M$\mathscr{A}(F)$R-半群。

以下结果由 [10, 推论 8] 推出。

引理 6.19。设 $S$ 是一个 MED-半群。那么

$$\mathrm{g}(S) = \frac{1}{\mathrm{m}(S)}\left(\sum_{x\in\mathrm{msg}(S)\backslash\{\mathrm{m}(S)\}} x\right) - \frac{\mathrm{m}(S)-1}{2}.$$

命题 6.20。设 $S$ 是一个 M$\mathscr{A}(F)$R-数值半群，并设 $A$ 是其$\mathscr{A}(F)$-极小生成元系。那么

$$\mathrm{g}(S) = \frac{1}{\mathrm{m}(S)}\left(\sum_{a\in(A\backslash\{\mathrm{m}(S)\})\cup\{F\}} a\right) - \frac{\mathrm{m}(S)-3}{2}.$$

证明。由命题 6.14，我们可以断言 $S\cup\{F\}$ 是一个 MED-半群。通过应用命题 4.5，我们有 $\mathrm{msg}(S\cup\{F\}) = A\cup\{F\}$. 又由于 $\mathrm{g}(S) = \mathrm{g}(S\cup\{F\})+1$，因此通过应用引理 6.19，我们得到所需结果。 □

例 6.21. 设 $S = \mathscr{A}(15)(\{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\})$。那么，通过应用命题 6.20，我们得到

$$\mathrm{g}(S) = \frac{1}{8}(9+10+11+12+13+14+15) - \frac{8-3}{2} = 8.$$

# 参考文献

[1] S. S. Abhyankar，《高嵌入维数的局部环》，《美国数学杂志》89（1967年），1073–1077。

[2] R. Apéry, 《关于代数曲线的超线性分支》，巴黎科学院院报222（1946），1198–2000。[3] V. Barucci, D. E. Dobbs and M. Fontana, 《数值半群的极大性及其在一维解析不可约局部整环中的应用》，《美国数学学会回忆录》598（1997）。[4] V. Blanco and J. C. Rosales, 《固定 Frobenius 数的数值半群集合的枚举》，《计算数学及其应用》63（2012），1204–1211。[5] V. Blanco and J. C. Rosales, 《具有固定 Frobenius 数的不可约数值半群之树》，《数学论坛》25（6）（2013），1249–1261。
[6] W. C. Brown and J. Herzog, 《具有极大长度和近极大长度的一维局部环》，《代数杂志》151，332–347。[7] R. Fröber, G. Gottlieb and R. Häggkvist, 《关于数值半群》，《半群论坛》35（1987），63–83。[8] E. Kunz, 《一维Gorenstein环的值半群》，《美国数学学会会刊》25（1973），748–751。[9] J. L. Ramírez Alfonsín, 《丢番图Frobenius问题》，牛津大学出版社，伦敦（2005）。
[10] J. C. Rosales, 《数值半群的主理想》，比利时数学学会公报10（2003），329–343。[11] J. C. Rosales and M. B. Branco, 《可表示为对称数值半群之交的数值半群》，《纯粹与应用代数杂志》171（2002），303–314。[12] J. C. Rosales and M. B. Branco, 《不可约数值半群》，《太平洋数学杂志》209（2003），131–143。
[13] J. C. Rosales and P. A. García-Sánchez, 《数值半群》，《数学进展》第20卷，Springer，纽约，2009年。[14] J. D. Sally, 《极大嵌入维数的Cohen–Macaulay局部环》，《代数杂志》56（1979），168–183。
[15] J. J. Sylvester, 《数学问题及其解答》，《教育时报》41（1884），21。