arXiv:2302.09123v1 [math.AT] 17 Feb 2023

C动机 Adams-Novikov 谱序列与拓扑模形式

Daniel C. Isaksen、Hana Jia Kong、Guchuan Li、Yangyang Ruan 和 Heyi Zhu

摘要。我们分析了 C动机（以及经典的）Adams-Novikov 谱序列，该谱序列对应于 C动机模形式谱*mmf*（以及经典拓扑模形式谱*tmf*）。我们主要使用纯代数技术，仅有少数例外。在此过程中，我们解决了一个此前尚未解决的关于*tmf*同伦群乘法结构的细节问题。

1. 引言

拓扑模形式谱 tmf 在研究球面的稳定同伦群 [Bau08] [Beh20] [DFHH14] [Goe10] [Hop95] [Hop02][HM14] [Rez02]中发挥着重要作用。从球谱到 tmf 的单位映射 $S \to tmf$ 检测出稳定同伦群的大量结构，包括元素 η（1-茎）、ν（3-茎）、ϵ（8-茎）、κ（14-茎）、κ（20-茎）以及许多其他元素。单位映射远非单射（例如，σ（7-茎）映射到 tmf 中为零），因此它无法检测球面的全部稳定同伦群。此外，它也不是满射。tmf-Hurewicz 像的计算是一个困难的问题，并由此促成了球面的稳定同伦群中无限个 v_2-周期族的识别 [BMQ20]。

谱 *tmf* 可作为球谱的近似。这种近似非常适合用于检验理论和发展计算技术。*tmf* 的结构足够复杂，能够展现与稳定同伦群计算相关的复杂现象；但它也足够简单，可以进行穷尽计算。我们发现，研究*tmf* 是逐步理解球谱过程中不可或缺的一步。

相比之下，谱 *ko* 可以说过于简单，不足以作为计算理论的测试对象。例如，它的 Adams 谱序列退化了，因此其同伦归结为一个完全代数的问题。对于 *tmf*，Adams 谱序列和 Adams-Novikov谱序列都不会退化。然而，对 *tmf* 的分析并不涉及 [IWX20第2节1] 意义下的交叉微分或交叉扩张。这意味着，*tmf* 的同伦并不包含球面同伦群中最精细的部分。

Bruner 和 Rognes [BR21]最近对 *tmf* 的 Adams 谱序列进行了全面研究。他们完全确定了 *tmf* 的稳定同伦群的加法结构和（主要的）乘法结构，但有一个例外。

日期：2023年2月21日。2010 数学主题分类。主要分类 14F42、55Q10、55T15；次要分类 55Q45。关键词和短语。拓扑模形式、动机稳定同伦论、Adams-Novikov谱序列、Adams 谱序列、稳定同伦群。第一作者部分获得了美国国家科学基金会DMS-2202267号资助。第二作者获得了美国国家科学基金会DMS-1926686号资助。第三作者感谢马克斯·普朗克数学研究所和豪斯多夫数学研究所的热情接待。

本文的目标是研究*tmf*的 Adams-Novikov谱序列。事实上，我们将在更一般的 $\mathbb{C}$动机背景下工作，并计算 $\mathbb{C}$动机模形式谱 *mmf* 的动机 Adams–Novikov 谱序列。通过代数局部化，可以很容易地从动机计算中恢复经典计算。

更具体地说，存在某个动机元素 τ。将 τ 取逆会使 $\mathbb{C}$-动机计算归约为经典计算。特别是，τ-挠现象在经典背景下会消失。下文中，我们将在 $\mathbb{C}$-动机背景下进行研究。感兴趣的读者可以通过将 τ 取逆，轻松地从我们的工作中恢复经典计算。

从另一个角度来看，我们还计算了 $\mathbb{C}$-动机有效切片谱序列，因为它与 *mmf* 上的 Adams-Novikov谱序列一致 $\mathbb{C}$。这一谱序列的认定似乎没有在文献中得到清晰表述，但它是 [Lev15 的权零结果的一个计算性推论，定理 1]。

我们的目标并不仅仅是记录 Adams-Novikov谱序列的细节；这些细节此前已出现在 [Bau08] 中。更具体地说，我们尝试给出尽可能代数化的证明。这类代数证明不太可能包含细微错误，也更容易由机器验证。动机背景为我们提供了额外的代数工具，而这些工具在严格的经典背景下无法获得。我们还纠正了对 [Bau08] 的分析中的一些疏漏和小错误。

1.1. **代数哲学**。 我们的计算不以球谱中的任何信息作为输入。不过，我们假设完全了解动机Adams谱序列和动机Adams-Novikov E_2-页关于 *mmf*的代数结构。这与我们尽可能使用代数技术的目标一致。这也符合我们的理念： *tmf* 的作用是为我们提供有关球谱的信息。相比之下，在 [BR21]中，有必要根据对球谱的先前认识，将关系 $\eta^2\kappa = 0$ 引入 *tmf* 。幸运的是，我们在 $h_1^2 d = 0$ 这一动机Adams-Novikov E_2-页中，已经有了关于 *mmf*的关系。由于不存在高滤过中的元素，因此关系 $\eta^2\kappa = 0$完全可以通过代数方法证明。

涉及Adams谱序列或Adams-Novikov谱序列的计算分为两个主要阶段。第一阶段完全是代数性的，涉及计算 E_2页。在现代，这一第一阶段通常由机器完成。计算 E_2页关于 *tmf* 的部分并不简单，但只要有足够的耐心，就可以手工完成 [Bae] [Bau08，第 7] [BR21] [Rez02，第 18]节。

这一过程的第二阶段涉及微分和隐藏扩张的计算。该阶段通常需要来自拓扑学的信息，因此无法完全自动化，因为它并非完全是代数性的。

我们的贡献在于认识到，这一拓扑学上的第二阶段实际上可以仅利用代数信息来完成。关键思想是利用动机背景的额外结构，在 Adams 谱序列与 Adams-Novikov谱序列之间来回转换。每个 E_2-页都会告诉我们一些关于 *tmf* 同伦群的信息。这些 E_2-页所包含的信息确实有所重叠，但并不完全重合。两个 E_2-页中的信息之并，严格多于其中任一 E_2-页中的信息。

我们给出了几个具体例子，展示了仅在两个 E_2-页中的一个里可获得的信息。

(1) 在经典的 *tmf* Adams E_2 页中，我们有关系式 $h_1^4 = 0$。这蕴含了同伦中的关系式 $\eta^4 = 0$ 。然而，在经典的 Adams-Novikov E_2 页中，元素 h_1^4 非零，并且被 Adams-Novikov d_3 微分命中。

因此，关系式 $\eta^4 = 0$ 有一个完全代数的证明，但仅在 Adams 谱序列中成立。(2) 事实上，关系式 $h_1^4 = 0$ 是 Adams E_2 页中的 Massey 乘积 $h_1^2 = \langle h_0, h_1, h_0 \rangle$ 的推论。在经典的 Adams-Novikov E_2 页中，相应的 Massey 乘积 $\langle 2, h1, 2 \rangle$ 为零。因此，Toda 括号 $\eta^2 = \langle 2, \eta, 2 \rangle$ 有一个完全代数的证明，但仅在 Adams 谱序列中成立。(3) 在经典的 Adams-Novikov E_2 页中，对于 tmf，我们有关系式 $h_2^3 = h_1 c$。这蕴含了关系式 $\nu^3 = \eta\epsilon$。然而，在经典的 Adams E_2 页中，我们有 $h_2^3 = 0$。事实上，在 Adams 谱序列中，从 h_2^2 到 $h_1 c$ 存在一个隐藏的 ν 延拓。因此，关系式 $\nu^3 = \eta\epsilon$ 有一个完全代数的证明，但仅在 Adams-Novikov 谱序列中成立。(4) 事实上，关系式 $h_2^3 = h_1 c$ 是 Adams-Novikov E_2 页中的 Massey 乘积 $c = \langle h_2, h_1, h_2 \rangle$ 的推论。在经典的 Adams E_2 页中，相应的 Massey 乘积为零。因此，Toda 括号 $\epsilon = \langle \nu, \eta, \nu \rangle$ 有一个完全代数的证明，但仅在 Adams-Novikov 谱序列中成立。有关此例的更多细节，请参见引理 2.20。

为了得到一个关键的 Adams-Novikov 微分，我们使用 Bruner定理，研究代数 Steenrod运算 [May70] 与 Adams 谱序列背景下的 Adams 微分之间的相互作用。关于准确且易读的表述，我们参考 [Bru84，定理 2。2]另见 [BMMS86] 和 [Mäk73]。Bruner定理的实际实现只需要代数信息，具体形式为作用于 Ext 群上的代数Steenrod运算。这些运算可以通过机器计算，尽管其效率不如 Ext 群的加法和乘法结构。代数Steenrod运算是在拓扑学家通常所理解的“标准同调代数”之上附加的结构。

在 Adams-Novikov谱序列的背景下，我们还依赖如下形式的 Leibniz法则：$d_r(x^k) = kx^{k-1}d_r(x)$。从哲学上说，这个公式与 Bruner定理有关，尽管我们不知道如何建立精确的联系。与 Bruner定理的情形一样，这似乎包含了比标准同调代数中通常考虑的略多一些的信息。

我们还请读者注意命题 4.5，其中我们证明了 110 茎中存在一个隐藏的 2 扩张。这里我们使用了关于 mmf/τ^2 的同伦群的一些信息。有人或许会认为，这些信息并非完全具有代数性质。相比之下，Adams 谱序列中对应的 2 扩张也是隐藏的，但并不特别难以发现 [BR21，定理 9.8(110)]。

1.2. **技巧**。 第2.10 节介绍了一种特别有力的方法，可用于研究C-动机 Adams–Novikov 谱序列；这种方法没有经典对应物。存在一个映射$q : mmf/\tau \to \Sigma^{1,-1}mmf$，可以将其视为从 2 胞腔$mmf$-模$mmf/\tau$的顶胞腔出发的投影。$mmf/\tau$ 的同伦在代数意义下完全已知，因为它同构于tmf的经典 Adams-Novikov E_2-页。此外，映射q 映射到mmf 中被 τ消去的同伦。因此，q 可用于检测mmf 中的结构，这些结构与被 τ消去的类有关。

实际上，关于隐藏扩张的许多具体问题，并不直接涉及被 τ湮灭的元素。通常，如果我们将这些元素乘以 τ 的某次幂，再乘以g的某次幂，最终就会得到被 τ湮灭的元素。我们可以利用q 来理解后者，进而推断原始元素的信息。表5 列举了这一过程的许多具体实例。大多数隐藏扩张都可以用这种方式轻松处理，不过少数扩张需要更复杂的论证。

我们尽可能避免使用 Toda 括号，但有时它们不可避免。在必须计算 Toda 括号的情况下，我们再次完全依赖代数技术。具体而言，我们的 Toda 括号源自 Adams 或 Adams-Novikov E_2页上的相应 Massey 乘积。Moss 收敛定理 [Mos70] 指出，在“行为良好”的情形下，这类代数 Massey 乘积可以检测 Toda 括号。实际上，我们研究的所有情形都行为良好。

1.3. **关于 Δ^k 的微分**。 完成对 *mmf* 的动机Adams-Novikov 谱序列的全部分析后，我们事后可以看出，其他所有零散计算都源自几个关键步骤。我们的经验表明，这些关键步骤涉及形如 $2^j\Delta^k$的元素上的微分。这并不特别令人意外；我们预期元素 Δ 会发挥主导作用，因为它表示v_2-周期性。

首先，我们在命题3.8中建立 $d_5(\Delta) = \tau^2 h_2 g$ 。这由与 Adams 谱序列的比较立即得到，其中 $\tau^2 h_2 g$ 在 E_2-页上已经为零。因此，我们得到了$d_5(\Delta)$的代数证明。随后，Leibniz法则推出$d_5(\Delta^2) = 2\tau^2\Delta h_2 g$。

Leibniz法则还推出 $d_5(\Delta^4) = 4\tau^2\Delta^3 h_2 g$。然而， $4\tau^2\Delta^3 h_2 g$ 在 Adams-Novikov E_2-页上为零。由于从 $2\tau^2 h_2$ 到 $\tau^3 h_1^3$, 的隐藏的 2 扩张，元素 $\tau^3\Delta^3 h_1^3 g$ 应当发挥 $4\tau^2\Delta^3 h_2 g$ 的作用。这强烈暗示应当存在一个微分 $d_7(\Delta^4) = \tau^3\Delta^3 h_1^3 g$。事实上，该公式是正确的（见命题 3.14），但要给出精确的证明还需要做一些工作。

我们的解决方案再次是让 Adams 谱序列和 Adams-Novikov谱序列相互配合。我们利用 Adams E_2页得到 Adams-Novikov 微分 $d_5(\Delta)$。然后，我们在 Adams-Novikov谱序列中应用 Leibniz法则，得到 $d_5(\Delta^2)$。反过来，后一 Adams-Novikov 微分又推出 Adams 微分 $d_2(\Delta^2)$，或者按照 [BR21]的记号写作 $d_2(w_2)$。接下来，我们应用 Bruner定理关于平方运算与 Adams 微分之间相互作用的结果 [BMMS86] [Bru84]，得到 Adams 微分 $d_3(\Delta^4)$，或者按照 [BR21], 的记号写作 $d_3(w_2^2)$。最后，Adams 微分 $d_3(\Delta^4)$意味着存在一个 Adams-Novikov 微分 $d_7(\Delta^4)$。更多细节请参见第3.3节和第3.4节。奇怪的是，关于 Adams-Novikov 微分 $d_7(\Delta^4)$的精确表述在 [Bau08] [HM14] [Rez02]中缺失。

1.4. **主要结果**。 我们的主要结果以第 7节中的图表形式给出。为完整起见，我们将其表述为一个主定理。

定理1.1。 第 7 节中的图表表示了 $\mathbb{C}$-动机 *Adams-Novikov* 谱序列，即动机模形式谱 *mmf* 的动机 *Adams-Novikov* 谱序列，其中包括对

- *the* E_2-页。
- 所有微分。
- *the* E_∞-页。
- 由2、 η和 ν产生的所有隐藏扩张。

定理 1.1的证明由一长串杂项计算组成，这些计算贯穿全文进行。尤其请参见第 6节中的表格。这些表格概括了主要的计算事实，并提供了各项事实更详细证明的交叉引用。

我们的工作并不如 [BR21] 完整，因为我们尚未对乘法结构进行完整分析。原则上，可以使用相同的技术来完成这项工作。我们确实对一族乘法关系进行了更为详细的研究。Bruner 和 Rognes 确定了 ν_k 同伦中的一族*tmf*元素。他们基本确定了这些元素之间的乘积，但

他们留下了一个尚未解决的情形。我们的方法解决了关于tmf同伦的 2-主乘法结构的这一最后细节。

定理 1.2。 在 [BR21]的语境中， $\nu_4\nu_6 = \nu\nu_2 M$。

定理 1.2 稍后将作为推论5.12得到证明。事实上，它是更一般的定理 5.10的推论；该定理对乘积 $\nu_j\nu_k$进行了优雅的统一分析。Bruner 和 Rognes 通过经验观察得到了公式

$$\nu_i\nu_j = (i+1)\nu\nu_{i+j}.$$

我们的证明表明，系数 $(i+1)$ 自然地源自 Leibniz法则

$$d_5(\Delta^{i+1}) = (i+1)\Delta^i d_5(\Delta).$$

1.5. **未来方向**。 我们的工作提出了一些值得进一步研究的问题。

问题 1.1。 计算 κ-周期的 $\mathbb{C}$-动机谱 $mmf[\kappa^{-1}]$。

我们经常先计算元素和关系与 g 或 κ的各种幂的乘积，以此检测它们。换言之，mmf 的大部分结构都反映在 κ-周期谱 $mmf[\kappa^{-1}]$中。这个动机谱并非平凡，但其同伦完全被 τ^{11}湮灭。因此，其 Betti 实现是平凡的，并且它代表纯粹的“奇异”动机现象。我们还要提到， [BBC23] 也研究 g-周期现象在 tmf中的表现，尽管其方式与我们的视角并不特别接近。

问题1.2。 开发更好的技术，以便直接从微分 $d_7(\Delta^4) = \tau^3\Delta^3 h_1^3 g$ 推导出微分 $d_5(\Delta) = \tau^2 h_2 g$。

或许可以直接从 $d_5(\Delta)$ 推导出 $d_7(\Delta^4)$ ，所依据的是一种适用于 Adams-Novikov谱序列的 Bruner定理变体，但我们甚至还没有对这种变体 formulate 出精确表述。Bruner定理与 Leibniz法则 $d_r(x^2) = 2xd_r(x)$之间存在联系，但其确切关系对我们而言尚不清楚。

问题 1.2 的另一种可能方法是考虑一个扩充的 E_2-页，其中从 $2\tau^2 h_2$ 到 $\tau^3 h_1^3$ 的 2 扩张不再被隐藏。

问题1.3。 构造一个谱序列，使其 E_2-页反映 Adams 谱序列和 Adams-Novikov E_2-页的代数结构。

我们经常在 Adams 谱序列和 Adams-Novikov谱序列之间来回转换。为了促进这些转换，第 2.5 节引入了 Adams 谱序列中的元素与 Adams-Novikov谱序列中的元素之间的一种对应关系。

这一设置似乎是描述这两个谱序列之间更丰富联系的初步尝试。如果只在一个能够反映 Adams 谱序列和 Adams-Novikov谱序列的代数结构的谱序列中进行计算，将会方便且有效得多。目前已有一些初步迹象表明，“双动机同伦理论”（也称为$H\mathbb{F}_2$-合成BP-合成同伦理论）为此提供了一个语境。

1.6. **提纲**。 我们从第 2 节开始，讨论我们将用于开展显式计算的工具。我们介绍 mmf 的动机Adams谱序列和动机Adams-Novikov谱序列，并为这些谱序列中的元素建立记号。我们还为之后将用到的某些同伦元素建立记号。特别值得关注的是第 2.9 节和 2.10节，它们建立了一种强大的

用于检测隐藏扩张的工具。基本思路是使用动机谱 mmf/τ，其同伦完全是代数性的。

我们的显式计算始于第 3节，在该节中我们确立所有 Adams-Novikov 微分。本节中的命题大多按照微分长度递增的顺序排列。不过，为保持逻辑顺序，我们对这一一般规则作了一些例外处理，从而每个结果只依赖于此前已经证明的结果。

计算出 Adams-Novikov 微分后，我们在第 η、ν 节 4中继续计算所有由 2、mmf/τ 产生的隐藏扩张。其中大多数扩张可通过与 mmf/τ的同伦进行比较而立即得到，但也有若干情形需要更为困难的证明。

最后，在第 5节中，我们考察一族特别有趣的乘积。我们关于这些乘积的结果填补了 $\pi_* tmf$的乘积结构中的一个空缺，正如 [BR21]所述。

1.7. **约定**。 我们始终在素数 2 处工作。在素数 3 处计算 tmf 有一些有趣的方面（[Bau08, 第 5], [DFHH14], [BR21章，第 13]），但我们不讨论这一主题。我们使用动机 Adams–Novikov 谱序列来计算 mmf 的 2-局部化的同伦群。我们还使用动机Adams谱序列的 E_2 页；该谱序列实际上收敛到 mmf 的 2-完备化的同伦群。由于我们的工作中只出现有限生成阿贝尔群，局部化与完备化之间的区别并不重要。为便于说明，我们的记号中不体现这些局部化或完备化。例如，符号$\mathbb{Z}$ 指的是在 2 处局部化的整数，或 2-进整数。类似地，$\pi_{*,*}mmf$ 指的是 mmf 的 2-局部化（或 2-完备化）的动机稳定同伦群。

形容词“动机的”始终专指 $\mathbb{C}$-动机背景。除了 $\mathbb{C}$之外，我们不考虑其他基域。

我们的许多显式结果都标注了它们出现的次数。这些次数可以帮助读者浏览整体计算，尤其是在 Adams–Novikov 图表中寻找相关元素时。

1.8. **致谢**。 感谢 Tilman Bauer、Robert Bruner 和 John Rognes 就本手稿的编写进行了各种讨论。我们也很感谢 2023 年冬季 eCHT 阅读研讨会参与者围绕 tmf 的 Adams 谱序列展开的富有启发性的讨论。

2. 背景

本节将讨论我们稍后进行计算时所使用的技术。

2.1. **动机的 $\mathbb{C}$-动机模形式谱** mmf。 存在一个 $\mathbb{C}$-动机的 E_∞-环谱mmf，可以将其视为经典拓扑模形式谱tmf [GIKR22]的类比物。mmf 的 Betti 实现是经典谱tmf。此外，mmf 的上同调为$A /\!\!/ A(2)$，其中A 表示 $\mathbb{C}$-动机 Steenrod 代数，而$A(2)$ 是由 Sq^1,Sq^2,和 Sq^4生成的子代数。

2.2. **用于 $\mathbb{C}$-动机 Adams 谱序列的** mmf。 我们将 mmf 的动机 Adams 谱序列简称为 mAss。 $\mathbb{C}$-动机 $A(2)$ 的上同调是 mAss 的 E_2-页。文稿 [Isa09]使用动机 May 谱序列计算了 $\mathbb{C}$-动机 $A(2)$ 的上同调，并完整描述了其环结构。mAss 的 E_2-页完全由代数信息构成，我们将其视为已知。我们将 mAss 的 E_2-页按 (s, f, w)的形式分次，其中 s 是拓扑茎，f 是 Adams 滤子，而 w 是动机权重。

动机 Adams 微分记录于 [Isa18]中。然而，本稿不依赖于对任何 Adams 微分（无论是经典的还是动机的）的先验知识。为完整起见，我们在命题 3.19 中给出两个 Adams 微分的自包含证明。

我们采用 [Isa09] 和 [Isa18] 对 mAss 所使用的记号。为方便读者，表1 给出了我们的记号与 [BR21]记号之间的对照。注意，动机生成元u 和 Δu 没有经典对应物，因为它们被 τ 所消灭。

表 1：mmf 的动机Adams E_2 页的生成元

(, ,)	[Isa09]	[BR21]
(0, 1, 0)	h_0	h_0
(1, 1, 1)	h_1	h_1
(style>3, 1, 2)	h_2	h_2
(8, 3, 5)	c	c_0
(8, 4, 4)	P	w_1
(11, 3, 7)	u	
(12, 3, 6)	a或 α	α
（14, 4, 8）	d	d_0
(15, 3, 8)	n 或 ν	β
(17, 4, 10)	e	e_0
(20, 4, 12)	g	g
(25, 5, 13)	Δh_1	γ
(32, 7, 17)	Δc	δ
(35, 7, 19)	Δu	
(48, 8, 24)	Δ^2	w_2

2.3. **动机 C-动机 Adams-Novikov 谱序列，用于** *mmf*。经典 Adams–Novikov 谱序列用于E_2-页的tmf 由 $\mathrm{Ext}^{**}{}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*tmf)$给出，其中$BP$ 表示布朗-彼得森谱。与经典 Adams-Novikov 谱序列类似，可以通过相对于动机布朗-彼得森谱进行分解来构造动机 Adams–Novikov 谱序列。我们将动机 Adams–Novikov 谱序列缩写为 mANss。我们将 mANss 的E_2-页按$(s、f、w)$的形式分级，其中s 是拓扑茎，f是 Adams-Novikov滤过，而 w 是动机权重。

mANss 用经典术语很容易描述。动机 E_2 页可以通过以下方式从其经典类比得到：首先为每个类指定第三个次数，称为权重，使其等于总次数的一半；然后添上一个次数为 τ $(0, 0, -1)$ 的多项式生成元（例如参见 [HKO11][Isa19]）。更明确地说，一个次数为 (s, f) 的经典元素 x，对应于 mANss 中的一族元素 $\{\tau^n x | n \geq 0\}$；其中动机元素 x 的次数为 $\left(s, f, s+f_2\right)$。——

mANss 的E_2 页完全由代数信息构成，我们将其视为已知。就我们的目的而言，计算这一 E_2 页的最佳方法是使用代数 Novikov 谱序列，相关内容已在 [Bae]中详细推导。

备注 2.1. 该 E_2-页是经典 Adams-Novikov 谱序列中 tmf 的上同调，它来自椭圆曲线霍普夫代数胚的一个版本（[Rez02][Bau08]）。由换环定理 [Rez02，定理 15。3], 这与下列对象的上同调相同：

Hopf 代数胚 $(BP_*tmf, BP_*BP \otimes_{BP_*} BP_*tmf)$。详见 [Rez02，命题 15.7 和第20] 节。我们不依赖这一视角。

2.4. **动机 Adams–Novikov 谱序列的记号。** 表 2 列出了 mANss E_2-页上 mmf的乘法生成元。这些生成元是我们计算的起点。

表 2：mmf 的动机 Adams-Novikov E_2-页生成元

(s, f, w)	生成元
$(0, 0, -1)$	τ
$(1, 1, 1)$	h_1
(style>3, 1, 2)	h_2
$(5, 1, 3)$	$h_1 v_1^2$
$(8, 0, 4)$	P
$(8, 2, 5)$	c
$(12, 0, 6)$	$4a$
$(14, 2, 8)$	d
$(20, 4, 12)$	g
$(24, 0, 12)$	Δ

对于其中一些元素的定义必须稍加谨慎，因为它们属于阶大于 2 的循环群。在这些情况下，可能存在不止一个生成元。具体来说，这一问题出现在元素 h_2, P、$4a$、g 和 Δ 上。对于 P、$4a$ 和 g，我们只需任意选取生成元。

注 2.2。 $(3, 1, 2)$ 只要 h_2 是 mANss E_2-页在次数 $(3, 1, 2)$ 中的一个生成元，其具体选择对我们实际而言几乎没有影响。为明确起见，我们取 h_2 表示同伦元素 ν，并假定 ν 已有先验定义（例如，通过诉诸球谱的同伦，或通过诉诸涉及四元数乘法的 ν 的几何构造）。

对 Δ 的选择在实际应用中也几乎没有影响。我们选择 Δ 的方式是使我们的公式更易于书写。更多详情请参见注记 3.9 和注记 5.8 。请注意， Δ 的选择取决于先前对 h_2的选择。

注记 2.3。 $(12, 0, 6)$ 记号 $4a$ 看起来并不自然，因此需要作一些解释。我们认为这个记号很方便，原因有两个密切相关的方面。首先，元素 $4a$ 在代数 Novikov 谱序列 [Bae]中由元素 $h_0^2 a$检测到。其次，元素 $2 \cdot 4a$ 最终成为一个永久循环，它检测到 π_{12}中的一个元素，$6mmf$。同一个同伦元素在 mmf的 Adams 谱序列中由 $h_0^3 a$ 检测到。

元素 g 是一个永久循环，因此表示一个同伦类 κ。乘以 g 为 mmf的 mANss 提供了规则结构。我们通常将通过 g 乘法相互关联的元素归入各个族。换句话说，当我们考虑某个特定元素 x时，通常也会同时考虑元素 xg^k ，其中所有 $k \geq 0$ 均如此。

合起来，图 1 和3 以图示方式描绘了 E_2 页的 mmf 的 mANss 。细心的读者应将这些图叠加起来，以完整呈现 mANss。图1描绘了 v_1-周期模式，该模式出现在 E_2 页中，将在第 2.7 节详细讨论。图 3 描绘了其余的类。

2.5. **mANss 与 mAss 的比较**。

定义 2.4. 设 a 是 mmf 的 mANss 中的一个永久循环，并设 b 是 mmf 的 mAss 中的一个永久循环。元素 a 和 b **对应，**若存在 $\pi_{*,*}mmf$ 中的一个非零元素，它被 mmf 的 mANss 中的 a 检测到，并被 mmf 的 mAss 中的 b 检测到。

备注 2.5. 请注意，根据高滤过中是否存在永久循环，一个永久循环可能会在 π_*、$_*mmf$ 中检测出不止一个元素。我们只要求由a 和b 检测出的陪集相交；它们不必完全相同。下面给出一个具体例子。

mANss 的元素P 在E_∞-页检测出 π_8 中的两个元素，$4mmf$，这是由于高滤过中存在 τc。另一方面，mAss 的元素P 在E_∞-页检测出无穷多个元素（它们的差别仅在于一个 2进单位因子），这是由于当$k \geq 1$时高滤过中存在 Ph_0^k。这就是一对相应元素并未精确检测出同一个同伦元素陪集的例子。

备注 2.6. 一个 mANss 元素可能对应于 mAss 中的两个不同元素。例如，元素 P 在 mANss 中检测出$\pi_{8,4}mmf$ 中的两个元素，这是由于高滤过中存在 τc。这两个同伦元素分别由 τc 和 P 在 mAss 中检测出。因此，mANss 元素 P 对应于 mAss 元素 P，同时也对应于 mAss 元素 τc。幸运的是，这种复杂情况在我们的实际工作中从未出现。例如，表 4 中列出的对应关系均未表现出这种行为。

备注 2.7。 mANss E_∞页上的元素 2 检测到同伦中的单个元素，因为不存在处于高滤过的元素。另一方面，mAss E_∞页上的元素 h_0 检测到同伦中的无穷多个元素；由于高滤过中存在 h_0^k，这些元素彼此仅相差一个 2-进单位因子。因此，尽管 2 和 h_0 是一对应对，但它们检测到的同伦元素集合并不相同。更确切地说，由 2 检测到的同伦元素构成由 h_0 检测到的同伦元素的一个子集。

在表 4 中列出的对应对中，对于 h_2g、 Δh_1, 和 $4\Delta^2$，也会出现同样的现象。在所有这些情形中，mANssE_∞页元素检测到的同伦元素，构成 mAss E_∞页元素检测到的同伦元素的一个子集。

乘法结构尊重对应对。下面的命题将这一原则精确地表述出来。

命题 2.8。 设 a 和 a' 是 $mANss$ 的 E_∞ 页中的元素，b 和 b' 是 $mAss$ 的 E_∞ 页中的元素。若 a 对应于 a'，b 对应于 b'，且 ab 和 $a'b'$ 均非零，则 ab 对应于 $a'b'$。

证明。 设 a 和 a' 检测到一个同伦元素 α，并且 b 和 b' 检测到一个同伦元素β。于是，ab 和 $a'b'$ 检测到乘积 $\alpha\beta$。■

备注 2.9。 动机 Thom 约化映射 $BP \to H\mathbb{F}_2$ 从 mmf 的 mANss 诱导出到 mmf 的 mAss 的映射。该映射检测到一些对应对，但并非全部。具体而言，它检测到涉及 $h_1, h_2,$ 和 g 的对应对。这些元素正是 mANss 与 mAss 之间不存在过滤度移位的元素。

2.6. **同伦元素**。 表 3 列出了我们用于表示 mmf 同伦中元素的一些记号。对于动机版本，我们使用与 [BR21] 相同的符号。请注意，我们的一些同伦元素在贝蒂实现下可能与 [BR21] 中的元素并不完全兼容。我们将在接下来的段落中讨论这些歧义的细节。

我们通过指定 mANss E_∞-页中检测到这些元素的元素，来定义同伦中的元素。在某些情况下，很容易看出这些检测元素会存活到 E_∞-页。例如，h_1 和 h_2 上不存在任何可能的微分目标；它们也不可能被微分击中。请注意，我们目前还不知道其中一些检测元素是否确实存活到 E_∞-页。只有在我们分析了 Adams-Novikov 微分之后，这一点才会明朗。

在某些情况下，较高滤子中存在 E_∞ 页元素。当这种情况发生时，E_∞ 页中所指定的元素会检测到同伦中的多个元素。例如，元素 τh_1^3 所处的滤子高于 h_2 的滤子。因此，h_2 会检测到同伦中的两个不同元素。在表 3 中，这种歧义仅出现在 ν、κ_4以及形如 ν_k 的元素中。

对我们而言，ν 的选择在实际应用中意义不大。为明确起见，我们可以采用 ν的先验定义，详见备注 2.2。ν_k 的选择将在定义 5.4中讨论。就我们的目的而言，κ_4 的选择无关紧要，因此它可以是π_{110}的任意生成元，56。

表 3：的一些元素 $\pi_{*,*}mmf$

$(s,\ w)$	name	检测到
$(1,1)$	η	h_1
$(3,2)$	ν	h_2
$(8,5)$	ϵ	c
$(14,8)$	κ	d
$(20,12)$	$\bar{\kappa}$	g
$(25,13)$	η_1	Δh_1
$(27,14)$	ν_1	$2\Delta h_2$
$(51,26)$	ν_2	$\Delta^2 h_2$
$(96,48)$	D_4	$2\Delta^4$
$(99,50)$	ν_4	$\Delta^4 h_2$
$(110,56)$	κ_4	$\Delta^4 d$
$(123,62)$	ν_5	$2\Delta^5 h_2$
$(147,74)$	ν_6	$\Delta^6 h_2$
$(192,96)$	M	Δ^8

备注 2.10。 $(20,4,12)$ Bruner 和 Rognes 通过参考单位映射 κ来选择 $S \to tmf$，同时预先选择了 κ 在 $\pi_{20}S$ 中的元素。就我们的目的而言，我们只需要知道 κ 由 g 在 mANss E_∞-页上检测到，因此我们可以选择 κ 使其与 [BR21] 中的选择相容。

关于 κ存在一个小问题。在 [Isa19] 和 [IWX20], 中，符号 κ 用于表示 π_{20}的一个元素，即由动机 Adams 谱序列中的 τg 检测到的元素。问题在于，g 无法通过 May 谱序列，因此它并不存在于动机 Adams 谱序列中。

这里，我们用 κ 表示 π_{20}中的一个元素，即，$12mmf$。在 mmf 的 Adams 谱序列中，该元素由 g 检测到。单位映射 $S^{0,0} \to mmf$ 将 κ 映射到 $\tau\kappa$。

注 2.11。 Bruner 和 Rognes 使用“边缘同态”来指定 $\pi_* tmf$ 中的某些元素。从 Adams-Novikov谱序列的角度来看，该边缘同态具有一种特别便于处理的形式，可以简单地描述为先满射后单射。满射将 $\pi_* tmf$ 映射到其商，即商去被严格正的 Adams-Novikov 滤过中的元素所检测到的部分。换言之，

满射将 $\pi_* tmf$ 映射到过滤度 0 中的 Adams-Novikov E_∞-页。随后，单射是过滤度 0 中 Adams-Novikov E_∞-页到 Adams-Novikov E_2-页的包含映射。换言之，边缘同态检测在 Adams-Novikov滤过 0 中被检测到的同伦元素。这一边缘同态的描述同样适用于 $\pi_{*,*}mmf$ 以及动机 Adams–Novikov 谱序列的情形。

边缘同态取决于 Δ 的选择（参见备注 3.9）。请注意，我们对 Δ 的选择并不能保证我们的边缘同态与 [BR21]中讨论的边缘同态相同。因此，我们在表 D_4 和 M 3 中对同伦元素的定义可能与 [BR21，定义 922]中的定义不同。所有可能的 Δ 之差都是 2 的倍数，因此 Δ^k 在模 2^k的意义下是良定义的。因此，我们对 D_4 和M 的选择分别与 Bruner-Rognes 的定义相差 16 和 256 的倍数。

2.7. **v_1-周期性**。 mmf 的 *mANss* 的一部分反映了 v_1-周期同伦。该部分的微分模式与 *ko* 的 Adams-Novikov 微分相似（参见 [Bau08，第 31]页）。我们单独考虑这部分，并在计算高阶微分时将其省略。请注意，我们并未采用 v_1-周期同伦的内在定义。相反，我们只是观察 *mmf*的 mANss 中某些特定的结构。

在 mANss E_2 页中，考虑形如 $\tau^a h_1^b P^m(4a)^\epsilon \Delta^n$ 的元素，其中 ϵ 等于 0 或 1，且 $m+\epsilon>0$。我们将这些元素称为v_1-周期类。

注意，1 和 Δ^n （以及它们的 τ 倍数和 h_1 倍数）不属于这一类元素。博学的读者可能会注意到，这些 Δ 的幂满足v_1-周期性的内在定义。我们构造这一类元素，是出于实际上的便利，而非其内在性质。按我们的定义，v_1-周期元素彼此之间只通过 Adams-Novikov 微分相互作用。然而， Δ 的幂所支持的 Adams-Novikov 微分，其取值可能落在v_1-周期类之外。因此，我们将它们与非v_1-周期元素一并考察。

图1 和2 展示了 mANss 的v_1-周期部分，分别对应E_2 页和E_∞ 页。其他图表不包括v_1-周期类。

2.8. **谱** *mmf*/τ。 考虑余纤维序列

$$\Sigma^{0,-1} mmf \xrightarrow{\tau} mmf \xrightarrow{i} mmf/\tau \xrightarrow{q} \Sigma^{1,-1} mmf \tag{2.12}$$

mmf-模。谱 *mmf*/τ是一个双胞腔的 *mmf*-模，也就是说，它由两个 *mmf* 的副本构成。我们将 i 称为底胞腔的包含映射，将 q 称为到顶胞腔的投影。

mmf/τ 的 mANss 具有特别简单的代数形式。E_2页同构于 E_2页的经典 Adams-Novikov 谱序列（针对 *tmf*），但多出了第三个次数。然而，这个额外次数不携带任何额外信息，因为它等于总次数的一半，即茎与 Adams-Novikov滤过之和。

此外， *mmf*/τ 的 mANss 退化。不存在微分，因此 E_∞页等于 E_2页。更好的是，出于次数原因，不存在可能的隐藏扩张。因此， *mmf*/τ 的同伦同构于 E_2页的经典 Adams-Novikov 谱序列（针对 *tmf*）。因此，我们将 *mmf*/τ的同伦视为已知，因为它完全是代数信息。本段讨论的结果是 *tmf* 版本的 [Isa19，第6节2], 中针对球谱陈述的结果。

我们使用表 2 中的记号来描述 $\pi_{*,*}mmf/\tau$ 中的同伦元素。另一方面，对于 $\pi_{*,*}mmf$ 中的元素，我们需要更加谨慎地使用记号。我们可以通过给出 mANss E_∞-页中的检测元素，来指定 $\pi_{*,*}mmf$ 中的元素，

但这只能将同伦元素确定到高滤过。有关 ,mmf 中元素选择的更多讨论，请参见第 2.6 节。

mmf 的 mAss mmf/τ 同构于代数 Novikov 谱序列；对于后者，我们有完整的信息 [Bae]。这是 tmf 中 [GWX21],关于球谱结果的一个版本。

2.9. **包含映射与投影**。 我们将更详细地讨论来自方程（2.12）的包含映射 i 和投影 q 。其中许多思想最早以更初步的形式出现在 [Isa19第 5] 章。

我们已经观察到，i 和q 都是mmf-模映射。注意，包含映射i 是环映射，但投影q 不是。它们在动机 Adams-Novikov 谱序列之间诱导出映射。事实上，这些谱序列映射是 mANss 上的模映射（对于mmf）。类似地，所诱导的同伦群映射是 $\pi_{*,*}mmf$-模映射。

我们用计算术语描述底胞腔的包含映射$i:\ mmf\ \to mmf/\tau$。如果 α 是一个不是 τ 的倍数的同伦元素，那么$i(\alpha)$ 是 mANssE_2-页上检测 α 的一个元素。另一方面，如果 α 是 τ 的倍数，那么 $i(\alpha)$ 为零。这一事实与如下观察密切相关：动机 Adams-Novikov 谱序列与 τ-Bockstein 运算谱序列相同。

表3 给出了i的若干取值。例如，我们有$i(\eta)\ = h_1$。事实上，我们定义表格中间列的元素，使其在i下具有适当的取值。

为后续使用，我们描述$q:mmf/\tau\ \to \Sigma^{1,-1}mmf$是一个$mmf$-模映射所带来的计算含义。设 α 是$\pi_{*,*}mmf$中的一个元素，设x 是$\pi_{*,*}mmf/\tau$中的一个元素。对象mmf/τ是一个右mmf-模，并且

$$x\cdot\alpha = x\cdot i(\alpha),$$

其中，左侧的点表示模作用，右侧的点表示环谱mmf/τ的乘法。于是我们有

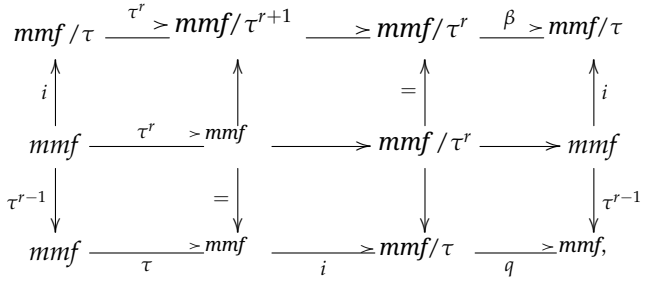
$$q(x)\cdot\alpha = q(x\cdot\alpha) = q(x\cdot i(\alpha)), \tag{2.13}$$

其中，左侧的点表示mmf中的乘法；中间的点表示mmf-模在mmf/τ上的作用；右侧的点表示mmf/τ中的乘法。

我们需要对 q 的取值作出精确表述。我们所需的表述与 [BHS19，定理 9.19(1c)]，的内容基本相同，我们将其改写成一种对我们更方便的形式。

命题 2.14。 设 x 是 $mANss$ 的 E_2-页上的一个元素，且不能被 τ 整除，并设存在一个非零的动机阿达姆斯–诺维科夫微分 $d_{2r+1}(x)\ = \tau^r y$。若将 x 视为 $\pi_{*,\ *}mmf/\tau$ 中的一个元素，则 $\pi_{*,\ *}mmf$ 中的元素 $q(x)$ 在 $mANss$ 的 E_∞-页上由 $-\tau^{r-1}y$ 检测。

证明。 证明是对图式右侧进行追逐



其中各行都是余纤维序列。我们从底行中的元素 $x \in \pi_{*,*}\mathrm{mmf}/\tau$ 开始。根据 [BHS19，定理 9.19]，由于 x 在 E_{2r+1}页上存活，该元素可以提升到中行的 mmf/τ^r 中。映射 β 就是 [BHS19，定理 9.19], 中提到的“Bockstein 运算”，因此我们得到：图式右上角的 $\beta(x)$ 等于 $-y$。然后， $-y$ 提升为中行中的元素 $\pi_{*,*}\mathrm{mmf}$，该元素由 $-y$ 检测。最后，乘以 τ^{r-1} 以得到 q(x)。■

备注 2.15。 命题2.14 要求x 支持一个非零 Adams-Novikov 微分。另一方面，假设x 是一个永久循环。那么x 属于i的像，并且$q(x) = 0$，因为复合qi 为零。

2.10. **隐藏扩张**。 我们简要回顾谱序列中隐藏扩张的概念。我们采用以下隐藏扩张的定义。

定义 2.16。 [Isa19，定义 4.1。2] 设 α 是乘法谱序列目标中的一个元素，并假设 α 由元素 a 在谱序列的 E_∞-页上检测到。由 α 给出的隐藏扩张是 b 和 c 这两个 E_∞-页元素组成的一个对，使得：

(1) 乘积$a \cdot b$ 在E_∞页上等于零。(2) 元素b 检测到目标中的一个元素 β，使得c 检测到乘积 $\alpha \cdot \beta$。(3) 如果目标中存在一个元素 β'，由b' 检测到，并且 $\alpha \cdot \beta'$ 由c检测到，那么b' 的滤子小于或等于b的滤子。

我们将使用投影 q 来简化对隐藏扩张的分析。我们将证明，$\pi_{*,*}mmf$ 中的两个不同乘积是$\pi_{*,*}mmf/\tau$中同一元素的像。因此，它们相等。

方法 2.17。 假设 α 不能被 τ整除，因此 $i(\alpha) = a$，其中 a 是 mANss 中检测 α的一个元素。考虑 mANss 中从 b 到 c 的一个可能的隐藏 α 扩张（针对 mmf）。如果 b 和 c 检测到被 τ 湮灭的类 β 和 γ，那么 β 和 γ 就在到顶胞腔的投影 q 的像中。令 b 和 c 为它们在 $\pi_{*,*}(mmf/\tau)$中的原像。由于后一个对象是代数的且完全已知，我们只需检查即可确定 b 和 c 是否通过扩张相关。

方程（2.13）表明

$$q(\bar{b} \cdot a) = q(\bar{b} \cdot i(\alpha)) = q(\bar{b}) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha,$$

其中，前两个点表示 mmf/τ中的乘法，而后两个点表示 mmf中的乘法。如果 $b \cdot a$ 等于 c，那么 $\beta \cdot \alpha$ 等于 $q(c) = \gamma$，并且存在从 b 到 c的隐藏α 扩张。

另一方面，如果 $b \cdot \bar{a}$ 等于零，那么 $\beta \cdot \alpha$ 等于零，并且不存在从 b 到 c的隐藏 2 扩张。

在实践中，方法 2.17 对于确定隐藏扩张非常有效。其主要限制在于，它只适用于类之间的扩张，而这些类会被 τ 消去。

例 2.18。 $(54, 2, 28)$ 我们通过一个具体例子来说明方法 2.17：54-茎中从 $\Delta^2 h_2^2$ 到 $\tau^4 dg^2$ 的隐藏的 2 扩张。在这个例子中，我们假设读者对相关的 Adams-Novikov 微分有一定了解（见第 3 节）。因此，应将这个例子视为根据先前确定的微分推导出隐藏扩张。

首先，乘以 τg。如果我们在 74-茎中证明存在从 $\tau\Delta^2 h_2^2 g$ 到 $\tau^5 dg^3$ 的隐藏的 2 扩张，那么就可以立即得出所需的 54-茎中的扩张。由于 $\Delta^2 h_2^2 g$ 和 dg^3 都被经典 Adams-Novikov 微分击中，因此这一步已经需要动机技术。

关键在于，所考虑的 74-茎中的两个元素非零，但被 τ. 它们被 τ 湮灭，这是由于微分 $d_5(\Delta^3 h_2) = \tau^2\Delta^2 h_2^2 g$ 和 $d_{13}(2\Delta^3 h_2) = \tau^6 dg^3$,将在后面的命题3.8 和 3.16中证明。

元素 $\tau\Delta^2 h_2^2 g$ 和 $\tau^5 dg^3$ 表示 π_{74},39mmf 中的类，它们被τ消去。因此，这些元素属于 q 的像：π_{75},38$mmf/\tau \to \pi_{74}$,39mmf。

根据命题 2.14，π_{75},38mmf/τ 中的原像分别为 $\Delta^3 h_2$ 和 $2\Delta^3 h_2$ 。这两个元素由一个 2 扩张相联系。因此，它们在 q 下的像也由一个 2 扩张相联系。

2.11. **Toda 括号**。 关于 Massey 乘积和 Toda 括号的背景，包括 May 收敛定理和 Moss 收敛定理的陈述，参见 [Tod62], [May69], [Mos70] 以及 [Isa19], [BK21]。

Adams 或 Adams-Novikov 谱序列的E_2页中的 Massey 乘积属于代数信息，因为它们是 Ext 群结构的一部分。利用 Moss 收敛定理，可以直接从这些 Massey 乘积中推出同伦中的某些 Toda 括号。为了应用这一定理，必须证明不存在交叉微分。每当我们应用 Moss 收敛定理时，都不会有可能的交叉微分。换言之，交叉微分条件出于代数理由得到满足。因此，我们使用的 Toda 括号在这样的意义下是代数的：它们可以直接从 Ext 的代数结构中推出。

注 2.19。 一般而言，Massey 乘积和 Toda 括号被定义为集合，而非元素。形如 $\langle\alpha,\beta,\gamma\rangle = \delta$ 的等式意味着

(1) δ 包含于该括号中；(2) 该括号具有

零不定性。

下面的引理给出了一个 Toda 括号的代数推导的具体例子。关于该记号的解释，请参见表 3 。

引理 2.20。 $(8,3,5)$ 在 $\pi_{8,5}mmf$ 中，*Toda* 括号 $\langle\nu,\eta,\nu\rangle$ 由 c 检测到，且没有不定性。

证明。 证明分为以下几个步骤：

(1) 在 mANss 的E_2页建立 Massey 乘积 $c = \langle h_2,h_1,h_2\rangle$ 。(2) 检查不存在交叉微分。(3) 检查 Toda 括号 $\langle\nu,\eta,\nu\rangle$ 定义良好，且没有不定性。(4) 将 Moss 收敛定理应用于该 Massey 乘积，并推导出所需的 Toda 括号。

对于步骤（1），我们检查以下陈述：

（a）由于 mANss 的 mmf 的 E_2 页中存在关系 $h_1h_2 = 0$，Massey 乘积是良定义的（见图3）。（b）元素 c 包含在 Massey 乘积 [Bau08，方程（7.3）] [Bae]中。（c）不定性显然为平凡。更具体地说，不定性等于 $h_2 \cdot E_2^{5,1,3}$。$E_2^{5,1,3}$ 的唯一非零元素是 $h_1v_1^2$，和 $h_2 \cdot h_1v_1^2 = 0$。后一关系在动机代数Novikov谱序列的 E_2 页中就已经成立了 [Bae]。

对于步骤（2），我们需要检查关系 h_1h_2 在次数（4,2,3）中的交叉微分。我们要寻找次数为（5，f，3）的非零 Adams-Novikov 微分，其中 $f < 1$。不存在此类微分的可能源（见图 3）。

对于步骤 (3)，我们检查 Toda 括号是定义良好的，因为出于次数原因，$\eta\nu$ 在 π_4、3mmf 中为零。不定性等于 $\nu \cdot \pi_5$、3mmf，出于次数原因它也为零。

对于步骤 (4)，我们应用 Moss 收敛定理。该定理表明，存在一个位于 $\langle h_2,h_1,h_2\rangle$ 中的元素，它是一个永久循环，并且检测 $\langle \nu,\eta,\nu\rangle$ 中的一个元素。由于 Massey 乘积和 Toda 括号都不存在不定性，该永久循环必定是 c。■

3. 微分

本节计算 *mmf* 的 mANss 中的所有微分，并在此过程中仅在必要时证明隐藏扩张和 Toda 括号。我们的结果按照逻辑顺序呈现，因此每个证明只依赖于前面的结果。稍后在第 4 节，我们将对隐藏扩张进行更详尽的研究。

定理 3.1。 表 *6* 列出了每个 *mANss* E_r-页上所有不可分解元素的全部非零微分。

证明。 这些微分将在本节后面的各个命题中得到证明。表 6 的最后一列指出了证明每个微分的具体命题。

有些不可分解元素不支持微分。在大多数情况下，这由次数原因得出，即不存在可能的目标。命题 3.30 处理了两个稍微更为困难的情形。■

所有微分都可由对表 6 中所列微分直接应用 Leibniz法则推出。

3.1. d_3**微分**。

命题 3.2. $(5,1,3)\ d_3(h_1v_1^2) = \tau h_1^4$。

证明。 在 mAss E_2-页中，h_1^4 是一个非零元素，且被 τ 湮灭。经检查，h_1^4 对应于 mANss 中同名的元素。因此， τh_1^4 必定是某个 Adams-Novikov 微分的目标，而可能性只有一种。■

命题 3.3. $(12,0,6)\ d_3(4a) = \tau Ph_1^3$。

由于次数原因，$\mathrm{d_3(P)} = 0$。因此，命题 3.2 表明 $\mathrm{d_3(P\cdot h_1v_1^2)} = \tau \mathrm{Ph_1^4}$。在 Adams-Novikov E_2-页中，我们有关系 $\mathrm{P\cdot h_1v_1^2 = h_1\cdot 4a}$。注意，这个关系源自代数 Novikov 谱序列 [Bae]中从 $\mathrm{h_0^2a}$ 到 $\mathrm{Ph_1^4}$ 的隐藏 $\mathrm{h_1}$ 扩张。因此，$\overline{4a}$ 也必须支持一个 $\mathrm{d_3}$ 微分，而可能性只有一种。■

Leibniz法则结合命题 3.2 和命题 3.3，推出了另外一些 d_3 微分。显然，其他乘法生成元不支持 d_3 微分。

备注 3.4。 所有 d_3 微分都是 h_1-周期性的，即可以在 mANss 的局部化 E_2-页上计算，其中 h_1 被逆化。这个局部化谱序列计算 η-周期谱 $mmf[\eta^{-1}]$的同伦。参见 [GI15，第6节。1]相关讨论。

3.2。 **对应对**。 早先在第 2.5 节中，我们讨论了 mANss 和 mAss 中相互对应的元素这一概念。在计算出 d_3 微分后，我们现在可以确立若干对应对，这些对应对将在后续论证中使用。

定理 3.5。 表*4* 列出了一些相互对应的元素对。

表 4：动机Adams和动机Adams-Novikov谱序列中的一些对应元素

mANss次数	mANss 元素	mAss 元素	mAss次数
(0, 0, 0)	2	h_0	(0, 1, 0)
(1, 1, 1)	h_1	h_1	(1, 1, 1)
(3, 1, 2)	h_2	h_2	(3, 1, 2)
(14, 2, 8)	d	d	(14, 4, 8)
(20, 4, 12)	g	g	(20, 4, 12)
(25, 1, 13)	Δh_1	Δh_1	(25, 5, 13)
(27, 1, 14)	$2\Delta h_2$	an	(27, 6, 14)
(48, 0, 24)	$4\Delta^2$	$\Delta^2 h_0^2$	(48, 10, 24)
(110, 2, 56)	$\Delta^4 d$	$\Delta^4 d$	(110, 20, 56)

证明。 我们详细讨论 $2\Delta h_2$ 与 之间的对应关系。其他大多数对应对都可用本质上相同的论证得到。少数稍微困难一些的情形将在引理3.10 和 3.34中建立。

由于次数原因，mmf 的 mANss 中的 $2\Delta h_2$ 不能支持 Adams-Novikov 微分，也不能被 Adams-Novikov 微分命中。（注意， Δh_2 确实支持一个微分。）因此， $2\Delta h_2$ 检测到 α 中的某个元素 π_{27}，$14mmf$。

包含映射 $i : mmf \to mmf/\tau$ 诱导出一个映射

(3.6)
$$\begin{array}{ccc} E_2(mmf) & \longrightarrow & E_2(mmf/\tau) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \pi_{*,*}mmf & \longrightarrow & \pi_{*,*}mmf/\tau \end{array}$$

动机 Adams 谱序列。右侧的谱序列被识别为收敛到经典 Adams-NovikovE_2-页的tmf [GWX21]。

左下角映射到右下角的元素 α 对应于 $2\Delta h_2$。后一个元素由右上角滤子 6 中的 an 检测到 [Bae]。因此， α 在左上角的滤子至多为 6 处被检测到。唯一可能的值是 an。■

备注 3.7。 要得出 $2\Delta h_2$ （以及其他元素）不支持 Adams-Novikov 微分，需要预先了解 d_3 微分。例如，可以设想 $d_{25}(2\Delta h_2) = \tau^{12}h_1^{26}$。然而，我们已经知道，$\tau^{12}h_1^{26}$被微分 $d_3(\tau^{11}h_1^{22}\cdot h_1v_1^2)$击中。

3.3. d_5 **微分**。 确定所有 d_3 微分后，便可以机械地计算 E_4页。到 22-茎为止，由于次数原因，不可能再有其他微分，因此在该范围内，E_4页等于E_∞页。

命题 3.8。 $(24,0,12)$ $mANss$ 的 E_2页在次数 $(24,0,12)$处存在一个生成元 Δ，使得 $d_5(\Delta) = \tau^2 h_2 g$。

证明。 mAss 元素 h_2g 在 τ^2 E_2-页上被湮灭。此外，由于 h_2g 存在于 $\overline{mmf/\tau}$ 的同伦中， τh_2g 在 mAss 中不支持隐藏的 τ 扩张。更确切地说，到顶胞腔的投影将 τh_2g 映射为 τh_2g，因此 τh_2g 必然检测出被 τ 湮灭的同伦元素。

mANss 元素 h_2g 对应于 mAss 元素 h_2g，这是因为表 4 和命题 2.8。因此， $\tau^2 h_2g$ 必定被某个 Adams-Novikov 微分命中。唯一的

可能性是一个源位于次数 (24, 0,12) 的d_5微分。由于 $\tau^2 h_{2g}$ 不是 2 的倍数，该微分的源必定是一个生成元。■

注 3.9。 (24, 0,12) 命题 3.8 并不能唯一确定 Δ。由于 $4\tau^2 h_{2g}$ 在 mANss E_2页中为零， Δ 只能在模 4 的意义下确定。稍后在备注 5.8中，我们将进一步细化 Δ的定义。另请注意， Δ 的选择取决于先前对 h_2,的选择，如备注 2.2所述。

Leibniz 法则与命题 3.8共同推出了其他 d_5 微分。E_5页的其他乘法生成元不支持微分。

尤其值得注意的是这个微分

$$d_5(\Delta^2) = 2\Delta d_5(\Delta) = 2\tau^2 \Delta h_{2g}.$$

这个简单的计算是 Adams-Novikov 版本的 Bruner定理，涉及 Adams 微分与代数平方运算之间的相互作用 [BMMS86] [Bru84]。然而，其对应的 Adams 微分 $d_2(\Delta^2) = \tau^2$并不容易通过直接分析 Adams 谱序列得到 [BR21]。困难在于， Δ^2 并非某个代数平方运算的值，因为 Δ 并未出现在 Adams E_2页中。通过将命中 $\tau^2 h_{2g}$ 的微分从代数阶段“推迟”到拓扑阶段，我们可以更容易地论证 Δ^2上的微分。

引理 3.10。 $(48, 0,24)$ *mmf* 的 *mANss* 中的元素 $4\Delta^2$ 对应于 *mmf* 的 *mAss* 中的 $\Delta^2 h_0^2$。

证明。 已知 $d_5(\Delta^2) = 2\tau^2 \Delta h_{2g}$ 是 Leibniz法则和命题 3.8的推论，我们得到 $4\Delta^2$ 由于次数原因不支持 Adams-Novikov 微分。（注意， $2\Delta^2$ 确实支持一个微分，但我们目前不需要知道这一点。）注意， $4\Delta^2$ 在代数 Novikov 谱序列中由 $\Delta^2 h_0^2$,检测到，其滤子为 10。利用定理 3.5证明中的论证，我们得到$4\Delta^2$ 对应于 mAss 中一个滤子至多为 10 的元素。然而，有三种可能性： Δ^2、 $\Delta^2 h_0$, 和 $\Delta^2 h_0^2$。

图式（3.6）的顶部水平映射将 Δ^2 和 $\Delta^2 h_0$ 映射到同名元素。这些元素在 Δ^2 和 $2\Delta^2$ Adams-Novikov E_2页上检测到它们。这意味着$4\Delta^2$ 不可能对应于 Δ^2 或 $\Delta^2 h_0$。 ■

3.4. d_7 **微分**。 本节的主要目标是确立命题 d_7 中的一些微分，以及命题 3.14和命题3.21中的微分。为了得到这些微分，我们需要一些隐藏扩张和一些后续微分。我们先确立这些其他结果，以保持严格的逻辑顺序。

引理 3.11。 $(3, 1,2)$ 存在一个从 2 扩张 $2h_2$ 到 τh_1^3的隐藏扩张。

证明。 根据表 4 和命题 2.8， mANss 元素 $2h_2$ 对应于 mAss 元素 $h_0 h_2$。元素 $h_0 h_2$ 在 mAss h_0 中支持一个扩张 E_2页，因此 $2h_2$ 必须在 mANss 中支持一个 2 扩张。这个扩张只有一个可能的目标。 ■

注 3.12. 引理 3.11 中的隐藏扩张是由元素 $2h_{2g}^k$ 到元素 $\tau h_1^3 g^k$的一族无穷多个相似隐藏扩张中的第一个。对于 $k \geq 1$， 这些扩张是“奇异的”，因为它们在经典情形下并不存在：$2h_{2g}^k$ 和$h_1^3 g^k$ 是经典 Adams-Novikov 微分的目标。

引理 3.13。 $(27, 1,14)$ 存在从 $2\Delta h_2$ 到 $\tau \Delta h_1^3$ 的隐藏的 *2* 扩张。

证明。 我们已经在表 4 中观察到， $2\Delta h_2$ 和 $\Delta h_1 \cdot h_1^2$ 分别对应于 一个 以及 Δh_1^3 在 mAss 中。在 mAss E_2- 页中，我们有关系式 $h_0 \cdot$ 一个 $= \tau \Delta h_1^3$。因此，相应的 Adams-Novikov 元素之间必然存在一个隐藏的 2 扩张。 ■

命题 3.14。

(1) $(24,0,12)\ d_7(4\Delta) = \tau^3 h_1^3 g.$
(2) $(48,0,24)\ d_7(2\Delta^2) = \tau^3 \Delta h_1^3 g.$

证明。 命题 3.8指出， $\tau^2 h_2 g$ 被一个 Adams-Novikov 微分命中，因此 $2\tau^2 h_2 g$也被一个 Adams-Novikov 微分命中。注3.12 指出，从 $2h_2 g$ 到 $\tau h_1^3 g$存在一个隐藏的 2 扩张。因此， $\tau^3 h_1^3 g$ 被一个微分命中，并且这个微分只有一个可能的源。

第二个微分的证明基本相同。我们需要从 $2\Delta h_2 g$ 到 $\tau \Delta h_1^3 g$的一个隐藏的 2 扩张，这由引理 3.13 以及乘以 g 得出。 ■

注 3.15。 命题 3.8 和命题3.14 表明， $2\tau h_2 g^k$ 和 $\tau^2 h_1^3 g^k$ 都被 τ湮灭。回顾可知，连接它们的隐藏的 2 扩张是方法 2.17的实例。它们在 mmf/τ 中的原像是 $2\Delta g^{k-1}$ 和 $4\Delta g^{k-1}$，二者通过 2 扩张相关联。

不过请注意，为了确立微分 d_2 （从 τh_1^3 到 $d_7(4\Delta)$），我们需要用到从 $2h_2$ 到 τh_1^3 的隐藏的 2 扩张。引理3.11 需要独立证明，以避免循环论证。

在结束对命题 *3.21*中的 d_7 微分的分析之前，我们先推导一些高阶微分。

命题 3.16。 $(75,1,38)\ d_{13}(2\Delta^3 h_2) = \tau^6 d g^3$。

证明。由于关系 $a^2 n = \tau d \cdot \Delta h_1$ 和 $\Delta h_1 \cdot n = \tau^3 g^2$ [，在 mAss E_2-页上有关系 $ang \cdot an = \tau^4 dg^3$ 。Isa09，定理 4.13]。根据表 4 和命题 2.8，mANss 元素 $2\Delta h_2 g$、 $2\Delta h_2$, d 和 g 分别对应于 mAss 元素 ang、an、d 和 g。这意味着在 mANss 中存在从 $2\Delta h_2 g$ 到 $\tau^4 dg^3$ 的隐藏的 $2\Delta h_2$ 扩张。

利用Leibniz法则和命题3.8，我们已经知道 $2\tau^2 \Delta h_2 g$ 被微分 $d_5(\Delta^2)$击中。因此， $\tau^6 dg^3$ 也必然被某个微分击中。这个微分有两种可能： $d_{11}(\tau \Delta^3 h_1^3)$ 和$d_{13}(\Delta^3 h_2)$。然而， $\tau \Delta^3 h_1^3$ 是永久循环的乘积$\tau(\Delta h_1)^3$ ，所以它不能支持微分。■

注记 3.17。 命题 3.16 的证明包含了方法2.17的一个例子。从 $2\Delta h_2$ 到 $2\tau \Delta h_2 g$ 存在一个隐藏的 $\tau^5 dg^3$扩张。这两个元素都被 τ 湮灭。它们在mmf/τ 上的到顶胞腔的投影的原像分别是 Δ^2 和h_2 ，二者通过一个 $2\Delta h_2$ 扩张相关联。

命题 3.18。 $(56,2,29)\ d_9(\Delta^2 c) = \tau^4 h_1 dg^2$。

证明。 回顾例 2.18 ，其中存在从 $\Delta^2 h_2^2$ 到 $\tau^4 dg^2$ 的隐藏的 2 扩张。该隐藏扩张的论证使用了命题 3.8 和命题 3.16。因此， $\tau^4 h_1 dg^2$ 必须被某个微分击中，因为 $2h_1 = 0$。只有一个可能的微分。 ■

命题 3.19。 在 *mmf* 的 *mAss* 中，我们有如下 *Adams* 微分：

(1) $(48,8,24)\ d_2(\Delta^2) = \tau^2 ang$。
(2) $(96,16,48)\ d_3(\Delta^4) = \tau^8 ng^4$。

证明。 我们从 Adams-Novikov 微分 $d_5(\Delta^2) = 2\tau^2\Delta h_2 g$开始。由表 4 和命题 2.8 可知，$2\Delta h_2 g$ 对应于 mAss 中的元素 ang 。因此， $\tau^2 ang$ 必定被某个 Adams 微分命中，而唯一的可能性是 $d_2(\Delta^2)$等于 $\tau^2 ang$。

接下来，我们应用 Bruner定理关于 Adams 微分与代数平方运算之间相互作用的结果。关于精确且易读的表述，请参见 [BR21，定理 5.6]，不过 [Bru84], [BMMS86] 和 [Mäk 73] 是更早的参考文献。我们将 Bruner定理应用于 $x = \Delta^2$、$r = 2$ 和 $i = 8$；因此$s = 8$、$t = 56$、$v = v(48) = 1$，以及 $a = h_0$。我们得到

$$d_*\,\mathrm{Sq}^8(\Delta^2) = \mathrm{Sq}^9\, d_2(\Delta^2) + h_0\cdot\Delta^2\cdot d_2(\Delta^2) = \mathrm{Sq}^9(\tau^2 ang) + h_0\cdot\Delta^2\cdot\tau^2 ang = \mathrm{Sq}^9(\tau^2 ang).$$

接下来，我们使用代数平方运算的 Cartan 公式，以及公式 $\mathrm{Sq}^2(a) = \tau\Delta h_1$, $\mathrm{Sq}^3(n) = n^2$，和 $\mathrm{Sq}^4(g) = g^2$ [BR21，定理 1.20]，计算 $\mathrm{Sq}^9(\tau^2 ang) = \tau^4\cdot\tau\Delta h_1\cdot n^2\cdot g^2$, 。最后，应用关系 $\Delta h_1\cdot n = \tau^3 g^2$ ，得到 Adams 微分 $d_3(\Delta^4) = \tau^8 n g^4$。■

注记 3.20。 细心的读者可能会质疑我们在命题 3.19的证明中使用 Bruner 定理的动机版本，尽管目前只有该定理的经典版本有已发表的证明。事实上，这一担忧在此处并无关紧要。可以使用经典的 Bruner 定理建立经典 Adams d_3 微分，然后推出该微分的动机版本。

命题 3.21。 $(96,0,48)\ d_7(\Delta^4) = \tau^3\Delta^3 h_1^3 g$。

证明。 表 4 表明，mANss 元素 $4\Delta^2$ 对应于 mAss 元素 $\Delta^2 h_0^2$。因此，命题 2.8 表明，mANss 元素 $16\Delta^4$ 对应于 mAss 元素 $\Delta^4 h_0^4$。

命题 3.19 表明， Δ^4 在 mAss 中不存活。因此， $\Delta^4 h_0^4$ 无法检测被 16 整除的同伦元素。consequently，对应的元素 $16\Delta^4$ 在 mANss 中也无法检测被 16 整除的同伦元素。这意味着 Δ^4 必然支持一个 Adams-Novikov 微分。

这个微分有两种可能的取值： $\tau^3\Delta^3 h_1^3 g$ 和 $\tau^9 h_1 dg^4$。然而，命题 3.18 表明，后一个元素已经被微分 $d_9(\tau^5\Delta^2 cg^2) = \tau^9 h_1 dg^4$击中。■

3.5. d_9 **微分**。 到此为止，我们已经确定了 d_r （$r \le 7$）的所有微分。接下来还需研究高阶微分，尽管一些高阶微分已经在此前的命题中确定。我们继续大致按照 r 值递增的顺序进行，不过为了保持严格的逻辑顺序，偶尔需要使用一些 Toda 括号、隐藏扩张和后续微分。

命题 3.22。 $(171,1,86)\ d_{13}(2\Delta^7 h_2) = \tau^6\Delta^4 dg^3$。

证明。 论证与命题 3.16的证明几乎完全相同。mAss E_2-页关系 $\Delta^4 ang\cdot an = \tau^4\Delta^4 dg^3$ 表明，在 mANss 中，存在从 $2\Delta^5 h_2 g$ 到 $\tau^4\Delta^4 dg^3$ 的隐藏 $2\Delta h_2$ 扩张。我们已经知道， $2\tau^2\Delta^5 h_2 g$ 被微分 $d_5(\Delta^6)$击中。因此， $\tau^6\Delta^4 dg^3$ 也必定被某个微分击中。

这个微分有两种可能：$d_{11}(\tau\Delta^7 h_1^3)$ 以及 $d_{13}(2\Delta^7 h_2)$。前一种可能性被分解式 $\tau\Delta^6 h_1^2\cdot\Delta h_1$ 以及以下观察排除了：$\Delta^6 h_1^2$ 和 Δh_1 都因次数原因在E_{11}页之后仍然存活。■

引理 3.23。 $(150,2,76)$ 存在从 $\Delta^6 h_2^2$ 到 $\tau^4\Delta^4 dg^2$ 的隐藏的2 扩张。

证明。证明类似于例 2.18 中的论证。我们已经从命题 3.8 和 3.22 得知微分 $\mathrm{d}_5(\Delta^7\mathrm{h}_2) = \tau^2\Delta^6\mathrm{h}_2^2\mathrm{g}$ 和 $\mathrm{d}_{13}(2\Delta^7\mathrm{h}_2) = \tau^6\Delta^4\mathrm{dg}^3$。因此，到顶胞腔的投影检测到从 $\tau\Delta^6\mathrm{h}_2^2\mathrm{g}$ 到 $\tau^5\Delta^4\mathrm{dg}^3$ 的隐藏的 2 扩张。最后，使用 $\tau\mathrm{g}$ 乘法推出 $\Delta^6\mathrm{h}_2^2$ 上的隐藏的 2 扩张。■

命题 3.24。

(1) $(80,2,41)\ d_9(\Delta^3 c) = \tau^4\Delta h_1 dg^2$.
(2) $(176,2,89)\ d_9(\Delta^7 c) = \tau^4\Delta^5 h_1 dg^2$.

证明。我们在例 2.18 中看到，$\tau^4 dg^2$ 检测到 2 的某个倍数。因此，$\Delta h_1 \cdot \tau^4 dg^2$必须检测到零，因为 Δh_1 由于次数原因不支持 2 扩张。因此，$\tau^4\Delta h_1 dg^2$ 必须被某个微分击中，而只有一种可能性。

第二个微分的论证几乎完全相同。引理 3.23 表明元素 $\tau^4\Delta^4 dg^2$ 检测到 2 的某个倍数。因此，$\Delta h_1 \cdot \tau^4\Delta^4 dg^2$ 必须检测到零，而只有一个微分能够击中它。■

命题 3.25。$(152,2,77)\ d_9(\Delta^6 c) = \tau^4\Delta^4 h_1 dg^2$。

证明。论证类似于命题3.18的证明。引理 3.23 表明$\tau^4\Delta^4 dg^2$ 检测到 2 的某个倍数。因此，$\tau^4\Delta^4 h_1 dg^2$ 必须被某个微分击中，因为 $2h_1 = 0$。只有一个可能的微分。■

引理 3.26。$(25,1,13)$ *Toda* 括号 $\langle\eta,\nu,\tau^2\bar{\kappa}\rangle$ 由 Δh_1 检测到，其不定性由 P^3h_1检测到。

证明。显然，Toda 括号定义良好，其不定性由P^3h_1 检测到（这是一个v_1-周期元素）。

我们在 *mmf* 的 mAss 中使用 Moss 收敛定理。根据 [Isa09，定义 4.4(1)]，我们在 *mmf* 的 mAss 的 E_2页中得到 Massey 乘积 $\Delta h_1 = \langle h_1, h2, \tau^2 g\rangle$。*mmf* 的 mAss 中不存在可能的交叉微分。

最后，表 4 表明，mAss 元素 h_1, h_2, 和 $\tau^2 g$ 分别检测 η、ν和 $\tau^2\kappa$（另见表3）。■

引理3.27。$(25,1,13)$ 存在从 Δh_1 到 $\tau^2 cg$ 的隐藏 ν 扩张。

证明。引理 2.20 和 3.26 表明，Toda 括号 $\langle\nu,\eta,\nu\rangle$ 和 $\langle\eta,\nu,\tau^2\bar{\kappa}\rangle$ 分别由 c 和 Δh_1 检测到。

隐藏的 ν 扩张由交换关系推出

$$\nu\langle\eta,\nu,\tau^2\bar{\kappa}\rangle = \langle\nu,\eta,\nu\rangle\tau^2\bar{\kappa}.$$

■

引理3.28。$(25,1,13)$ 存在从 $2\Delta h_2$ 到 $\tau^2 cg$ 的隐藏 η 扩张。

证明。如引理 3.27的证明中一样，元素 $\tau^2 cg$ 检测到 $\langle\eta,\nu,\tau^2\kappa\rangle\nu$，而后者等于$\eta\langle\nu,\tau^2\kappa,\nu\rangle$。因此，$\bar{}\tau^2 cg$ 是某个隐藏 η 扩张的目标。这种扩张有两个可能的源：$\tau\Delta h_1^3$ 和 $2\Delta h_2$。前一种可能性被引理 3.13排除，因为该引理表明 $\tau\Delta h_1^3$ 是一个隐藏的 2 扩张的目标。■

命题 3.29。

(1) $(49,1,25)\ d_9(\Delta^2 h_1) = \tau^4 cg^2$。 *(2)*
$(73,1,37)\ d_9(\Delta^3 h_1) = \tau^4\Delta cg^2$。 *(3)*
$(145,1,73)\ d_9(\Delta^6 h_1) = \tau^4\Delta^4 cg^2$。 *(4)*
$(169,1,85)\ d_9(\Delta^7 h_1) = \tau^4\Delta^5 cg^2$。

证明。 由引理 3.28 可知，从 $2\Delta h_2 g$ 到 $\tau^2 c g^2$存在一个隐藏的 η 扩张。命题 3.8和 Leibniz法则表明，$d_5(\Delta^2) = 2\tau^2\Delta h_2 g$。因此， $\tau^4 c g^2$ 必然被某个微分击中，而可能性只有一种。

在确定了第一个微分后，我们可以计算出

$$d_9(\Delta^3 h_1^2) = \Delta h_1 \cdot d_9(\Delta^2 h_1) = \tau^4 \Delta h_1 c g^2.$$

由于 $\Delta^3 h_1^2 = \Delta^3 h_1 \cdot h_1$, , 可知 $d_9(\Delta^3 h_1)$ 等于 $\tau^4 \Delta c g^2$。

类似地,

$$d_9(\Delta^7 h_1^2) = \Delta^5 h_1 \cdot d_9(\Delta^2 h_1) = \tau^4 \Delta^5 h_1 c g^2,$$

由此可知 $d_9(\Delta^7 h_1)$ 等于 $\tau^4\Delta^5 c g^2$。然而，我们需要注意到 $d_9(\Delta^5 h_1)$ 为零。$d_9(\Delta^5 h_1)$ 唯一可能的非零值是 $\tau^4\Delta^3 c g^2$, , 但由 $\tau^4\Delta^3 c g^2$ 支持命题 3.24 中的 d_9 微分这一事实可排除这种情况。

最后，注意 $d_9(\Delta^7 h_1^2) = \Delta h_1 \cdot d_9(\Delta^6 h_1)$。$d_9(\Delta^7 h_1^2)$ 的值已在上一段中计算出。因此，$d_9(\Delta^6 h_1)$ 等于 $\tau^4\Delta^4 c g^2$。■

命题 3.30。

(1) $d_9(\Delta^4 c) = 0$.

(2) $d_9(\Delta^5 c) = 0$.

证明。 由命题 3.29 可知， $\tau^4\Delta^4 c g^2$ 和 $\tau^4\Delta^5 c g^2$ 是 d_9 微分的目标，因此它们不能承受 d_9 微分。这意味着 $\Delta^4 c$ 和 $\Delta^5 c$ 不能承受d_9微分。 ■

Leibniz法则，连同命题 3.24、3.25、3.29和3.30中给出的微分，确定了所有 d_9 微分。

3.6. d_{11}**微分**。

引理 3.31。 $(14,2,8)$ 存在一个从 d 到 $\tau h_1^2 g$ 的隐藏 ϵ 扩张。

证明。 我们将证明存在一个从 $h_1 d$ 到 $\tau h_1^3 g$ 的隐藏 ϵ 扩张。所需的扩张立即可得。

在 mANss 的$h_1 c = h_2^3$ E_2-页中，关系式蕴含 $\eta\epsilon$ 等于 ν^3。此外，关系式$h_2^2 d = 4g$ 蕴含 $\nu^2\kappa = 4\kappa$。于是

$$\eta\epsilon\kappa = \nu^3\kappa = 4\nu\bar{\kappa} = \tau\eta^3\bar{\kappa}.$$

最后一个等式用到了来自 $2h_2$ 到 τh_1^3, 的隐藏的 2 扩张，如引理 3. 11. ■

引理 3.32. $(39,3,21)$ 存在一个从 $\Delta h_1 d$ 到 $\tau^3 h_1^2 g^2$ 的隐藏 ν 扩张.

证明。 元素 $\Delta h_1 d$ 检测到乘积 $\eta_1 \cdot \kappa$。引理 3.27 蕴含 $\nu \cdot \eta_1 \cdot \kappa$ 等于$\tau^2\epsilon\kappa\kappa$。引理 3.31 蕴含这个最后的乘积等于 $\tau^3\eta^2\kappa^2$，它由$\tau^3 h_1^2 g^2$检测到。 ■

命题 3.33。

(1) $(62,2,32)$ $d_{11}(\Delta^2 d) = \tau^5 h_1 g^3$。 *(2)*

$(158,2,80)$ $d_{11}(\Delta^6 d) = \tau^5\Delta^4 h_1 g^3$。

证明。元素 $\tau^5 h_1^2 g^3$ 检测到 $\tau^5\eta^2\kappa^3$。引理 3.32 蕴含 $\tau^5\eta^2\kappa^3$ 等于 $\tau^2\nu\kappa \cdot \eta_1 \cdot \kappa$。由命题 3.8 可知， $\tau^2\nu\kappa$ 为零。因此， $\tau^5 h_1^2 g^3$ 被某个微分命中。唯一的可能性是 $d_{11}(\Delta^2 h_1 d) = \tau^5 h_1^2 g^3$。由此可得 $d_{11}(\Delta^2 d) = \tau^5 h_1 g^3$。

对于第二个公式，乘以永久循环 $\Delta^4 h_1$, 可得 $d_{11}(\Delta^6 h_1 d)$等于 $\tau^5\Delta^4 h_1^2 g^3$。因此，$d_{11}(\Delta^6 d)$ 等于 $\tau^5\Delta^4 h_1 g^3$。■

3.7. d_{13} **微分**。 我们已经在命题d_{13} 中确立了一些微分，命题3.16 和 3.22 中的结果之所以需要，是因为我们要利用它们来计算较短的微分。现在我们完成对d_{13} 微分的计算。

引理 3.34。 $(110,2,56)$ *mmf* 的 *mANss* 中的元素 $\Delta^4 d$ 对应于 *mmf* 的 *mAss* 中同名的元素。

证明。 我们已经分析了长度为 11 或更短的所有可能的 Adams-Novikov 微分，并且 $\Delta^4 d$ 上不存在其他可能的微分值。因此， $\Delta^4 d$ 是 *mmf* 的 mANss 中的永久循环。

定理3.5的证明中给出的论证适用。mANss 元素 $\Delta^4 d$在 Adams E_2-页的滤子 20 中被检测到，对象为 mmf/τ。因此， $\Delta^4 d$ 对应于 mAss 中 Adams 滤子至多为 20 的一个元素。mAss 中只有一个具有足够低滤子的可能元素。 ■

引理 3.35。

(1) $(39,3,21)$ 存在从 $\Delta h_1 d$ 到 $2\tau^2 g^2$ 的隐藏 η 扩张。*(2)* （$135,3,69$）存在从 $\Delta^5 h_1 d$ 到 $2\tau^2\Delta^4 g^2$ 的隐藏 η 扩张。

证明。 表 4表明，元素 Δh_1 和 d 在 *mmf* 的 mANss 中对应于 *mmf*的 mAss 中同名的元素。乘积 $\Delta h_1 \cdot h_1 d$ 在 mAss 的 E_2-页非零，在 mAss 的 E_∞-页中也非零，因为没有任何可能的微分能命中它。（请注意，这个乘积在动机背景下非零，但对应的经典乘积在 E_2 页上为零；该页属于 *tmf*的 Adams 谱序列。）

因此， $\Delta h_1 d$ 必定在 *mmf* 的 mANss 中支撑一个隐藏的 η 扩张。这个扩张有三个可能的目标： $\tau^2 g^2, 2\tau^2 g^2$, 和 $3\tau^2 g^2$。第一种和最后一种可能性可由关系 $2\eta = 0$排除。

第二个扩张的论证几乎相同。表 4 和命题 2.8表明，mANss 元素 $\Delta^5 h_1 d$ 对应于 mAss 元素 $\Delta^4 \cdot \Delta h_1 \cdot d$。乘积 $\Delta^4 \cdot \Delta h_1 \cdot h_1 d$ 在 mAss 的 E_∞-页非零，因此 $\Delta^5 h_1 d$ 必定支撑一个隐藏的 η扩张。这个扩张唯一可能的目标是 $2\tau^2\Delta^4 g^2$。 ■

命题 3.36。

(1) $(81,3,42)$ $d_{13}(\Delta^3 h_1 c) = 2\tau^6 g^4$.
(2) $(177,3,90)$ $d_{13}(\Delta^7 h_1 c) = 2\tau^6\Delta^4 g^4$.

证明。 引理 3.35表明，存在一个隐藏的 η 扩张，从 $\Delta h_1 d g^2$ 到 $2\tau^2 g^4$。命题 3.24 表明， $\tau^4\Delta h_1 d g^2$ 会被一个微分击中。因此， $2\tau^6 g^4$ 也必定会被一个微分击中。这个微分只有一个可能的源。

第二个公式的证明类似。从 $\Delta^5 h_1 d g^2$到 $2\tau^2\Delta^4 g^4$存在一个隐藏的 η 扩张。由于 $\tau^4\Delta^5 h_1 d g^2$ 会被一个微分击中， $2\tau^6\Delta^4 g^4$ 也必定会被一个微分击中。■

3.8. d_{23}**微分**。

引理 3.37。 $(75,3,38)$ 存在一个隐藏的 η_1 扩张，从 $\tau\Delta^3 h_1^3$ 到 $\tau^9 g^5$。

证明。 根据表 4，mANss 元素 Δh_1 和 g 对应于 mAss 中同名的元素。在 mAss E_2-页中， [Isa09中的定理 4.13]所给出的关系意味着 $\tau(\Delta h_1)^4 = \tau^9 g^5$。因此，在 mANss 中， $\tau^9 g^5$ 检测到乘积 $\tau\eta_1^4$。另一方面， $\tau\Delta^3 h_1^3$ 在 mANss 中检测到乘积 $\tau\eta_1^3$。■

备注 3.38。 $(75, 3, 39)$ 请注意， $\Delta^3 h_1^3$ 不支持隐藏扩张。相反，它支持非隐藏延拓，因为 $\Delta^4 h_1^4$ 非零。然而， $\Delta^4 h_1^4$ 被 τ 湮灭，这使得在 $\tau\Delta^3 h_1^3$ 上存在隐藏扩张。

命题 3.39。 $(121, 1, 61)$ $d_{23}(\Delta^5 h_1) = \tau^{11} g^6$。

证明。 引理 3.37 的隐藏扩张表明，存在一个隐藏的 η_1 扩张，从 $\tau\Delta^3 h_1^3 g$ 到 $\tau^9 g^6$。我们已经知道，由于命题 $\tau^3\Delta^3 h_1^3 g$ 上的微分 $d_7(\Delta^4)$ （见命题 3.21），该元素为零。因此， $\tau^{11} g^6$ 必定是某个微分的值，而只有一种可能性。 ■

4. 隐藏扩张

在第 3 节中，我们在 *mmf* 的 mANss 中确定了若干隐藏扩张，作为计算微分的步骤。在本节中，我们通过 2、 η、以及 ν，完成对所有隐藏扩张的分析。我们的工作并未完全确定 $\pi_{*,\ *}mmf$的环结构，因为还存在由其他元素产生的隐藏扩张。除一个小的不确定性外， $\pi_* tmf$ 的完整环结构已在 [BR21]中确定。

定理 4.1。 除去 g 的倍数和 Δ^8外，表 7、8 和 9 列出了 *mANss* 中 *mmf* 的所有隐藏扩张，具体由 2、 η以及ν 给出。

证明。 前面的结果确立了一些非零隐藏扩张，因为我们需要利用它们计算 Adams-Novikov 微分。其余的非零隐藏扩张将在以下结果中证明。表格的最后几列指出了各个扩张对应的具体证明。

有一些可能的隐藏扩张最终并未发生。其中大多数可能性都可以利用方法 2.17排除。例如，考虑从 η到 $\tau\Delta h_1^3$ 的可能隐藏 $\tau^2 cg$扩张。由于乘以 τg，我们可以改为考虑从 η 到 $\tau^2\Delta h_1^3 g$ 的可能隐藏 $\tau^3 cg^2$扩张。后面这两个元素都被 τ湮灭，因此它们属于到顶胞腔的投影的像。通过检查，在 η的同伦中，在相应次数上不存在从 mmf/τ 出发的扩张。

还有少数几种零散情况，但它们的证明很直接。例如 le,

- （65, 3, 34）从 $\Delta^2 h2d$到 $\tau^3\Delta h1g^2$ 不存在隐藏的 2 扩张，因为后一个元素支持一个$h1$扩张。
- （24, 0, 12）不存在从 8Δ到 $\tau\Delta h31$ 的隐藏 ν扩张，因为第一个元素被 g 湮灭，而第二个元素没有被湮灭。

■

命题 4.2。 表 5 列出了 *mmf* 的 *mANss* 中的一些隐藏扩张。

表 5：由方法 2.17 推导出的一些隐藏扩张

$(s,\ f,\ w)$	源	type	目标	理由	
$(51, 1, 26)$	$2\Delta^2 h_2$	2	$\tau\Delta^2 h_1^3$	$d_5(2\Delta^3) = 2\tau^2\Delta^2 h_2 g$	$d_7\ (4\Delta^3) = \tau^3\Delta^2 h_1^3 g$
$(54, 2, 28)$	$\Delta^2 h_2^2$	2	$\tau^4 dg^2$	$d_5(\Delta^3 h_2) = \tau^2\Delta^2 h_2^2 g$	$d_{13}(2\Delta^3 h_2) = \tau^6 dg^3$
$(99, 1, 50)$	$2\Delta^4 h_2$	2	$\tau\Delta^4 h_1^3$	$d_5(2\Delta^5) = 2\tau^2\Delta^4 h_2 g$	$d_7\ (4\Delta^5) = \tau^3\Delta^4 h_1^3 g$
$(123, 1, 62)$	$2\Delta^5 h_2$	2	$\tau\Delta^5 h_1^3$	$d_5(\Delta^6) = 2\tau^2\Delta^5 h_2 g$	$d_7\ (2\Delta^6) = \tau^3\Delta^5 h_1^3 g$
$(147, 1, 74)$	$2\Delta^6 h_2$	2	$\tau\Delta^6 h_1^3$	$d_5(2\Delta^7) = 2\tau^2\Delta^6 h_2 g$	$d_7(4\Delta^7) = \tau^3\Delta^6 h_1^3 g$
$(51, 1, 26)$	$\Delta^2 h_2$	η	$\tau^2\Delta cg$	$d_5\ (\Delta^3) = \tau^2\Delta^2 h_2 g$	$d_9(\Delta^3 h_1) = \tau^4\Delta cg^2$
$(99, 1, 50)$	$\Delta^4 h_2$	η	$\tau^9 g^5$	$d_5\ (\Delta^5) = \tau^2\Delta^4 h_2 g$	$d_{23}(\Delta^5 h_1) = \tau^{11} g^6$
$(123, 1, 62)$	$2\Delta^5 h_2$	η	$\tau^2\Delta^4 cg$	$d_5(\Delta^6) = 2\tau^2\Delta^5 h_2 g$	$d_9(\Delta^6 h_1) = \tau^4\Delta^4 cg^2$

表 5：由方法推导出的一些隐藏扩张2.17

(s,f,w)	源	type	目标	理由	
(124, 6, 63)	$\tau^2\Delta^4 cg$	η	$\tau^9\Delta h_1 g^5$	$d_9(\Delta^6 h_1)=\tau^4\Delta^4 cg^2$	$d_{23}(\Delta^6$时$_1^2)=\tau^{11}\Delta$时$_1$克^6
(129, 3, 66)	$\Delta^5 h_1 c$	η	$\tau^7\Delta^2 h_1^2 g^4$	$d_9(\Delta^7$小时$_1^2)=\tau^4\Delta^5$小时$_1$厘^2	$d_{23}(\Delta^7 h_1^3)=\tau^{11}\Delta^2 h_1^2 g^6$
(147, 1, 74)	$\Delta^6 h_2$	η	$\tau^2\Delta^5 cg$	$d_5(\Delta^7)=\tau^2\Delta^6 h_2 g$	$d_9(\Delta^7 h_1)=\tau^4\Delta^5 cg^2$
(161, 3, 82)	$\Delta^6 h_2 d$	η	$\tau^3\Delta^5 h_1^2 g^2$	$d_5(\Delta^7 d)=\tau^2\Delta^6 h_2 dg$	$d_{11}(\Delta^7 h_1 d)=\tau^5\Delta^5 h_1^2 g^3$
(0, 0, 0)	4	ν	τh_1^3	$d_5(\Delta h_2 d)=4\tau^2 g^2$	$d_7(4\Delta g)=\tau^3 h_1^3 g^2$
(48, 0, 24)	$4\Delta^2$	ν	$\tau\Delta^2 h_1^3$	$d_5(\Delta^3 h_2 d)=4\tau^2\Delta^2 g^2$	$d_7(4\Delta^3 g)=\tau^3\Delta^2 h_1^3 g^2$
(51, 1, 26)	$2\Delta^2 h_2$	ν	$\tau^4 dg^2$	$d_5(2\Delta^3)=2\tau^2\Delta^2 h_2 g$	$d_{13}(2\Delta^3 h_2)=\tau^6 dg^3$
(57, 3, 30)	$\Delta^2 h_2^3$	ν	$2\tau^4 g^3$	$d_5(\Delta^3 h_2^2)=\tau^2\Delta^2 h_2^3 g$	$d_{13}(\Delta^3 h_2^3)=2\tau^6 g^4$
(96, 0, 48)	$4\Delta^4$	ν	$\tau\Delta^4 h_1^3$	$d_5(\Delta^5 h_2 d)=4\tau^2\Delta^4 g^2$	$d_7(4\Delta^5 g)=\tau^3\Delta^4 h_1^3 g^2$
(144, 0, 72)	$4\Delta^6$	ν	$\tau\Delta^6 h_1^3$	$d_5(\Delta^7 h_2 d)=4\tau^2\Delta^6 g^2$	$d_7(4\Delta^7 g)=\tau^3\Delta^6 h_1^3 g^2$
(147, 1, 74)	$2\Delta^6 h_2$	ν	$\tau^4\Delta^4 dg^2$	$d_5(2\Delta^7)=2\tau^2\Delta^6 h_2 g$	$d_{13}(2\Delta^7 h_2)=\tau^6\Delta^4 dg^3$
(153, 3, 78)	$\Delta^6 h_2^3$	ν	$2\tau^4\Delta^4 g^3$	$d_5(\Delta^7 h_2^2)=\tau^2\Delta^6 h_2^3 g$	$d_{13}(\Delta^7 h_2^3)=2\tau^6\Delta^4 g^4$

证明。 所有这些扩张都可由方法 2.17得到，使用表 5最后两列中的微分。为作说明，我们讨论表中的第一个扩张。为了得到从 $2\Delta^2 h_2$ 到 $\tau\Delta^2 h_1^3$, 的扩张，我们可以建立一个从$2\tau\Delta^2 h_2 g$ 到 $\tau^2\Delta^2 h_1^3 g$的隐藏 2 扩张。随后所需的扩张立即可得。

元素 $2\tau\Delta^2 h_2 g$ 和 $\tau^2\Delta^2 h_1^3 g$ 在 mmf 的 mANss 的 E_∞ 页被 τ 湮灭。因此，它们检测出 π_{71},37mmf 中的元素，这些元素是 π_{72},36mmf/τ 在到顶胞腔的投影下的像。通过检查，这些原像为 $2\Delta^3$ 和 $4\Delta^3$。后两个元素由一个 2 扩张相连，因此它们的像也由一个 2 扩张相连。

其他扩张的证明基本相同。首先乘以 g 的适当幂。然后回拉到 $\pi_{*,*}mmf/\tau$，在那里通过检查即可看出该扩张。■

注4.3。（124, 6,63）表 5 中从 $\tau^2\Delta^4$cg 到 $\tau^9\Delta$h$_1$g^5 的隐藏 η 扩张值得进一步讨论。注意，Δ^4cg 和 $\tau\Delta^4$cg 支持并非隐藏的 η 扩张。然而， $\tau^2\Delta^4$h$_1$cg 为零，因此 $\tau^2\Delta^4$cg 可以支持隐藏的 η 扩张。这解释了为什么图5 中的 E$_\infty$ 页图表在 124-茎中元素 Δ^4cg 上同时显示了一个 h$_1$ 扩张和一个隐藏的 η扩张。

通过考察同伦元素，可以阐明这一情形的微妙之处。令 α 为 π_{124} 中的一个元素，65mmf 它由 $\Delta^4 cg$ 检测到。元素 $\tau^2\alpha$ 由 $\tau^2\Delta^4 cg$ 检测到。隐藏的 η 延拓意味着， $\tau^2\eta\alpha$ 由 $\tau^9\Delta h_1 g^5$ 检测到。

现在令 β 为 π_{122} 中的一个元素，64，它由 $\Delta^4 h_2^2 g$ 检测到。注意， $\tau^2\beta$ 必须为零，因为 $\tau^2\Delta^2 h_2^2 g$ 为零，并且不存在处于高滤过中的 E_∞-页元素。于是 $\nu\beta$ 由 $h_2\cdot\Delta^4 h_2^2 g$ 检测到，而这等于 $\Delta^4 h_1 cg$。

和 $\nu\beta$ 都由 E_∞-页中的同一个元素检测到，但它们并不相等。第一个乘积不被 τ^2 消去，而后一个乘积被τ^2 消去。事实上， $\eta\alpha$ 与 $\nu\beta$ 之间的差由 $\tau^7\Delta h_1 g^5$ 检测到。这一现象对应于经典关系 $\nu^2\nu_4=\eta\epsilon_4+\eta_1\kappa^4$ [BR21，命题 9。 17]。

注记 4.4。 (65,3,34) 图表 [Bau08] 显示了从 ηh $\Delta^2 d_2$到$\Delta h_1^2 g^2$ 的一个隐藏扩张，位于 66-茎中。根据定义2.16，由于 $\Delta h_1 g^2$ 出现在高滤过中，这并不是隐藏扩张。

尽管如此，这里有一点与乘法结构相关。由于 $\tau^3\Delta h_1 g^2$ 出现在高滤过中，元素 $\Delta^2 h_2 d$ 检测出两个同伦元素。其中一个元素被 η 湮灭，而另一个没有。乘积 $\nu_2\kappa$ 是由 $\Delta^2 h_2 d$检测出的两个同伦元素之一。事实上， $\nu_2\kappa$ 是未被 η 湮灭的那个同伦元素。这是由从 $\Delta^2 h_2$ 到 $\tau^2\Delta cg$ 的隐藏 η 扩张，以及从 Δcg 到 $\tau\Delta h_1^2 g^2$的隐藏 κ 扩张推出的。

命题 4.5。 $(110,2,56)$ 存在从 $\Delta^4 d$ 到 $\tau^6\Delta^2 h_1^2 g^3$ 的隐藏 2 扩张。

证明。 证明是方法 2.17 的一种变体，其中我们使用长正合序列 e

$$\pi_{*,*}mmf \longrightarrow \pi_{*,*}mmf/\tau^2 \longrightarrow \pi_{*-1,*+2}mmf \xrightarrow{\tau^2} \pi_{*-1,*}mmf$$

由余纤维序列诱导

$$mmf \longrightarrow mmf/\tau^2 \longrightarrow \Sigma^{1,-2}mmf \xrightarrow{\tau^2} \Sigma^{1,0}mmf.$$

我们将证明，从 $\tau^4\Delta^4 dg^3$ 到 $\tau^{10}\Delta^2 h_1^2 g^6$ 存在隐藏的2 扩张。所需的 2 扩张立即由乘以 $\tau^4 g^3$ 得到。

回顾命题3.22 ，存在一个微分 $d_{13}(2\Delta^7 h_2) = \tau^6\Delta^4 dg^3$。此外，由命题 3.39 可知，存在一个微分 $d_{23}(\Delta^7 h_1^3) = \tau^{11}\Delta^2 h_1^2 g^6$。

因此， $\tau^4\Delta^4 dg^3$ 和 $\tau^{10}\Delta^2 h_1^2 g^6$ 在 $\pi_{170,88}mmf$ 中检测出被 τ^2 消去的元素。因此，它们在到顶胞腔的投影下，于 $\pi_{171,86}mmf/\tau^2$ 中有原像。通过检查，这些原像为 $2\Delta^7 h_2$ 和 $\tau\Delta^7 h_1^3$。

在 mmf 的 mANss 中，存在一个微分 $d_5(\Delta^7) = \tau^2\Delta^6 h_2 g$。然而，在 mmf/τ^2 的 mANss 中，元素 $\tau^2\Delta^6 h_2 g$ 在 E_2 页已经为零。因此， Δ^7 是 mmf/τ^2 的 mANss 中的永久循环。

回顾由引理 *3.11* 确立的从 $2h_2$ 到 τh_1^3 的隐藏的 2 扩张。乘以 Δ^7 会在 E_∞ 页中为 mmf/τ^2 的 mANss 从 $2\Delta^7 h_2$ 到 $\tau\Delta^7 h_1^3$ 产生一个隐藏的 2 扩张。

最后，应用到顶胞腔的投影，得到从 $\tau^4\Delta^4 dg^3$到 $\tau^{10}\Delta^2 h_1^2 g^6$的隐藏的 2 扩张。■

命题 4.6。 $(50,2,26)$ 存在一个从 $\Delta^2 h_1^2$ 到 $\tau^2\Delta h_1 cg$ 的隐藏 ν 扩张。

证明。 这由 Δh_1 在从 Δh_1 到 $\tau^2 cg$ 的隐藏扩张上的乘法得出，该乘法已在引理3.27中确立。■

接下来的几个引理建立了一些 Toda 括号，我们将利用它们推导出更多隐藏扩张。所有这些 Toda 括号都由代数信息推导而来，即由 mANss E_2 页中的 Massey 乘积推导而来。

引理 4.7。 $(32,2,17)$ *Toda* 括号 $\langle\nu^2,2,\eta_1\rangle$ 由 Δc 检测到，且没有不定性。

证明。 在动机代数 Novikov E_2 页中，我们有 Massey 乘积 $c = \langle h_2^2,h_0,h_1\rangle$ 。May 收敛定理 [May69] [BK21，定理 4.16] 表明$c = \langle h_2^2,2,h_1\rangle$ 在 mANss E_2 页中。乘以 Δ 以得到

$$\Delta c = \langle h_2^2,2,h_1\rangle\Delta = \langle h_2^2,2,\Delta h_1\rangle.$$

第二个等式成立，是因为显然不存在不定性。

不存在交叉微分，因此 Moss 收敛定理 [Mos70，定理 1。2] [BK21，定理 4。16] 意味着 Δc 检测到了 Toda 括号。经检查，该括号没有不定性。■

引理 4.8。 $(128,2,65)$ *Toda* 括号 $\langle \nu_2^2,\ 2,\ \eta_1\rangle$ 由 $\Delta^5 c$ 检测到，且没有不定性

Le .

证明。 如引理 4.8的证明中所述，我们在 mANss E_2页上有 Massey 乘积 $c = \langle h_2^2, 2, h_1\rangle$。乘以 Δ^5 可得

$$\Delta^5 c = \Delta^4\langle h_2^2, 2, h_1\rangle\Delta = \langle \Delta^4 h_2^2, 2, \Delta h_1\rangle.$$

第二个等式成立是因为显然不存在不定性。

不存在交叉微分，因此 Moss 收敛定理 [Mos70，定理 1。2] [BK21，定理 4。16] 表明 $\Delta^5 c$ 检测到该 Toda 括号。显然，该括号没有不定性。 ■

Le引理 4.9。 $(35,7,21)$ *Toda* 括号 $\langle \nu^2, 2, \epsilon\bar{\kappa}\rangle$ 由 $h_1 dg$ 检测到，且没有不定性

.

证明。 我们在动机代数 NovikovE_2页 [Bae]中有 Massey 乘积 $h_1 dg = \langle h_2^2, h_0, cg\rangle$。May 收敛定理 May69] [BK21，定理 4。16] 表明$h_1 dg = \langle h_2^2, 2, cg\rangle$ 在 mANss E_2页上。

不存在交叉微分，因此 Moss 收敛定理 [Mos70，定理 1。2] [BK21，定理 4。16] 意味着 $h_1 dg$ 检测到该 Toda 括号。通过检查可知，该括号没有不定性。 ■

引理 4.10。 （$131,7,69$）该 *Toda* 括号 $\langle \nu_2^2,\ 2,\ \epsilon\bar{\kappa}\rangle$ 由 $\Delta^4 h_1 dg$ 检测到，且没有不定性。

证明。 与引理 4.9的证明一样，我们在 mANss $E_1 dg = \langle h_2^2, 2, cg\rangle$ 中有 Massey 乘积 E_2-页。乘以 Δ^4 得到

$$\Delta^4 h_1 dg = \Delta^4\langle h_2^2, h_0, cg\rangle = \langle \Delta^4 h_2^2, h_0, cg\rangle.$$

第二个等式成立，是因为通过检查可知不存在不定性。

不存在交叉微分，因此 Moss 收敛定理 [Mos70，定理 1。2] [BK21，定理 4。16]意味着 $\Delta^4 h_1 dg$ 检测到该 Toda 括号。通过检查可知，该括号没有不定性。 ■

命题 4.11。 存在隐藏的 ν 扩张：

(1) $(32,2,17)$ 从 Δc 到 $\tau^2 h_1 dg$。 *(2)*

$(128,2,65)$ 从 $\Delta^5 c$ 到 $\tau^2\Delta^4 h_1 dg$。

Proof。 回顾引理 4.7，Toda 括号 $\langle \nu^2, 2, \eta_1\rangle$ 由 Δc 检测。我们有

e

$$\langle \nu^2, 2, \eta_1\rangle\nu = \langle \nu^2, 2, \nu\cdot\eta_1\rangle = \langle \nu^2, 2, \tau^2\epsilon\bar{\kappa}\rangle.$$

第一个等式成立，是因为通过检验可知不存在不定性。第二个等式则由引理 ν 3.27 的隐藏扩张推出。引理 4.9 表明，$\tau^2 h_1 dg$检测最后一个 Toda 括号。

第二个隐藏扩张的证明几乎完全相同。考虑等式

s

$$\langle \nu_2^2, 2, \eta_1\rangle\nu = \langle \nu_2^2, 2, \nu\cdot\eta_1\rangle = \langle \nu_2^2, 2, \tau^2\epsilon\bar{\kappa}\rangle,$$

并使用引理4.8 和引理 4.10。 ■

命题 4.12。 存在隐藏的 ν 扩张：

(1) $(97,1,49)$ 从 $\Delta^4 h_1$ 到 $\tau^9 g^5$。 *(2)*

$(122,2,62)$ 从 $\Delta^5 h_1^2$ 到 $\tau^9\Delta h_1 g^5$。 *(3)*

$(147,3,75)$ 从 $\Delta^6 h_1^3$ 到 $\tau^9\Delta^2 h_1^2 g^5$。

证明。 我们证明第三个隐藏扩张。然后，前两个隐藏扩张可由乘以 Δh_1得到。

命题 4.5 和引理 3.23 表明，存在一个从 4ν 到 $\Delta^6 h_2$ 的隐藏扩张$\tau^{10}\Delta^2 h_{1g}^2 g^5$。我们还知道存在一个从 $2\Delta^6 h_2$ 到 $\tau\Delta^6 h_1^3$, 的隐藏的 2 扩张，如命题 4.2所示。因此，必然存在一个从 ν 到 $\Delta^6 h_1^3$ 的隐藏扩张 $\tau^9\Delta^2 h_{1g}^2 g^5$。 ■

命题 4.13。 $(110,2,56)$ 存在一个从 $\Delta^4 d$ 到 $\tau\Delta^4 h_1^2 g$ 的隐藏 ϵ 扩张。

证明。 我们在引理 3.31 中证明了，存在一个从 ϵ 到 d 的隐藏扩张 τh_{1g}^2。将 $\Delta^4 h_1$ 相乘，可得到一个从 ϵ 到 $\Delta^4 h_1 d$ 的隐藏扩张 $\tau\Delta^4 h_{1g}^2$。最后，利用 h_1 的乘法得到 $\Delta^4 d$上的隐藏扩张。 ■

命题 4.14。 $(135,3,69)$ 存在一个从 $\Delta^5 h_1 d$ 到 $\tau^3\Delta^4 h_1^2 g^2$ 的隐藏 ν 扩张。

证明。 由引理 3.26，元素 Δh_1 检测到 Toda 括号 $\langle\eta,\nu,\tau^2\bar{\kappa}\rangle$。回顾表3 ， κ_4 是 π_{110},56mmf 中的一个元素，由永久循环 $\Delta^4 d$ 检测到。于是元素 $\Delta^5 h_1 d$ 检测到 $\langle\eta,\nu,\tau^2\bar{\kappa}\rangle\kappa_4$。接下来进行交换，得到

$$\nu\langle\eta,\nu,\tau^2\bar{\kappa}\rangle\kappa_4 = \langle\nu,\eta,\nu\rangle\tau^2\bar{\kappa}\cdot\kappa_4.$$

由引理 2.20 可知 $\epsilon = \langle\nu,\eta,\nu\rangle$。另由命题 4.13 可知，存在一个隐藏的 ϵ 扩张，从 $\Delta^4 d$ 到 $\tau\Delta^4 h_{1g}^2$。由此可得 $\epsilon\cdot\tau^2\kappa\cdot\kappa_4$ 由以下元素检测到：$\tau^3\Delta^4 h_{1g}^2 g^2$。 ■

5. 元素 ν_k

经典 $\pi_* tmf$ 在素数 2 处的乘法结构已经完全计算出来，但有一个例外 [BR21，第 19] 页。我们将使用 mANss 来研究 mmf，以解决 2-主乘法结构的最后一部分。

如备注 2.11所述，我们所选择的同伦元素不一定与 [BR21]中的选择严格兼容。不过，我们的选择在相差某些 2 的幂的倍数意义下是一致的。下面在命题5.9、定理 5.10、推论 5.12、命题5.13和命题 5.15中的计算都位于阶至多为 8 的群中，因此可能存在的差异无关紧要。

我们将经常在 π_{20} 中乘以元素 $\tau\kappa$ mmf 的 $\tau\kappa$，以便检测元素和关系。注意，乘以 $\tau\kappa$ 通常并非单射。不过，在我们研究的所有次数中，乘以 $\tau\kappa$ 实际上都是一个同构。

回顾第2.9节中详细讨论过的投影$q : mmf/\tau \to mmf$ 到顶胞腔的映射。我们将大量依赖此映射，将$\pi_{*,*}mmf/\tau$中的代数信息传递为关于$\pi_{*,*}mmf$的同伦信息。

引理5.1。 元素$q(\Delta^{k+1})$ *of* $\pi_{*,*}mmf$由 $-(k+1)\tau\Delta^k h_{2g}$在*Adams-Novikov*滤过5中检测到。

证明。 如果$k+1$ 不是4的倍数，那么我们有非零微分$d_5(\Delta^{k+1}) = (k+1)\tau^2\Delta^k h_{2g}$。命题 2.14 意味着$q(\Delta^{k+1})$ 由 $-(k+1)\tau\Delta^k h_{2g}$检测到。

如果$k+1$ 模8同余于4，那么我们有非零微分$d_7(\Delta^{k+1}) = \tau^3\Delta^k h_{1g}^3$。命题2.14 意味着 $q(\Delta^{k+1})$ 由 $\tau^2\Delta^k h_{1g}^3$ 在滤过7中检测到。这意味着$q(\Delta^{k+1})$ 在滤过5中由零检测到。

如果$k+1$ 是8的倍数，那么Δ^k 是一个永久循环，因此$q(\Delta^{k+1})$ 等于零。这意味着$q(\Delta^{k+1})$ 可由零滤子5检测到。 ■

注 5.2。 为统一起见，我们对所有的k值都陈述了引理5.1 。正如引理的证明所示，实际上根据k的值可分为三种情况。如果$k+1$不是 4 的倍数，那么 $-(k+1)\tau\Delta^k h_{2g}$ 是 mANssE_∞-页中的非零元素。

另一方面，如果 $k+1$ 是 4 的倍数，那么 $-(k+1)\tau\Delta^k h_2 g$ 在 E_∞-页中为零，因为 $\tau\Delta^k h_2 g$ 是一个 4 阶元素。在这些情况下，引理表明，$q(\Delta^{k+1})$ 在滤子 5 中由零检测。换言之，如果 $q(\Delta^{k+1})$ 非零，则它在严格大于 5 的滤子中被检测。事实上，当 $k+1$ 模 8 同余于 4 时，$q(\Delta^{k+1})$ 在滤子 7 中由 $\tau^2\Delta^k h_1^3 g$ 检测。此外，当 $k+1$ 为 8 的倍数时，$q(\Delta^{k+1})$ 为零，因为Δ^{k+1} 是一个永久循环。

引理5.3。 元素 $q(\Delta^{k+1})$ 是 $\tau\kappa$ 的倍数。

证明。 引理 5.1 表明，$q(\Delta^{k+1})$ 由 $-(k+1)\tau\Delta^k h_2 g$检测到。通过检查，$q(\Delta^{k+1})$ 的所有可能取值都是 $\tau\kappa$ 的倍数。■

定义5.4。 令 ν_k 为 π_{24k+3}、$12k+2$*mmf* 中的元素，使得$q(\Delta^{k+1})$ 等于 $-\tau\kappa\cdot\nu_k$。

注意， ν_k 的存在性由引理 5.3保证。乘以 $\tau\kappa$ 在相关次数上是一个同构，因此 ν_k 被唯一确定。为便于后续使用，我们在定义 5.4的定义公式中取负号。

备注5.5。 Bruner 和 Rognes 将 ν_3 和 ν_7 视为元素族 ν_k 中的“荣誉”成员。它们不是乘法生成元； ν_3 非零但可分解，而 ν_7 等于零。定义5.4 还蕴含 ν_7 为零。这是因为注意到$q(\Delta^8)$ 等于零，因为 Δ^8 是一个永久循环。

细心的读者会注意到，元素 ν_k 已经在表3（第 2.6 节）中部分定义过了。下面的引理表明，关于 ν_k 的两种处理方式是相容的。表 3 在 ν_k的定义上留下了一些歧义，而定义 5.4 解决了这一歧义。

引理 5.6。 元素 ν_k 由 $(k+1)\Delta^k h_2$ 在 *Adams-Novikov*滤过 1 中检测到。

证明。 引理 5.1 确定了 mANss E_∞-页上检测 $q(\Delta^{k+1})$的元素。然后，定义 5.4 意味着，$-\tau\kappa\cdot\nu_k$ 由同样的元素检测。乘以τg 在相关次数上是同构，因此 ν_k 的检测元素也就确定了。 ■

备注 5.7。 与备注 5.2类似，引理 5.6 包含三种情况。如果 $k+1$ 不是 4 的倍数，那么 $(k+1)\Delta^k h_2$ 是 mANss E_∞-页上的非零元素。如果 $k+1$ 是 4 的倍数，那么 $(k+1)\Delta^k h_2$ 为零，因为 $\Delta^k h_2$ 是一个 4 阶元素。这意味着，ν_k 如果非零，则在严格大于 1 的滤过中检测到。事实上，当 $k+1$ 模 8 同余于 4 时， ν_k 由$\tau\Delta^k h_1^3$ 在滤过 3 中检测到；而当 $k+1$ 是 8的倍数时， ν_k 为零。

注记 5.8。 在注记 2.2中，我们选择了 h_2，使其检测元素 ν。引理 5.6表明， ν_0 也由 h_2, 检测到，但这并不能保证它等于 ν，因为存在 τh_1^3 处于高滤子中。我们只能得出 ν 与 ν_0 相差一个 4 的倍数。

如果 ν 等于 $5\nu_0$，那么我们计算得到

$$q(5\Delta) = -5\tau\bar{\kappa}\cdot\nu_0 = -\tau\bar{\kappa}\cdot\nu.$$

因此，如有必要，我们可以将 Δ 替换为 5Δ，并且不失一般性地假设 ν_0等于 ν。这一替换与我们先前在注记 3.9中对 Δ 的选择相容；该注记规定 Δ 仅在相差 4 的倍数的意义下确定。

命题 5.9。 $\nu_{k+8} = \nu_k\cdot M.$

证明。 利用方程（2.13），我们有

$$q(\Delta^{k+9}) = q(\Delta^{k+1}\cdot\Delta^8) = q(\Delta^{k+1}\cdot i(M)) = q(\Delta^{k+1})\cdot M = -\tau\overline{\kappa}\cdot\nu_k\cdot M.$$

这里我们使用了$i(M) = \Delta^8$，这等价于如下定义：M 被 Δ^8 检测到（见表 3）。

另一方面，$q(\Delta^{k+9})$ 根据定义 $-\tau\kappa\cdot\nu_{k+8}$等于5.4。最后，在相关次数上，乘以 $-\tau\kappa$ 是一个同构。■

命题 5.9 意味着，出于实际考虑，我们只需考虑以下元素ν_k，其中 $0 \leq k \leq 7$。

定理 5.10。

$$\nu_j\nu_k = (k+1)\nu_{j+k}\nu_0.$$

证明。 证明分为两种情况，取决于$k+1$ 是否为 4 的倍数。首先，我们处理$k+1$ 不是 4 的倍数这一（更有趣的）情形。对于$k+1$ 是 4 的倍数的情况，我们将在下文的独立命题5.13中讨论。这两种情况的证明技巧相似，但细节略有不同。

乘以 $\tau\kappa$ 在相关次数上是同构，因此只需在乘以 $\tau\kappa$ 后证明我们的关系。

利用方程 (2.13)，我们得到

$$q((k+1)\Delta^{j+k+1}h_2) = q(\Delta^{j+k+1}\cdot(k+1)h_2) = q(\Delta^{j+k+1}\cdot i((k+1)\nu_0)) =$$
$$= q(\Delta^{j+k+1})\cdot(k+1)\nu_0 = -\tau\overline{\kappa}\cdot\nu_{j+k}\cdot(k+1)\nu_0.$$

这里我们利用了 $i((k+1)\nu_0) = (k+1)h_2$；换言之，$(k+1)\nu_0$ 可由$(k+1)h_2$检测到。这要求$k+1$ 不是 4 的倍数。否则，$(k+1)\nu_0$ 是 τ 的倍数，且$i((k+1)\nu_0)$ 为零。

现在我们将用另一种方法计算 $q((k+1)\Delta^{j+k+1}h_2)$。我们有 $i(\nu_k) = (k+1)\Delta^k h_2$；换言之，$\nu_k$ 可由非零元素$(k+1)\Delta^k h_2$, 检测到，如引理 5.6 所示。这要求$k+1$ 不是 4 的倍数。否则，ν_k 是 τ 的倍数，且$i(\nu_k)$ 为零。

于是我们有

$$q((k+1)\Delta^{j+k+1}h_2) = q(\Delta^{j+1}\cdot(k+1)\Delta^k h_2) = q(\Delta^{j+1}\cdot i(\nu_k)) = q(\Delta^{j+1})\cdot\nu_k = -\tau\overline{\kappa}\cdot\nu_j\cdot\nu_k.$$

■

备注 5.11。 定理 5.10 中的方程的确切形式由我们的证明结构所引导。也可以写成

$$\nu_i\nu_j = (i+1)\nu\nu_{i+j},$$

这与 [BR21]中的记号更加一致。所有元素 ν_k 都位于奇茎中，因此它们两两反交换。

推论 5.12。 $(246, 2, 124)$ $\nu_4\nu_6 = \nu\nu_2 M$。

证明。 定理 5.10 意味着 $\nu_4\nu_6$ 等于 $7\nu_{10}\nu_0$，根据分次交换律，它等于 $-7\nu_0\nu_{10}$。由备注 5.8 和命题 5.9，后一个表达式等于 $-7\nu\nu_2 M$。最后，$\nu\nu_2 M$ 属于一个 4 阶群，因此 $-7\nu\nu_2 M$ 等于 $\nu\nu_2 M$。■

现在回到定理 5.10 中 $k+1$ 为 4 的倍数的情形。

命题 5.13。 如果 $k+1$ 是4的倍数，那么 $\nu_j\cdot\nu_k = (k+1)\nu_{j+k}\nu_0$。

证明。 首先，设$k+1$是8的倍数，因此 ν_k 为零。元素 ${}^{\nu_{j+k}}\nu_0$ 属于一个阶整除8的群，因此 $(k+1)^{\nu_{j+k}\nu_0}$ 为零。换言之，该等式成立是因为两边都为零。

接下来，令 $k+1$ 模 8 同余于 4。令 α 为 π_{*}中的一个元素，$*mmf$ 且由 $\Delta^k h_1^3$检测到。元素 ν_k 由 $\tau\Delta^k h_1^3$, 检测到，根据备注5.7。由于高滤子中没有元素，我们可以得出 ν_k 等于 $\tau\alpha$。我们有

$$q(\Delta^{j+k+1}h_1^3) = q(\Delta^{j+1}\cdot\Delta^k h_1^3) = q(\Delta^{j+1}\cdot i(\alpha)) = q(\Delta^{j+1})\cdot\alpha = -\tau\overline{\kappa}\cdot\nu_j\cdot\alpha = -\overline{\kappa}\cdot\nu_j\cdot\nu_k.$$

现在我们加入假设：$j+1$ 模 8 不同余于 4。由 $k+1$ 模 8 同余于 4 这一假设可知，$j+k+1$ 模 8 不同余于 7。于是 $\Delta^{j+k+1}h_1^3$ 是一个永久循环，因此 $q(\Delta^{j+k+1}h_1^3)$ 为零。结合上一段中的计算，这意味着 ${}^{\nu_j}\cdot\nu_k$ 为零，因为在相关次数中，乘以 κ 是一个同构。还要注意,$-(k+1)^{\nu_{j+k}\nu_0}$ 为零，因为它属于一个阶数整除 4 的群。

最后，我们必须考虑 $j+1$ 模 8 同余于 4 的情形，即 $j+k+1$ 模 8 同余于 7 的情形。由于命题 2.14 以及微分 $d_{23}(\Delta^{j+k+1}h_1^3) = \tau^{11}\Delta^{j+k-4}h_1^2g^6$，$q(\Delta^{j+k+1}h_1^3)$ 由 $\tau^{10}\Delta^{j+k-4}h_1^2g^6$ 检测。这意味着 $-\kappa\cdot\nu_j\cdot\nu_k$ 由 $\tau^{10}\Delta^{j+k-4}h_1^2g^6$ 检测。因此，${}^{\nu_j}\cdot\nu_k$ 由 $\tau^{10}\Delta^{j+k-4}h_1^2g^5$ 检测。最后，由于 150茎 中的隐藏的 2 扩张及其在 Δ^8 乘法下的倍数（见表 7），这个后一个元素也检测 $(k+1)^{\nu_{j+k}\nu_0}$。■

注5.14。 如证明中所示，命题5.13 的大多数情形成立，是因为方程两边均为零。方程两边均非零，当且仅当 $j+1$和 $k+1$ 模 8 同余于 4。

Bruner 和 Rognes 建立了一些关系，从而减少了其对 ν_k 的定义所产生的歧义。最后，我们将证明，在定义 5.4 中定义的元素满足同样的关系。我们已经在备注 ν_0 5.8 中讨论了对

$$\nu_0 D_4 = 2\nu_4$$
$$\nu_1\nu_5 = 2\nu_0\nu_6$$
$$\nu_2\nu_4 = 3\nu_0\nu_6.$$

第一个公式由命题5.15证明，而后两个公式是定理 5.10 的具体实例。

命题 5.15。 $(99,1,50)$ $\nu_0 D_4 = 2\nu_4$。

证明。 根据引理 5.6，两个乘积都由 $2\Delta^4 h_2$检测。然而，由于 $\tau\Delta^4 h_1^3$ 出现在高滤过中，它们不一定相等。我们将证明$\tau\kappa\cdot\nu D_4$ 等于 $\tau\kappa\cdot 2\nu_4$。所需的关系立即成立，因为乘以 $\tau\kappa$ 在相关次数上是一个同构。

使用方程（2.13），我们得到

$$q(2\Delta^5) = q(\Delta\cdot 2\Delta^4) = q(\Delta\cdot i(D_4)) = q(\Delta)\cdot D_4 = -\tau\overline{\kappa}\cdot\nu\cdot D_4.$$

这里使用了$i(D_4) = 2\Delta^4$，这等价于如下定义：D_4 可由 $2\Delta^4$ 检测到（见表3）。另一方面，我们还有

$$q(2\Delta^5) = q(\Delta^5\cdot 2) = q(\Delta^5\cdot i(2)) = q(\Delta^5)\cdot 2 = -\tau\overline{\kappa}\cdot\nu_4\cdot 2.$$

■

表 6：Adams-Novikov 微分

(s, f, w)	x	r	$d_r(x)$	证明
$(5, 1, 3)$	$h_1v_1^2$	3	τh_1^4	命题 3.2
$(12, 0, 6)$	$4a$	3	τPh_1^3	命题 3.3
$(24, 0, 12)$	Δ	5	τ^2h_2g	命题 3.8
$(24, 0, 12)$	4Δ	7	$\tau^3h_1^3g$	命题 3.14
$(48, 0, 24)$	$2\Delta^2$	7	$\tau^3\Delta h_1^3g$	命题 3.14
$(96, 0, 48)$	Δ^4	7	$\tau^3\Delta^3h_1^3g$	命题 3.21
$(49, 1, 25)$	Δ^2h_1	9	τ^4cg^2	命题 3.29
$(56, 2, 29)$	Δ^2c	9	$\tau^4h_1dg^2$	命题 3.18
$(73, 1, 37)$	Δ^3h_1	9	$\tau^4\Delta cg^2$	命题 3.29
$(80, 2, 41)$	Δ^3c	9	$\tau^4\Delta h_1dg^2$	命题 3.24
$(145, 1, 73)$	Δ^6h_1	9	$\tau^4\Delta^4cg^2$	命题 3.29
（$(169, 1, 85)$	Δ^7h_1	9	$\tau^4\Delta^5cg^2$	命题 3.29
$(152, 2, 77)$	Δ^6c	9	$\tau^4\Delta^4h_1dg^2$	命题 3.25
$(176, 2, 89)$	Δ^7c	9	$\tau^4\Delta^5h_1dg^2$	命题 3.24
$(62, 2, 32)$	Δ^2d	11	$\tau^5h_1g^3$	命题 3.33
$(158, 2, 80)$	Δ^6d	11	$\tau^5\Delta^4h_1g^3$	命题 3.33
$(75, 1, 38)$	$2\Delta^3h_2$	13	τ^6dg^3	命题 3.16
$(81, 3, 42)$	Δ^3h_1c	13	$2\tau^6g^4$	命题 3.36
$(171, 1, 86)$	$2\Delta^7h_2$	13	$\tau^6\Delta^4dg^3$	命题 3.22
$(177, 3, 90)$	Δ^7h_1c	13	$2\tau^6\Delta^4g^4$	命题 3.36
$(121, 1, 61)$	Δ^5h_1	23	$\tau^{11}g^6$	命题 3.39

表 7：隐藏的 2-扩张

$(s,\ f,\ w)$	源	目标	证明
$(3, 1, 2)$	$2h_2$	τh_1^3	引理 3.11
$(27, 1, 14)$	$2\Delta h_2$	$\tau\Delta h_1^3$	引理 3.13
$(51, 1, 26)$	$2\Delta^2h_2$	$\tau\Delta^2h_1^3$	命题 4.2
$(54, 2, 28)$	$\Delta^2h_2^2$	τ^4dg^2	例 2.18
$(99, 1, 50)$	$2\Delta^4h_2$	$\tau\Delta^4h_1^3$	命题 4.2
$(110, 2, 56)$	Δ^4d	$\tau^6\Delta^2h_1^2g^3$	命题 4.5
$(123, 1, 62)$	$2\Delta^5h_2$	$\tau\Delta^5h_1^3$	命题 4.2
$(147, 1, 74)$	$2\Delta^6h_2$	$\tau\Delta^6h_1^3$	命题 4.2
$(150, 2, 76)$	$\Delta^6h_2^2$	$\tau^4\Delta^4dg^2$	命题 4.2

表8：隐藏的 η 扩张

$(s,\ f,\ w)$	源	目标	证明
(27, 1, 14)	$2\Delta h_2$	$\tau^2 cg$	引理 3.28
(39, 3, 21)	$\Delta h_1 d$	$2\tau^2 g^2$	引理 3.35
(51, 1, 26)	$\Delta^2 h_2$	$\tau^2\Delta cg$	命题 4.2
(99, 1, 50)	$\Delta^4 h_2$	$\tau^9 g^5$	命题 4.2
(123, 1, 62)	$2\Delta^5 h_2$	$\tau^2\Delta^4 cg$	命题 4.2
(124, 6, 63)	$\tau^2\Delta^4 cg$	$\tau^9\Delta h_1 g^5$	命题 4.2
(129, 3, 66)	$\Delta^5 h_1 c$	$\tau^7\Delta^2 h_1^2 g^4$	命题 4.2
(135, 3, 69)	$\Delta^5 h_1 d$	$2\tau^2\Delta^4 g^2$	命题 4.2
(147, 1, 74)	$\Delta^6 h_2$	$\tau^2\Delta^5 cg$	命题 4.2
(161, 3, 82)	$\Delta^6 h_2 d$	$\tau^3\Delta^5 h_1^2 g^2$	命题 4.2

表 9：隐藏的 ν 扩张

(style id='1'>s, f, w)	源	目标	证明
(0, 0, 0)	4	τh_1^3	命题 4.2
(25, 1, 13)	Δh_1	$\tau^2 cg$	引理 3.27
(32, 2, 17)	Δc	$\tau^2 h_1 dg$	命题 4.11
(39, 3, 21)	$\Delta h_1 d$	$\tau^3 h_1^2 g^2$	引理 3.32
(48, 0, 24)	$4\Delta^2$	$\tau\Delta^2 h_1^3$	命题 4.2
(50, 2, 26)	$\Delta^2 h_1^2$	$\tau^2\Delta h_1 cg$	命题 4.6
(51, 1, 26)	$2\Delta^2 h_2$	$\tau^4 dg^2$	命题 4.2
(57, 3, 30)	$\Delta^2 h_2^3$	$2\tau^4 g^3$	命题 4.2
(96, 0, 48)	$4\Delta^4$	$\tau\Delta^4 h_1^3$	命题 4.2
(97, 1, 49)	$\Delta^4 h_1$	$\tau^9 g^5$	命题 4.12
(122, 2, 62)	$\Delta^5 h_1^2$	$\tau^9\Delta h_1 g^5$	命题 4.12
(128, 2, 65)	$\Delta^5 c$	$\tau^2\Delta^4 h_1 dg$	命题 4.11
(135, 3, 69)	$\Delta^5 h_1 d$	$\tau^3\Delta^4 h_1^2 g^2$	命题 4.14
(144, 0, 72)	$4\Delta^6$	$\tau\Delta^6 h_1^3$	命题 4.2
(147, 1, 74)	$2\Delta^6 h_2$	$\tau^4\Delta^4 dg^2$	命题 4.2
(147, 3, 75)	$\Delta^6 h_1^3$	$\tau^9\Delta^2 h_1^2 g^5$	命题 4.12
(153, 3, 78)	$\Delta^6 h_2^3$	$2\tau^4\Delta^4 g^3$	命题 4.2

表 10：一些 Toda 括号

$(s,\ f,\ w)$	Toda 括号	由……检测到	不确定项	证明	用于
(8, 2, 5)	$\langle\nu,\eta,\nu\rangle$	c	0	引理 2.20	3.27, 4.14
(25, 1, 13)	$\langle\eta,\nu,\tau^2\overline{\kappa}\rangle$	Δh_1	$P^3 h_1$	引理 3.26	3.27, 3.28, 4.14
(32, 2, 17)	$\langle\nu^2,2,\eta_1\rangle$	Δc	0	引理 4.7	4.11
(128, 2, 65)	$\langle\nu_2^2,2,\eta_1\rangle$	$\Delta^5 c$	0	引理 4.8	4.11
(35, 7, 21)	$\langle\nu^2,2,\epsilon\overline{\kappa}\rangle$	$h_1 dg$	0	引理 4.9	4.11
(131, 7, 69)	$\langle\nu_2^2,2,\epsilon\overline{\kappa}\rangle$	$\Delta^4 h_1 dg$	0	引理 4.10	4.11

以下图表展示了 E_2-页、E_9-页以及 E_∞-页的 mANss（针对 *mmf*）。这些页面中的每一页都是 $\mathbb{Z}[\Delta^8]$上的自由模，其中 Δ^8 是 192-茎中的一个类。为便于阅读，我们将 v_1-周期元素分别显示在不同的图表中。关于 2.7 中对 v_1-周期性的讨论，请参见第 E_2-页的完整内容，必须将图 1和 3叠加起来。要获得完整的 E_∞-页，必须将图 2 和 5叠加起来。

我们将对每个图表作稍微详细的说明 il.

- 图 1 展示了 mANss $E2$-页中 $v1$-周期部分，以及由所显示元素支持的全部微分。
- 图 2 展示了 mANss E_∞-页中 $v1$-周期部分。
- 图 3展示了 mANss $E2$-页中的非$v1$-周期部分，以及由所显示元素支持的全部$d3$、$d5$ 和$d7$ 微分。
- 图4 展示了 mANss $E9$ 页中非$v1$-周期部分，以及由所显示元素支持的所有微分。
- 图5 展示了 mANss E_∞ 页中非$v1$-周期部分，以及关于 2、 η 和 ν 的所有隐藏扩张。

7.1. 元素。 对于每个固定的茎和滤子，mANss 都由一个 $\mathbb{Z}[\tau]$-模组成。我们使用图形记号来描述这些模。我们的记号表示与 2 的幂相关的某个滤子的关联分次对象。

- 空心方框表示关联分次对象中 $\mathbb{Z}[\tau]$ 的一个副本。
- 实心灰点 • 表示关联分次对象中 $\mathbb{F}_2[\tau]$ 的一个副本。
- 实心彩点表示关联分次对象中 $\mathbb{F}_2[\tau]/\tau^r$ 的一个副本。r 的值编码在点的颜色中，如表 11 所示。
- 短竖线表示由 2 给出的扩张。

我们的图示记号具有灵活、简洁和便利等优点。下面通过两个例子加以说明。



例 7.1。 在度为 (48,0) 的图 3 中，可以看到 。该记号表示一个 $\mathbb{Z}[\tau]$ 的副本。更准确地说，它表示滤子 $4\mathbb{Z}[\tau] \subseteq 2\mathbb{Z}[\tau] \subseteq \mathbb{Z}[\tau]$，其滤子商为 $\mathbb{Z}[\tau]$、$\mathbb{F}_2[\tau]$和 $\mathbb{F}_2[\tau]$。这一特定滤子与我们的 mANss 计算有关，因为 $2\mathbb{Z}[\tau]$ 是 d_5 循环的子群，而 $4\mathbb{Z}[\tau]$ 是 d_7 循环的子群。



例 7.2。 在度为 (120, 24) 的图 5 中，可以看到 。该记号表示 $\mathbb{Z}[\tau]$-模

$$\frac{\mathbb{Z}[\tau]}{8, 4\tau^2, 2\tau^6, \tau^{11}},$$

用传统记号描述起来有些繁琐。更准确地说，它表示滤子

$$\frac{4\mathbb{Z}[\tau]}{8, 4\tau^2} \subseteq \frac{2\mathbb{Z}[\tau]}{8, 4\tau^2, 2\tau^6} \subseteq \frac{\mathbb{Z}[\tau]}{8, 4\tau^2, 2\tau^6, \tau^{11}}.$$

其滤子商为 $\mathbb{F}_2[\tau]/\tau^2$、$\mathbb{F}_2[\tau]/\tau^6$，以及 $\mathbb{F}_2[\tau]/\tau^{11}$。蓝色、品红色和橙点分别对应这些滤子商，如表 11 所示。

表11：元素的颜色解释

n	颜色
$\mathbb{F}_2[\tau]$	• 灰色
$\mathbb{F}_2[\tau]/\tau$	• 红色
$\mathbb{F}_2[\tau]/\tau^2$	• 蓝色
$\mathbb{F}_2[\tau]/\tau^3$	• 绿色
$\mathbb{F}_2[\tau]/\tau^4$	• 青色
$\mathbb{F}_2[\tau]/\tau^5$	• 棕色
$\mathbb{F}_2[\tau]/\tau^6$	• 品红色
$\mathbb{F}_2[\tau]/\tau^{11}$	• 橙色

7.2. **微分**。 负斜率线表示 Adams-Novikov 微分。微分根据其长度着色，如表 12 所述。这些颜色选择与我们在第7.1节中对 τ 挠的颜色选择相一致，具体如下。
Adams-Novikov d_{2r+1} 微分总是采取 $d_{2r+1}(x) = \tau^r y$ 的形式，并在下一页产生 τ^r 挠。我们对 d_{2r+1} 和 τ^r挠使用相匹配的颜色。

表 12：Adams-Novikov 微分的颜色解释

颜色	斜率	d_r
red	-3	d_3
blue	-5	d_5
绿色	-7	d_7
cyan	-9	d_9
棕色	-11	d_{11}
品红色	-13	d_{13}
橙色	-23	d_{23}

7.3. **扩张**。

- 斜率为 1 的实线表示 $h1$ 乘法。这些线的颜色由目标的 τ 挠率决定。
- 斜率为 1 的箭头表示由 $h1$ 乘法相连的元素的无限族。箭头的颜色反映元素的 τ 挠率。
- 斜率为 1/3 的实线表示 $h2$ 乘法。这些线的颜色由目标的 τ 挠率决定。
- 虚线表示由 2、 η 和 ν 给出的隐藏扩张。其中一些线弯曲只是为了便于辨认。
- 虚线的颜色表示扩张的目标的 τ 挠率。例如，图 5 中 23-茎上的竖直虚线是蓝色的，因为其值 $\tau h31g$ 被 τ^2 消去。

图 5 展示了一个 h_1 扩张，以及元素 η 上的一个隐藏 $\Delta^4 cg$ 扩张，其次数为 $(124,6,65)$。有关说明请参见备注 4.3。

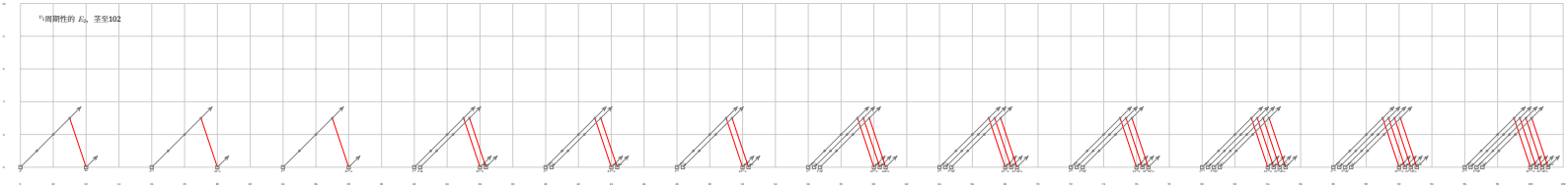


图1。{style id='1'}v_1-周期部分的-动机Adams-Novikov E页，针对mmf 页，针对*mmf*

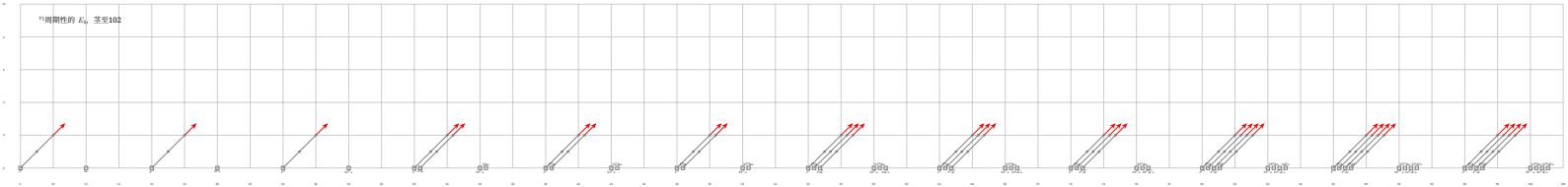


图2。{style id='1'}v_1-周期部分的 C-动机Adams-Novikov E_∞页，针对*mmf*

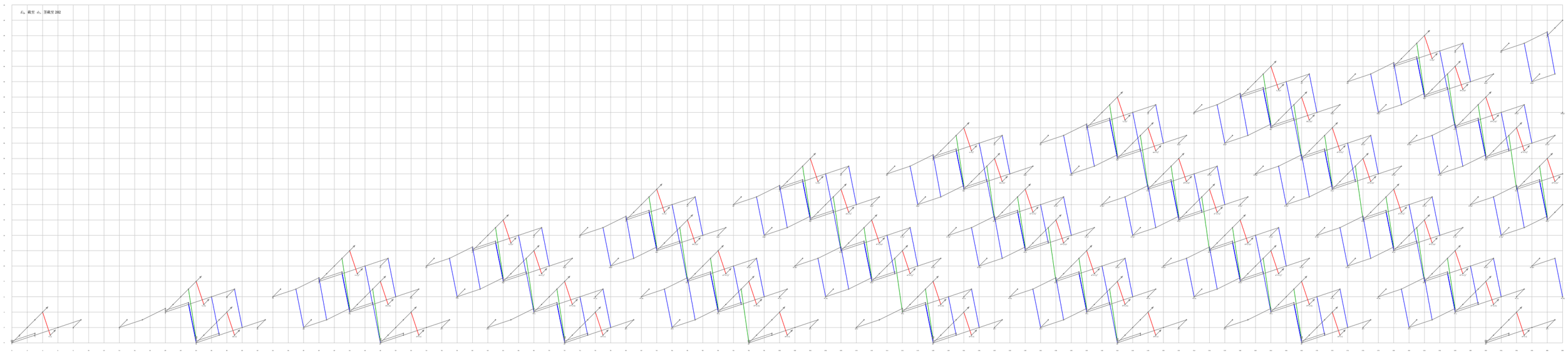


图3。 C-动机Adams-Novikov E_2页的 mmf，其微分长度至多为 7

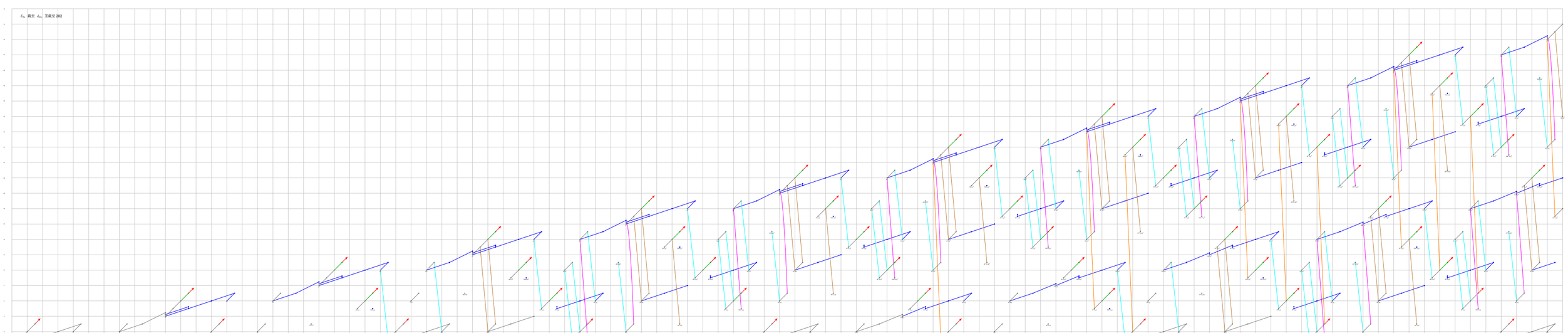


图4。 C-动机Adams-Novikov E_9页的mmf，其微分长度 至少 9

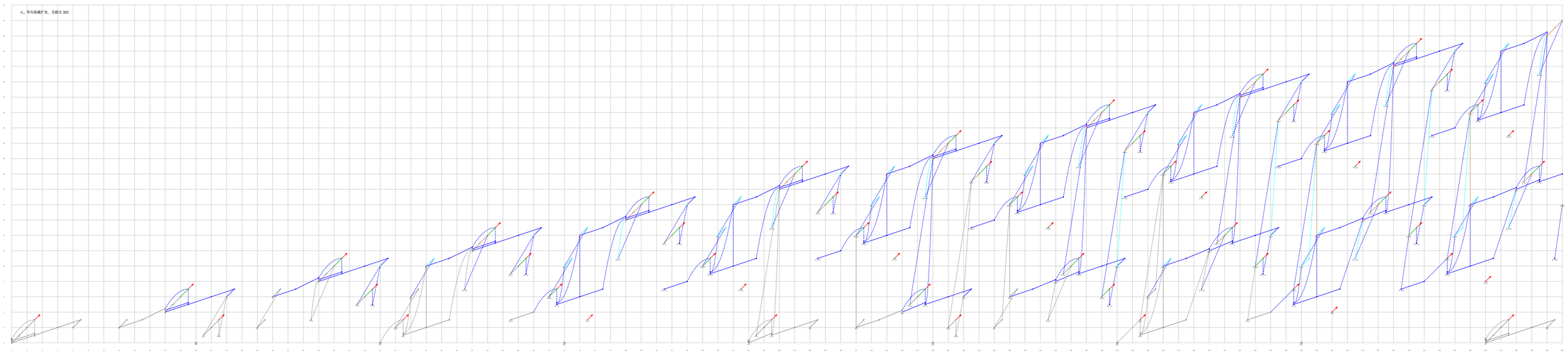


图5。带有由 2、 η 和 ν 产生的隐藏扩张的 C-动机Adams-Novikov E_∞ 页，针对mmf

[Bae] Francis Baer。拓扑模形式的代数 Novikov 谱序列。编写中。 [Bau08] Tilman Bauer。tmf谱同伦的计算。载于《群、同伦与构形空间》，《Geom. Topol. Monogr.》第13卷，第11–40页。Geom. Topol. Publ.，考文垂，2008年。 [BBC23] Mark Behrens、Prasit Bhattacharya 和 Dominic Culver。v_2-局部代数 tmf 解析的结构。arXiv:2301.11230，2023年。[Beh20] Mark Behrens。拓扑模形式与自守形式。载于《同伦论手册》，CRC Press/Chapman Hall Handb. Math. Ser.，第221–261页。CRC Press，美国佛罗里达州博卡拉顿， [2020]©2020年。 [BHS19] Robert Burklund、Jeremy Hahn 和 Andrew Senger。高度连通的几乎闭流形的边界。arXiv:1910.14116，2019年。[BK21] Eva Belmont 和 Hana Jia Kong。乘法谱序列的 Toda括号收敛定理。arXiv:2112.08689，2021年。[BMMS86] R. R. Bruner、J. P. May、J. E. McClure 和 M. Steinberger。H_∞ 环谱及其应用，《数学讲义》第1176卷。Springer-Verlag，柏林，1986年。 [BMQ20] Mark Behrens、Mark Mahowald 和 J. D. Quigley。tmf的2-初 Hurewicz像。arXiv:2011.08956，2020年。 [BR21] Robert R. Bruner 和 John Rognes。拓扑模形式的 Adams 谱序列，《数学综述与专著》第253卷。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯， [2021] ©2021年。 [Bru84] Robert Bruner。Adams 谱序列中的一个新微分。《Topology》，23(3):271–276，1984年。 [DFHH14] Christopher L. Douglas、John Francis、André G. Henriques 和 Michael A. Hill（编）。《拓扑模形式》，《数学综述与专著》第201卷。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2014年。 [GI15] Bertrand J. Guillou 和 Daniel C. Isaksen。η-局部动机球面。《J. Pure Appl. Algebra》，219(10):4728–4756，2015年。 [GIKR22] Bogdan Gheorghe、Daniel C. Isaksen、Achim Krause 和 Nicolas Ricka。 C-动机模形式。《J. Eur. Math. Soc. (JEMS)》，24(10):3597–3628，2022年。 [Goe10] Paul G. Goerss。Hopkins、Miller 和 Lurie [之后的拓扑模形式。第332号，第Exp. No. 1005，viii，221–255页。2010年。Bourbaki研讨会。2008/2009年卷。专题报告997–1011。]GWX[Bogdan Gheorghe、Guozhen Wang 和 Zhouli Xu。稳定同伦范畴的动机变形的特殊纤维是代数的。《Acta Math.》，226(2):319–407，2021年。 21] HKO[Po Hu、Igor Kriz 和 Kyle Ormsby。关于代数闭域上的动机同伦论的备注。《J. K-Theory》，7(1):55–89，2011年。 11] HM[Michael J. Hopkins 和 Mark Mahowald。从椭圆曲线到同伦论。载于《拓扑模形式》，《数学综述与专著》第201卷，第261–285页。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2014年。 14] Hop[Michael J. Hopkins。拓扑模形式、Witten亏格与立方定理。载于《国际数学家大会论文集》，第1、2卷（苏黎世，1994年），第554–565页。Birkhäuser，巴塞尔，1995年。 95] Hop[M. J. Hopkins。代数拓扑与模形式。载于《国际数学家大会论文集》，第I卷（北京，2002年），第291–317页。Higher Ed. Press，北京，2002年。 02] Isa[Daniel C. Isaksen。动机 A(2) 的上同调。《Homology Homotopy Appl.》，11(2):251–274，2009年。 09] Isa[Daniel C. Isaksen。18] -动机模形式的同伦。arXiv:1811.07937，2018年。 CIsa[Daniel C. Isaksen。稳定茎。《Mem. Amer. Math. Soc.》，262(1269):viii19] ，2019年。 +159IWX[Daniel C. Isaksen、Guozhen Wang 和 Zhouli Xu。球面的稳定同伦群：从维数0到90。arXiv:2001.04511，2020年。20] Lev[Marc Levine。Adams-Novikov谱序列与 Voevodsky切片塔。《Geom. Topol.》，19(5):2691–2740，2015年。15] Mäk[Jukka Mäkinen。Adams 谱序列中约化幂的边界公式。《Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I.》，(562):42，1973年。 73] May[J. Peter May。矩阵 Massey积。《J. Algebra》，12:533–568，1969年。 69] May[J. Peter May。Steenrod运算的一般代数方法。载于《Steenrod代数及其应用》（纪念 N. E. Steenrod 六十寿辰会议论文集，Battelle Memorial Institute，俄亥俄州哥伦布，1970年），《数学讲义》第168卷，第153–231页。Springer，柏林，1970年。 70] Mos[R. Michael F. Moss。次复合与 Adams 谱序列。《Math. Z.》，115:283–310，1970年。 70] Rez[Charles Rezk。数学512课程补充讲义（0.18版）。faculty.math.illinois.edu/02] rezk/ 512-spr2001-notes.pdf，2002年。 ~Tod[Hirosi Toda。球面同伦群的复合方法。《数学年刊研究》，第49号。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1962年。

韦恩州立大学数学系，美国密歇根州底特律48009电子邮件地址：isaksen@wayne.edu

高等研究院数学学院，美国新泽西州电子邮件地址：
hana.jia.kong@gmail.com

密歇根大学数学系，美国密歇根州电子邮件地址：guchuan@umich.edu

中国科学院数学与系统科学研究院数学研究所，中国北京

电子邮件地址：ruanyy@amss.ac.cn

伊利诺伊大学数学系，美国伊利诺伊州厄巴纳-香槟电子邮件地址：heyizhu2@illinois.edu