arXiv:2302.09145v1 [quant-ph] 17 Feb 2023

囚禁离子链中正交模态上的成对并行纠缠门

Yingyue Zhu, [1] Alaina M. Green, [1] Nhung H. Nguyen, [1] C. Huerta Alderete, [1] Elijah Mossman, [1] 以及 Norbert M. Linke[1, 2]

[1] *Joint Quantum Institute and Department of Physics, University of Maryland, College Park, MD 20740, USA* [2] *Duke Quantum Center and Department of Physics, Duke University, Durham, NC 27708, USA*（日期：2023年2月21日）

并行操作对于近期量子计算机和更大规模的容错机器都很重要，因为它们能够缩短执行时间并减少量子比特空闲。我们在一台囚禁离子量子计算机上提出并实现了一种成对并行门方案。这些门在囚禁离子链中不同组的正交运动模上同时驱动。我们通过使用具有一个重叠量子比特的并行门一步制备GHZ态，展示了该方案的实用性。我们还通过实现对相互作用自旋系统——横场伊辛模型——动力学的数字量子模拟，展示了它对电路的优势。当不涉及重叠量子比特时，除额外的初始冷却外，该方法无需任何开销即可将可用门深度有效扩展至最多两倍。这是因为，将一组额外的模用作附加量子自由度，几乎等效于将阱加热率减半、将激光和量子比特相干时间加倍，并将控制器存储深度最多扩展两倍。该方案可轻松应用于不同的囚禁离子量子比特和门方案，从而广泛增强囚禁离子量子计算机的能力。

I. 引言

为了打造能够解决具有实际价值问题的量子计算机，充分利用特定技术所能提供的量子资源至关重要。实现量子门并行化对于量子器件的扩展十分重要，因为这能加快量子电路的执行速度，并使更多操作能够在相干时间内完成。

囚禁离子是最先进的量子计算平台之一，这得益于其高保真量子操作、全连接能力和较长的相干时间 [1, 2]。囚禁离子实验中已有并行纠缠门的报道 [3–6]。然而，这些方案需要额外的经典开销，为每种独特的门组合计算特定的门解。此外，它们还需要更高的光功率或更长的门时间，因此与串行门相比，保真度会有所降低。

在谐势阱囚禁离子链中，离子自旋量子比特之间的纠缠生成由离子晶体的集体运动介导 [7], ，该运动可通过激光束 [8, 9], 、微波 [10], 或射频波 [11]激发。迄今实现的所有囚禁离子纠缠门方案，无论是并行还是顺序，都只考虑一组运动模态，对应于驱动场与某一阱轴重叠最强的方向。然而，离子链在空间中正交的方向上具有多组独立运动模态。其他组运动模态通常会被忽略，或通过旋转阱的主轴使其解耦。尽管这项资源已用于少数模拟量子模拟 [12, 13] ，并在量子纠错的成本估算中予以考虑 [14], ，但在纠缠门和数字量子电路中仍未得到利用。在本研究中，我们利用额外的一组模态，在并行情况下对任意离子对实现两个纠缠门，包括两个离子对之间有一个离子重叠的情况，并使用拉曼激光束 [2]。由于两组模态彼此正交，因此无需计算专门的并行门脉冲，现有的激光脉冲设计可以直接同时应用。对于寻址光束阵列，当没有离子重叠时，无需额外的激光功率，因为可以利用激光束中的闲置能量。对于有重叠的离子对，该方案可能需要在共享离子上使用单个纠缠门两倍的激光功率，但通常所需功率更低。这个想法可直接应用于任何利用离子运动的寻址式纠缠门方案 [3–6, 8, 9, 15–22]。它也可以扩展到第三个运动方向。

II. 并行门方案

在线性保罗阱中，离子排列成一条离子链。在径向方向上，也就是垂直于离子链的平面内，离子被囚禁在一个赝势阱中；该阱沿两条径向主轴近似呈谐振形式，x 和 y。离子沿离子链方向受到较弱的谐振约束，即轴向 z 方向 [23]。由于约束势以及离子之间的库仑排斥，离子链中的 N 离子沿每条主轴构成一组耦合谐振子。这使得沿 x、 y和 z 方向分别产生 N 个正规运动模。不同主轴上的正规模彼此独立 [23, 24]。

图1 展示了并行运行成对门的概念。在所示设置中，离子链由一组单独的寻址光束和一束反向传播的全局光束照射，以驱动相干操作；光束方向与两个径向主轴重合。我们采用 Mølmer-Sørensen（MS）方案实现双量子比特门。通过使用不同频率，一对光束在 x模式上驱动一个 MS 门

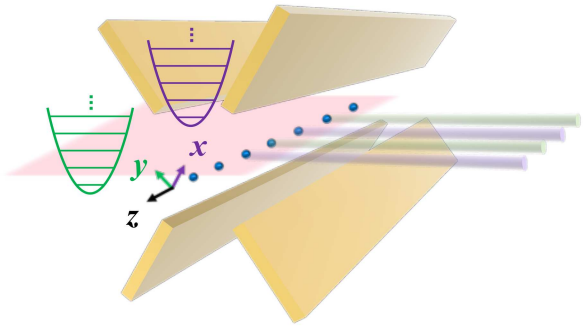


图 1. 正交运动模上并行 MS 门的实验装置。离子链被囚禁在线性保罗阱中，四个阱电极如图所示。左右两端的离子用作端帽电极，中间五个离子用作量子比特。 x、 y 和 z 是该阱的三条主轴。沿 x 轴和 y 轴的谐振子模分别以紫色和绿色表示。跃迁由一对拉曼光束驱动，该光束由一束全局光束（粉色）和一组反向传播的寻址光束阵列组成。各光束的颜色表示不同的失谐量，用于激发沿不同主轴的运动模。该图展示了通过 x 运动模在左起第一和第三个量子比特上施加的 MS 门，以及通过 y 运动模在第二和第四个离子上并行施加的 MS 门。

（以绿色显示），另一对光束则同时在 y模式上对另一对离子执行相同操作（以紫色显示）。只要驱动场在多个主轴方向上具有非零投影，该方案便可应用于任何阱几何结构中的寻址囚禁离子链，并不限于图1所示的情形。正如引言中所述，也可以采用其他门方案。

下面以示例形式介绍我们的实验和协议。我们将 $^{171}\mathrm{Yb}^{+}$ 离子囚禁在线性保罗阱中。量子比特态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 编码于 $^{2}\mathrm{S}_{1/2}$ 流形中的两个超精细基态 $|F=0、m_F=0\rangle$ 和 $|F=1、m_F=0\rangle$。用于相干操作的激光束源自锁模激光器，并驱动两个量子比特态 [25] 之间的拉曼跃迁。两束光之间的拍频为 $\omega_0 \pm \mu$，其相对于蓝、红运动边带 [2]，存在小失谐，其中 ω_0 为载波频率。为了在门操作结束时将运动模与量子比特解纠缠，我们采用激光脉冲的振幅、相位、频率调制方案，或这些方案的组合，使离子对仅留下处于纠缠中的量子比特态 [26–30]。在本演示中，我们使用振幅调制 [31]，但上述任何方案同样适用。表示量子比特对 $\{p,q\}$ 上 MS 门的酉算符为 $U=\exp\left(i\chi_{pq}\sigma_x^p\sigma_x^q\right)$，其中 σ_x^p 是作用于量子比特 p 的泡利-X 算符， χ_{pq} 是门角度，可通过对激光脉冲的振幅施加缩放因子任意调节。

当量子比特对 $\{p,q\}$ 通过x 运动模驱动一个莫特-索伦森门时，我们同时通过 y 运动模在量子比特对 $\{m,n\}$上驱动另一个莫特-索伦森门。这种并行门——可以按照上述相同的方式实现，只需将反向传播拉曼光束的拍频调谐至 $\omega_0 \pm \mu'$，使其与 y运动模的运动边带保持较小失谐。现在我们说明，这些同时进行的操作不会引入交叉耦合。在相互作用绘景和兰姆-迪克区间内，忽略非共振载波项后，描述并行门（PG）作用期间相互作用的哈密顿量为

$$H_{\mathrm{PG}}(t)=H_x(t)+H_y(t), \tag{1}$$

其中

$$H_x(t)=\sum_{i\in\{p,q\}}\sum_{k=1}^{N}\Omega_i(t)\eta_k^i\cos(\mu t-\phi_i)(a_k e^{-i\omega_k t}+h.c.)\sigma_x^i$$

and

$$H_y(t)=\sum_{j\in\{m,n\}}\sum_{k'=1}^{N}\Omega_j(t)\eta_{k'}^j\cos(\mu' t-\phi_j)(b_{k'} e^{-i\omega_{k'} t}+h.c.)\sigma_x^j.$$

N 是离子链中的离子总数。 $\omega_k(\omega_{k'})$ 是运动模 $k(k')$ 在 $x(y)$-方向上的频率， $a_k^\dagger$ 和 $a_k(b_{k'}^\dagger$ 和 $b_{k'})$ 是模式 $k($ $k')$ 在 $x(y)$-方向上的产生与湮灭算符。$\Omega_i(\Omega j)$ 是量子比特 $i(j)$ 的拉比频率。$\eta_k^i(\eta_{k'}^j)$ 是将量子比特 $i(j)$ 与 $x(y)$ 中的模式 $k(k')$ 耦合起来的兰姆-迪克参数。 $\phi_i(\phi_j)$ 由激光相位决定。

为了计算演化幺正算符，我们使用马格努斯展开对公式（1）进行指数化。考察马格努斯级数中的前两项，可得

$$U_{\mathrm{PG}}(\tau)=e^{-i\int_0^\tau dt H_{\mathrm{PG}}(t)-\frac{1}{2}\int_0^\tau dt_2\int_0^{dt_2}dt_1[H_{\mathrm{PG}}(t_2),H_{\mathrm{PG}}(t_1)]}, \tag{2}$$

其中 τ 是门时间。展开对易子可得

$$\begin{aligned}[H_{\mathrm{PG}}(t_2),H_{\mathrm{PG}}(t_1)]=&[H_x(t_2),H_x(t_1)]+[H_y(t_2),H_y(t_1)]\\&+[H_x(t_2),H_y(t_1)]+[H_y(t_2),H_x(t_1)].\end{aligned} \tag{3}$$

注意， σ_x^i 与 σ_x^j对易，并且由于 x 和 y模彼此正交， a_k 且 $a_k^\dagger$ 与 $b_{k'}$ 和$b_{k'}^\dagger$对易。因此， $[H_x(t_1)、H_y(t_2)]=0$ 在任意时刻也成立，式（3）中的最后两项亦然；后两项是 x 与 y之间的交叉耦合项。我们强调，该方案同样适用于两个量子比特对共享一个离子的情况，因为 $[\sigma_x^i,\sigma_x^j]=0$ 包含 $i=j$的情形。式（3）中的另一个剩余项仅包含x方向或仅包含 y方向的运动。与只有一个莫特-索伦森门的情况相同，由于运动算符之间的对易关系，运动的依赖性最终会在式（3）中消失。因此，式（2）的马格努斯展开中未显示的高阶项也为零。我们可以将式（2）改写为

$$U_{\mathrm{PG}}(\tau) = \exp\left(\sum_{i\in\{p,q\}} (G_i\sigma_x^i) + i\chi_{pq}\sigma_x^p\sigma_x^q + \sum_{j\in\{m,n\}} (G'_j\sigma_x^j) + i\chi_{mn}\sigma_x^m\sigma_x^n \right), \quad (4)$$

其中 G_i 定义为

$$G_i = \sum_{k=1}^{N} \alpha_{i,k}(\tau)a_k^\dagger + \alpha_{i,k}^\star(\tau)a_k \quad (5)$$

$$\alpha_{i,k}(\tau) = -\int_0^\tau \eta_k^i\Omega_i(t)\cos(\mu t - \phi_i^m)e^{i\omega_k t}dt. \quad (6)$$

G'_j 的表达式与式（5）类似，不同之处在于，对 x 模式的求和被替换为对 y 模式的求和，且 μ 被替换为 μ'。由于式（4）指数中的前两项仅涉及 x 模式，而后两项仅涉及 y 模式，因此这两部分可以分别处理。对拉比频率 $\Omega_i(t)(i \in \{p,q\})$进行调制，使得 $G_i(\tau) = 0$。对量子比特对 $\{m,n\}$ 也采用同样的脉冲调制，以设定 $G'_j(\tau) = 0 (j \in \{m,n\})$。门角度 χ_{pq}和 χ_{mn}可以独立设定。最后，所得的酉算符式（7）描述了分别作用于 $\{q,p\}$ 和 $\{m,n\}$、角度分别为 χ_{pq} 和 χ_{mn}的并行 MS 门:

$$U_{\mathrm{PG}}(\tau) = \exp(i\chi_{pq}\sigma_x^p\sigma_x^q + i\chi_{mn}\sigma_x^m\sigma_x^n) \quad (7)$$

.

III. 实验结果

利用由七个离子组成的离子链，我们通过实验展示了作用于不同量子比特对的并行 MS 门，包括两个量子比特对共享一个量子比特的情形。随后，我们通过运行横场伊辛模型这一典型自旋模型的数字量子模拟，展示了这些门在长量子线路中的优势。

A. 并行门保真度

对于两个角度为 $\pi/4$ 、分别作用于两对不重叠量子比特上的并行 MS 门，我们通过测量输出态的偶宇称态布居数和宇称对比度[32, 33]，估算每个 MS 门的保真度。宇称对比度通过在 MS 门后附加单量子比特 $\pi/2$ 旋转并改变其相位来提取。结果如图 2所示。我们发现，并行门的整体性能非常

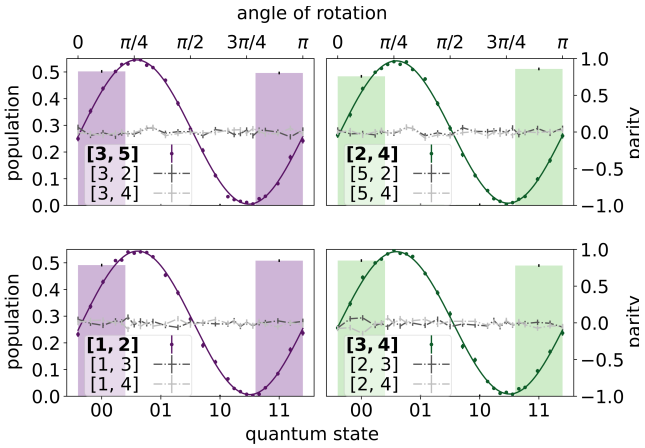


图 2. 七离子链中两组具有代表性的并行 MS 门在两对不重叠量子比特上的保真度测量。图中分别绘出了每对量子比特在计算基中的布居数（下方横坐标、左侧纵坐标）和宇称扫描结果（下方横坐标、右侧纵坐标）。上排显示的是紫色的对 {3,5}，通过 x 模式纠缠，以及绿色的对 {2,4}，通过 y 模式纠缠。紫色和绿色实线是对宇称扫描数据的拟合。测得的保真度分别为 $F_{35} = 99.1(4)\%$ 和 $F_{24} = 98.2(4)\%$。背景灰度图所示的串扰对的奇偶校验测量未显示振荡。图的下排显示了对 {1,2}（x 模式）和 {3,4}（y 模式），其中保真度分别为 $F_{12} = 98.8(5)\%$ 和 $F_{34} = 98.4(4)\%$。所有不确定度均为统计误差。

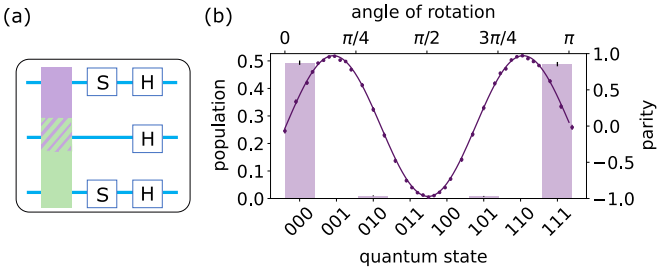


图 3。（a）利用并行门制备三量子比特 GHZ 态的量子线路。所有量子比特均初始化为 $|0\rangle$ 态。第一个门是一对作用于中间量子比特且彼此重叠的并行 MS 门。 H 是哈达玛门。 S 门定义为 $S = e^{-i\sigma_z\frac{\pi}{4}}$。（b）在七离子离子链上实验制备的 GHZ 态的宇称对比度（上方横坐标、右侧纵坐标）和布居数（下方横坐标、左侧纵坐标）。估算的保真度为 $F_{\mathrm{GHZ}} = 97.6(3)\%$。误差条为统计误差。

与我们的顺序门（见表I）相似，这表明并行操作没有引入可检测到的误差，例如由离子阱非线性引起的两组径向模式之间的运动串扰。然而，执行时间的缩短将提升采用并行门的完整电路实现的保真度。我们还估算了串扰对的纠缠度。这可能是光学串扰或运动串扰造成的。图中绘制的奇偶校验测量

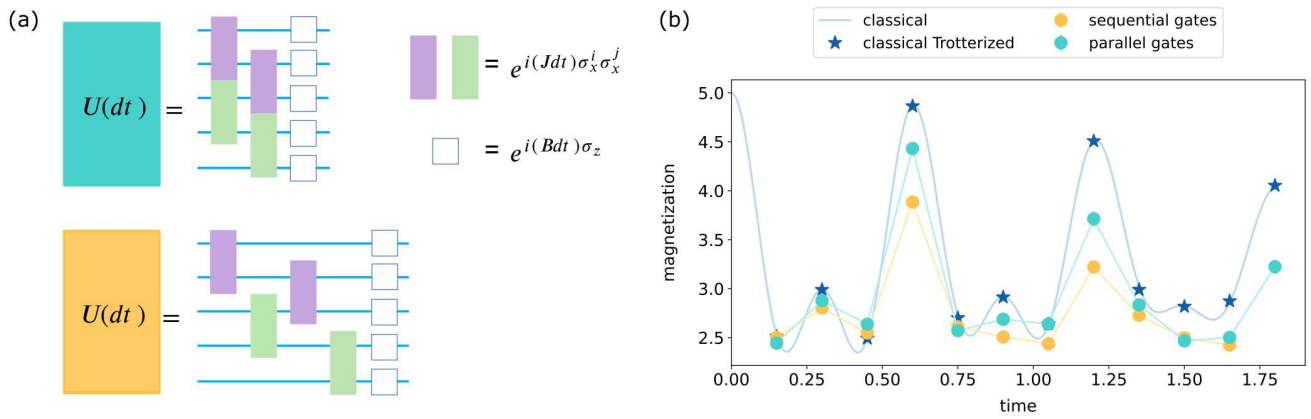


图 4. (a) 使用 x 模式（紫色）和 y 模式（绿色）的横场伊辛模型线路：一个 Trotter 步中采用并行门（上）和串行门（下）。(b) 横场伊辛模型实验结果，其中 $\frac{B}{J} = 0.096$。在不同演化时间下，测量自旋链沿 z 方向的总磁化强度 m。与采用串行门的演化相比，采用并行 MS 门的演化表现出高得多的对比度。实验数据点的误差条为统计误差，且小于标记。

图2 中的灰度结果在误差范围内未显示振荡，这表明串扰对之间不存在非预期的纠缠。

Pair	PG	顺序
XX35	99.1(4)%	99.1(3)%
XX24	98.2(4)%	99.2(4)%
XX12	98.8(5)%	97.5(4)%
XX34	98.4(4)%	99.2(4)%

表 I. 该表比较并行门（PG）保真度与顺序门保真度。

B. 三量子比特纠缠

我们利用该方案一步纠缠三个离子，制备出一个三量子比特 GHZ 态。量子线路如图3(a)所示。它由一个三量子比特纠缠门组成，随后施加 $\pi/2$ 相位门和 Hadamard 门。

图3（b）展示了使用并行 MS 门在量子比特$\{3,5\}$和 $\{2,5\}$上制备的 GHZ态的布居数和宇称对比度。我们再次利用宇称对比度和偶宇称态布居来估算保真度，得到$F_{\mathrm{GHZ}} = 97.6$（3）%，与在同一系统中使用顺序 MS门制备的三量子比特 GHZ 态的 97。1（1）% 保真度相当，并且优于另一项囚禁离子实验中报道的使用全局并行门制备的三量子比特 GHZ 态 [6]。由于两个 MS 门的激光脉冲会在重叠的离子上叠加，最坏情况下，并行实施这两个门所需的功率将是两者功率之和。不过，通常所需功率会更低，因为两个门脉冲波形中功率最高的门脉冲片段并不总是重叠。

C. 采用并行门的横场伊辛模型

量子自旋模型能够描述广泛的量子多体动力学，适合在不同硬件平台上实- 现 [34, 35]。它们可用于研究凝聚态物理中各种经典计算难以处- 理的问题，例如量子磁性 [36]，自旋玻璃 [37]，及其他问题[38]。我们通过对具有最近邻相互- 作用的五自旋一维横场伊辛模型（横场伊辛模型）动力学进行数字模拟，展示了我们的并行门方案相较于串行门的实验优势。哈密顿量可写为

$$H = -J\sum_{i=1}^{4}\sigma_x^i\sigma_x^{i+1} - B\sum_{i=1}^{5}\sigma_z^i, \tag{8}$$

其中 J 和 B 分别表征相邻自旋之间相互作用的强度和外场的大小。自旋 $|\uparrow\rangle$ ($|\downarrow\rangle$态映射为量子比特 $|+\rangle(|-\rangle$ 态。所有量子比特均初始化为$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle$态。时间演化幺正算符经过 Trotter 分解，并分解为门 [39, 40]。表示一个 Trotter 步的量子线路如图 4(a) 所示。两种量子线路均由莫特-索伦森门和单量子比特 z 旋转组成，莫特-索伦森门按顺序或并行施加。经过 N 个 Trotter 步后，在 z 基下测量量子比特，并计算沿 z、 $m = \sum_{i=1}^{5}\sigma_z^i$ 方向的总磁化强度。由于单量子比特 z旋转是在控制器上通过瞬时的经典相位推进实现的，因此使用串行莫特-索伦森门的量子线路执行时间是使用并行莫特-索伦森门时的两倍。

结果绘于图 4 (b) 中。在实验中，为确保比较公平，串行门也在 x 和 y运动模上施加，与并行门的做法一致。并行实现和串行实现中，每个量子比特对都使用相同的 MS 门脉冲。对于磁化强度较高的点，由于此时观测量对误差最为敏感，我们发现，并行门实现将电路运行时间减半，使误差最多降低了两倍。这表明，即使对于较短的量子线路，使用并行门也有优势。

IV. 结论与展望

虽然在离子阱量子计算机中使用这些成对并行门并不能降低算法复杂度，但它能显著提高任何量子线路实现的保真度，因此应尽可能使用。唯一的代价是对额外一组模式进行基态冷却所需的固定开销；由于对第一组模式进行高强度激光边带冷却，这组模式已经被冷却至多普勒极限以下。并行实现不会产生校准开销。事实上，由于可以并行校准门，所需的校准次数通常会减少。最坏情况下，每个量子比特对对应的门都需要针对两组模式进行校准，此时校准次数与顺序情形相同。

这种并行门很容易推广到其他线性阱几何结构。只要控制器能够在空间上寻址多个离子，并在频率上寻址多个运动模，它就可以推广到任意莫特-索伦森门脉冲调制和寻址方案。它还可以扩展到轴向，并与其他仅使用沿一条主轴的运动模的并行门方案 [3, 4, 6] 相结合，从而进一步增加可同时执行的双量子比特门的最大数量。最后，其他纠缠门机制，例如光移门 [9, 22],、由合成 σ_z 自旋依赖力 [20],驱动的基于 Cirac-Zoller 方案并采用辅助运动态的多量子比特门 [21], ，或通过第二边带驱动利用模压缩的门 [17, 19] ，也可以采用相同的方式实现成对并行化。

V. 致谢

本研究得到美国能源部科学办公室国家量子信息科学研究中心 Quan- tum Systems Accelerator 项目的支持。海军研究办公室（N00014-20-1-2695）和国家科学基金会（QLCI 项目 OMA-2120757）也提供了额外支持。我们感谢 Liam Jeanette 协助收集数据，并感谢 Kenneth R. Brown 提供有益的讨论。

[1] P. Wang、C.-Y. Luan、M. Qiao、M. Um、J. Zhang、Y. Wang、X. Yuan、M. Gu、J. Zhang 和 K. Kim，《单离子量子比特的估计相干时间超过一小时》，*Nature Communications* 12, 1, 233, ，卷 2021 号、期号、页码。[2] S. Debnath、N. M. Linke、C. Figgatt、K. A. Landsman、K. Wright 和 C. Monroe，《利用原子量子比特演示小型可编程量子计算机》，*Nature*，第 536 卷，第 7614 期，第 63–66 页，2016年。[3] C. Figgatt、A. Ostrander、N. M. Linke、K. A. Landsman、D. Zhu、D. Maslov 和 C. Monroe，《通用离子阱量子计算机上的并行纠缠操作》，*Nature*，第 572 卷，第 7769 期，第 368–372 页，2019年。[4] N. Grzesiak、R. Bl¨umel、K. Wright、K. M. Beck、N. C. Pisenti、M. Li、V. Chaplin、J. M. Amini、S. Debnath、J.- S. Chen 和 Y. Nam，《在离子阱量子计算机上高效实现任意同时纠缠门》，*Nature Communications*，第 11 卷，第 1 期，第 2963 页，2020年。[5]《在离子阱量子计算机上使用 EASE 门进行高效量子编程》，*Quantum*，第 11 卷，第 6 期，第 643 页，2022年。[6] Y. Lu、S. Zhang、K. Zhang、W. Chen、Y. Shen、J. Zhang、J.-N. Zhang 和 K. Kim，《任意离子量子比特上的全局纠缠门》，*Nature*，第 572 卷，第 7769 期，第 363–367 页，2019年。[7] C. D. Bruzewicz、J. Chiaverini、R. McConnell 和 J. M. Sage，《离子阱量子计算：进展与挑战》，*Applied Physics Reviews*，《量子》，第6卷，第2期，021314页，2019年。[8] A. Sørensen和K. Mølmer，“热运动离子量子计算”，*Phys. Rev. Lett.*，第82卷，第1971–1974页，1999年3月。[9] D. Leibfried、B. DeMarco、V. Meyer、D. Lucas、M. Bar- rett、J. Britton、W. M. Itano、B. Jelenkovi´c、C. Langer、T. Rosenband和D. J. Wineland，“稳健、高保真几何双离子量子比特相位门的实验演示”，*Nature*，第422卷，第6930期，第412–415页，2003年。[10] C. Ospelkaus、C. E. Langer、J. M. Amini、K. R. Brown、D. Leibfried和D. J. Wineland，“基于振荡磁场的囚禁离子量子逻辑门”，*Phys.*，第p *Rev. Lett.* 101, 090502, 2008 卷，8月。[11] F. Mintert和C. Wunderlich，“利用长波辐射实现离子阱量子逻辑”，*Phys. Rev. Lett.*，第87卷，257904页，2001年11月。[12] D. J. Gorman、B. Hemmerling、E. Megidish、S. A. Moeller、P. Schindler、M. Sarovar和H. Haeffner，“在囚禁离子量子模拟器中实现振动辅助能量转移”，*Phys. Rev. X*，第8卷，011038页，2018年3月。[13] C. H. Alderete、A. M. Green、N. H. Nguyen、Y. Zhu、B. M. Rodrguez-Lara和N. M. Linke，“副粒子振荡器的实验实现”，2021年。

[14] C. J. Trout、M. Li、M. Gutirrez、Y. Wu、S.-T. Wang、L. Duan和K. R. Brown，“线性离子阱中距离-

3 *New* 表面码 *Journal of Physics* 20, 043038, 2018 性能的模拟”，，第p卷，4月。[15] J. Benhelm、G. Kirchmair、C. F. Roos和R. Blatt，“迈向囚禁离子容错量子计算”，*Nature Physics*，第4卷，第6期，第463–466页，2008年。[16] J. I. Cirac和P. Zoller，“利用冷囚禁离子进行量子计算”，*Phys. Rev. Lett.*，第74卷，第4091–4094页，1995年5月。[17] O. Katz、M. Cetina和C. Monroe，“通过自旋依赖压缩实现囚禁离子量子比特间的n体相互作用”，*Phys. Rev. Lett.*，第129卷，063603页，2022年8月。[18] F. Schmidt-Kaler、H. H¨affner、M. Riebe、S. Gulde、G. P. T. Lancaster、T. Deuschle、C. Becher、C. F. Roos、J. Eschner和R. Blatt，“Cirac–Zoller受控非量子门的实现”，*Nature*，第422卷，第6930期，第408–411页，2003年。[19] Y. Shapira、S. Cohen、N. Akerman、A. Stern和R. Oz- eri，“利用自旋依赖压缩实现囚禁离子的稳健双量子比特门”，*Phys. Rev. Lett.*，第130卷，030602页，2023年1月。[20] O. B˘az˘avan、S. Saner、M. Minder、A. C. Hughes、R. T. Sutherland、D. M. Lucas、R. Srinivas和C. J. Bal- lance，“为光学、亚稳态和基态囚禁离子量子比特合成$\hat{\sigma}_z$ 自旋依赖力”，2022年。[21] C. Fang、Y. Wang、K. Sun和J. Kim，“可扩展Cirac-Zoller多量子比特门的实现”，2023年。[22] C. H. Baldwin、B. J. Bjork、M. Foss-Feig、J. P. Gae- bler、D. Hayes、M. G. Kokish、C. Langer、J. A. Sedlacek、D. Stack和G. Vittorini，“钟态量子比特的高保真光移门”，*Phys. Rev. A*，第103卷，012603页，2021年1月。[23]D. F. V. James，“冷囚禁离子的量子动力学及其在量子计算中的应用”，*Applied Physics B* 66, 2, 181 190, 1998 ，第卷，期，页。[24] C. Marquet、F. Schmidt-Kaler和D. F. V. James，“线性离子阱中非线性效应导致的声子-声子相互作用”，*Applied Physics B*，第76卷，第3期，第199–208页，2003年。[25] S. Debnath、N. M. Linke、C. Figgatt、K. A. Landsman、K. Wright和C. Monroe，“原子量子比特小型可编程量子计算机的演示”，*Nature*，第536卷，第7614期，第63–66页，2016年。[26] S.-L. Zhu、C. Monroe和L.-M. Duan，“通过对激光束进行最小控制，在大型离子晶体中实现任意速度的量子门”，*Europhysics Letters*，第73卷，485页，2006年1月。[27] C. F. Roos，“利用振幅调制激光束实现离子阱量子门”，*New Journal of Physics*，第10卷，第013002页，2008年1月。[28] P. H. Leung、K. A. Landsman、C. Figgatt、N. M. Linke、C. Monroe和K. R. Brown，“利用频率调制驱动力在离子晶体中实现鲁棒双量子比特门”，*Phys. Rev. Lett.*，第120卷，第020501页，2018年1月。[29] T. J. Green和M. J. Biercuk，“量子比特-振荡器系统中的相位调制解耦与误差抑制”，*Phys. Rev. Lett.*，第114卷，第120502页，2015年3月。[30] Y. Shapira、R. Shaniv、T. Manovitz、N. Akerman和R. Ozeri，“囚禁离子量子比特的鲁棒纠缠门”，*Phys. Rev. Lett.*，第121卷，第180502页，2018年11月。[31] T. Choi、S. Debnath、T. A. Manning、C. Figgatt、Z.- X. Gong、L.-M. Duan和C. Monroe，“为实现可扩展纠缠，对囚禁离子量子比特间多模耦合进行最优量子控制”，*Phys. Rev. Lett.*，第112卷，第190502页，2014年5月。[32] C. A. Sackett、D. Kielpinski、B. E. King、C. Langer、V. Meyer、C. J. Myatt、M. Rowe、Q. A. Turchette、W. M. Itano、D. J. Wineland和C. Monroe，“四粒子的实验纠缠”，*Nature*，第404卷，第6775期，第256–259页，2000年。[33] C. J. Ballance、T. P. Harty、N. M. Linke、M. A. Se-piol和D. M. Lucas，“利用囚禁离子超精细量子比特实现高保真度量子逻辑门”，*Phys. Rev. Lett.*，第117卷，第060504页，2016年8月。[34] K. Kim、S. Korenblit、R. Islam、E. E. Edwards、M.-S. Chang、C. Noh、H. Carmichael、G.-D. Lin、L.-M. Duan、C. C. J. Wang、J. K. Freericks和C. Monroe，“利用囚禁离子对横向伊辛模型进行量子模拟”，*New Journal of Physics*，第13卷，第105003页，2011年10月。[35] P. Schauss，“利用里德伯原子对横向伊辛模型进行量子模拟”，*Quantum Science and Technology* 3, 023001, 2018 ，第卷，页，1月。[36] S. Sachdev，“量子磁性与临界性”，*Nature Physics* 4, 3, 173 185, 2008 ，第卷，期，页。[37] K. Binder和A. P. Young，“自旋玻璃：实验事实、理论概念与开放问题”，*Rev.*，第卷，页，*Mod. Phys.* 58, 801 976, 1986 10月。[38] C. Monroe、W. C. Campbell、L.-M. Duan、Z.-X. Gong、A. V. Gorshkov、P. W. Hess、R. Islam、K. Kim、N. M. Linke、G. Pagano、P. Richerme、C. Senko和N. Y. Yao，“利用囚禁离子对自旋系统进行可编程量子模拟”，*Rev. Mod. Phys.*，第93卷，第025001页，2021年4月。[39] S. Lloyd，“通用量子模拟器”，*Science*，第273卷，第5278期，第1073–1078页，1996年。[40] M. Suzuki，“分形路径积分的一般理论及其在多体理论与统计物理中的应用”，*Journal of Mathematical Physics*，第32卷，第2期，第400–407页，1991年。