arXiv:2302.09220v1 [cs.CC] 18 Feb 2023

紧致集合打包问题的紧下界

Huairui Chu

2023年2月21日

本文旨在基于 ETH，给出参数化紧致集合打包问题一个紧下界的简单证明。有关该问题更全面的研究，请参阅 [1]。

注意，根据著名的稀疏化引理 [2]，ETH 意味着稀疏 3-SAT 无法在 $2^{o(n)}$ 时间内求解。“ 稀疏 ” 是指子句数量 m 至多与 n 线性相关，即 $m = O(n)$。

定义 1.（线性）参数化紧致集合打包实例：全集 $\mathcal{U}$，集合族 $\mathcal{S}$，参数 r。$|U| = f(r)\Theta(\log |\mathcal{S}|)$。问题：是否存在 r 个两两不相交集合，使其来自 $\mathcal{S}$?

1 基于ETH的紧下界

该问题的蛮力算法运行时间为 $|\mathcal{S}|^{O(r)}|U|^{O(1)}$，我们给出形式为 $|\mathcal{S}|^{\Omega(r)}$的下界。

定理 1. 对于紧凑集合打包，不存在运行时间为 $|\mathcal{S}|^{o(r)}$ 的算法，其实例满足 $|U| = r^3\Theta(\log |\mathcal{S}|)$。

为了证明该定理，我们设计了一个从稀疏3-SAT到紧凑集合打包的归约。

引理 1. 对于所有 r （其中 n是一个可计算函数），存在一种归约，使得给定一个稀疏3-SAT实例 ϕ，可以构造一个紧凑集合打包实例 I，满足 ϕ 可满足，当且仅当 I 具有一个r-集合打包。该归约的运行时间为 $2^{O(n/r)}poly(n, r)$，且 I 具有$\Theta(nr^2)$大小的全集和 $\Theta(r2^{O(n/r)})$个集合。

证明。给定一个 3-SAT实例 ϕ，其中有 n 个变量和$m = O$个n子句。令 r 为一个整数。我们接下来构造一个集合打包实例。

将子句划分为 r 个两两不相交的集合 C_1、C_2、...、C_r，使得对所有 $i \in [r]$，都有 $||C_i| - \frac{m}{r}| \leq 1$。令 C_i 中任意子句里出现的变量为 $v(C_i)$。对于每个 $i \in [r]$，令 A_i 为从$v(C_i)$ 到 $\{0,1\}$ 的所有部分赋值，使得 C_i 中的每个子句都得到满足。这类赋值至多有$2^{|v(C_i)|} = 2^{O(n/r)}$ 个。

对于每个变量 x，令 $G_x = (U_x \cup V_x, E_x)$ 为一个完全二分图，其中 $U_x = \{u_1^x, u_2^x, ..., u_r^x\}$，$V_x = \{v_1^x, v_2^x, ..., v_r^x\}$。对于每个 $i \in [r]$ 和每个部分赋值 $a \in A_i$，我们添加一个集合 S_a。对于每个 $x \in domain(a)$，如果 $a(x) = 0$，则对所有从 $j \in [r]$ 到 S_a 的对象添加 (u_i^x, v_j^x)；如果 $a(x) = 1$，则对所有从 $j \in [r]$ 到 S_a 的对象添加 (u_j^x, v_i^x)。令 $\mathcal{S}_i$ 为集合 $\{S_a | a \in A_i\}$。

每个 $\mathcal{S}_i$ 至多包含 $2^{O(n/r)}$ 个集合，以及 $O(nr)$ 个元素。对于每个 $\mathcal{S}_i$，我们构造一个全集大小为 $O(n/r)$ 的 ISS，其中包含 $|\mathcal{S}_i|$ 个两两不相交的集合。将每个集合 $S_a \in \mathcal{S}_i$ 连接到 ISS 中的一个唯一集合。具体而言，令 σ_i 为从 $\mathcal{S}_i$ 到 ISS 中各集合的单射，我们构造一个新的集合族 $\mathcal{S}_i' = \{S_a \cup \sigma(S_a) | S_a \in \mathcal{S}_i\}$。

令 X 为 ϕ 的变量集。我们构造的集合打包实例为 $(\mathcal{U}, \mathcal{S})$，其中 $\mathcal{S} = \cup_{i \in [r]} \mathcal{S}_i'$ 且 $\mathcal{U} = \cup_{x \in X} E_x$。参数设为 r。正确性不难看出。全集大小为 $\Theta(nr^2)$，集合族大小为 $O(r2^{O(n/r)})$。

为了使其成为紧凑实例，我们可以添加集合，使集合族大小为 $\Theta(r2^{O(n/r)})$。一种添加此类集合的方法是向全集中加入一个由 $\Theta(n\log\ r/r)$ 个无用元素组成的集合 $\mathcal{D}$。对于所有 $D \subseteq \mathcal{D}$，我们只需将 $\mathcal{U} \cup D$ 添加为一个新集合。因此，最终实例为 $(\mathcal{U}', \mathcal{S}')$，其中 $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \cup \mathcal{D}$, $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cup \{\mathcal{U} \cup D | \forall D \subseteq \mathcal{D}\}$。

□

根据引理 1，如果紧凑集合打包存在运行时间为 $|\mathcal{S}|^{o(r)}$ 的算法，那么对于所有 r，线性 3-SAT 都存在一个 $r^{o(r)}2^{o(n)} + 2^{O(n/r)}poly(n, r)$ 算法。令 r 为 $\lceil \log n \rceil$，这与 ETH 矛盾。这表明，对于满足 $|U| = r^3\Theta(\log |\mathcal{S}|)$ 的紧凑集合打包实例，不存在运行时间为 $|S|^{o(r)}$ 的算法。因此，定理 1 得证。

参考文献

[1] A. Gadekar. 关于紧致集合打包的参数化复杂性。CoRR, abs/2111.06338, 2021.[2]R. Impagliazzo, R. Paturi, and F. Zane. 哪些问题具有强指数复杂性？《计算机与系统科学杂志》, 63(4):512–530, 2001.