arXiv:2302.09366v1 [math.GR] 18 Feb 2023

陀螺群、陀螺分裂与上同调

RAMJI LAL 和 VIPUL KAKKAR

Abstract. 本文研究与群相关的陀螺群、具有陀螺截面的群扩张及相应的上同调。我们还用上同调描述这些障碍。文中引入了陀螺-舒尔乘子和陀螺-米尔诺 K_2 群的概念。

陀螺群、陀螺分裂、上同调、施尔乘子。

1. Introduction

设 G 为一个群。我们有一个与之相关的右环（$G, \circ_1$），其二元运算 $\circ_1$ 定义为 $x \circ_1 y = y^{-1}xy^2$。Foguel 和 Ungar[3,4] 开创了对具有相关右环（$G, \circ_1$）上规定性质的群 G 的研究。事实上，他们研究了具有相关左环（$G, \circ$）上规定性质的群，该左环由 $x \circ y = x^2yx^{-1}$给出。不过，为方便起见，我们将通过右环结构（$G, \circ_1$）来研究它。可以看出，（$G, \circ_1$）是一个右陀螺群 [7,8]。Foguel 和 Ungar [4] 证明，（$G, \circ_1$）是陀螺群，当且仅当 G 是中心 2-恩格尔群。陀螺群与扭曲子群、近子群 [1], 有着深刻的内在联系，进而也与约束满足问题 [2]的群论子类有关。右陀螺群和子群的扭曲版本已在 [8]中得到研究。若群 G 满足（$G, \circ_1$）同构于（$K, \circ_1$），则称群 G 与群 K 弱同构或陀螺同构。弱分类计划始于 [6]。更一般地，若映射 f 从 G到 K 满足：对所有a、$b \in G$，f（$a \circ_1 b$）$= f$（a）$\circ_1 f$（b），则称其为陀螺同态。本文的主要目的是引入并研究具有截面的扩张，其中这些截面是陀螺同态。我们还研究由此产生的上同调、障碍，以及一种施尔乘子的类比对象，称为陀螺-舒尔乘子。进而，我们引入陀螺-米尔诺K_2-群的概念。

2. Preliminaries

本节介绍一些基本概念、定义和结果。

具有单位元 e 的拟群 $(S, \circ)$ 称为右环，如果对所有 $a, b \in S$，方程 $X \circ a = b$ 在 S 中有唯一解。

设 $(S, \circ)$ 是一个具有单位元 e 的右环。对于每个 $x, y, z \in S$，方程的唯一解

$$X \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$$

记作 $x\theta f(y, z)$。映射 $f(y, z)$ 从 S到 S定义为 $f(y, z)(x) = x\theta f(y, z)$，它是作用在 S 上的对称群 $Sym(S)$ 的一个元素，并且固定 $e \in S$。因此， $f(y, z)$ 是 $Sym(S - \{e\}) \subset Sym(S)$ 的一个元素，称为由对 $(y, z) \in S \times S$ 确定的 $(S, \circ)$ 的内映射。由于我们将要

讨论右环和右横截集，为方便起见，我们约定 $(p \circ q)(x) = q(p(x))$ 表示 $Sym(S)$ 中的乘积。由所有内映射构成的集合 $\{f(y,z) \mid y,z \in S\}$ 生成的 $Sym(S)$ 的子群称为右环 $(S,\circ)$ 的内映射群（也称为群挠）。我们用 G_S 表示右环 $(S,\circ)$ 的内映射群。对每个 $y \in S$，令 R_y 表示 S 上的右乘映射，定义为 $R_y(x) = x \circ y$。显然，对每个 $y \in S$ 都有 $R_y \in Sym(S)$，并且由 $R(y) = R_y$ 定义的从 S 到 $Sym(S)$ 的映射 R 是单射。令 $R(S)$ 表示由所有右乘映射构成的集合 $\{R_y \mid y \in S\}$ 生成的 $Sym(S)$ 的子群。这称为 $(S,\circ)$ 的右乘法群。由于

$$(f(y,z)oR_{y\circ z})(x) = f(y,z)(x) \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ (z) = (R_y oR_z)(x)$$

对所有 $x,y,z \in S$, $R_y oR_z = f(y,z)oR_{y\circ z}$ 对所有 $y,z \in S$。再次，

$$(x\theta f(y',y)^{-1} \circ y') \circ y = x \circ (y' \circ y) = y$$

对所有 $x,y \in S$，其中 y' 表示 y的左逆。这意味着

$$R_y^{-1} = f(y',y)^{-1} oR_{y'}$$

对所有 $y \in S$。进而可得，$G_S S$ 是 $R(S)$的子群，其中 S 通过映射 R与集合 $\{R_y \mid y \in S\}$等同。因此，$R(S) = G_S S$。由于 $G_S \bigcap S = \{I_S\}$, S 是 $G_S S$ 中 G_S 的右横截集。群 $G_S S$ 称为 S的群扩张（也称为右乘法群）。最后，$G_S S$ 具有泛性质，即如果 G 是任意一个群，其中 $(S,\circ)$作为 G的子群的右横截集出现，那么存在唯一的群同态从 $G_S S$ 到 G，且在 S 上为单位元（见定理 3.4 [5]）。

定义 2.1. (*[3, 7]*) 带有右单位元 e 的拟群 $(S,\circ)$ 称为右陀螺群，如果满足以下四个条件:

(i) 对每个元素 $a \in S$，存在关于 e 的右逆 $a' \in S$，其含义是 $a \circ a' = e$。
(ii) 对每个 x、y、$z \in S$，存在唯一元素 $x\theta f(y,z) \in S$，使得 (iii) 映射 $f(y,z)$ 从 S到 S，由 $f(y,z)(x) = x\theta f(y,z)$ 给出，是 $(S,\circ)$ 的自同构群。(iv) 对所有 $y \in S$、$f(y,y') = I_S$，其中 I_S 是 S上的恒等映射。

$(x\circ y)\circ z = x\theta f(y,z) \circ (y \circ z)$

下面的命题给出了拟群成为右陀螺群的充要条件。

命题 2.2. (*[7]*) 拟群 $(S,\circ)$ 是右陀螺群，当且仅当 $(S,\circ)$ 是一个含单位元的右环，且所有内映射 $f(x,y) \in Aut(S,\circ)$ 和$f(x',x) = I_S$，其中 x'表示 x的左逆。 ♯

定义 2.3. (*[3, 7]*) 群 G的子群 H 的右横截集 S，若包含 G 的单位元 e，且对于所有 $x \in S$和 $h \in H$均有 $S = S^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in S\}$ 和 $h^{-1}xh \in S$，则称为陀螺横截集。

下面的命题阐明了右陀螺群与陀螺横截集之间的关系。

命题 2.4. (*[7]*)（右陀螺群表示定理）右环 $(S,\circ)$ 是右陀螺群，当且仅当它是其群扩张中 S 的右内映射群（群挠） G_S 的陀螺横截集（右乘群） $G_S S$。 ♯

本文中所有未定义的上同调理论术语，请参见第 10] 章 [9,。

3. Gyro-groups and Gyro-transversals

考虑一个群 G 以及 G 与$Inn(G)$的半直积$\hat{}G = G \rtimes Inn(G)$，其中 $Inn(G)$ 表示 G的内自同构群。 G 中的元素$\hat{}$可唯一表示为(x,α)，其中 $x \in G$ 且 $\alpha \in Inn(G)$。乘积 $\cdot$ 由$(x,\alpha)\cdot(y,\beta) = (x\alpha(y)\ \alpha\beta)$给出。每个元素$(x,\alpha)$都可唯一表示为$(x,\alpha) = (e,\alpha)(\alpha^{-1}(x)\ I_G)$。因此， $S = G \times \{I_G\}$ 是 G中 $\{e\} \times Inn(G)$的右横截集。S 上诱导的右环结构就是 S上的群结构。由于 S 是 G的正规子群，它是一个陀螺横截集。此外，$\hat{}G$ 中 $\{e\} \times Inn(H)$的任意右横截集均具有以下形式： $S_g = \{(e,g(x))\cdot(x,I_G) = (g(x)(x)\ g(x)) \mid x \in G\}$，其中 g是从G 到 $Inn(G)$的映射，且 $g(e) = I_G$。此外，

$$(g(x)(x),g(x))(g(y)(y),g(y)) = (e,\alpha)(g(z)(z),g(z)),$$

其中 $z = g(y)^{-1}(x)y$ 且 $\alpha = g(x)g(y)g(z)^{-1}$。因此，诱导出的右环运算 $\circ_g$ 在 S_g 上定义为

$$(g(x)(x),g(x))\circ_g(g(y)(y),g(y)) = (g(z)(z),g(z)),$$

其中 $z = g(y)^{-1}(x)y$。显然，双射 $x \mapsto (g(x)(x)\ g(x))$ 从 G 到S_g 诱导出 G 上的右环结构 $\hat{}\circ_g$，其定义为

$$x\hat{\circ}_g y = g(y)^{-1}(x)y.$$

显然，$(S_g,\circ_g)$ 与 $(G,\hat{}\circ_g)$ 同构。由 [7, 引理 5.11] 可知，S_g 是陀螺横截集，当且仅当 $g(x^{-1}) = g(x)^{-1}$，且 g 是等变的，即对于所有 $x \in G$ 和 $\alpha \in Inn(G)$，都有 $g(\alpha^{-1}(x)) = \alpha^{-1}g(x)\alpha$。进而，由 [7, 命题 5.10] 也可知，$(S_g,\circ)$，以及因此 $(G,\hat{}\circ_g)$，是右陀螺群，当且仅当 $g(x^{-1}) = g(x)^{-1}$，且 g 是等变的，即对于所有 $x \in G$ 和 $\alpha \in Inn(G)$，都有$g(\alpha^{-1}(x)) = \alpha^{-1}g(x)\alpha$。现在，从$G$ 到 $Inn(G)$的任意映射 g，都由一个从 G 到 G 的映射 λ 确定，其中 $\lambda(e) = e$，且满足$g(x) = i_{\lambda(x)}$；这里， i_a 表示由 $i_a(x) = axa^{-1}$定义的内自同构。称 $(S_g,\circ_g)$ 为右陀螺群，意味着$i_{\lambda(x^{-1})} = i_{(\lambda(x)^{-1})}$，且对所有 $x,b \in G$，都有$i_{\lambda(i_{b^{-1}}(x))} = i_{b^{-1}}i_{\lambda(x)}i_b$。这又等价于：对所有 $x,b \in G$，$\lambda(x^{-1})\lambda(x)$，且 $\lambda(b^{-1}xb)b^{-1}\lambda(x)^{-1}b$ 属于中心 $Z(G)$。特别地，若映射 λ 满足条件 (i) $\lambda(x^{-1}) = \lambda(x)^{-1}$，以及 (ii)$\lambda$ 是等变的，即对所有 $x,b \in G$，都有 $\lambda(b^{-1}xb) = b^{-1}\lambda(x)b$，则 S_g是陀螺横截集，且 $(S_g,\circ_g)$ 是右陀螺群。进而，$(G,\hat{}\circ_g)$ 是右陀螺群，其中 $\hat{}\circ_g$ 定义为

$$x\hat{\circ}_g y = i_{\lambda(y)^{-1}}(x)y = \lambda(y^{-1})x\lambda(y)y,$$

$x,y \in G$。对于每个 $n \in \mathbb{Z}$，由 $\lambda(x) = x^n$ 给出的从 G 到 G 的映射 λ_n 满足上述两个条件。因此，对于每个 n，我们得到一个右陀螺群结构 $\circ_n$ 上由以下方式给出的 G

$$x \circ_n y = i_{y^{-n}}(x)y = y^{-n}xy^{n+1}.$$

我们将关注右陀螺群（$G,\circ_1$）。

定义 3.1. 若右环 $(S,\circ)$ 同构于某个群 G 的 $(G,\circ_1)$ 的子右环，则称其为基于群的右环。

基于群的右环范畴记为 GR。注意，群未必是基于群的右环。事实上，3-群 G 是基于群的右环，当且仅当所有阶为 3 的元素都位于 G [6, 推论 5.4]的中心。因此，指数为 3 的群是基于群的右环，当且仅当它是阿贝尔群。特别地，阶为 3^3 且指数为 3 的非阿贝尔群不是基于群的右环。

定义3.2. 若映射 f 从群 G 到群 G' 是从 $(G, \circ_1)$ 到 $(G', \circ_1)$ 的同态，则称 f为陀螺同态。更明确地说，若对于所有x、 $y \in G$，f 满足 $f(y^{-1}xy^2) = f(y)^{-1}f(x)f(y)^2$ ，则称其为陀螺同态。双射陀螺同态称为陀螺同构。

显然，群同态是陀螺同态。然而，陀螺同态不一定是群同态。例如，考虑指数为3的额外特殊3-群 G 。此时，$(G, \circ_1)$ 是阿贝尔群，而恒等映射 I_G 是从群 G 到群 $(G, \circ_1)$ 的陀螺同态，但不是群同态。由此还可知，陀螺同构群不一定同构。我们有一个范畴 GP，其对象是群，态射是陀螺同态。显然，群的范畴 GP 是 GP 的一个忠实但不满的子范畴，而范畴 GP 是 GR 的一个忠实但不满的子范畴。下面命题的证明很直接。

命题3.3. 设 f 是从群 G 到群 G'的陀螺同态。则以下结论成立:

> (i) $f(e) = e$。(ii) 作为$(G, \circ_1)$的元素所考虑的元素的幂，与作为群 G的元素所考虑的幂相同。(iii) 对所有 $a \in G$ 和 $n \in \mathbb{Z}$， $f(a^n) = f(a)^n$ 。(iv) f下$(G, \circ_1)$的子右环的像是$(G', \circ_1)$的子右环。(v) f 下$(G', \circ_1)$的子右环（正规子右环）的逆像是$(G, \circ_1)$的子右环（正规子右环）。(vi) 陀螺同态基本定理在范畴ˆGP中成立。

陀螺群同态基本定理的证明见 [12, 定理30，第 418]页。子群在 f 下的逆像不一定是子群。考虑一个阶为 3^3的3 指数非阿贝尔群 G 。从 G 到初等阿贝尔 3-群$(G, \circ_1)$的恒等映射是一个陀螺同构。$(G, \circ_1)$的子群数为13，而 G 的子群数为4。

命题 3.4. 映射 f 从 G 到 G' 是陀螺同态，当且仅当f保持单位元，且 $f(y^{-1}xy^2) = f(y^{-1})f(x)f(y^2)$ 对所有 $x, y \in G$均成立。

证明。设 f 是陀螺同态。由前一个命题可知， f 保持单位元和幂。因此

$$f(\overset{\text{y}}{y^{-1}}x\overset{\text{p}}{y^2}) = f(y)^{-1}f(x)\overset{\text{q}}{f(y)^2} = f(y^{-1})f(x)f(y^2) \text{ for all } x, \overset{\text{y,}}{y} \in G.$$

反之，假设 f 保持单位元，且对于所有 x、$y \in G$， $f(y^{-1}xy^2) = f\,y^{-1}f(x)f(y^2)$。令 $x = y$，可得 $f(y^2) = f\,y^{-1}f(y)f(y^2)$。这表明对于所有 $y \in G$， $f(y^{-1}) = f\,y^{-1}$ 。进一步地，令 $x = y^{-1}$，可得 $1 = f(y^{-1})f\,y^{-1}(f)y^2$。这表明对于所有 $y \in G$， $f(y^2) = f\,y^2$。 □

命题 3.5. 从 G 到 G' 的保持单位元的映射 t 是陀螺同态，当且仅当 $\partial t(y^{-1},x)\partial t(y^{-1}x,y^2) = 1$，其中边界映射 ∂t 由 $\partial t(x,y) = t\,x(t)y(t)xy^{-1}$ 给出。

证明。设 t 是一个从 G 到 G' 的映射，且保持单位元。那么

$$\begin{aligned}\partial t(y^{-1},x)\partial t(y^{-1}x,y^2) =& t(y^{-1})t(x)t(y^{-1}x)^{-1}t(y^{-1}x)t(y^2)t(y^{-1}xy^2)^{-1}\\ =& 1\end{aligned}$$

对所有 x、$y\in G$，当且仅当 $t(y^{-1}xy^2) = t(y^{-1})t(x)t(y^2)$ 对所有 x、$y\in G$ 成立。由命题 3.4 可得该结论。 □

4. 一些普适构造

设 X 是一个集合，$F(X)$ 是以 X 为生成元、由 X 中自由约化的字构成的自由群。令 $\hat{}F(X)$ 表示以 $F(X)$ 为生成元、由 $F(X)$ 中自由约化的字构成的自由群。通常，Ω 表示从一个范畴到另一个范畴的遗忘函子，该函子会遗忘某些结构。

定理 4.1。设 Ω 表示从基于群的右环的 GR 类别到右环的范畴 RL 的遗忘函子。那么 Ω 存在一个左伴随。

证明。我们构造从 RL 到 GR 的伴随函子 Σ。设 $(S,\circ)$ 是一个右环。考虑由 S 生成的自由群 $F(S)$，其中的元素是 $\hat{}S$ 中的自由约化字。令 $F(S)$ 表示具有表示 $\langle S$ 的群；其中 $R = \{(x\circ y)^{-1}y^{-1}xy^2\}$。令 $\Sigma(S)$ 表示子集 $\{y^{-1}xy^2\langle R\rangle \mid x,y\in S\} = \{(x\circ y)\langle R\rangle \restriction x,y\in S\}$。显然，$\Sigma(S)$ 是 $(F(S)\ \circ_1)$ 的子右环，因此它是一个基于群的右环。显然，从 S 到 $\Sigma(S)$ 的映射 i_S（由 $i_S(x) = x\langle R\rangle$ 给出）是右环之间的同态。

设 f 是从 $(S,\circ)$ 到基于群的右环 $(T,\circ_1)\subset(G,\circ_1)$ 的同态。根据自由群的泛性质，我们有唯一的群同态 $\hat{}\hat{}f$，它从 $F(S)$ 到 G，满足对每个 $x\in S$ 都有 $f(x) = f(x)$。由于对所有 $x,y\in S$，$f(x\circ y) = f(y)^{-1}f(x)f(y)^2$，$\hat{}f(x\circ y) = \hat{}f(y)^{-1}\hat{}f(x)\ \hat{}f(y)^2$。这意味着 $\hat{}R$ 包含于 f 的核中。于是，我们得到唯一的群同态 $\overline{f}\hat{}$，它从 $F(S)$ 到 G。显然，$\overline{f}(\Sigma(S))\subseteq T$，并且 $\overline{f}|_{\Sigma(S)}$ 是从 $\Sigma(S)$ 到 $(T,\circ_1)$ 的唯一同态，满足 $\overline{f}|_{\Sigma(S)}\circ i_S = f$。

接下来，设 $(S',\circ')$ 是一个右环，且 f是从 $(S,\circ)$ 到 $(S',\circ')$ 的同态。那么，$i_{S'}\circ f$ 是从 $(S,\circ)$ 到基于群的右环 $\Sigma(S')$ 的同态，其中 $i_{S'}$ 是上一段所述的泛映射。根据上文所述 $\Sigma(S)$ 的泛性质，我们再次得到一个唯一的同态$\Sigma(f)$，它从 $\Sigma(S)$ 映射到 $\Sigma(S')$，满足 $i_{S'}\circ f = \Sigma(f)\circ i_S$。因此，$\Sigma$ 定义了一个从范畴 RL 到 GR 类别的函子。最后，我们需要证明双函子 $Mor(-,\Omega(-))$ 和 $Mor(\Sigma(-)\ -)$（从 RL $\times$ GR 到以集合为对象的 SET 类别）自然同构。由以上讨论可知，对每个 $(S,T)\in$ RL $\times$ GR，都有一个双射 $\eta_{S,T}$，从 $Mor(S,\Omega(T))$ 到$Mor(\Sigma(S)\ T)$，由 $\eta_{S,T}(f) = \overline{f}|_{\Sigma(S)}$ 给出。容易看出，$\eta = \{\eta_{S,T}\mid(S,T)\in Obj(RL)\times Obj(GR)\}$ 是一个自然同构。 □

现在，我们在基于群的右环所构成的 GR 类别中构造自由对象。令X 为一个集合。考虑集合 X 上的自由群 $F(X)$，其元素由 X 中的自由约化字构成。若 W 是 X 中的一个字，则 $\overline{W}$ 表示通过自由约化 W 而在 X 中得到的字。我们按如下方式归纳定义 $F(X)$ 的子集 $A_n, n \geq 0$。令 A_0 为单元素集合 $\{\overline{\emptyset} = 1\}$，其中包含表示单位元的空字。令 $A_1 = \{\overline{x^{\pm 1}} \mid x \in X\}$ 为由长度为 1 的约化字组成的集合。假设 A_n 已经定义，则定义 $A_{n+1} = \{\overline{U}^{-1}\overline{V}\,\overline{U}^{2} \mid \overline{U}, \overline{V} \in \bigcup_{i=0}^{n} A_i\}$。显然， $FR(X) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 是由 X 生成的 $(F(X) \circ_1)$ 的一个子右环。映射 i 从 X 到 $FR(X)$，由 $i(x) = \overline{x}$ 给出，是单射；并且数对 $(FR(X)\ i)$ 具有泛性质：若 j 是从 X 到基于群的右环 $(T, \circ_1) \subseteq (G, \circ_1)$ 的映射，则存在唯一的同态 $\overline{j}$，从 $FR(X)$ 映射到 T，满足 $\overline{j} \circ i = j$。由此可知， FR 定义了一个从以集合为对象的 SET 类别到 GR 类别的函子，该函子与遗忘函子 Ω 互为伴随。我们将 $(FR(X)\ i)$ 称为 X 上的自由基于群的右环。若一对 $\langle X;\ R\rangle$ 连同一个满射同态 f（从 $FR(X)$ 到 $(T, \circ_1)$）满足以下条件： f 的核是由 R 在 $FR(X)$ 中生成的正规子右环，则称其为 T 的一个表示。每个基于群的右环 $(S, \circ_1)$ 都具有标准乘法表示，它由从 $FR(S)$ 到 S 的显然满射同态诱导。将循环群 $\langle x\rangle$ 视为基于群的右环时，它有一个表示 $\langle\{x\}; \emptyset\rangle$，并且是 GR 中的泛自由对象。若 S 和 T 是基于群的右环，分别具有表示 $\langle X; R\rangle$ 和 $\langle Y; S\rangle$，则具有表示 $\langle X \bigcup Y;\ R \bigcup S\rangle$ 的基于群的右环称为 S 与 T 的自由积，其中 $X \bigcup Y$ 取为 X 与 Y 的不交并。显然，GR 中的自由对象是若干个泛自由对象的副本的自由积。

设 K 是一个群。令 $\langle K; R_K\rangle$ 表示 K 的标准乘法表示，而 $\check{}K$ 表示具有表示 $\langle K; \check{}S_K\rangle$ 的群，其中 $\check{}S_K$ 是 K 中形如

$$(y^{-1}xy^2)^{-1} \star y^{-1} \star x \star y^2,$$

$x, y \in K - \{e\}$ 的字。这里，并列书写表示群 K 中的运算，而 $\star$ 表示由 K 上的自由群 $F(K)$ 中的运算。更明确地说， $K \approx F(K)/\langle R_K\rangle$，其中 $\langle R_K\rangle$ 是 $F(K)$ 中由集合 $R_K = \{(xy)^{-1} \star x \star y \mid x, y \in K\}$ 和 $\check{}K \approx F(K)/\langle \check{}S_K\rangle$ 生成的正规子群，其中 $\check{}S_K = \{(y^{-1}xy^2)^{-1} \star y^{-1} \star x \star y^2 \mid x, y \in K\}$。显然， $\langle \check{}S_K\rangle \subseteq \langle R_K\rangle$，因此我们有一个从 $\check{}K$ 到 K 的满群同态 ν_K，它由 $\nu_K(x\langle \check{}S_K\rangle) = x\langle R_K\rangle$ 给出。从 K 到 $\check{}K$ 的映射 t_K 由 $t_K(x) = x\langle \check{}S_K\rangle$ 给出，是一个单陀螺同态，并且 $t_K(x^n) = (t_K(x))^n$。若 f 是从 K 到群 G 的陀螺同态，则从 $\check{}K$ 到 G 的映射 $\check{}f$ 由 $\check{}f(x\langle \check{}S_K\rangle) = f(x)$ 给出，它是唯一一个满足 $\check{}f \circ t_K = f$ 的从 $\check{}K$ 到 G 的群同态。因此，偶 $(\check{}K, t_K)$ 具有泛性质：给定任意群 G 以及从 K 到 G 的陀螺同态 f，存在唯一一个从 K 到 G 的群同态 $\check{}f$，使得 $f \circ t_K = f$。注意，$\check{}f \circ \nu_K \circ t_K = f$，但 $f \circ \nu_K$ 未必是 f，因为它未必是群同态（参见例 4.3）。此外，关联 $K \mapsto \check{}K$ 定义了一个从范畴 GP 到 GP 的函子 $\hat{}\hat{}$，它是遗忘函子的伴随；其中 GP 是一个范畴，其对象为群，态射为陀螺同态。

设 $\check{}R_K = \langle R_K\rangle/\langle \check{}S_K\rangle$ 和 $\check{}K = F(K)/\langle \check{}S_K\rangle$。那么，我们有以下短正合列

(1) $$1 \longrightarrow \check{R}_K \longrightarrow \check{K} \longrightarrow K \longrightarrow 1$$

其群具有一个截面 t_K，该截面是陀螺同态。

更一般地，设 $\langle X; S\rangle$ 是 K 的任意表示。考虑由 $F(X)$ 生成的自由群 $F(F(X))$。我们有一个满群同态 η，它从 $\hat{}F(F(X))$ 到 $F(X)$，由 $\eta(W_1 \star W_2 \star \cdots \star W_r) = W_1W_2\cdots W_r$ 给出，且 $\langle F(X); S\rangle\hat{}$ 也是 K 的一个表示，其中 $S = \{W_1 \star W_2 \star \cdots \star W_r \mid W_1W_2\cdots W_r \in S\}$。令 $\check{}T$ 表示子集 $\{(\eta($ $U^{-1} \star V \star U^2)^{-1} \star U^{-1} \star V \star U^2 \mid U, V \in F(X)\}$ of$F(F(X))$. 可以观察到 $\langle\check{}$ $T\rangle \subseteq \langle\hat{}S\rangle$。因此，我们得到一个短正合列

(2) $$1 \longrightarrow \langle\hat{S}\rangle/\langle\check{T}\rangle \longrightarrow F(F(X))/\langle\check{T}\rangle \longrightarrow K \longrightarrow 1$$

群的....., 它与 (1) 等价。事实上，若 μ 是由 $\langle X$ 给出的从 $F(X)$ 到 K 的满射同态； K 的 $S\rangle$，那么它还会进一步诱导一个从 $F(F(X))$ 到 $F(K)$ 的满射群同态 $\check{}\mu$。容易看出，$\check{}\mu(\langle\check{}T\rangle) = \langle\check{}S_K\rangle$。反过来，$\check{}\mu$ 诱导一个同构 ρ，它从 $F(F($ $X))/\langle\check{}T\rangle$ 映到 $\check{}K$，使得 $(\rho^{-1}|\check{}_{R_K}, \rho^{-1}, I_K)$ 是从 (1) 到 (2) 的一个等价。特别地，$\check{}$ $K \approx F(F(X))/\langle\check{}T\rangle$，且 $\langle\hat{}S\rangle/\langle\check{}T\rangle \approx\check{}R_K$。由此可知， $F(F(X))/\langle\check{}T\rangle$ 和 $\langle\hat{}$ $S\rangle/\langle\check{}T\rangle$（在同构意义下）与表示无关，且仅取决于群 K。对应关系 $K \mapsto K$ 和 $K \mapsto R_K$ 定义了从 GP 到其自身的函子，它们在前述意义下具有泛性质。

$\check{}$群 R_K 可视为陀螺同态从 K 到群同态的障碍。我们也称其为 K的陀螺乘子。

$\check{}$ 例4.2. 若 G 是循环群，则显然 $G \approx G$。令 G为初等阿贝尔2群。则$\check{}G$ 有如下表示： $\langle G;\ \check{}S_G\rangle$，其中$\check{}S_G = \{(y^{-1}xy^2)^{-1} \star y^{-1} \star x \star y^2 \mid x,$ $y \in G - \{e\}\} = \{(yx)^{-1} \star (y \star x) \mid x,\ y \in G\} = R_G$。因此，这种情况下也有$\check{}G \approx G$。考虑四元数群$Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$。显然，$(j^{-1}ij^2)$ $^{-1} \star j^{-1} \star i \star j^2 = (ji)^{-1} \star (j \star i)$，依此类推。事实上， $S_{Q_8} = R_{Q_8}$。因此， $Q_8 \approx Q_8$ 和 Q_8 与自身陀螺同构。

$\check{}$ 例 4.3。考虑 $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$。由于 G的指数为3， G的指数也为3。由于 G 是有限生成的，因此它是有限的。我们证明 G 是非阿贝尔群。令 E 表示阶为 3^3 且指数为3的非阿贝尔群。由于E 是类2幂零群且指数为3，$(E, \circ_1)$是指数为3的阿贝尔群，因此作为群，它同构于 $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$。特别地，我们有一个从 G 到 E 的陀螺同构 η。根据$(\check{}G, t_G)$的泛性质，我们得到一个从 G 到 E 的满群同态$\check{}\eta$， 使得$\check{}\eta \circ t_G = \eta$。$\check{}\check{}$ 由于 E 是非阿贝尔的， G 也是非阿贝尔的。同样，由于 G 是阿贝尔的， R_G 包含G的换位子 $[\check{}G, \check{}G]$。显然， $\eta \circ \nu_G$ 不是群同态，因为$(\eta \circ \nu_G)^{-1}(\{1\}) = \nu_G^{-1}(\{1\}) =\check{}R_G \supseteq [\check{}G, \check{}G]$，且 E 是非阿贝尔的。注意 $\eta \circ \nu_G \circ t_G = \eta$。

注4.4. 从例 4.3 可以看出，对于群 G_1 和 G_2，$\check{}(G_1 \times G_2)$ 不一定与 $\check{}$ $G_1 \times \check{}G_2$ 同构。还可以看出，若 $G_1\check{}\check{}\check{}$ 与 G_2 陀螺同构，则 G_1 作为群与 G_2 同构。即使 G_1 作为群与 $G_2\check{}$ 同构， G_1 也不一定与 G_2 陀螺同构。

例 4.5. 若 K 是由至少两个生成元生成的自由群，则很容易看出， K 的陀螺乘子 R_K 非平凡，并且 t_K 是一个陀螺同态，而非群同态。

5. Gyro-split extensions

定义 5.1. 群的短正合列

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow 1$$

如果存在一个从 K 到 G 的截面 t（也称为陀螺分裂），且该截面是陀螺同态，则称群的短正合列为陀螺分裂扩张。

显然，分裂扩张是陀螺分裂扩张。然而，陀螺分裂扩张不一定是分裂扩张。

例 5.2. 考虑阶为 3^3 、指数为3的非阿贝尔群 E 。则 $(E, \circ_1)$ 是初等阿贝尔 3-群，且从 E 到 $(E, \circ_1)$ 的恒等映射是一个陀螺同构。考虑中心扩张

$$0 \longrightarrow Z(E) \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\nu} \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \longrightarrow 0$$

由 $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ 扩张 $\mathbb{Z}_3$ 。显然，它不是分裂扩张。然而，$(E, \circ_1)$ 存在一个阶为 3^2 的子右环 L ，使得 $E = Z(E)L$，并且映射 $\nu|_L$ 是从 $(L, \circ_1)$ 到 $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ 的同构。事实上，$(E, \circ_1)$ 有 $3^2+3+1 = 13$ 个阶为 3^2, 的子群 $\approx \mathbb{Z}_3^3$ ，而 E 有 4 个阶为 3^2 的子群。如果 L 是一个阶为 3^2 的子群 $(E, \circ_1)$，且不是 E 的子群，那么 $L \bigcap Z(E) = \{1\}$。因此， $E = Z(E)L$ ，且映射 $\nu|_L$ 是从 $(L, \circ_1)$ 到 $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ 的同构。显然，$(\nu|_L)^{-1}$ 是一个陀螺分裂。

例 5.3. 设 K 为任意域。考虑幺幂群 $U(3, K)$，即由域 K 中元素构成的幺幂上三角 3×3 矩阵群。则 $U(3, K)$ 是一个类 2 幂零群。因此，$(U(3, K)\ \circ_1)$ 是一个类至多为 2 的幂零群。令 $U(a_1, a_2, a_3)$ 表示满足 $a_{12} = a_1$、 $a_{13} = a_2$ 和 $a_{23} = a_3$ 的幺幂上三角 3×3 矩阵。容易观察到，$U(b_1, b_2, b_3)^{-1}U(a_1, a_2, a_3)U(b_1, b_2, b_3)^2 = U(a_1+b_1, b_2+2a_1b_3-b_1a_3+a_2, b_3+a_3)$。因此，$(U(3, K)\ \circ_1)$ 同构于群 $(K^3, \cdot)$，其中乘法 $\cdot$ 定义为

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, b_2 + 2a_1b_3 - b_1a_3 + a_2, b_3 + a_3).$$

显然，$(U(3, K)\ \circ_1)$ 是定义在 K 的素域上的代数群。此外，当且仅当 K 的特征为 3 时，$(U(3, K)\ \circ_1)$ 是阿贝尔群。考虑 $U(3, \mathbb{Z}_p)$，其中 p 是一个不等于 3 的奇素数。于是 $U(3, \mathbb{Z}_p)$ 是一个阶为 p^3 的非阿贝尔群，而 $(U(3, \mathbb{Z}_p)\ \circ_1)$ 也是一个阶为 p^3 的非阿贝尔群，其指数与 $U(3, \mathbb{Z}_p)$ 的指数相同。因此， $U(3, \mathbb{Z}_p)$ 与 $(U(3, \mathbb{Z}_p)\ \circ_1)$ 同构。换言之，$U(3, \mathbb{Z}_p)$ 与自身陀螺同构。因此，任何以 $U(3, \mathbb{Z}_p)$ 为核的陀螺分裂扩张都是分裂扩张。此外，注意到

$$0 \longrightarrow Z(U(3, \mathbb{Z}_p)) \xrightarrow{i} U(3, \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\nu} \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$$

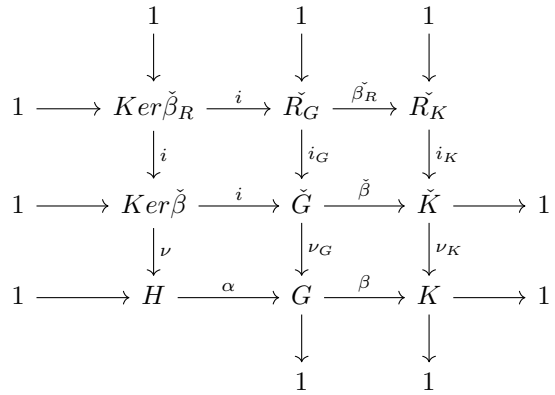
不是陀螺分裂。

˘ 利用函子 $G \mapsto G$ 的泛性质，我们可以轻松证明以下命题:

命题 5.4. 对于每个群的短正合列

$$E \equiv 1 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow 1,$$

我们都有以下交换图



其中各行和各列均为正合列。此外，如果底行为陀螺分裂的，那么中间行就是分裂正合列。

证明。考虑最右侧的陀螺分裂垂直正合列。我们有从 t_K 到 K 的陀螺分裂 K，且 $t_K \circ \beta$ 是从 G 到 K 的陀螺同态。根据对 (G, t_G) 的泛性质，我们有唯一的群同态 β，从 G 到 K，使得 $\beta \circ t_G = t_K \circ \beta$。进而，

$$\nu_K \circ \check{\beta} \circ t_G \;=\; \nu_K \circ t_K \circ \beta \;=\; \beta \;=\; \beta \circ \nu_G \circ t_G.$$

由于 $\nu_K \circ \beta$ 和 $\beta \circ \nu_G$ 是从 G 到 K 的群同态，而 β 是一个陀螺同态（因为它是群同态），由 (G, t_G) 的泛性质可得 $\nu_K \circ \beta = \beta \circ \nu_G$。因此，右下方的方块是交换的。此外，由于 $t_K(K)$ 作为一个群生成 $\check{}K$，且 β 是满射，可知 $\check{}\beta$ 是满射。显然，该图表是交换的，所有行以及最后两列都是正合的。第一列的正合性也可通过图表追逐得到。注意，ν 和 β_R 不必是满射。

最后，假设底行是陀螺分裂的，且 t 是其陀螺分裂。于是，$t_G \circ t$ 是从 K 到 $\check{}G$ 的陀螺同态。根据 $(\{\check{}K\}, t_K)$ 的泛性质，存在唯一的群同态 $\check{}t$，从 $\check{}K$ 到 $\check{}G$，使得 $\check{}t \circ t_K = t_G \circ t$。进而，

$$\check{\beta} \circ \check{t} \circ t_K \;=\; \check{\beta} \circ t_G \circ t \;=\; t_K \circ \beta \circ t \;=\; t_K \;=\; I_{\check{K}} \circ t_K.$$

由 $(\{\check{}K\}, t_K)$ 的泛性质可得 $\check{}\beta \circ \check{}t = I_{\check{}K}$。 □

注 5.5。由于 $t_G|_{Ker\beta} = im(\alpha)$ 到 $\langle t_G(Ker\beta)\rangle \subseteq Ker\check{}\beta$ 的陀螺同态，因此存在唯一的群同态 $\check{}\alpha$，从 $\check{}H$ 到 $\check{}G$，使得 $\check{}\alpha \circ t_{Ker\beta} = t_G|_{Ker\beta}$。显然，$im(\check{}\alpha) \subseteq Ker\check{}\beta$。然而，这个等式未必成立。进而，我们得到与扩张 E 相关联的自然不变量 $inv(E) = Ker\check{}\beta / im(\check{}\alpha)$。

令 GEXT 表示一个范畴，其对象为陀螺分裂扩张，而从一个陀螺分裂扩张出发的态射

$$E \equiv 1 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow 1$$

到另一个陀螺分裂扩张

$$E' \equiv 1 \longrightarrow H' \xrightarrow{\alpha'} G' \xrightarrow{\beta'} K' \longrightarrow 1$$

是一个三元组 (λ, μ, ν)，其中 λ 是从 H 到 H' 的群同态，μ 是从 G 到 G' 的群同态，而 ν 是从 K 到 K' 的陀螺同态，并且相应的图表是交换的。态射的复合显而易见。注意，在此背景下，短五引理也成立。因此，(λ, μ, ν) 是一个等价，当且仅当 λ 和 ν 是双射。

定理 5.6。第 4 节 (1) 中描述的陀螺分裂扩张，是一个以 K 为核的自由陀螺分裂扩张，其意义是：若

$$E \equiv 1 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} L \xrightarrow{\beta} K' \longrightarrow 1$$

是一个以 K' 为核的陀螺分裂扩张，且 η 是从 K 到 K' 的群同态，则存在唯一的一对群同态 (λ, μ)，使得三元组 (λ, μ, η) 是从扩张 (1) 到 E 的态射。

证明。设 s 是 E的陀螺分裂。则 $s \circ \eta$ 是从 K到 L的陀螺同态。由 $(\{\check{}K\}, t_K)$ 的泛性质可得唯一的群同态 $\check{}\mu$，从 K 到 L，使得 $\mu \circ t_K = s \circ \eta$。因此

$$\beta \circ \mu \circ t_K = \beta \circ s \circ \eta = \eta = \eta \circ \nu_K \circ t_K.$$

由于 $\eta \circ \nu_K$ 是群同态，由 $(\{\check{}K\}, t_K)$ 的泛性质可得 $\beta \circ \mu = \eta \circ \nu_K$。此外，$\beta \circ \mu \circ i = \eta \circ \nu_K \circ i = 0$，其中 i 是从 R_K 到 K的 $\check{}\check{}$ 包含映射。因此，存在唯一的群同态 λ，从 $\check{} R_K$到 H，使得 (λ, μ, η) 是 GEXT 中的一个态射。 □

Let

$$E \equiv 1 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow 1$$

设其为一个陀螺分裂扩张，且 t 是 E的陀螺分裂。我们得到相应的因子系 (K, H, σ^t, f^t)，其中 f^t是从 $K \times K$到 H的映射，由 $t(x)t(y) = \alpha(f^t(x,y))t(xy)$ 给出；σ^t 是从 K到 $Aut(H)$ 的映射，由$\alpha(\sigma^t(x)(h)) = t(x)\alpha(h)t(x)^{-1}$ 给出。我们将 $\sigma^t(x)$ 记为 σ^t_x。此外，由于 t是陀螺同态，σ^t 也是陀螺同态（注意，它不一定是群同态），并且

$$f^t(y^{-1}, x) f^t(y^{-1}x, y^2) = 1 = \sigma^t_{y^{-1}}(f^t(x, y^2)) f^t(y^{-1}, xy^2) \tag{3}$$

对所有 $x, y \in K$。特别地，对所有 $y \in K$，$f^t(y, y^{-1}) = 1$。这促使我们给出如下定义：

定义 5.7。若因子系 (K, H, σ, f) 满足以下条件，则称其为陀螺因子系：σ 是从 K 到 $Aut(H)$ 的陀螺同态，并且 f 满足将 f^t 替换为 f 后的 (3)。这样的映射 f 也称为陀螺配对。

设 (λ, μ, ν) 是一个从陀螺分裂扩张出发的态射

$$E \equiv 1 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow 1$$

到陀螺分裂扩张

$$E' \equiv 1 \longrightarrow H' \xrightarrow{\alpha'} G' \xrightarrow{\beta'} K' \longrightarrow 1.$$

设 t 是 E 的陀螺分裂， t' 是 E'的陀螺分裂。由于对于 $x \in K$， $\beta'(\mu(t(x))) = \nu(\beta(t(x)))$ $= \nu(x) = \beta'(t'(\nu(x)))$, 因此存在唯一的映射 g ，从 K 到 H' ，满足 $g(1) = 1$, 使得

$$\mu(t(x)) = \alpha'(g(x))t'(\nu(x)) \tag{4}$$

对所有 $x \in K$。由于 t 是陀螺同态,

$$\mu(t(y^{-1})t(x)t(y^2)) = \mu(t(y^{-1}xy^2)) = \alpha'(g(y^{-1}xy^2))t'(\nu(y^{-1}xy^2)) \tag{5}$$

对所有 $x, y \in K$。现在,

$$\begin{aligned}
\mu(t(y^{-1})t(x)t(y^2)) =& \mu t(y^{-1})\mu t(x)\mu t(y^2) \\
=& \alpha'(g(y^{-1}))t'(\nu(y^{-1}))\alpha'(g(x))t'(\nu(x))\alpha'(g(y^2))t'(\nu(y^2)) \text{ by (5.2)} \\
=& \alpha'(g(y^{-1}))\alpha'(\sigma^{t'}_{\nu(y^{-1})}(g(x)))t'(\nu(y^{-1}))t'(\nu(x))\alpha'(g(y^2))t'(\nu(y^2)) \\
=& \alpha'(g(y^{-1})\sigma^{t'}_{\nu(y^{-1})}(g(x))f^{t'}(\nu(y^{-1}),\nu(x)))t'(\nu(y^{-1})\nu(x))\alpha'(g(y^2))t'(\nu(y^2)) \\
=& \alpha'(g(y^{-1})\sigma^{t'}_{\nu(y^{-1})}(g(x))f^{t'}(\nu(y^{-1}),\nu(x))\sigma^{t'}_{\nu(y^{-1})\nu(x)}(g(y^2))) \\
& t'(\nu(y^{-1})\nu(x))t'(\nu(y^2)) \\
=& \alpha'(g(y^{-1})\sigma^{t'}_{\nu(y^{-1})}(g(x))f^{t'}(\nu(y^{-1}),\nu(x))\sigma^{t'}_{\nu(y^{-1})\nu(x)}(g(y^2)) \\
& f^{t'}(\nu(y^{-1})\nu(x),\nu(y^2)))t'(\nu(y^{-1}xy^2)) \\
=& \alpha'(g(y^{-1})\sigma^{t'}_{\nu(y^{-1})}(g(x))\sigma^{t'}_{\nu(y^{-1})}(\sigma^{t'}_{\nu(x)}(g(y^2)))f^{t'}(\nu(y^{-1}),\nu(x)) \\
& f^{t'}(\nu(y^{-1})\nu(x),\nu(y^2)))t'(\nu(y^{-1}xy^2)) \\
=& \alpha'(g(y^{-1})\sigma^{t'}_{\nu(y^{-1})}(g(x))\sigma^{t'}_{\nu(y^{-1})}(\sigma^{t'}_{\nu(x)}(g(y^2)))t'(\nu(y^{-1}xy^2)) \text{ (by (3))}
\end{aligned}$$

对所有 x、 $y \in K$均成立。因此，通过比较方程（5）的两边，我们得到

$$g(y^{-1}xy^2) = g(y^{-1})\sigma^{t'}_{\nu(y^{-1})}(g(x)\sigma^{t'}_{\nu(x)}(g(y^2))) \tag{6}$$

对所有 x、 $y \in K$均成立。此外,

$$\begin{aligned}
\alpha'(\lambda(\sigma^t_x(h))) =& \mu(\alpha(\sigma^t_x(h))) \\
=& \mu(t(x)\alpha(h)t(x)^{-1}) \\
=& \mu(t(x))\alpha'(\lambda(h))\mu(t(x^{-1})) \\
=& \alpha'(g(x))t'(\nu(x))\alpha'(\lambda(h))\alpha'(g(x^{-1}))t'(\nu(x^{-1})) \\
=& \alpha'(g(x)\sigma^{t'}_{\nu(x)}(\lambda(h)g(x^{-1}))) \text{ since } t' \text{ and } \nu \text{ are gyro-homomorphisms.}
\end{aligned}$$

因此,

$$\lambda(\sigma^t_x(h)) = g(x)\sigma^{t'}_{\nu(x)}(\lambda(h)g(x^{-1})) \tag{7}$$

对所有 $x \in K$ 和 $h \in H$均成立。

设 $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ 是一个陀螺分裂扩张的态射

$$E_1 \equiv 1 \longrightarrow H_1 \xrightarrow{\alpha_1} G_1 \xrightarrow{\beta_1} K_1 \longrightarrow 1$$

to

$$E_2 \equiv 1 \longrightarrow H_2 \xrightarrow{\alpha_2} G_2 \xrightarrow{\beta_2} K_2 \longrightarrow 1,$$

且 $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ 是从 E_2 到一个陀螺分裂扩张的态射

$$E_3 \equiv 1 \longrightarrow H_3 \xrightarrow{\alpha_3} G_3 \xrightarrow{\beta_3} K_3 \longrightarrow 1.$$

设 t_1、t_2 和 t_3 为相应选取的陀螺分裂。于是

$$\mu_1(t_1(x)) \;=\; \alpha_2(g_1(x))t_2(\nu_1(x))$$

对于所有 $x \in K_1$ 和

$$\mu_2(t_2(x)) \;=\; \alpha_3(g_2(x))t_3(\nu_2(x))$$

对于所有 $x \in K_2$，其中 g_1 是从 K_1 到 H_2 的唯一确定映射，g_2 是从 K_2 到 H_3 的唯一确定映射。进而，

$$\mu_2(\mu_1(t_1(x))) \;=\; \alpha_3(g_3(x))t_3(\nu_2(\nu_1(x))),$$

其中，对每个 $x \in K_1$，$g_3(x) = \lambda_2(g_1(x))g_2(\nu_1(x))$。这引入了一个陀螺因子系范畴 GFAC，其对象为陀螺因子系；从陀螺因子系 $(K_1, H_1, \sigma^1, f^1)$ 到 $(K_2, H_2, \sigma^2, f^2)$ 的态射是三元组 (ν, g, λ)，其中 ν 是从 K_1 到 K_2 的陀螺同态，λ 是从 H_1 到 H_2 的群同态，而 g 是从 K_1 到 H_2 的映射，满足

(i) $g(1) \;=\; 1$,
(ii) $g(y^{-1}xy^2) \;=\; g(y^{-1})\sigma^2_{\nu(y^{-1})}(g(x)\sigma^2_{\nu(x)}(g(y^2)))$ and
(iii) $\lambda(\sigma^1_x(h)) \;=\; g(x)\sigma^2_{\nu(x)}(\lambda(h)g(x^{-1}))$,

对于所有 x、$y \in K_1$ 和 $h \in H_1$。态射 (ν_1, g_1, λ_1) 与 (ν_2, g_2, λ_2) 的复合为 $(\nu_2 \circ \nu_1, g_3, \lambda_2 \circ \lambda_1)$，其中对于所有 $x \in K_1$，$g_3(x) \;=\; \lambda_2(g_1(x))g_2(\nu_1(x))$。
利用选择公理，我们可以选择 t_E 一个陀螺分裂扩张 E 的陀螺分裂。显然，将每个陀螺扩张 E 关联到与截面 t_E 相关的陀螺因子系 $GFAC(E, t_E)$ 的对应关系 $GFAC$，给出了 GEXT 与 GFAC 之间的一个等价。

设我们固定一对 H 和 K 群。我们试图描述由 K 扩张 H 的陀螺分裂扩张的等价类。设 G 是由以下正合列给出的由 K 扩张 H 的陀螺分裂扩张

$$E \equiv 1 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow 1.$$

设 (λ, μ, ν) 是从 E 到 H' 被 K' 扩张而成的陀螺分裂扩张 G' 的一个等价，该扩张由以下正合列给出

$$E' \equiv 1 \longrightarrow H' \xrightarrow{\alpha'} G' \xrightarrow{\beta'} K' \longrightarrow 1.$$

那么显然，G' 也是 H 被 K 扩张而成的陀螺分裂扩张，由以下正合列给出

$$E'' \equiv 1 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha' \circ \lambda} G' \xrightarrow{\beta \circ \mu^{-1}} K \longrightarrow 1.$$

使得 E 与 E'' 等价，且 E'' 与 E'等价。因此，将等价的概念限制在 H 以 K 为核的所有陀螺分裂扩张类 $GE(H, K)$ 上并无损失，只需规定：

$$E_1 \equiv 1 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha_1} G_1 \xrightarrow{\beta_1} K \longrightarrow 1.$$

and

$$E_2 \equiv 1 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha_2} G_2 \xrightarrow{\beta_2} K \longrightarrow 1.$$

在 $GE(H,K)$ 中，若存在从 G_1 到 G_2 的同构 ϕ，使得 (I_H,ϕ,I_K) 令相应的图表交换，则称它们等价。

命题 5.8. 抽象核 ψ 从 K 到 $Out(H)$ 可由一个陀螺分裂扩张实现，当且仅当障碍 $Obs(\psi)\in H^3_\sigma(K,Z(H))$ 为 0，且ψ 有一个从 K 到 $Aut(H)$的提升，并且该提升是陀螺同态。这里，σ 是由 ψ诱导的从 K 到 $Aut(Z(H))$的群同态。

证明. 我们已经知道，ψ 可由一个扩张实现，当且仅当$Obs(\psi)=0$（见 [9, 命题 10.2.1，第 392] 页）。此外，此时它可由一个陀螺分裂扩张实现

$$1\longrightarrow H\xrightarrow{\alpha}G\xrightarrow{\beta}K\longrightarrow 1$$

当且仅当存在一个陀螺分裂 t，使得对每个 $x\in K$，都有 $\psi(x)=\sigma_x^t Inn(H)$。由于 t 是一个陀螺分裂，σ^t 是 ψ 的一个提升，且为陀螺同态。 □

以下两个推论是显然的。

推论 5.9. 抽象核 ψ 从 K 到 $Out(H)$ 可由陀螺分裂扩张实现，当且仅当障碍 $Obs(\psi)\in H^3_\sigma(K,Z(H))$ 为 0，且短正合列

$$0\longrightarrow Inn(H)\xrightarrow{i_1}Aut(H)\times_{(\nu,\psi)}K\xrightarrow{p_2}K\longrightarrow 1$$

是一个陀螺分裂扩张，其中 $Aut(H)\times_{(\nu,\psi)}K$ 是对偶 (ν,ψ) 的拉回，且$\nu\colon Aut(H)\to Out(H)$ 是自然群同态。

推论 5.10. 若 H 是一个群，满足

$$1\longrightarrow Inn(H)\xrightarrow{i}Aut(H)\xrightarrow{\nu}Out(H)\longrightarrow 1$$

是一个陀螺分裂正合列，则 H 的每个扩张都是陀螺分裂扩张。除此之外，若 H 的中心是平凡的，则这样的扩张在等价意义下唯一。

对于所有有限单群 H，上述列均分裂，除非 $H=A_6$。对于 $H=A_6$，上述列甚至不是陀螺分裂扩张。

一个群是其两个子群的内部半直积，当且仅当相应的扩张分裂，也就是说，分裂是一个群同态。现在我们观察到，在陀螺分裂的情形下同样如此。

定义 5.11. 设 G 是一个群。如果 S 是 G中 H 的一个右横截集，我们称 G 是正规子群 H 与$(G,\circ_1)$的一个子右环 S 的内部陀螺半直积。

因此，阶为 3^3 的指数为3非阿贝尔群 G 是其中心与阶为 3^2 的$(G,\circ_1)$的一个子环的陀螺半直积。显然，半直积也是陀螺半直积。然而，陀螺半直积不一定是半直积。

定理 5.12. 群 G 是正规子群 H 与 $(G,\circ_1)$ 的子右环 S 的内部陀螺半直积，当且仅当

(i) $G=HS$, *and*
(ii) $Hy^2\bigcap S=\{y^2\}$ *(equivalently,* $H\bigcap Sy^2=\{1\}$*) for all* $y\in S$.

证明. 假设 G 是正规子群H 与 $(G,\circ_1)$ 的子右环 S 的内部陀螺半直积。由于 S 是右横截集， $G = HS$。给定 $y \in S$，由于 S 是 $(G,\circ_1)$ 的子右环， $y^2 \in S$ ，且由于 S 是右横截集， $Hy^2 \bigcap S = \{y^2\}$。

反过来，设 H 是 G 的正规子群，且 S 是 $(G,\circ_1)$ 的子右环，并满足条件 (i) 和 (ii)。我们需要证明 S 是一个右横截集。显然， $G = HS$。假设 $y^{-1}x \in H$、 x、 $y \in S$。那么 $y^{-1}xy^2 \in Hy^2 \bigcap S = \{y^2\}$。这意味着 $y^{-1}x = 1$，因此 S 是 G 中 H 的右横截集。 □

注 5.13. 与半直积不同，若 G 是 H 与 S 的内部陀螺半直积，同时也是 H 与 T 的陀螺半直积，则 S 不一定与 T 共轭。

下面的命题显然成立。

命题 5.14. G 是 H 与 $(G,\circ_1)$ 的一个子右环的内部陀螺半直积，当且仅当该正合列

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\nu} G/H \longrightarrow 1$$

是陀螺分裂的。

接下来，设 H 是一个阿贝尔群，且 $K \xrightarrow{\sigma} Aut(H)$ 是一个抽象核。令 $GEXT_\sigma(K,H)$ 表示具有抽象核 σ、 H 被 K 扩张的陀螺分裂扩张的等价类集合。显然， $GEXT_\sigma(H,K)$ 非空，因为分裂扩张存在，而它也是一个陀螺分裂扩张。令 $GZ^2_\sigma(K,H)$ 表示与 σ 相关联的陀螺因子系集合。显然， $GZ^2_\sigma(K,H)$ 是 $Z^2_\sigma(K,H)$ 的一个子群。我们将 $GZ^2_\sigma(K,H)$ 称为陀螺循环群。将 $B^2_\sigma(K,H)\bigcap GZ^2_\sigma(K,H)$ 记作 $GB^2_\sigma(K,H)$，并称其为陀螺余边界群。我们还将 $GH^2_\sigma(K,H) = GZ^2_\sigma(K,H)/GB^2_\sigma(K,H)$ 称为 K 的、系数取在 H 中的第二陀螺上同调。由 [9, 命题 10.1.11 的证明（第 373], 页）可观察到，给定 $(K,H,\sigma,f) \in GZ^2_\sigma(K,H)$，存在相应的 H 被 K 扩张的陀螺分裂扩张。下面的命题很容易证明。

命题 5.15. 将 $(K,H,\sigma,f) \in GZ^2_\sigma(K,H)$ 关联到相应陀螺分裂扩张的映射 η，诱导出一个从 $GH^2_\sigma(K,H)$ 到 $GEXT_\sigma(K,H)$ 的双射，而后者又在 $GEXT_\sigma(K,H)$ 上诱导出群结构。

此外，很容易看出， $EXT_\sigma(K,H)$ 中的 Baer和在 $GEXT_\sigma(K,H)$ 中诱导出一个和；相对于该和，它是一个同构于 $GH^2_\sigma(K,H)$ 的子群。

例5.16. $GH^2_\sigma(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3,\mathbb{Z}_3) \approx \mathbb{Z}_2$，而 $H^2_\sigma(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3,\mathbb{Z}_3) \approx V_4$。这里 σ 是平凡的。

给定群 H 和 K， $GHom(K,H)$ 表示从 K 到 H 的所有陀螺同态组成的集合。如果 H 是一个阿贝尔群，那么 $GHom(K,H)$ 也是一个阿贝尔群。此外，如果 α 是从群 G 到群 K 的群同态（陀螺同态），且 A 是一个阿贝尔群，那么 $\alpha^\star$ 是从 $GHom(K,A)$ 到 $GHom(G,A)$ 的同态。显然， $GHom(K,A)$ 自然同构于 $Hom(\check{}K,A)$。因此，我们有以下命题。

命题5.17. 设

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow 1$$

是群的正合列。设 A 为阿贝尔群。则序列

$$1 \longrightarrow GHom(K,A) \xrightarrow{\beta^\star} GHom(G,A) \xrightarrow{\alpha^\star} GHom(H,A)$$

是正合的。

6. Gyro-split central extensions and Gyro-Schur Multiplier

令 GRXT(–,K) 表示由 K 扩张构成的范畴。更明确地说，GEXT(–,K) 的对象是陀螺分裂短正合列

$$E \equiv 1 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow 1$$

而从 E 到

$$E' \equiv 1 \longrightarrow H' \xrightarrow{\alpha} G' \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow 1$$

的态射是一个对 (λ,μ)，使得三元组 (λ,μ,I_K) 是 GEXT 中从 E 到 E' 的态射。令

$$E \equiv 1 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow 1$$

是关于 K 的陀螺分裂扩张。令 s 为 E 的陀螺分裂。则 s 是从 K 到 G 的陀螺同态。根据对 (K,t_K) 的泛性质，存在唯一的群同态 μ，从 K 到 G，使得 $\mu\circ t_K = s$。反过来，$\beta\circ\mu\circ t_K = \beta\circ s = I_K = \nu_K\circ t_K$，其中 ν_K：$K \to K$ 是自然同态。由于 $t_K(K)$ 生成了 K，$\beta\circ\mu = \nu_K$。因此，我们得到一个从 R_K 到 H 的群同态 λ，使得 (λ,μ,I_K) 是从 E_K 到 E 的态射，其中

$$E_K \equiv 1 \longrightarrow \check{R}_K \xrightarrow{i_K} \check{K} \xrightarrow{\nu_K} K \longrightarrow 1$$

更一般地，E_K 是一种自由偏环分裂扩张，其含义是：给定任意陀螺分裂扩张

$$E' \equiv 1 \longrightarrow H' \xrightarrow{\alpha} G' \xrightarrow{\beta} K' \longrightarrow 1$$

以及从 K 到 K' 的陀螺同态 ν，存在一对 (λ,μ)（不一定唯一），使得 (λ,μ,ν) 是从 E_K 到 E' 的态射。

与中心扩张相关的抽象核 σ 是平凡的。在这种情况下，我们将 $Z^2_\sigma(K,H)$ 记作 $Z^2(K,H)$，将 $B^2_\sigma(K,H)$ 记作 $B^2(K,H)$，将 $H^2_\sigma(K,H)$ 记作$H^2(K,H)$，并将 $GH^2_\sigma(K,H)$ 记作 $GH^2(K,H)$。设 A是一个阿贝尔群。我们定义一个从 $Hom(H,A)$ 到 $GH^2(K,A)$ 的连接群同态 δ 如下：设 t 是 E 的一个陀螺分裂，f^t 是 $GZ^2(K,H)$ 中相应的偏环配对。设 $\eta\in Hom(H,A)$。那么 $\eta\circ f^t$是从 $K\times K$到 A的一个映射。由于 η是一个群同态，$\eta\circ f^t \in GZ^2(K,A)$。如果 s是 E的另一个陀螺分裂，那么 f^t和 f^s相差 $GB^2(K,H)$ 中的一个元素；进而，$\eta\circ f^t$和 $\eta\circ f^s$相差 $GB^2(K,A)$ 中的一个元素。这定义了一个从 $Hom(H,A)$ 到 $GH^2(K,A)$ 的群同态 δ，其定义为 $\delta(\eta) = \eta\circ f^t + GB^2(K,A)$。

命题 6.1. 对任意阿贝尔群 A，我们有以下自然的基本正合列

$$0 \longrightarrow Hom(K,A) \xrightarrow{\beta^\star} Hom(G,A) \xrightarrow{\alpha^\star} Hom(H,A) \xrightarrow{\delta} GH^2(K,A)$$

与陀螺分裂中心扩张相关联

$$E \equiv 1 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow 1.$$

证明。由于 Hom 是一个左正合函子，只需证明在$Hom(H, A)$处的正合性。令 $\chi \in Hom(G, A)$。根据定义， $\delta(\alpha^\star(\chi)) = (\chi \circ \alpha \circ f^t) + GB^2(K, A)$。此外，对于所有 $x, y \in K$，都有 $t(x)t(y) = \alpha(f^t(x, y))t(xy)$；又因为 t 是一个陀螺分裂，所以对于所有 $x, y \in K$，都有 $f^t(y^{-1}, x) + f^t(y^{-1}x, y^2) = 0$。由于 χ 是一个群同态， $\chi(t(x)) + \chi(t(y)) = \chi(\alpha(f^t(x, y))) + \chi(t(xy))$。因此，我们有一个从 K 到 A 的映射 $g = \chi \circ t$，满足 $g(1) = 0$ 且$(\chi \circ \alpha) \circ f^t = \partial g$，其中 $\partial g(x, y) = g(y) - g(x, y) + g(x)$。这意味着 $\delta \circ \alpha^\star = 0$。由此可得 $im(\alpha^\star) \subseteq Ker\delta$。接下来，令 $\eta \in Ker\delta$。于是 $\eta \circ f^t \in GB^2(K, A)$。因此，存在一个从 K 到 A 的映射 g，满足 $g(1) = 0$，使得

$$\eta(f^t(x, y)) = g(y) - g(xy) + g(x)$$

对所有 $x, y \in K$。 G 中的每个元素都能唯一表示为 $\alpha(a)t(x)$ $a \in H, x \in K$。定义映射 χ，从 G 到 A，使得 $\chi(\alpha(a)t(x)) = \eta(a) + g(x)$。容易看出，存在 $\chi \in Hom(G, A)$，使得 $\eta = \chi \circ \alpha = \alpha^\star(\chi)$。由此可得$Ker\delta \subseteq im(\alpha^\star)$。 □

特别地，对于阿贝尔群 H，我们有如下正合列：

$$0 \longrightarrow Hom(K, H) \xrightarrow{\beta^\star} Hom(G, H) \xrightarrow{\alpha^\star} Hom(H, H) \xrightarrow{\delta} GH^2(K, H).$$

注记 6.2. 该序列

$$0 \longrightarrow GHom(K, A) \xrightarrow{\beta^\star} GHom(G, A) \xrightarrow{\alpha^\star} GHom(H, A) \xrightarrow{\delta} GH^2(K, A).$$

不一定是正合的。事实上， $\delta \circ \alpha^\star$ 不一定为 0。然而， $Ker\delta \subseteq im(\alpha^\star)$。

命题 6.3. 该扩张

$$\check{E}_K \equiv 1 \longrightarrow \check{R}_K/[\check{R}_K, \check{K}] \xrightarrow{\overline{i_K}} \check{K}/[\check{R}_K, \check{K}] \xrightarrow{\overline{\nu_K}} K \longrightarrow 1$$

是 K 的自由陀螺分裂中心扩张，意即给定任意陀螺分裂中心扩张

$$E' \equiv 1 \longrightarrow H' \xrightarrow{\alpha'} G' \xrightarrow{\beta'} K' \longrightarrow 1$$

以及从 K 到 K' 的陀螺同态 γ，存在一对同态 (ρ, η)（不一定唯一），使得 (ρ, η, γ) 是从 $\check{} E_K$ 到 E' 的态射。

$\check{}$ 证明。显然， E_K 是一个陀螺分裂中心扩张。又由于 E_K 是自由陀螺分裂扩张，存在从 E_K 到 E' 的态射 (λ, μ, γ)。由于 E' 是一个中心扩张，(λ, μ) 诱导出一对 (ρ, η)，使得 (ρ, η, γ) 是从 $\check{}E_K$ 到 E' 的态射。 □

命题 6.4. 设

$$E \equiv 1 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow 1$$

为一个自由陀螺分裂中心扩张，且 A 为阿贝尔群。那么，从 $Hom(H, A)$ 到 $GH^2(K, A)$ 的映射 δ 是满射。更明确地说，

$$0 \longrightarrow Hom(K, A) \xrightarrow{\beta^\star} Hom(G, A) \xrightarrow{\alpha^\star} Hom(H, A) \xrightarrow{\delta} GH^2(K, A) \longrightarrow 0$$

是正合的。

证明。设 $f \in GZ^2(K, A)$。则 (K, A, σ, f) 是一个陀螺因子系，其中 σ 是平凡的。相应的关联扩张

$$E' \equiv 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha'} G' \xrightarrow{\beta'} K \longrightarrow 1$$

是一个陀螺分裂中心扩张，具有陀螺分裂 t' ，使得对于所有 $x, y \in K$， $t'(x)t'(y) = \alpha'(f(x,y))t'(xy)$。由于 E 是一个自由陀螺分裂中心扩张，因此存在群同态 λ ，从 H 到 A ，以及群同态 μ ，从G 到 G'，使得 (λ, μ, I_K) 是从 E 到 E' 的态射。设 t 是 E 的陀螺分裂。则对于所有 $x \in K$， $\beta'(\mu(t(x))) = \beta(t(x)) = x$ 。因此， $t'' = \mu \circ t$ 是 E' 的陀螺分裂。于是， $f^{t''} + GB^2(K, A) = f + GB^2(K, A)$。现在，对于所有 $x, y \in K$， $t(x)t(y) = \alpha(f^t(x,y))t(xy)$。此外，

$$\alpha'(f^{t''}(x,y))t''(xy) = t''(x)t''(y) = \mu(t(x))\mu(t(y)) = \mu(t(x)t(y)) = \mu(\alpha(f^t(x,y)))\mu(t(xy)) = \mu(\alpha(f^t(x,y)))t''(xy) = \alpha'(\lambda(f^t(x,y)))t''(xy).$$

这表明 $\alpha'(\lambda(f^t(x,y))) = \alpha'(f^{t''}(x,y))$。由于 α'是单射， $\lambda(f^t(x,y)) = f^{t''}(x,y)$。根据定义， $\delta(\lambda) = f^{t''} + GB^2(K, A) = f + GB^2(K, A)$。这表明 δ 是满射。 □

命题 6.5. 设

$$E \equiv 1 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow 1$$

是以 K 为核的陀螺分裂中心扩张，且 D 是一个可除阿贝尔群。那么， δ 在基本正合序列中的像

$$0 \longrightarrow Hom(K, D) \xrightarrow{\beta^\star} Hom(G, D) \xrightarrow{\alpha^\star} Hom(H, D) \xrightarrow{\delta} GH^2(K, D)$$

同构于 $Hom([G,G] \bigcap \alpha(H)\ D)$。特别地，若扩张 E 是自由陀螺分裂中心扩张，则 $GH^2(K, D)$ 同构于 $Hom([G,G] \bigcap \alpha(H)\ D)$。

证明。根据同态基本定理，

$$im(\delta) \approx Hom(H, D)/Ker\delta = Hom(H, D)/im(\alpha^\star).$$

映射 α 诱导出一个单射群同态 $\overline{\alpha}$，其从 $H/(H \bigcap \alpha^{-1}([G,G])$ 映至 $G/[G,G]$。由于 D 可除， $\overline{\alpha}^\star$ 是从 $Hom(G/[G,G], D)$ 到 $Hom(H/(H \bigcap \alpha^{-1}([G,G])\ D))$ 的满群同态。此外，由于 D 是阿贝尔的，从 $Hom(G/[G,G], D)$ 到 $Hom(G, D)$ 的 $\nu^\star$ 是一个同构，其中 $\nu\colon G \to G/[G,G]$ 是商映射。进一步， $\rho^\star o \overline{\alpha^\star} = \alpha^\star o \nu^\star$，其中 ρ 是从 H 到 $H/(H \bigcap \alpha^{-1}([G,G]))$ 的商映射。由此可得， $\alpha^\star$ 的像就是 $\rho^\star$ 的像。同样，由于 D 可除，下面的序列是正合的:

$$0 \longrightarrow Hom(H/(H \bigcap \alpha^{-1}([G,G]), D)) \xrightarrow{\rho^\star} Hom(H, D) \xrightarrow{i^\star} Hom((H \bigcap \alpha^{-1}([G,G])), D) \longrightarrow 0.$$

因此，

$$Hom(H, D)/im(\rho^\star) \approx Hom((H \bigcap \alpha^{-1}([G,G])), D) \approx Hom(([G,G] \bigcap \alpha(H)), D).$$

最后一个断言由命题 6.4 得出。 □

推论 6.6. $GH^2(K, \mathbb{C}^\star) \approx Hom(([\check{}K, \check{}K] \bigcap \check{}R_K)/[\check{}K, \check{}R_K], \mathbb{C}^\star)$. 更一般地，若 $\langle X; S\rangle$ 是 K 的表示，则

$$GH^2(K, \mathbb{C}^\star) \approx Hom(([F(F(X)), F(F(X))] \bigcap \hat{S})/[F(F(X)), \hat{S}], \mathbb{C}^\star).$$

由于 $GH^2(K, \mathbb{C}^\star)$ 是 $H^2(K, \mathbb{C}^\star)$ 的子群，下面的推论是 Schur-Hopf 公式的一个结果。

推论 6.7. 若 K 有限，则

$$GH^2(K,\mathbb{C}^\star) \approx [F(F(X)),F(F(X))] \bigcap \hat{S}/[F(F(X)),\hat{S}].$$

我们将 $GH^2(K,\mathbb{C}^\star)$ 以及 $([\check{}K,\check{}K] \bigcap \check{}R_K)/[\check{}K,\check{}R_K]$ 称为 K 的 gyro-Schur 乘子。注意，若 K 有限，它们便相同。还要注意，$K \mapsto ([\check{}K,\check{}K] \bigcap \check{}R_K)/[\check{}K,\check{}R_K]$ 定义了一个从 GP 到其自身的函子。

下面命题的证明很容易验证。

命题 6.8. 设 K 是一个群。那么， K 上的右陀螺群运算 $\circ_1$ 满足以下关系：

$(i)\ (xy)\circ_1 z = x^z(y\circ_1 z)$, *and also*
$(ii)\ x\circ_1 (yz) = (x^y\circ_1 z)y^z$.

对每个 x、y、$z \in K$，其中 $x^y = y^{-1}xy$。

上述命题中所述的关系称为 $\circ_1$ 的平凡关系。回顾一下，群 K 的施尔乘子可描述为 K [9,10] 的非平凡交换子关系所构成的群。我们也将陀螺-舒尔乘子 $([\check{}K,\check{}K] \bigcap \check{}R_K)/[\check{}K,\check{}R_K]$ 描述为 G 上右陀螺群运算 $\circ_1$ 的非平凡关系所构成的群。

设 K 是一个群。令 $K \boxtimes K$ 表示由集合 $\{x \boxtimes y \mid x,y \in K\}$ 生成、满足以下关系的阿贝尔群

(i) $1 \boxtimes x = 1 = x \boxtimes 1$, (ii) $(x \boxtimes y)((xy) \boxtimes z) = (y \boxtimes z)((x \boxtimes (yz)))$ 以及 (iii) $(y^{-1} \boxtimes x)((y^{-1}x) \boxtimes y^2) = 1$,

对所有 $x,y,z \in K$ 均成立。我们将 $K \boxtimes K$ 称为 K的陀螺平方。

定理 6.9. 我们有一个自由陀螺分裂中心扩张

$$U \equiv\ 1 \longrightarrow K \boxtimes K \xrightarrow{i_1} (K \boxtimes K) \rtimes K \xrightarrow{p_2} K \longrightarrow 1,$$

其中 $(K \boxtimes K) \rtimes K$ 关于由 $(a,x)(b,y) = (ab(x \boxtimes y)\ xy)$ 给出的运算构成一个群。

证明. 设

$$E' \equiv\ 1 \longrightarrow H' \xrightarrow{\alpha'} G' \xrightarrow{\beta'} K' \longrightarrow 1$$

是一个陀螺分裂中心扩张，且 ν 是从 K 到 K'的陀螺同态。设 t 是 E'的一个陀螺分裂，且 (K',H',σ^t,f^t) 是相应的因子系。则 σ^t 是平凡的。此外， $f^t(x,y)f^t(xy,z) = f^t(y,z)f^t(x,yz)$，并且由于 $t(y^{-1}xy^2) = t(y)^{-1}t(x)t(y)^2$ 对所有 $x,y \in K'$, $f^t(y^{-1},x)f^t(y^{-1}x,y^2) = 1$均成立。因此，我们有一个从 $K \boxtimes K$ 到 H' 的群同态 λ，由 $\lambda(x \boxtimes y) = f^t(x,y)$ 给出。进而，我们有一个从 $(K \boxtimes K) \rtimes K$到 G'的映射 μ，由 $\mu(a,x) = \alpha'(\lambda(a))t(\nu(x))$ 给出。可见 μ是群同态，且 (λ,μ,ν) 是一个态射。 □

˘ 推论 6.10. 命题 6.3 中所述的扩张 E_K 等价于 U。

证明。由于映射 $x \mapsto (1,x)$ 是从 K到 $(K\boxtimes K)\rtimes K$的陀螺同态，因此它诱导出一个从 $\check{}K$到 $(K\boxtimes K)\rtimes K$ 的群同态 μ，其定义为 $\mu(x\check{}S_K) = (1,x)$。不难看出， $[\check{}R_K,\check{}K]$ 包含在 μ的核中。由此

ˇ 诱导出一个从 E_K 到 U的态射。此外，定理 6.9 给出了该态射的逆。 □

设 $K \xrightarrow{\sigma} Aut(H)$ 是一个抽象核，其中 H 是一个阿贝尔群。设

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\nu} K \longrightarrow 1$$

是一个与 σ 相关联的 H 到 K 的陀螺分裂扩张。注意，当且仅当 σ 是平凡的，它才是中心扩张。我们将像 $\sigma(x)$ 记为 σ_x。考虑子集 $A = \{h \in H \mid \sigma_x(h) = h, \forall x \in K\}$。显然， A 是 G的一个中心子群，并且有如下交换图。

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{\tilde{\nu}} & G/A & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle I_G} & & \downarrow{\scriptstyle \hat{\nu}} & & \\ 1 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{\nu} & K & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

其中顶行是 A 到 G/A 的陀螺分裂中心扩张，映射是显然的映射。事实上，若 t 是底行的一个陀螺分裂，则 $t \circ \hat{}\nu$是顶行的一个陀螺分裂。由定理 6.9 的证明可知，存在一个从扩张 U 到顶行所给扩张的态射，进而存在一个态射 (χ, ψ, I_K)，从 U 到所给的陀螺分裂扩张

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\nu} K \longrightarrow 1$$

满足 $\chi(K \boxtimes K) \subseteq A$。反过来，设 χ 是从 $K \boxtimes K$ 到$A \subseteq H$的群同态。那么，$(K, H, \sigma, \tilde{\chi})$ 是一个因子系，其中 $\tilde{\chi}$ 是从 $K \times K$ 到 H的映射，定义为 $\tilde{\chi}(x, y) = \chi(x \boxtimes y)$。相应的扩张

$$E_\chi \equiv 1 \longrightarrow H \xrightarrow{i_1} L = H \times K \xrightarrow{p_2} K \longrightarrow 1$$

是 H 被 K 扩张的陀螺分裂扩张，其中 $x \mapsto (1, x)$ 是一个陀螺分裂。因此，我们有一个满射 λ，从 $Hom(K \boxtimes K, A)$ 到 $GEXT_\sigma(H, K)$，定义为$\lambda(\chi) = [E_\chi]$。显然，λ 也是一个群同态。我们来描述 $Ker\lambda$。现在， $\chi \in Ker\lambda$ 当且仅当相应的因子系等价于平凡因子系。换言之，存在一个从 K 到 H 的映射 g，满足 $g(1) = 0$，使得对所有x、 $y \in K$， $\chi(x \boxtimes y) = \partial g(x, y) = \sigma_x(g(y)) - g(xy) + g(x)$ 属于 A。显然，$(K, H, \sigma, \partial g)$ 是一个陀螺因子系。我们称这样的映射g 为相对于 σ的陀螺交叉同态。因此，保持单位元的映射 g，从 K 到 H，是一个陀螺交叉同态，当且仅当

$$\sigma_x(\sigma_y(g(z)) - g(yz) + g(y)) = \sigma_y(g(z)) - g(yz) + g(y),$$

and

$$\sigma_{y^{-1}}(g(x)) + g(y^{-1}) + \sigma_{y^{-1}x}(g(y^2)) - g(y^{-1}xy^2) = 0$$

对所有 $x, y, z \in K$。显然，每个交叉群同态都是陀螺交叉同态。然而，陀螺交叉同态不一定是交叉群同态。例如，若 K 是阶为 3^3, 的3-指数非阿贝尔群，那么从 K 到 $K \boxtimes K$ 的映射 g 由 $g(x) = x \boxtimes x$ 给出，很容易看出它是陀螺交叉同态，但不是交叉群同态。令 $GC_\sigma(K, H)$表示从 K 到H的所有陀螺交叉同态所成的群。以上讨论得出如下命题。

命题 6.11. 映射 g 满足 $g(1) = 0$，是从 K到 H、相对于 σ的陀螺交叉同态，当且仅当 $(K, H, \sigma, \partial g)$ 是一个陀螺因子系，并且$\partial g(K \times K) \subseteq A$。反过来， ∂g 诱导出一个从 $GC_\sigma(K, H)$ 到 $\overline{\partial}$ 的同态

$Hom(K \boxtimes K, A) \subseteq Hom(K \boxtimes K, H)$ 由 $\overline{\partial g}(x \boxtimes y) = \partial g(x, y)$ 给出，并且我们有正合列

$$0 \to C_\sigma(K, H) \xrightarrow{i} GC_\sigma(K, H) \xrightarrow{\overline{\partial}} Hom(K \boxtimes K, A) \xrightarrow{\lambda} GEXT_\sigma(K, H) \to 0,$$

其中 $C_\sigma(K, H)$ 表示交叉同态群。

若 σ 是平凡的，或等价地说，它是一个中心扩张，则在记号中省略 σ 。特别地，我们有以下正合列：

$$0 \to Hom(K, H) \xrightarrow{i} GC(K, H) \xrightarrow{\overline{\partial}} Hom(K \boxtimes K, H) \xrightarrow{\lambda} GEXT(K, H) \to 0.$$

7. Universal free gyro-split central extension、 Milnor gyro-K_2group

定义 7.1. 一个陀螺分裂中心扩张

$$\Omega_K \equiv \ 1 \longrightarrow H \xrightarrow{i} U \xrightarrow{j} K \longrightarrow 1$$

若对于任意陀螺分裂中心扩张 K ，则称其为一个泛自由陀螺分裂中心扩张

$$E \equiv \ 1 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow 1$$

由 K，存在唯一的群同态 ϕ ，从 U 到 G ，并诱导出一个从 Ω_K 到 E 的态射 (ξ, ϕ, I_K)。

显然，由 K 给出的泛自由陀螺分裂中心扩张（若存在）在等价意义下唯一。

命题 7.2. 若

$$\Omega_K \equiv \ 1 \longrightarrow H \xrightarrow{i} U \xrightarrow{j} K \longrightarrow 1$$

是由 K 给出的泛自由陀螺分裂中心扩张，则 U 是完美的。特别地，K 是完美的。

证明。假设 U 不是完美的。那么 $U/[U, U]$ 是一个非平凡阿贝尔群。考虑直积扩张

$$1 \longrightarrow U/[U, U] \xrightarrow{i_1} U/[U, U] \times K \xrightarrow{p_2} K \longrightarrow 1.$$

显然，这个扩张是一个陀螺分裂（事实上是分裂的）中心扩张。此外，从 U 到 $U/[U, U] \times K$ 的映射 (ν, j)，由 $(\nu, j)(u) = (u[U, U], j(u))$ 定义；以及由 $(0, j)(u) = ([U, U], j(u))$ 给出的 $(0, j)$，是两个群同态，它们诱导出从 Ω_K 到此扩张的态射。这就产生了矛盾。这表明 U 是完美的。因此， K 是完美的。 □

如果一个从群 G 到群 K 的陀螺同态 f 满足保留换位子运算的条件，即 $f([a, b]) = [f(a)\ f(b)]$ 对所有 a、$b \in G$ 均成立，则称其为强陀螺同态。若扩张 E 具有一个强陀螺同态截面 t ，则称其为强陀螺分裂扩张。我们有一个 SGP 范畴，其对象为群，群之间的态射为强陀螺同态。显然，群的 GP 范畴是 SGP 的一个忠实（但非满）子范畴。我们构造从 GP 到 SGP 的包含函子的伴随。

设 K 为一个群。考虑由 K 生成的自由群 $F(K)$，以及标准群同态 $\rho: \ F(K) \to K$ ，该同态在 K 上为恒等映射。令 $SG(K)$ 表示

集合 $\check{}\ S_K \bigcup\{(xyx^{-1}y^{-1})^{-1}\star x\star y\star x^{-1}\star y^{-1}\mid x、\ y\in K\}$，即 $F(K)$ 中的字所成的集合；令 $\check{}SG(K)$ 表示具有表示 $\langle K;\ SG(K)\rangle$ 的群。更明确地说，$\check{}SG(K)\ =\ F(K)/\langle SG(K)\rangle$。由构造可知，关联 $\hat{}K\mapsto SG(K)$ 定义了一个从 GP 到 SGP 的函子，它是从 SGP 到 GP 的遗忘函子的伴随。显然，$\langle R_K\rangle\supseteq\langle SG(K)\rangle$。进一步地，我们有一个强陀螺分裂扩张

$$\tilde{E}_K\equiv\ 1\longrightarrow\langle R_K\rangle/\langle SG(K)\rangle\xrightarrow{i}\check{SG}(K)\xrightarrow{\nu}K\longrightarrow 1.$$

显然，$\tilde{E_K}$是由 K 给出的自由强陀螺分裂扩张。我们可将 $\langle R_K\rangle/\langle SG(K)\rangle$称为强陀螺乘子。再次注意，若 K 是在至少含有两个元素的集合上自由生成的，则强陀螺乘子非平凡。

命题 7.3. 设 K 是一个完美群，且其中每个元素都是换位子。则 K 有一个泛自由陀螺分裂中心扩张。

证明. 设 K 是一个完美群，且其中每个元素都是换位子。考虑强陀螺分裂扩张

$$\tilde{E}_K\equiv\ 1\longrightarrow\check{R}_K\ =\ \langle R_K\rangle/\langle SG(K)\rangle\xrightarrow{i}\check{SG}(K)\xrightarrow{\nu}K\longrightarrow 1.$$

其强陀螺分裂 t 由 $t(x)\ =\ x\langle R_K\rangle/\langle SG(K)\rangle$ 给出。由于 K 中的每个元素都是换位子，t 的像包含于 $[\check{}SG(K),\check{}SG(K)]$。进而，我们得到一个陀螺分裂中心扩张

$$\check{\tilde{E}}_K\equiv\ 1\longrightarrow(\check{R}_K\bigcap[\check{SG}(K),\check{SG}(K)])/[\check{R}_K,\check{SG}(K)]\xrightarrow{i}[\check{SG}(K),\check{SG}(K)]/[\check{R}_K,\check{SG}(K)]\xrightarrow{\nu}K\longrightarrow 1.$$

$\check{}\check{}$我们证明 E_K 是泛自由陀螺分裂中心扩张。令

$$E\equiv\ 1\longrightarrow H\xrightarrow{i}G\xrightarrow{\beta}K\longrightarrow 1$$

是一个以 K 为核的陀螺分裂中心扩张。由于 E_K 是以 K 为核的自由陀螺分裂扩张，因此存在一个同态 ϕ，从 $\check{}K$到 G，它诱导出一个态射 $(\phi|_{\check{}R_K},\phi,I_K)$，从 E_K 到 E。此外，由于 K 是完美的，$\beta\mid_{[G,G]}$ 是一个满射群同态。进而，我们得到一个中心扩张

$$E'\equiv\ 1\longrightarrow H\bigcap[G,G]\xrightarrow{i}[G,G]\xrightarrow{\beta}K\longrightarrow 1.$$

由构造可知，ϕ 诱导出一个群同态，从 $[\check{}SG(K),\check{}SG(K)]/[\check{},\check{}SG(K)]\check{}$ 到 $[G,G]$，而后者又诱导出一个态射，从 $\check{}\ E_K$ 到 E'。由于 K 是完美的，$[\ \check{}SG(K),\check{}SG(K)]/[\check{}R_K,\check{}SG(K)]$ 也是完美的。因此，诱导出的态射是唯一的（见 [9, 命题 10.4.2]）。 □

推论 7.4。（i）每个有限单群都具有一个泛自由陀螺分裂中心扩张。

（ii） $SU(n)$具有一个泛自由陀螺分裂中心扩张。

证明。Ore猜想 [10] 蕴含（i），而 $SU(n)$中的每个元素都是换位子这一事实 [13] 蕴含（ii）。 □

注 7.5. 尚不清楚每个完美群是否都存在泛自由陀螺分裂中心扩张。

我们得到非阿贝尔外平方、斯坦伯格群和米尔诺尔 K_2 的以下陀螺类比物。

定义 7.6。我们将 $[\ \check{}SG(K), \check{}SG(K)]/[\check{}R_K, \check{}SG(K)]$ 称为 K 的非阿贝尔陀螺外平方，并记作 $K \bigwedge^G K$。若 K 是完美的，则有泛自由陀螺分裂中心扩张

$$1 \longrightarrow M^G(K) \xrightarrow{i} K \bigwedge^G K \xrightarrow{\nu} K \longrightarrow 1,$$

其中，$M^G(K) = (\check{}R_K \bigcap [\check{}SG(K), \check{}SG(K)])/[\check{}R_K, \check{}SG(K)]$ 是 K的陀螺-舒尔乘子。此外，对于任意带单位元的环 R ，我们有不变量 $St^G(R) = E(R) \bigwedge^G E(R)$，称为 R 上的陀螺斯坦伯格群；群 $K_2^G(R) = M^G(E(R))$称为陀螺米尔诺尔群。

我们有正合列

$$1 \longrightarrow K_2^G(R) \longrightarrow St^G(R) \longrightarrow E(R) \longrightarrow 1.$$

致谢：作者非常感谢审稿人提出的宝贵意见。

References

[1] M. Aschbacher，有限群的近子群， *J. Group Theory* (1)，1（1998），113-120。[2] T. Feder 和 M. Vardi，单调单子 SNP 与约束满足的计算结构；通过 Datalog 和群论进行研究， *SIAM. J. Comput*, 28(1)，（1999），57-104。[3] T. Foguel 和 A. A. Ungar，群到扭曲子群与子群的对合分解， *J. Group Theory*, 3(1)。2000，27-46。[4] T. Foguel 和 A. A. Ungar，陀螺群与群到扭曲子群和子群的分解， *Pacific J. Math.*, 197(1)，2001，1-11。[5] R. Lal，群中的横截， *Journal of algebra* **181(1)**（1996）70–81。[6] R. 和 A. K. Singh，有限群的弱分类， *Asian Eur. J. Math*, 7(4)，（2014）1450058（17页）。[7] R. Lal 和 A. C. Yadav，拓扑右陀螺群与陀螺横截， *Commun. Algebra* 41 9 2013, 3559 3575 ，（），-。[8] R. Lal 和 A. C. Yadav，扭曲自同构与扭曲右陀螺群， *Commun. Algebra* 43 2013 3442 3458 ，，，，-。

[9] Ramji Lal， *Algebra 2*（施普林格，2017）。[10] M. W. Liebeck、E.A. O'Brien、A. Shalev 和 P. H. Tiep，奥尔猜想， *J.Eur.Math. Soc.* 12 2010 4, 939 1008 （）第-期。[11] J. D. H. Smith 和 A. B. Romanowska， *Post Modern Algebra.*（约翰·威立父子公司，1999）。[12] T. Suksumran，陀螺群代数：凯莱定理、拉格朗日定理与同构定理。载于：Rassias, T., Pardalos, P.（编），《数学及其应用论文集》。（施普林格，2016）。[13] H. Toyama，关于矩阵交换子， *Kodai Mat. Sem. Rep.*，1（1949）第5-6期。

Department of Mathematics, University of Allahabad, Allahabad, India, mathrjl@gmail.com

Department of Mathematics, Central University of Rajasthan, Kishangarh, India, vplkakkar@gmail.com