开关代数计算班泽夫投票指数

[1]Ali Muhammad Rushdi 和 [2,3]Muhammad Ali Rushdi

[1]阿卜杜勒阿齐兹国王大学工程学院电气与计算机工程系，邮政信箱 80200，吉达，邮编 21589，沙特阿拉伯王国{arushdi@kau.edu.sa; arushdi@ieee.org}

[2]生物医学与系统工程系，工程学院 g，阿拉伯埃及共和国 12613，开罗大学，吉萨 {mrushdi@[illegible][3]信息技术学院 阿拉伯埃及 [illegible]

{Muhammad.Rushdi@ngu.edu.eg}

摘要：本文采用开关代数技术计算投票权力的一个基本指数，即班扎夫总权力。该计算涉及两种不同的运算：（a）布尔差分或求导；（b）计算开关函数的权重（真向量或最小项的数量）。如果相关开关函数具有对称性，或表示为不交积之和形式，这两种运算都可以大大简化并更易实现。本文教程式地介绍如何实现这两种运算，重点探讨某些论元子集之间呈现部分对称性的情形。我们通过两个重要的投票系统，介绍了用于计算班扎夫指数的新型基于布尔代数的对称性感知技术。这两个系统分别是包含六个变量和九个变量的标量系统。本文是我们持续努力的一部分，旨在将投票系统的方法论和概念转化到开关代数领域，并进而利用开关代数工具计算投票理论中的相关量。

关键词：投票系统、班扎夫指数、投票权力、联盟、不相交积之和、布尔微分、开关函数的权重。

1. 引言

加权投票系统是是非系统中的一大类，在这类系统中，每位投票者都被赋予一个权重，并设定适当的配额或阈值。如果赞成某项法案（提案、决议或修正案）的加权选票总和达到或超过所设定的阈值 [1-3]，该法案便会被接受（通过）。在投票系统中，个别投票者V 的投票权力，是指该投票者具有决定性的概率；这取决于该投票者能够使结果发生转变的方式数量，最终取决于将选票汇总为单一二值布尔结果的规则 $f(\boldsymbol{X})$。此处，二进制向量 $\boldsymbol{X} = [X_1\ X_2 \dots X_n]^T$ 是投票者所表达的二进制选票 $X_i\ (1 \le i \le n)$构成的 n 元组，其中，如果投票者 i 属于赞成者（投赞成票者），则 X_i 为 1；如果属于反对者（投反对票者），则 X_i 为 0。如今，人们使用许多投票权力指数，其中有两个实际上已成为主流标准。这两个指数是

班扎夫指数 [4-7]（有时也称彭罗斯–班扎夫指数（参见 [8]）、班扎夫–科尔曼指数（参见 [9]）或彭罗斯–班扎夫–科尔曼指数），以及沙普利–舒比克权力指数 [10]。这两个指数分别基于联盟考量和排列考量。通常，改变投票规则以提高某位投票者在其中一个指数下的权力，也往往会提高该投票者在另一个指数下的权力，反之亦然。

本文主要关注在加权投票系统中，对投票者 V 的班扎夫指数或班扎夫投票权力进行开关代数计算；这通常称为单个投票者 V [2]的班扎夫总权力 $TBP(V)$。它表示投票者 V 具有决定性的次数，即在获胜状态或配置中，该投票者属于待表决提案的赞成者（赞成票投票者），并且当其转而加入反对者（反对票投票者）时，系统状态会由获胜（提案通过）变为失败（提案否决）的次数。Rushdi 和 Ba-Rukab [7] 为 n 名成员的加权投票系统中的每一个 2^n 状态或配置创造了“原始联盟”这一名称。于是，班扎夫总权力 $TBP(V)$就是这样的原始获胜联盟（$PWCs$）的数量：投票者 V 属于该联盟，并且当 V 改变立场（从赞成者转为反对者）时，该联盟会转变为原始失败联盟（PLC）。下文中，我们采用通常的假设，即变量 X_i ($1 \le i \le n$) 在统计上相互独立。该假设基本上与以下设想相关：原始联盟、状态或配置具有相同的概率。

编号为m 的投票者的班扎夫总权力原始值，其开关代数定义如下[6, 7]

$$TBP(X_m) = wt\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial X_m}\right), \quad (1 \le m \le n). \tag{1}$$

这里，符号 $\frac{\partial f}{\partial X_m}$（$\boldsymbol{x}$）表示投票系统布尔函数$f(\boldsymbol{X})$关于其自变量$X_m$ 的偏导数（见附录A），而符号$wt(\dots)$表示开关函数的权重或真向量数量（见附录B）。上述原始值 $TBP(X_m)$最合适的归一化方式，是将原始值除以所有此类值的总和。由此得到以下归一化总班扎夫权力：

$$NTBP(X_m) = TBP(X_m) / \sum_{k=1}^{n} TBP(X_k), \quad (1 \le m \le n). \tag{2}$$

所得的归一化权力现处于实数单位区间 [0.0, 1.0], 之内，因此可以对其作概率解释，也便于与其他类型的投票权力（如Shapley-Shubik指数 [11]）进行比较。计算班兹夫权力指数的算法有多种，通常采用递归，并将问题分解为子问题，例如动态规划技术 [12], 、枚举方法[12], 和生成函数方法[13, 14]。此外，也有通过随机抽样和蒙特卡罗模拟[15, 16]来近似计算该指数的其他算法。本文提出的技术是一种开关代数技术，本质上属于枚举方法。该技术力求充分利用开关理论的最新进展，以及许多加权投票系统所固有的对称特征。

T本文的主题与可靠性理论中的若干主题存在多方面的联系 .

（a）首先，我们注意到，班扎夫指数和其他投票指数有时会被用作可靠性理论中的重要度测度，而且班扎夫指数与可靠性系统的伯恩鲍姆重要性度量之间存在显著的相似性 [17-22]。（b）此外，我们先前对阈值系统可靠性的探索 [23] 表明，研究加权投票系统存在一种实用的方法，即阈值开关函数理论所确立的方法 [23-26]。这一理论在数字设计领域已经相当成熟，可以有效地用于研究阈值可靠性系统和加权投票系统，并可针对这两类系统进行适当调整。（c）最后，班扎夫投票指数的计算涉及两种不同的运算：（a）布尔差分或微分 [6, 7, 25], ，以及（b）计算开关函数的权重（真向量或最小项的数量） [24-26]。我们通过借鉴可靠性文献中的不相交性技术，将相关开关函数表示为不交积之和形式 [27-32] ，从而简化并便利这两种运算。

本文其余部分安排如下。第 2 节阐释一些基本概念和术语。第 3 节探讨对称开关函数的班兹夫指数。第 4 节通过两个重要的投票系统，介绍用于计算班扎夫指数的新型基于布尔代数的对称性感知技术。这两个系统是标量系统，分别描述欧洲经济共同体的 6 变量和 9 变量版本。为使本文内容完整自足，我们通过两个附录补充和支持正文。附录A介绍布尔差分（布尔导数）的概念及其微积分。附录B讨论开关函数权重的概念和性质，并介绍计算该权重的多种方法和捷径。

2. 基本概念和术语

是非投票系统：一种投票系统，提供在采纳可能即将提出的替代方案（修正案、决议或法案）与维持现状（即已存在的替代方案）之间进行选择的机会 [2]。本文用开关（二值布尔）阈值函数 $f(\boldsymbol{X})$ 描述该系统；若所审议的决议获得通过，则 $f(\boldsymbol{X})=1$ ；若决议遭到否决，则 $f(\boldsymbol{X})=0$ 。函数 $f(\boldsymbol{X})$ 类似于相干阈值可靠性系统 [23, 32] 的成功函数。此处，二进制向量 $\boldsymbol{X}=[X_1\ X_2\ \ldots\ X_n]^T$ 是投票者所投票数构成的 n 元组 $X_i\ [1\le i\le n]$ ，其中 X_i 的值表示投票者 i 赞成（$X_i=1$）还是反对（$X_i=0$）正在讨论的决议。

联盟：在是非投票系统中，仅由赞成票投票者组成的任意集合。如果争议中的备选方案得到支持（即所讨论的具体修正案、决议或法案获得通过），则该联盟为获胜联盟；否则，该联盟为失败联盟。联盟的两种极端情况是空联盟（其中不包含任何投票者）和全体联盟（其中包含所有投票者）[2, 33]。

原始联盟：对所有投票者（可能包括两类投票者，即赞成票投票者和反对票投票者）的状态或配置进行的一种描述 [7]。这可以是原始获胜联盟（PWC），对应于 $f(\boldsymbol{X})$ 的一个真向量（最小项）；也可以是原始失败联盟（PLC），对应于 $f(\boldsymbol{X})$ 的一个假向量（最小项）。原始联盟的概念与真值表中的一行或卡诺图中的一个单元格相对应

$f(\boldsymbol{X})$。两种重要的原始联盟是全零原始联盟（与空联盟相对应）和全一原始联盟（与全体联盟相对应）。原始联盟的概念对于基于布尔代数的分析相当方便，但不可否认，它在投票理论中并不常见。原始联盟通常是赞成票投票者和反对票投票者的混合（通常表示为未取反文字与取反文字的乘积）。相比之下，联盟的概念在投票理论中十分常见。它仅涉及赞成票投票者（因此只表示为未取反文字的乘积）。

虚拟投票者：指在投票系统的投票结果中没有发言权的投票者 P，因为 $TBP(P)$ 严格等于 0。该投票者完全没有任何权力，因为无论如何，他或她都无法影响决议的通过。虚拟投票者的存在违背了投票系统的宗旨；投票系统应当让每一位投票者都有某种合理的机会——无论机会多么微小——去影响或左右系统作出的决定。如果投票系统中存在独裁者或独裁集团，那么其余投票者无疑全都是虚设成员。联合国安全理事会（UNSC）的非常任理事国从技术意义上说并不是虚设成员，尽管它们无疑几乎等同于虚设成员。非常任理事国的 TBP 与常任理事国相比小得令人担忧，但并不严格等于 0。联合国安全理事会全部十个非常任理事国合计的 TBP 略低于单个常任理事国的相应数值。联合国安全理事会中的投票权力分为六份，其中五份由常任理事国平均分配，第六份则拆分为若干子份额，在世界其他地区的轮换代表之间流动。

对称开关函数（SSF）：一个二值布尔函数，表示为 [32, 34]

$$f(\boldsymbol{X}) = Sy(n;\boldsymbol{A};\boldsymbol{X}) = \ Sy(\ n;\{a_1,a_2,\dots,a_m\};\ X_1,X_2,\dots,X_n). \tag{3}$$

（ 3 n $\boldsymbol{X}=$ ）中的 SSF 完全由其输入数、输入.....、... $[X_1,X_2,\ \ X_n]^{\top}$ ...以及其特征集刻画

$$\boldsymbol{A} = \{a_0,a_1,\dots,a_m\} \subseteq \boldsymbol{I}_{n+1} = \{0,1,2,\ \dots,n\},\ \{m \le n\}. \tag{4}$$

当且仅当算术和 属于特征集 $\boldsymbol{A}$时，该函数的值为 1；否则，值为 0。一元运算 NOT 和二元运算 AND、OR 和 XOR 均保持对称性。具体而言，（3）中的 SSF 的补函数 $\bar{f}$ 也具有对称性，且其特征集 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 是相对于全集 $\boldsymbol{I}_{n+1} = \{0,1,2,\dots,n\}$对原特征集 $\boldsymbol{A}$ 取补所得。补集 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 由集合差（$\boldsymbol{I}_{n+1}/\boldsymbol{A}$）给出，也记作（$\boldsymbol{I}_{n+1}-\boldsymbol{A}$），或

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \{0,1,2,\ \dots,n\} - \{a_0,a_1,\dots,a_m\}, \tag{5}$$

因此，$\bar{f}$ 可以表示为

$$\bar{f}(\mathbf{X}) = Sy(n;\overline{\boldsymbol{A}};\boldsymbol{X}). \tag{6}$$

此外，对两个 SSF $Sy(n;\ \boldsymbol{A_1};\ \boldsymbol{X})$ 和 $Sy(n;\ \boldsymbol{A_2};\ \boldsymbol{X})$（它们具有相同的参数 $\boldsymbol{X}$，其特征集分别为 $\boldsymbol{A_1}$ 和 $\boldsymbol{A_2}$）进行与运算、或运算和异或

将得到特征集分别等于原集合 $\boldsymbol{A_1}$ 和 $\boldsymbol{A_2}$的交集、并集和异或的 SSF，即，

$$Sy(n;\boldsymbol{A_1};\boldsymbol{X}) \ \wedge \ Sy(n;\boldsymbol{A_2};\boldsymbol{X}) \ = \ Sy(n;\boldsymbol{A_1} \cap \boldsymbol{A_2};\boldsymbol{X}), \tag{7}$$

$$Sy(n;\boldsymbol{A_1};\boldsymbol{X}) \ \vee \ Sy(n;\boldsymbol{A_2};\boldsymbol{X}) \ = \ Sy(n;\boldsymbol{A_1} \cup \boldsymbol{A_2};\boldsymbol{X}), \tag{8}$$

$$Sy(n;\boldsymbol{A_1};\boldsymbol{X}) \ \oplus \ Sy(n;\boldsymbol{A_2};\boldsymbol{X}) = \ Sy(n;\boldsymbol{A_1} \oplus \boldsymbol{A_2};\boldsymbol{X}). \tag{9}$$

阈值开关函数：由（$n+1$ 2^n T $\boldsymbol{W}=$ ）
$[W_1, W_2, \ W_n]^{\mathrm{T}}$ [23]
（而非 ）系数表征的 n 变量开关函数 $f(\mathbf{X})$，即一个阈值和权重……，……，使得

$$f(\mathbf{X}) = 1 \ \text{ iff } F(\mathbf{X}) = \ \sum_{i=1}^{n} W_i X_i \geq T. \tag{10}$$

阈值开关函数可称为尺度不变，因为将每个权重和阈值都乘以相同的正数不会改变该函数。由 $f(\mathbf{X})$ 表征的加权投票系统通常记作（T； W_1， W_2， ……， W_n）。

半相干开关函数：具有单调性这一性质的开关函数 $f(\mathbf{X})$，即一个单调非递减函数。由于单调性意味着因果性（对于表示非虚构系统的非恒定函数），因此半相干开关函数 $f(\mathbf{X})$ 也具有因果性这一性质。

（完全）相干开关函数：除具备分量相关性（对于所有分量）这一性质外，还具备半相干开关函数 $f(\mathbf{X})$ 特性的函数。这种相干函数 $f(\mathbf{X})$ 是一个全正极性的单调函数 [26], ，其乘积之和表示仅由未取反文字组成。它具有唯一且规范的最小和（由数量最少、共同覆盖该函数的质蕴含项析取而成），并且该最小和恰好等于其完全和（所有质蕴含项的析取）。

相干阈值开关函数：权重和阈值均严格为正的阈值开关函数。它用于描述标量加权投票系统所作的决策，或阈值可靠性系统 [23], （也称为加权 k 取 n 系统）的成功。特别地，k取n:G可靠性系统的成功 $S(k,n,\boldsymbol{X})$ 是一个单位权重、阈值等于 k [23] 的对称相干阈值函数，因为

$$\{S(k,n,\boldsymbol{X}) = 1\} \quad iff \quad \{\sum_{i=1}^{n} X_i \ \geq \ k\}. \tag{11}$$

单调性：对于开关函数 $f(\mathbf{X})$，单调性意味着它是单调非递减的，即，

$$f(\boldsymbol{X}) \ \geq f(\mathbf{Y}) \quad \text{for} \quad \boldsymbol{X} \ \geq \ (\mathbf{Y}), \tag{12a}$$

或等价地

$$f(\mathbf{X} \,|X_i = 1) \ \geq \ f(\mathbf{X} \,|X_i = 0). \tag{12b}$$

如果一组赞成票投票者构成获胜联盟，那么其任何超集也都是获胜联盟。如果一组赞成票投票者形成失败联盟，那么其任何子集也都是失败联盟。

因果性：对于开关函数 $f(\mathbf{X})$，因果性意味着当其自变量为全零向量时，函数值为 0；当其自变量为全一向量时，函数值为 1，即

$$\{f(\mathbf{0}) = 0\} \wedge \{f(\mathbf{1}) = 1\}. \tag{13}$$

对于是非投票系统，因果性意味着空联盟和全体联盟（分别对应全零原始联盟和全一原始联盟）分别是失败联盟和获胜联盟。

分量相关性（适用于所有分量）：对于开关函数 $f(\mathbf{X})$，分量相关性意味着

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X_i} = f(\mathbf{X}|X_i = 0) \oplus f(\mathbf{X}|X_i = 1) \neq 0 \quad \text{identically for } 1 \leq i \leq n, \tag{14a}$$

即，至少存在一种 $\mathbf{X}$ 的取值，使得

$$f(\mathbf{X}|X_i = 0) \oplus f(\mathbf{X}|X_i = 1) \neq 0, \text{ for } 1 \leq i \leq n. \tag{14b}$$

对于是非投票系统，分量相关性意味着不存在虚设成员。这意味着每位投票成员都必须属于一个获胜联盟；若该成员单独退出该联盟，该联盟就会变为失败联盟。换言之，该成员的退出对于联盟的获胜状态具有决定性，或是关键的。

3. 对称开关函数的班兹夫指数

对称开关函数 $Sy(n; \boldsymbol{A}; \boldsymbol{X})$ 可通过其关于任意变量 X_m $(1 \leq m \leq n)$ 的布尔-香农展开来表征。该展开可表述如下 [32]

$$Sy(n; \boldsymbol{A}; \boldsymbol{X}) = \bar{X}_m \; Sy(n-1; \boldsymbol{B}; \boldsymbol{X}/X_m) \vee X_m \; Sy(n-1; \boldsymbol{C}; \boldsymbol{X}/X_m), \; (1 \leq m \leq n), \tag{15}$$

其中，两个集合 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 均为前 n 个非负整数 $\boldsymbol{I}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ 的子集，其精确定义如下：

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{I}_n, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{D} = \{a_0 - 1, a_1 - 1, \ldots, a_m - 1\}, \tag{17}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D} \cap \boldsymbol{I}_n. \tag{18}$$

可改述如下：$\boldsymbol{C}$和$\boldsymbol{B}$这两个集合的定义

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \quad if \; a_m \neq n, \tag{19a}$$
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} - \{n\} \quad if \; a_m = n, \tag{19b}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D} \quad if \; a_0 \neq 0, \tag{20a}$$
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D} - \{-1\} \quad if \; a_0 = 0. \tag{20b}$$

布尔-香农展开式（15）适用于一个特定的有效适用区域，在该区域内，特征集$\boldsymbol{A}$ 是全集$\boldsymbol{I}_{n+1}$ 的真子集，也是空集 $\boldsymbol{\phi}$的真超集。在这个有效适用区域内，可以递归应用该展开，直到达到以下边界之一（$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_{n+1}$）或（$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\phi}$）。在边界处，递归由以下边界条件之一终止

$$Sy(n;\boldsymbol{I}_{n+1};\boldsymbol{X})= \ 1, \tag{21}$$

$$Sy(n;\ \boldsymbol{\phi}\ ;\boldsymbol{X})= \ 0, \tag{22}$$

其中，$\boldsymbol{I}_{n+1}$ 是前$n+1$个非负整数构成的集合，而$\boldsymbol{\phi}=\{\}$是一个空集。

由于$\bar{X}_m$ 出现在第一项中，而X_m出现在第二项中，因此式（15）右侧的两项互不相交。因此，可以将式（15）中的或运算符（∨）替换为异或运算符（⊕），即

$$Sy(n;\boldsymbol{A};\boldsymbol{X})=\ \bar{X}_m\ Sy(n-1;\boldsymbol{B};\boldsymbol{X}/X_m)\ \oplus\ X_m\ Sy(n-1;\boldsymbol{C};\boldsymbol{X}/X_m),\ (1\le m\ \le\ n), \tag{23}$$

因此，SSF $Sy(n;\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{X})$ 关于 X_m 的布尔导数可直接求得（见附录 A），它是另一个 SSF，表示为

$$\frac{\partial Sy(n;\boldsymbol{A};\boldsymbol{X})}{\partial X_m}=\ Sy(n-1;\boldsymbol{B};\boldsymbol{X}/X_m)\ \oplus\ Sy(n-1;\boldsymbol{C};\boldsymbol{X}/X_m)\,,\quad (1\le m\ \le\ n), \tag{24}$$

$$\frac{\partial Sy(n;\boldsymbol{A};\boldsymbol{X})}{\partial X_m}=\!=\ Sy(n-1;\boldsymbol{B}\oplus\boldsymbol{C};\boldsymbol{X}/X_m),\quad (1\le m\ \le\ n). \tag{25}$$

根据式（1）、（25）和（B.13），班兹夫总权力为

$$TBP(X_m)=wt\left(\frac{\partial Sy(n;\boldsymbol{A};\boldsymbol{X})}{\partial X_m}\right)=\sum_{a\in\boldsymbol{B}\oplus\boldsymbol{C}}\ c(n-1,a),\quad (1\le m\ \le\ n), \tag{26}$$

因此，归一化总班扎夫权力为

$$NTBP(X_m)=\frac{1}{n},\quad (1\le m\ \le\ n), \tag{27}$$

正如预期。回顾来看，我们注意到，实际上可能并不需要进行上述详细计算，因为我们本可以直接根据投票系统的对称性推断出投票者的投票权力将会相等。尽管本节的计算本身并没有特别大的实用价值，但在处理某些投票者之间具有显著部分对称性的投票系统时，它们可能会带来显著帮助；许多重要的投票系统都属于这种情况，包括第 4 节中的两个投票系统。

4. 加权投票系统示例

4.1. 欧洲经济共同体（$\boldsymbol{EEC}$）

欧洲经济共同体（EEC）是当今欧盟（EU）最早的前身（存续于 1958 年至 1973 年）。这是一个由六个成员组成的加权投票系统，由阈值 $T = 12$ 和一个包含六个权重的向量描述

$$\boldsymbol{W} = [W_F \quad W_G \quad W_I \quad W_B \quad W_N \quad W_L]^T = [\ 4 \quad 4 \quad 4 \quad 2 \quad 2 \quad 1\ ]^T, \quad (28)$$

其中，下标 F、G、I、B、N 和 L 分别表示西欧国家法国、德国（当时为西德）、意大利、比利时、荷兰和卢森堡[7]。该系统由一个阈值开关函数描述，其最小和或完全和为 [7]

$$f(F,G,I,B,N,L) = FGI \vee FGBN \vee FIBN \vee GIBN. \quad (29)$$

函数 f（F，G，I，B，N，L）与变量 L 无关（对该变量是空缺的）。该函数并非真正的 6 变量函数，因为它退化为 5 变量函数。事实上，卢森堡是 EEC 系统中的虚拟投票者，因此 $\frac{\partial f}{\partial L} = 0$，随后有$TBP$（$L$）$= 0$。这一结论无法通过草率、肤浅且粗略地检查（28）中的权重而立即得出。

函数 $f(F,G,I,B,N,L)$ 可以用对称开关函数重写为

$$f(F,G,I,B,N,L) = Sy\,(3;\{3\};F,G,I) \vee Sy\,(3;\{2,3\};F,G,I)\,BN. \quad (30)$$

我们通过将第二项乘以第一项的补函数（根据反射定律 [24, 32]），将该表达式转换为不相交积之和，即

$$f(F,G,I,B,N,L) = Sy\,(3;\{3\};F,G,I) \vee Sy\,(3;\{0,1,2\};F,G,I)\,Sy\,(3;\{2,3\};F,G,I)\,BN$$

$$= Sy\,(3;\{3\};F,G,I) \vee Sy\,(3;\{2\};F,G,I)\,BN. \quad (31)$$

由于上式（30）中的两项现在互不相交，因此我们可以将或运算符（∨）替换为异或运算符（⊕），即

$$f(F,G,I,B,N,L) = Sy\,(3;\{3\};F,G,I) \oplus Sy\,(3;\{2\};F,G,I)\,BN. \quad (32)$$

由于存在部分对称性，我们注意到 $TBP(F) = TBP(G) = TBP(I)$，且 $TBP(N) = TBP(B)$。因此，只需计算变量F、G和I（例如F）之一，以及变量B 和N（例如B）之一的布尔导数，即

$$\frac{\partial f}{\partial F} = (Sy\,(2;\boldsymbol{\phi};\,G,I) \oplus Sy\,(2;\{2\};G,I)) \oplus (Sy\,(2;\{2\};\,G,I) \oplus Sy\,(2;\{1\};G,I))\,BN.$$

$$= Sy\,(2;\{2\};G,I)\,(1 \oplus BN) \oplus Sy\,(2;\{1\};\,G,I)\,BN. \quad (33)$$

$$\frac{\partial f}{\partial B} = f(\boldsymbol{X}) = Sy\,(3;\{2\};F,G,I)\;\; N. \tag{34}$$

它们对应的班扎夫总权力为

$$TBP(F) = wt\left(\frac{\partial f}{\partial F}\right) = (1)(4-1) + (2)(1) = 5, \tag{35}$$

$$TBP(B) = wt\left(\frac{\partial f}{\partial B}\right) = (3)(1) = 3. \tag{36}$$

最后，班扎夫总权力向量和归一化总班扎夫权力向量为 e

$$\boldsymbol{TBP} = [\;5 \quad 5 \quad 5 \quad 3 \quad 3 \quad 0\;]^T,\; \boldsymbol{NTBP} = \left[\frac{5}{21} \quad \frac{5}{21} \quad \frac{5}{21} \quad \frac{3}{21} \quad \frac{3}{21} \quad 0\right]^T. \tag{37}$$

4.2. 扩大的欧洲经济共同体（$\boldsymbol{EEEC}$）

扩大的欧洲经济共同体（$EEEC$）同样是当代欧盟（EU）的前身[7]。这个由9个成员组成的加权投票系统于1973年形成，当时欧洲经济共同体通过新增三个成员国而扩大，这三个国家分别是：大不列颠联合王国（R）、丹麦（D）和爱尔兰（E）。新系统的权重向量更新为:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}' &= [W'_F \quad W'_G \quad W'_I \quad W'_R \quad W'_B \quad W'_N \quad W'_D \quad W'_E \quad W'_L]^T \\ &= [10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 5 \quad 3 \quad 3 \quad 2\;]^T\;,\end{aligned} \tag{38}$$

而阈值则重设为$T' = 41$。该系统由一个阈值开关函数描述，其最小和（即完全和）为[7]

$$\begin{aligned} f(F,G,I,R,B,N,D,E,L) &= (BNL \vee BNE \vee BND \vee NED \vee BED)\;(FGI \vee FGR \vee FIR \vee GIR) \\ &\quad \vee (B \vee N \vee D \vee E \vee L)\;FGIR. \\ &= (BNL \vee BNE \vee BND \vee NDE \vee BDE)\;\; Sy(4;\{3,4\};\; F,G,I,R) \vee (B \vee N \vee D \vee E \vee L) \\ &\; Sy(4;\{4\};F,G,I,R) = (BNL \vee BNE \vee BND \vee NDE \vee BDE)\,(Sy(4;\{3\};F,G,I,R) \\ &\vee\; Sy(4;\{4\};\; F,G,I,R) \vee (B \vee N \vee D \vee E \vee L)\; Sy(4;\{4\};F,G,I,R)。 \end{aligned} \tag{39}$$

函数 $f(F,G,I,R,B,N,D,E,L)$ 确实是其九个自变量的函数，因此，它所代表的投票者中没有虚设成员。注意,

$$(BNL \vee BNE \vee BND \vee NDE \vee BDE) \leq (B \vee N \vee D \vee E \vee L), \tag{40}$$

我们将（39）中 $f(F,G,I,R,B,N,D,E,L)$ 的表达式化简为

$$\begin{aligned} f(F,G,I,R,B,N,D,E,L) &= (BNL \vee BNE \vee BND \vee NDE \vee BDE)\;\; Sy(4;\{3\};F,G,I,R) \\ &\quad \vee (B \vee N \vee D \vee E \vee L)\;\; Sy(4;\{4\};F,G,I,R). \end{aligned} \tag{41}$$

（41）右侧的两项彼此互斥，因此用或还是异或来分隔它们并无区别。此外，我们采用互斥化技术，将其他或替换为异或，从而将（41）重写为以下易于求导的表达式

$$\begin{aligned} f(F,G,I,R,B,N,D,E,L) &= (BNL \oplus BNE\bar{L} \oplus BND\bar{E}\,\bar{L} \oplus \bar{B}NDE \\ &\quad \oplus BDE\bar{N})\ \ Sy(4;\{3\};F,G,I,R) \\ &\quad \oplus (1 \oplus \bar{B}\,\bar{N}\,\bar{D}\,\bar{E}\,\bar{L})\ \ Sy(4;\{4\};F,G,I,R). \end{aligned} \tag{42}$$

由于存在部分对称性，我们注意到 $TBP(F) = TBP(G) = TBP(I) = TBP(R)$，$TBP(B) = TBP(N)$，以及 $TBP(D) = TBP(E)$。因此，只需计算变量 F、G、I 和 R 中的一个（例如 F）、变量 B 和 N 中的一个（例如 B）、变量 D 和 E 中的一个（例如 D），以及 L 关于布尔导数，即

$$\frac{\partial f}{\partial F} = (BNL \oplus BNE\bar{L} \oplus BND\bar{E}\,\bar{L} \oplus \bar{B}NDE \oplus BDE\bar{N})\,(Sy(3;\{3\};G,I,R) \oplus Sy(3;\{2\};G,I,R) \oplus (1 \oplus \bar{B}\,\bar{N}\,\bar{D}\,\bar{E}\,\bar{L})\ \ Sy(3;\{3\};G,I,R)$$

$$\begin{aligned} &= (1 \oplus \bar{B}\,\bar{N}\,\bar{D}\,\bar{E}\,\bar{L} \oplus BNL \oplus BNE\bar{L} \oplus BND\bar{E}\,\bar{L} \oplus \bar{B}NDE \\ &\quad \oplus BDE\bar{N})\,Sy(3;\{3\};G,I,R) \\ &\oplus (BNL \oplus BNE\bar{L} \oplus BND\bar{E}\,\bar{L} \oplus \bar{B}NDE \oplus BDE\bar{N})\ \ Sy(3;\{2\};G,I,R). \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial B} &= (NL \oplus NE\bar{L} \oplus ND\bar{E}\,\bar{L} \oplus NDE \oplus DE\bar{N})\ \ Sy(4;\{3\};F,G,I,R) \\ &\quad \oplus \bar{N}\,\bar{D}\,\bar{E}\,\bar{L}\ \ Sy(4;\{4\};F,G,I,R). \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial D} &= (BN\bar{E}\,\bar{L} \oplus \bar{B}NE \oplus BE\bar{N})\ \ Sy(4;\{3\};F,G,I,R) \\ &\quad \oplus \bar{B}\,\bar{N}\,\bar{E}\,\bar{L}\ \ Sy(4;\{4\};F,G,I,R). \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial L} &= (BN \oplus BNE \oplus BND\bar{E})\ \ Sy(4;\{3\};F,G,I,R) \oplus \bar{B}\,\bar{N}\,\bar{D}\,\bar{E}\ \ Sy(4;\{4\};F,G,I,R) \\ &= BN\bar{D}\,\bar{E}\ \ Sy(4;\{3\};F,G,I,R) \oplus \bar{B}\,\bar{N}\,\bar{D}\,\bar{E}\ \ Sy(4;\{4\};F,G,I,R). \end{aligned} \tag{46}$$

它们对应的班兹夫总权力指数为

$$TBP(F) = wt\left(\frac{\partial f}{\partial F}\right) = (32-(1+4+2+1+2+2))(1) + (4+2+1+2+2)(3) = 20+33 = 53, \tag{47}$$

$$TBP(B) = wt\left(\frac{\partial f}{\partial B}\right) = (7)(4) + (1)(1) = 29. \tag{48}$$

$$TBP(D) = wt\left(\frac{\partial f}{\partial D}\right) = (1+2+2)(4) + (1)(1) = 21. \tag{49}$$

$$TBP(L) = wt\left(\frac{\partial f}{\partial L}\right) = (1)(4) + (1)(1) = 5. \tag{50}$$

其中，我们将该函数展开为 4 个权重易于计算的子函数，这些子函数的权重之和等于父函数的权重，由此得到式 (44) 中主函数的权重，即

$wt(NL \oplus NE\bar{L} \oplus ND\bar{E}\,\bar{L} \oplus NDE \oplus DE\bar{N}) = wt(NL \oplus NE\bar{L} \oplus ND\bar{E}\,\bar{L} \oplus DE) =$
$wt\ NL + wt\ NL \oplus N\bar{L} + wt\ NL \oplus N\bar{L} + wt\ NL \oplus N\bar{L} \oplus 1 = 1 + 2 + 2 + 2 = 7()\ ()\ ()\ ()$。
(51)

最后，班扎夫总权力和归一化总班扎夫权力向量为

$$\boldsymbol{TBP} = [\ 53 \quad 53 \quad 53 \quad 53 \quad 29 \quad 29 \quad 21 \quad 21 \quad 5\ ]^T, \tag{52}$$

$$\boldsymbol{NTBP} = \left[\frac{53}{317} \quad \frac{53}{317} \quad \frac{53}{317} \quad \frac{53}{317} \quad \frac{29}{317} \quad \frac{29}{317} \quad \frac{21}{317} \quad \frac{21}{317} \quad \frac{5}{317}\right]^T. \tag{53}$$

5. 结论

本文简要概述了用于计算班扎夫投票权力的开关代数技术。本文着重通过投票权力方法分析投票结果，以理解投票系统的内在属性，因此能够揭示那些原本并不显而易见的隐藏事实。本文还尝试充分利用对称性考量，这类考量通常存在于许多具有实际重要性的投票系统中。此外，本文还对加权投票系统这一主题进行了实用的教程式讲解，并将该主题中的许多概念转化到开关代数领域。

在上述计算中，我们明确假设所考虑系统中的变量在统计上相互独立。在未来的研究中，我们需要放宽这一假设，并考察联盟、党派认同与承诺等问题；这些因素会导致许多投票者呈现相似的投票模式（类似于可靠性研究中的共同原因效应）。

在进一步的未来研究中，我们计划采用开关代数技术，处理其他标准投票系统，例如联合国安全理事会的投票系统[35] 以及描述美利坚合众国联邦投票系统的向量加权537变量系统（该系统由美国的总统和副总统，以及国会（参议院和众议院）组成）[2]。我们还将探讨与投票权力相关的一些悖论，例如再分配悖论、新成员悖论、争吵悖论、捐赠悖论和大规模悖论[36-42]。本文利用权力指数进行描述性分析，但也可以在规范性意义上使用这些指数，从而产生一个设计问题或逆问题，用于根据预先确立的目标向投票者分配权力[42-47]。

附录 A：布尔差分或导数

一个含有 n 个变量的开关函数（一个二值布尔函数）是从 $B_2^n = \{0,1\}^n$ 到 $B_2 = \{0,1\}$ 的映射，记作 $f(\boldsymbol{X}) = f(X_1, X_2, \cdots, X_i, \ldots, X_{n-1}, X_n)$。$f(\boldsymbol{X})$ 关于 X_i $(1 \le i \le n)$ 的偏导数（或布尔差分）为 [6, 7, 25, 26, 34]

$$\frac{\partial f}{\partial X_i} = f\left(X_1, X_2, \cdots, \overline{X}_i, \ldots, X_{n-1}, X_n\right) \oplus f(X_1, X_2, \cdots, X_i, \ldots, X_{n-1}, X_n). \tag{A.1}$$

这可以看出等价于

$$\frac{\partial f}{\partial X_i} = f(\boldsymbol{X}|X_i = 0) \oplus f(\boldsymbol{X}|X_i = 1). \tag{A.2}$$

其中

$$f(\boldsymbol{X}|X_i = 0) = f(X_1, X_2, \cdots, 0, \ldots, X_{n-1}, X_n) = f(\boldsymbol{X}) \,/\, \overline{X}_i, \tag{A.3a}$$

$$f(\boldsymbol{X}|X_i = 1) = f(X_1, X_2, \cdots, 1, \ldots, X_{n-1}, X_n) = f(\boldsymbol{X}) \,/\, X_i, \tag{A.3b}$$

称为 $f(\boldsymbol{X})$ 的子函数、限制函数或商函数（比值）。其卡诺图可通过将 $f(\boldsymbol{X})$ 的卡诺图分成两半得到，即分别对应 $\overline{X}_i$ 和 X_i 的取值域。然后，将其中一半折叠到另一半上，并逐格执行异或运算，即可得到布尔差分。布尔差分的一些重要性质如下（假设 A 和 B 与 X_i 相互独立）：

$$\{f(\boldsymbol{X}) = f_1(\boldsymbol{X}) \oplus f_2(\boldsymbol{X})\} \quad \longrightarrow \quad \{\frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial X_i} = \frac{\partial f_1(\boldsymbol{X})}{\partial X_i} \oplus \frac{\partial f_2(\boldsymbol{X})}{\partial X_i}\}, \tag{A.4}$$

$$\{f(\boldsymbol{X}) = f_1(\boldsymbol{X}) \vee f_2(\boldsymbol{X})\} \quad \longrightarrow \quad \{\frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial X_i} = \overline{f}_1(\boldsymbol{X}) \frac{\partial f_2(\boldsymbol{X})}{\partial X_i} \oplus \frac{\partial f_1(\boldsymbol{X})}{\partial X_i} \overline{f}_2(\boldsymbol{X}) \oplus \frac{\partial f_1(\boldsymbol{X})}{\partial X_i} \frac{\partial f_2(\boldsymbol{X})}{\partial X_i}\}, \tag{A.5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_i} = \frac{\partial f}{\partial \overline{X}_i} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial X_i} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{X}_i}, \tag{A.6}$$

$$\frac{\partial (AX_i)}{\partial X_i} = \frac{\partial (AX_i)}{\partial \overline{X}_i} = A, \tag{A.7}$$

$$\frac{\partial (B)}{\partial X_i} = \frac{\partial (B)}{\partial \overline{X}_i} = 0. \tag{A.8}$$

公式 (A.4) 表明，偏微分算子 ($\frac{\partial}{\partial X_i}$) 与异或运算符 () 可交换。相反，偏微分算子与或运算符不可交换，对或运算后的表达式求偏导需要使用一个相当复杂的公式 (A.5)。因此，我们倾向于在对开关函数求偏导之前先进行预处理：先将其转换为不交积之和形式，再将或运算符替换为异或运算符。

附录B：计算开关函数的权重

我们将开关函数 $f(\boldsymbol{X}) = f(X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}, X_n)$ 视为其真值表的输出列 f。该真值表是一个长度为 2^n 的二进制向量，即

$$\boldsymbol{f} = [f(0,0,\ldots 0,0) \quad f(0,0,\ldots,0,1) \quad f(0,0,..,1,0) \ \ldots \ f(1,1,..,1,1)]^T. \tag{B.1}$$

开关函数 $f(\boldsymbol{X})$ 的权重 $wt(f)$ 定义为其真值表向量 $\boldsymbol{f}$ 中 1 的个数。该权重自然介于 $0 \le wt(f) \le 2^n$ 之间。若将权重除以 2^n 进行归一化，则称其为开关函数 $f(\boldsymbol{X})$ 的综合 $s(f)$，其范围为 $0 \le s(f) \le 1$。综合可解释为概率，并且它是 $f(\boldsymbol{X})$ 的 2^n 谱系数中的第一个。

开关函数 $f(\boldsymbol{X})$ 的实变换 $R(\boldsymbol{p}) = R(p_1, p_2, \cdots, p_n)$（记作 $R\mathrm{l}(f)$）定义为具有以下两个特征 [32, 48-51], ，即：

a) $R(\boldsymbol{p})$ 是 n 个连续实变量 $\boldsymbol{p} = [p_1\ p_2 \cdots\ p_n]^T$ 的多仿射连续实函数。若除变量 p_i （$1 \le i \le n$）外的所有自变量均保持不变，则 $R(\boldsymbol{p})$ 具有形式（$A_i + B_i\ p_i$）（其中 A_i 和 B_i 为常数），即化为关于自变量 p_i 的直线关系或一次多项式。

b. $R(\boldsymbol{p})$ 与 $f(\boldsymbol{X})$ 具有相同的“真值表”，即

$$R\left(\boldsymbol{p} = \boldsymbol{t}_j\right) = f(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{t}_j), \qquad \text{for j = 0, 1, …, } (2^n - 1), \tag{B.2}$$

其中 $\mathrm{t_j}$ 是真值表的第 j 个输入行；$\mathrm{t_j}$ 是一个由二进制分量组成的 n 维向量，使得

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{\mathrm{n-i}}\, \mathrm{t_{ji}} = \mathrm{j}, \qquad \text{for j = 0, 1, …, } (2^n - 1). \tag{B.3}$$

我们强调，仅凭上述特征 (b) 并不足以唯一确定 $R(\boldsymbol{p})$，除非再加入条件 (a)，要求 $R(\boldsymbol{p})$ 为多仿射 [32]。如果实变换 R 及其自变量 $\boldsymbol{p}$ 均限定为二进制值（即，如果 R: $\{0, 1\}^{\mathrm{n}} \rightarrow \{0, 1\}$），那么 R 就成为 Schneeweiss [30, 31]，深入研究的开关函数的多线性形式，通常用于在系统可靠性的工程研究中模拟结构函数 [20, 52, 53] 。

实变换 $R(\boldsymbol{p})$ 可视为映射 $R(\boldsymbol{p})$：$\boldsymbol{R}^n \rightarrow \boldsymbol{R}$，其中 $\boldsymbol{R}$ 是整个实数轴。此变换也称为概率变换，这一名称源于该映射可等价地改写为 $R(\boldsymbol{p})$：$[0.0, 1.0]^n \rightarrow [0.0, 1.0]$, ，因此 R 和 p 都可以解释为概率。

下面这段文字介绍了一种便捷的方法：先将开关函数 $f(\boldsymbol{X})$ 表示为不交积之和（s-o-p）形式 [32]，再求其实变换。

$$f(\boldsymbol{X}) = \bigvee_{k=1}^{m} D_k, \tag{B.4}$$

其中

$$\mathrm{D_i} \wedge \mathrm{D_j} = 0, \qquad \forall\ \mathrm{i, j}\ , \tag{B.5}$$

$$D_k = \left(\bigwedge_{i \in I_{k_1}} X_i\right)\left(\bigwedge_{i \in I_{k_2}} \overline{X}_i\right), \qquad \forall\ \mathrm{k}. \tag{B.6}$$

这里，I_{k_1} 和 I_{k_2} 分别是乘积 D_k中未取反文字和取反文字的索引集合。这些文字都不是冗余的；否则，根据与运算的幂等性（$X_i \wedge X_i = X_i$，$\overline{X}_i \wedge \overline{X}_i = \overline{X}_i$），即可消除冗余文字。实变换 $R(\mathbf{p}) = R\mathrm{l}(f)$ 定义为

$$R(\mathbf{p}) = R\ell(f) = \sum_{k=1}^{m} T\{D_k\}(\mathbf{p}), \tag{B.7}$$

其中

$$T\{D_k\}(\mathbf{p}) = \left(\prod_{i\in I_{k_1}} p_i\right)\left(\prod_{i\in I_{k_2}} (1-p_i)\right), \qquad \forall k, \tag{B.8}$$

（B.7）右侧是将（B.4）的右侧中的布尔与运算符替换为实数乘法运算符，将布尔或运算符替换为实数加法运算符，将每个未取补函数的布尔变量X_i替换为实变量p_i，并将每个取补函数的布尔变量X_i替换为实变量$(1-p_i)$。

一旦求得开关函数 $f(\boldsymbol{X})$ 的实变换 R（$\mathbf{p}$），其权重便可直接表示为

$$wt(f) = 2^n * R(\mathbf{2}^{-1}) = 2^n * R(2^{-1}, 2^{-1}, \cdots, 2^{-1}), \tag{B.9}$$

其中，$\mathbf{2}^{-1}$ 表示一个包含 n 个元素的向量，每个元素均为 $2^{-1} = 0.5$。此外，若 $f(\boldsymbol{X})$ 用不相交与或形式 (B.4) 表示，则其权重为

$$wt(f) = \sum_{k=1}^{m} wt(D_k) = 2^n * \sum_{k=1}^{m} T\{D_k\}(\mathbf{2}^{-1}) = \sum_{k=1}^{m} 2^{\left(n-\ell(D_k)\right)}, \tag{B.10}$$

其中，$\mathrm{l}(D_k)$ 是乘积 D_k 中不可约文字的数量，例如，$\mathrm{l}(1) = 0$，$\mathrm{l}(X_i) = \mathrm{l}(X_i) = 1$，$\mathrm{l}(X_i X_j) = \mathrm{l}(X_i \overline{X}_j) = 2$。逻辑值 0 是或运算的单位元，不被视为逻辑积 D_k。为方便起见，我们令 $\mathrm{l}(0) = \infty$；因此，若有乘积 $D_k = 0$，则其权重为 $wt(D_k) = 0$。$f(\boldsymbol{X})$ 的最小项规范形式是不相交展开式 (B.4) 的一个特例，其中 m 表示最小项的数量，也就是 $f(\boldsymbol{X})$ 的真配置数量。此处 $\mathrm{l}(\mathrm{D_k}) = \mathrm{n}$，$\forall \mathrm{k}$，而 (B.10) 在这种情况下给出正确结果 $wt(f) = m$。

如果函数 $f(\boldsymbol{X})$ 不能表示为不相交与或形式 (B.4)，而只能表示为不一定互不相交的一般与或形式，

$$f(\boldsymbol{X}) = \bigvee_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n_p}} \mathrm{P_i}, \tag{B.11}$$

那么，根据容斥原理 [32, 54-55] 的适当形式，$f(\boldsymbol{X})$ 的权重可表示如下：

$$wt(f) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n_p}} wt\{\mathrm{P_i}\} - \sum\sum_{1\le \mathrm{i}<j\le \mathrm{n_p}} wt\{\mathrm{P_i} \wedge \mathrm{P_j}\} + \sum\sum\sum_{1\le \mathrm{i}<j<k\le \mathrm{n_p}} wt\{\mathrm{P_i} \wedge \mathrm{P_j} \wedge \mathrm{P_k}\} - \cdots + (-1)^{\mathrm{n_p}-1} wt\left\{\bigwedge_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n_p}} \mathrm{P_i}\right\}. \tag{B.12}$$

其中，乘积项的权重（根据 (B.10)）等于 2 的幂，指数为变量总数减去该乘积项中不可约文字的数量。

如果函数 $f(\boldsymbol{X})$ 是对称开关函数 $Sy(n; \boldsymbol{A}; \boldsymbol{X})$，那么其权重可通过对属于特征集 $\boldsymbol{A}$ 的所有整数 a 的组合（二项式）系数 n choose a 求和得到，记为 $c(n, a)$，即：

$$wt(Sy(n; \boldsymbol{A}; \boldsymbol{X})) = \sum_{a\in \boldsymbol{A}} c(n, a). \tag{B.13}$$

如果函数 $f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ 是两个函数 $f_1(\boldsymbol{X})$ 和 $f_2(\boldsymbol{Y})$ 的合取，其中 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 是互不重叠的自变量集合，那么 $f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ 的权重就是 $f_1(\boldsymbol{X})$ 和 $f_2(\boldsymbol{Y})$ 的权重的算术乘积。

$$\{f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = f_1(\boldsymbol{X}) \wedge f_2(\boldsymbol{Y})\} \;\longrightarrow\; \{wt(f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})) = wt(f_1(\boldsymbol{X})) * wt(f_2(\boldsymbol{Y}))\}. \tag{B.14}$$

如果函数 $f(\boldsymbol{X})$ 是两个不相交函数 $f_1(\boldsymbol{X})$ 和 $f_2(\boldsymbol{X})$ 的析取（或异或），那么它的权重就是它们的权重的算术和。

$$\{f(\boldsymbol{X}) = f_1(\boldsymbol{X}) \vee f_2(\boldsymbol{X}) = f_1(\boldsymbol{X}) \oplus f_2(\boldsymbol{X}), \quad f_1(\boldsymbol{X}) \wedge f_2(\boldsymbol{X}) = 0\} \longrightarrow$$

$$\{wt(f(\boldsymbol{X})) = wt(f_1(\boldsymbol{X})) + wt(f_2(\boldsymbol{X}))\}. \tag{B.15}$$

此外，若一个开关函数对其 m 个自变量展开为 2^m 个子函数（它们自然互不相交），则该母函数的权重等于这些子函数权重之和。一个函数（含 n 个自变量）及其补函数的权重之和为 2^n

$$wt\left(\overline{f}(\boldsymbol{X})\right) = wt(1 \oplus f(\boldsymbol{X})) = 2^n - wt(f(\boldsymbol{X})). \tag{B.16}$$

例 B.1：

三取二函数

$$f(\boldsymbol{X}) = f(X_1, X_2, X_3) = X_1X_2 \vee X_2X_3 \vee X_1X_3 = Sy(3; \{2,3\}; X_1, X_2, X_3), \tag{B.17}$$

由图 B.1 中的卡诺图表示。该函数由互不重叠的回路覆盖，因此可表示为不相交的和项表达式

$$f(X_1, X_2, X_3) = X_1X_2 \vee \overline{X}_1X_2X_3 \vee X_1\overline{X}_2X_3. \tag{B.18}$$

因此，通过 (B.10) 可正确求得其权重：

$$wt(f) = 2^{3-2} + 2^{3-3} + 2^{3-3} = 2 + 1 + 1 = 4. \tag{B.19}$$

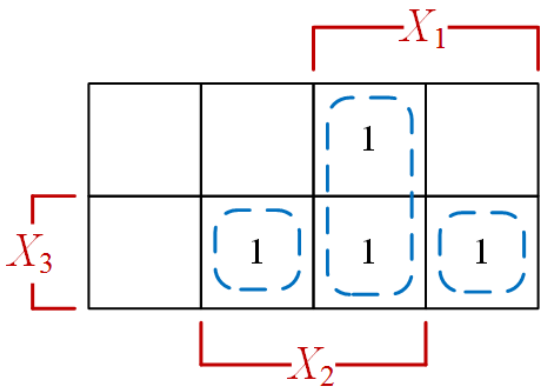

图 B.1. 表示三取二函数且采用不相交覆盖的卡诺图。与通常一样，图中映射的 0 项留空。

这个权重也可以通过容斥原理（B.12）计算得出：

$$wt(f) = wt(X_1X_2) + wt(X_2X_3) + wt(X_1X_3) - wt(X_1X_2 \wedge X_2X_3) - wt(X_1X_2 \wedge X_1X_3) - wt(X_2X_3 \wedge X_1X_3) + wt(X_1X_2 \wedge X_2X_3 \wedge X_1X_3)$$

$$= wt(X_1X_2) + wt(X_2X_3) + wt(X_1X_3) - wt(X_1X_2X_3) - wt(X_1X_2X_3) - wt(X_1X_2X_3) + wt(X_1X_2X_3) = 2^{3-2} + 2^{3-2} + 2^{3-2} - 2^{3-3} - 2^{3-3} - 2^{3-3} + 2^{3-3}$$

$$= 2 + 2 + 2 - 1 - 1 - 1 + 1 = 4. \quad \text{(B.20)}$$

最后，我们可以识别出函数 $f(\boldsymbol{X}) = y(n; \boldsymbol{A}; \boldsymbol{X})$ 的对称性，其中 $n = 3$ and $\boldsymbol{A} = \{2,3\}$，然后应用 (B.13) 得到

$$wt(f) = c(3,2) + c(3,3) = 3 + 1 = 4. \quad \text{(B.21)}$$

对于特征集 $\boldsymbol{A}$，式（23）中对应的集合为 $\boldsymbol{B} = \{2\}$、$\boldsymbol{C} = \{1, 2\}$ 和 $\boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{C} = \{1\}$，因此任一论元的班

$$TBP(X_m) = wt\left(\frac{\partial Sy(n;\{2,3\};\boldsymbol{X})}{\partial X_m}\right) = c(2,1) = 2, \ (1 \le m \le 3). \quad \text{(B.22)}$$

参考文献

[1] Gelman, A., Katz, J. N., 和 Tuerlinckx, F.（2002）。投票权力的数学与统计学。Statistical Science，17（4）：420–435。[2] Taylor, A. D., 和 Pacelli, A. M.（2008）。《数学与政治：策略、投票、权力与证明》，2nd 版，Springer Science & Business Media，美国纽约州纽约市。[3] Wallis, W. D.（2014）。《选举与投票的数学》，Springer International Publishing，瑞士Cham。[4] Banzhaf III, J. F.（1964）。加权投票行不通：一项数学分析。Rutgers Law Review，19，317-343。[5] Kirsch, W., 和 Langner, J.（2010）。权力指数与最小获胜联盟，Social Choice and Welfare，34（1），33-46。[6] Yamamoto, Y.（2012）。班扎夫指数与布尔差分，载于2012年IEEE第42届国际多值逻辑研讨会论文集，191-196。[7] Rushdi, A. M. A., 和 Ba-Rukab, O. M.（2017）。利用变量输入求谱图计算班扎夫投票指数。British Journal of Mathematics & Computer Science，21（1），1-16。[8] Owen, G.（1975）。多线性扩展和多数博弈的渐近性。Journal of the Royal Statistical Society，109（1），53-57。[9] Coleman, J. S.（2012）。集体的控制以及集体的行动能力。载于《社会选择》（Routledge再版），283-306。[10] Shapley, L. S., 和 Shubik, M.（1954）。一种评估委员会制度中权力分布的方法，American Political Science Review，48（3），787-792。[11] Strafiin Jr, P. D.（1988）。作为概率的Shapley-Shubik指数和班兹夫权力指数。载于Roth, A. E.（编），《Shapley值：纪念Lloyd S. Shapley论文集》，剑桥大学出版社联合会，英格兰剑桥，71-81。[12] Matsui, T., 和 Matsui, Y.（2000）。加权多数博弈权力指数计算算法综述，日本运筹学会杂志，43（1），71-86。[13] Bilbao, J. M., Fernandez, J. R., Losada, A. J., 和 Lopez, J. J.（2000）。用于高效计算权力指数的生成函数。Top，8（2），191-213。

[14] Bilbao, J. M., Fernandez, J. R., Jiménez, N., 和 Lopez, J. J.（2002）。欧盟扩大过程中的投票权力，《欧洲运筹学杂志》，143（1），181- [15] Bachrach, Y., Markakis, E., Resnick, E., Procaccia, A. D., Rosenschein, J. S., 和 Saberi, A.（2010）。权力指数近似：理论与实证分析，《自主智能体与多智能体系统》，20（2），105-122。[16] Rodrigues, M. M., 和 Wilhelm, V. E.（2016）。通过蒙特卡罗模拟测量加权投票博弈中的权力指数。《IEEE拉丁美洲汇刊》，14（3），1454-1459。[17] Boland, P. J., 和 El-Neweihi, E.（1995）。可靠性理论中的部件重要度测度。《计算机与运筹学》，22（4），455-463。[18] Armstrong, M. J.（1995）。部件的联合可靠性重要度。《IEEE可靠性汇刊》，44（3），408-412。[19] Freixas, J., 和 Puente, M. A.（2002）。基于半值和概率值的系统部件可靠性重要度测度，《运筹学年鉴》，109（1），331-342。[20] Aven, T., 和 Nøkland, T. E.（2010）。论不确定性重要度测度在可靠性与风险分析中的应用，《可靠性工程与系统安全》，95（2），127-133。[21] Kuo, W., 和 Zhu, X.（2012）。可靠性重要度测度的一些最新进展，《IEEE可靠性汇刊》，61（2），344-360。[22] Zhu, X., 和 Kuo, W.（2014）。可靠性与数学规划中的重要度测度，《运筹学年鉴》，212（1），241-267。[23] Rushdi, A. M.（1990）。阈值系统及其可靠性，《微电子与可靠性》，30（2），299-312。[24] Muroga, S.（1971）。《阈值逻辑及其应用》，Wiley-Interscience，美国纽约州纽约市。[25] Lee, S. C.（1978）。《现代开关理论与数字设计》，Prentice-Hall，美国新泽西州恩格尔伍德克利夫斯。[26] Crama, Y., 和 Hammer, P. L.（2011）。《布尔函数：理论、算法与应用》，英国剑桥，剑桥大学出版社。[27] Abraham, J. A.（1979）。一种改进的网络可靠性算法，《IEEE可靠性汇刊》，R-28（1），58-61。[28] Dotson, W., 和 Gobien J.（1979）。一种概率图的新分析技术，《IEEE电路与系统汇刊》，CAS-26（10）：855-865。[29] Bennetts, R. G.（1982）。用布尔方法分析可靠性框图，《IEEE可靠性汇刊》，R-31（2），159-166。[30] Schneeweiss, W. G.（1977）。计算布尔表达式取值为1的概率，《IEEE可靠性汇刊》，R-26（1），16-22。[31] Schneeweiss, W. G.（1989）。《具有工程应用和计算机程序的布尔函数》，Springer-Verlag，美国纽约州纽约市。[32] Rushdi, A. M. 和 Rushdi, M. A.（2017）。系统可靠性的开关代数分析。见M. Ram和P. Davim（编），《可靠性与系统工程进展》第6章，管理与工业工程丛书，Springer International Publishing，瑞士Cham，139-161。[33] Nurmi, H.（1997）。论权力指数与最小获胜联盟，《控制与控制论》，26，609-612。[34] Muroga, S.（1979）。《逻辑设计与开关理论》，Wiley，美国纽约州纽约市。[35] O'neill, B.（1996）。联合国安全理事会中的权力与满意度，《冲突解决杂志》，40（2），219-237。[36] Brams, S. J., 和 Affuso, P. J.（1976）。权力与规模：一个新悖论，《理论与决策》，7（1），29-56。

[37] Brams, S. J. 和 Affuso, P. J.（1985）。欧共体部长理事会中的投票权的新悖论，《选举研究》，4(2)，135-139。[38] Felsenthal, D. S. 和 Machover, M.（1995）。相对投票权的公理与悖论——批判性再评价，《理论与决策》，38(2)，195-229。[39] Van Deemen, A. 和 Rusinowska, A.（2003）。荷兰政治中的投票权悖论，《公共选择》，115(1)，109-137。[40] Laruelle, A. 和 Valenciano, F.（2005）。对若干投票权悖论的批判性再[illegible]。[41] Fischer, D. 和 Schotter, A.（1978）。投票权重分配中“再分配悖论”的必然性，《公共选择》，33(2)，49-67。[42] Rizzo, S.（2003）。在加权多数博弈中寻找实现所需权力平衡的配额和权重，硕士论文，宾夕法尼亚州立大学，美国。[43] Alon, N. 和 Edelman, P. H.（2010）。逆班扎夫问题，Social Choice and Welfare，34(3)，371-377。[44] Kurz, S.（2012）。论逆权力指数问题，《优化》，61(8)，989-1011。[45] Weber, M.（2016）。两级投票：衡量不平等并规定逆权力问题，《数学社会科学》，79，40-45。[46] Kurz, S.（2016）。委员会中权力分布的逆问题，Social Choice and Welfare，47(1)，65-88。[47] Pavlou, C.（2020）。逆权力指数问题：算法与复杂性，博士论文，信息学院，爱丁堡大学，苏格兰。[48] Papaioannou, S., G. 和 Barrett, W. A.（1975）。布尔函数的实变换及其应用，《计算机与电气工程》，2(2)，215-224。[49] Kumar, S. K. 和 Breuer, M. A.（1981）。通过一种新变换研究布尔开关函数的概率方面，《美国计算机协会学报》（JACM），28(3)，502-520。[50] Heidtmann, K. D.（1991）。应用算术谱进行组合网络故障检测，《IEEE计算机汇刊》，C-40(3)，320-324。[51] Jain, J.（1996）。布尔函数的算术变换，载于《离散函数表示》，Sasao, T. 和 M. Fujita（编），Kluwer Academic Publishers，Dordrecht，荷兰，133-161。[52] Barlow, R. E. 和 Prochan, F.（1996）。《可靠性数学理论》，Wiley，纽约，纽约州，美国。[53] Aven, T. 和 Jensen, U.（1999）。《可靠性中的随机模型》，Springer-Verlag，纽约，纽约州，美国，第41卷。[54] Dohmen, K.（1999）。容斥原理的改进，《数学档案》，72(4)，298-303。[55] Hao, Z.、Yen, W. C.、Wang, J.、Wang, G. G. 和 Sun, B.（2019）。一种快速的容斥技术，《信息科学》，486，20–30。