arXiv:2302.09398v1 [math.CV] 18 Feb 2023

直接像层的对偶中野正性与奇异中野正性

Yuta Watanabe

Abstract. 设 $f\colon X \to Y$ 是一个满射射影映射，L 是 X 上配备了（奇异）半正 Hermitian 度量 h 的全纯线丛。本文通过研究扭曲相对典范丛 $K_{X/Y} \otimes L \otimes \mathscr{I}(h)$ 的直接像层上的典范度量，证明当 h 光滑且不存在由 f 引起的变形时，该度量具有对偶 Nakano 半正性；当 h 奇异时，该度量在奇异意义下局部具有 Nakano 半正性。

1. 引言

设 X 是一个维数为 $m+n$ 的 K¨ahler 流形，Y 是一个维数为 m 的复流形。考虑一个适当全纯浸没 $f\colon X \to Y$。与映射 f 对应的相对典范丛 $K_{X/Y}$ 为 $K_{X/Y} = K_X \otimes f^*K_Y^{-1}$。将其限制在 $t \in Y$ 的一般纤维 X_t 上时，有一个自然同构 $K_{X/Y}|_{X_t} \cong K_{X_t}$。在许多研究中，事实证明，每个纤维 X_t 的复结构变化会反映在相对典范丛 $K_{X/Y}$ 的正性上。因此，该丛的正性性质在多复变函数论和复代数几何的研究中发挥着重要作用。实际中，我们经常研究其扭曲形式 $K_{X/Y} \otimes L$，其中 $L \to X$ 是一个配备了光滑（半）正 Hermitian 度量 h 的全纯线丛。研究该丛性质的一种方法，是考察 Y 上的直接像层 $f_*(K_{X/Y} \otimes L)$。

这个直接像层的正性已在 [Ber09], [BP08], [PT18], [HPS18], [BPW19], [DNWZ22] 中得到深入研究。在 [Ber09], 中，Berndtsson 证明了由 h 诱导的光滑典范 Hermitian 度量 H 具有 Nakano（半）正性（见定理 3.2）。首先，我们证明，若纤维的复结构没有变化（这意味着可以令 Kodaira-Spencer 形式为零），则光滑典范 Hermitian 度量 H 具有对偶中野（半）正性。我们引入 $(n-1,n-1)$-形式来判定对偶中野正性（见定义 2.3），并沿用 Berndtsson 的计算方法，通过计算曲率的正性来证明这一结论。

定理 1.1. 设 L 是 K¨ahler 流形 X 上的全纯线丛，配备光滑半正（或正）厄米度量 h，且 $f\colon X \to Y$ 是两个复流形之间的适当全纯下沉。对于 Kodaira-Spencer 映射 $\rho_t\colon T^{1,0}_{Y,t} \to H^{0,1}(X_t, T^{1,0}_{X_t})$，若表示类 $\rho_t(\partial/\partial t_j)$ 的 Kodaira-Spencer 形式可以取为零，则 $f_*(K_{X/Y} \otimes L)$ 上的光滑典范 Hermitian 度量 H 具有对偶 Nakano 半正性。

2020年数学主题分类：32L10，32G05，14F18。关键词和短语：直接像层、中野正性、奇异厄米度量、 L^2-估计。

该定理的例子包括流形直积的投影映射（见推论 3.8），以及射影化丛 $\pi\colon \mathbb{P}(V) \to Y$；当丰向量丛$V \to Y$的 $\det V$ 具有满足特定条件的度量时，后者成立（见定理 3.6）。

其次，我们考虑具有半正性的度量 h 在 L 上是奇异的情形，即 h 是伪有效的。在这种情况下，将乘子理想层 $\mathscr{I}(h)$ 进一步扭曲为层 $\omega_{X/Y}\otimes L$，我们研究直接像层 $\mathcal{E} := f_*(\omega_{X/Y}\otimes L\otimes \mathscr{I}(h))$ 的正性，其中 $f\colon X \to Y$ 是两个连通复流形之间的射影满射全纯映射。已知无挠相干层 $\mathcal{E} = f_*(\omega_{X/Y}\otimes L\otimes \mathscr{I}(h))$ 带有由 h 诱导的奇异典范厄米度量 H，且该度量满足最小延拓性质并且是 Griffiths 半正的（参见定理 5.8, [BP08], [PT18], [HPS18]）。

我们证明，这个定义在 $\mathcal{E}$ 上的奇异典范厄米度量 H 具有局部 L^2 型 Nakano 半正性。令 $Y(\mathcal{E}) \subseteq Y$ 表示 $\mathcal{E}$ 局部自由的极大开子集，则 $Z_{\mathcal{E}} := Y \setminus Y(\mathcal{E})$ 是余维为 ≥ 2 的闭解析子集。这里，我们定义（参见定义 4.9）Y 上与 H 的无界性相关的集合 Σ_H，如下:

$$\Sigma_H := \{t \in Y \mid \mathcal{E}_t \subsetneq H^0(X_t, K_{X_t}\otimes L|_{X_t})\}.$$

利用集合 Σ_H，我们有如下结论。

定理 1.2. 若 X 是射影的，且存在解析集 A，使得 $\Sigma_H \subseteq A$，则 H 在 $Y(\mathcal{E})$ 上具有定义 4.11 中所述的满局部 L^2 型 Nakano半正性。

$\mathcal{E}$ 在 $Y(\mathcal{E})$ 上的限制是全纯向量丛。关于 H，该向量丛的 L^2-子层记为 $\mathscr{E}(H) \subseteq \mathcal{E}|_{Y(\mathcal{E})}$，定义在 $Y(\mathcal{E})$ 上，它与乘子理想层类似。对于自然嵌入 $j\colon Y(\mathcal{E}) = Y\setminus Z_{\mathcal{E}} \hookrightarrow Y$，我们按照定义 4.9，将关于 H、定义在 Y 上的自然扩张 L^2-子层定义为 $\mathscr{E}_Y(H) := j_*\mathscr{E}(H)$。

定理 1.3. 若 X 是射影的，且存在解析集 A，使得 $\Sigma_H \subseteq A$，则定义在 Y 上的自然扩张 L^2-子层 $\mathscr{E}_Y(H)$ 是凝聚的。

最后，我们考察最小延拓性质与 Nakano 半正性之间的关系，并证明：如果一个无挠相干层具有满足最小延拓性质的度量，那么该层不一定具有 Nakano 半正度量。作为一个具体例子，我们证明，在 $\mathbb{P}^n$ 上的商全纯向量丛 $(\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1})/\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ 不具有 Nakano 半正度量，但具有满足最小延拓性质的度量。

2. Positivity of smooth Hermitian metrics and L^2-estimates

本节中，我们定义全纯向量丛的各种正性，并探讨它们等价的条件。

设 X 是一个复维数为 n、配备厄米度量 ω 的复流形，且 (E,h) 是 X 上秩为 r 的全纯厄米向量丛。设 $(U,(z_1,\dots,z_n))$ 为局部坐标，$D = D'^h + \overline{\partial}$ 为 (E,h) 的陈联络。

陈曲率张量 $\Theta_{E,\ h}=D^2=[D'^h,\overline{\partial}]$ 是一个 (1, 1)-微分形式，写作

$$\Theta_{E,h}=\sum\Theta^h_{jk}dz_j\wedge d\overline{z}_k,$$

其中系数 $\Theta^h_{jk}=[D'^h_{z_j},\overline{\partial}_{z_k}]$ 是作用在 U 上的算子，且 $\overline{\partial}_{z_j}=\partial/\partial\overline{z}_j$。

若光滑Hermitian度量 h 在 E 上满足以下条件：对于 E 的任意截面 u 以及任意向量 $v\in\mathbb{C}^n$，则称其为 Griffiths（半）正：

$$\sum_{1\le j,k\le n}(\Theta^h_{jk}u,u)_hv_j\overline{v}_k>0\quad(\ge 0).$$

若 h 满足以下条件：对于 E 的任意截面 u_j，则称其为 Nakano（半）正：

$$\sum_{1\le j,k\le n}(\Theta^h_{jk}u_j,u_k)_h>0\quad(\ge 0).$$

E^* 与 E 之间存在一个自然的反线性等距映射，我们将其记为 J。将 E^* 与 E 之间的配对记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$。对于 E 的任意局部截面 u 以及 E^* 的任意局部截面 ξ，有

$$\langle\xi,u\rangle=(u,J\xi)_h.$$

在 E^* 上的自然全纯结构下，我们得到

$$\overline{\partial}_{z_j}\xi=J^{-1}D'^h_{z_j}J\xi,$$

并且， E^* 上的陈联络为

$$D'^{h^*}_{z_j}\xi=J^{-1}\overline{\partial}_{z_j}J\xi.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\overline{\partial}_{z_j}\langle\xi,u\rangle&=\langle\overline{\partial}_{z_j}\xi,u\rangle+\langle\xi,\overline{\partial}_{z_j}u\rangle,\\ \partial_{z_j}\langle\xi,u\rangle&=\langle D'^{h^*}_{z_j}\xi,u\rangle+\langle\xi,D'^h_{z_j}u\rangle,\\ 0=[\partial_{z_j},\overline{\partial}_{z_k}]\langle\xi,u\rangle&=\langle\Theta^{h^*}_{jk}\xi,u\rangle+\langle\xi,\Theta^h_{jk}u\rangle.\end{aligned}$$

因此，对于任意局部截面 $\xi_j\in C^\infty(E^*)$ 和 $u_j\in C^\infty(E)$，若满足 $u_j=J\xi_j$，则有

$$\sum(\Theta^{h^*}_{jk}\xi_j,\xi_k)_{h^*}=-\sum(\Theta^h_{jk}u_k,u_j)_h,$$

并且，对于任意局部截面 u、$v\in C^\infty(E)$，有

$$\overline{\partial}_{z_k}\partial_{z_j}(u,v)_h=(D'^h_{z_j}u,D'^h_{z_k}v)_h+(\overline{\partial}_{z_k}D'^h_{z_j}u,v)_h+(u,D'^h_{z_k}\overline{\partial}_{z_j}v)_h+(\overline{\partial}_{z_k}u,\overline{\partial}_{z_j}v)_h.$$

若 u 是全纯的，则 $-\overline{\partial}_{z_k}D'^h_{z_j}u=\Theta^h_{jk}u$。因此，对于任意局部截面 u、$v\in\mathcal{O}(E)_x$，有

$$\frac{\partial^2}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}(u,v)_h=(D'^h_{z_j}u,D'^h_{z_k}v)_h-(\Theta^h_{jk}u,v)_h.$$

特别地，若 $u,v\in\mathcal{O}(E)_x$ 满足 $D'^hu=D'^hv=0$ 于 x，则

$$\partial_{z_j}\overline{\partial}_{z_k}(u,v)_h=-(\Theta^h_{jk}u,v)_h\quad\text{at } x.$$

设 $u=(u_1,\cdots,u_n)$ 是 E 的一个 n 元局部全纯截面组，即 $u_j\in\mathcal{O}(E)$。我们通过以下方式定义 T_u^h，一个 $(n-1,n-1)$-微分形式：

$$T_u^h:=\sum(u_j,u_k)_h\widehat{dz_j\wedge d\overline{z}_k}$$

其中（z_1，$\cdots$，z_n）是 X 上的局部坐标，$dz_j\wedge d\overline{z}_k$ 表示除 dz_j 和 $d\overline{z}_k$ 外所有 dz_l 和 $d\overline{z}_l$ 的楔积，再乘以一个绝对值为 1 的常数，即 $i\widehat{dz_j\wedge d\overline{z}_k}=dV_{\mathbb{C}^n}$。因此，若 $D'^hu_j=0$ 在 x 处成立，则有

$$i\partial\overline{\partial}T_u^h=-\sum(\Theta_{jk}^hu_j,u_k)_hdV_{\mathbb{C}^n},$$

在 x 处，由方程

$$\begin{aligned}i\partial\overline{\partial}T_u^h&=\sum(D'^h_{z_j}u_j,D'^h_{z_k}u_k)_hdV_{\mathbb{C}^n}-\sum(\Theta_{jk}^hu_j,u_k)_hdV_{\mathbb{C}^n}\\&=||\sum D'^h_{z_j}u_j||_h^2-\sum(\Theta_{jk}^hu_j,u_k)_hdV_{\mathbb{C}^n}.\end{aligned}$$

命题 2.1。（参见 . [Ber09], [Rau15]）我们有

- h 是 Nakano半正的，当且仅当对于任意 $x\in X$ 和任意满足 $D'^hu_j=0$ 在 x 处成立的 $u_j\in\mathcal{O}(E)_x$，$(n-1,\ n-1)$-形式 $-T_u^h$ 在 x 处是多重次调和的，即 $-i\partial\overline{\partial}T_u^h\geq 0$。
- h 是中野半负的，当且仅当对于任意的 $x\in X$ 和任意的 $u_j\in\mathcal{O}(E)_x$，微分形式 $(n-1,\ n-1)$ T_u^h在 x处是多重次调和的，即 $i\partial\overline{\partial}T_u^h\geq 0$。

我们引入另一个关于Nakano型正性的概念。

定义2.2。（参见. [Siu82], [LSY13]）设 X 是一个复维数为 n 的复流形，且 $(E,\ h)$ 是 X上的秩为 r 的全纯厄米向量丛。$(E,\ h)$ 称为对偶Nakano正（分别为对偶中野半正），如果 $(E^*,\ h^*)$ 是Nakano负（分别为Nakano半负）。

设 $\xi_j\in C^\infty(E^*)$ 和 $u_j\in C^\infty(E)$ 是 r元的光滑截面 E^*，满足$u_j=J\xi_j$。如果 h 是对偶中野半正的，则

$$0\geq\sum(\Theta_{jk}^{h^*}\xi_j,\xi_k)_{h^*}=-\sum(\Theta_{jk}^hu_k,u_j)_h,$$

即 $\sum(\Theta_{jk}^hu_k,u_j)_h\geq 0$。只需考虑每一点：对于任意 $x\in X$ 和任意$u_j\in C^\infty(E)_x$，若 $\sum(\Theta_{jk}^hu_k,u_j)_h\geq 0$ 在 x 处成立，则 h 为对偶中野半正。因此，h 为对偶中野半正，当且仅当对于任意点 x以及任意 $u_j\in C^\infty(E)_x$，都有 $\sum(\Theta_{jk}^hu_k,u_j)_h\geq 0$。

定义 2.3. 设 $u=(u_1,\cdots,u_n)$ 是 E 的一个由 n 个局部全纯截面组成的元组，即 $u_j\in\mathcal{O}(E)$。我们将 $\widetilde{T}_u^h$ 定义为一个 $(n-1,n-1)$-微分形式，其定义如下：

$$\widetilde{T}_u^h:=\sum(u_k,u_j)_h\widehat{dz_j\wedge d\overline{z}_k}$$

其中 $(z_1,\cdots,z_n)$ 是 X 上的局部坐标。

命题 2.4. h 是对偶中野半正，当且仅当对于任意 $x\in X$ 和任意$u_j\in\mathcal{O}(E)_x$，若 $D'^hu_j=0$在 x处成立，则 $(n-1,n-1)$-微分形式 $-\widetilde{T}_u^h$在 x处是多重次调和的~，即 $-i\partial\overline{\partial}T_u^h\geq 0$。

证明。由此得到以下计算,

$$0 \geq i\partial\overline{\partial}\widetilde{T}_u^h = -\sum(\Theta_{jk}^h u_k, u_j)_h dV_{\mathbb{C}^n} = \sum(\Theta_{jk}^{h^*}\xi_j, \xi_k)_{h^*} dV_{\mathbb{C}^n},$$

其中 $\xi_j := J^{-1}u_j \in \mathcal{E}(E^*)_{x_0}$。 □

利用这个命题，我们可以在不使用对偶度量 h^* 的情况下，考察 h 的对偶 Nakano 半正性。最后，我们介绍 H¨ormander 的 L^2-存在定理。

定理 2.5。（参见 . [Dem-book，第八章，定理 6.1]）设 $(X, \widehat{\omega})$ 是一个完备 K¨ahler 流形， ω 是另一个不一定完备的 K¨ahler 度量，并且 (E, h) 是一个满足 $A_{h,\omega} := [i\Theta_{E,h}, \Lambda_\omega] \geq 0$ on $\Lambda^{n,q}T_X^* \otimes E$ 的全纯向量丛。那么对于任意 $\overline{\partial}$-闭 $f \in L^2_{n,q}(X, E, h, \omega)$，存在 $u \in L^2_{n,q-1}(X, E, h, \omega)$ 满足 $\overline{\partial}u = f$ 并且

$$\int_X |u|^2_{h,\omega} dV_\omega \leq \int_X \langle A^{-1}_{h,\omega} f, f\rangle_{h,\omega} dV_\omega,$$

其中我们假设右侧有限。

引理 2.6。（参见. [DNWZ22，引理 4.7]）设 $U \subset \mathbb{C}^n$ 为一个区域， ω_1、 ω_2 为 U上的任意两个 Hermitian 形式，且 $E = U \times \mathbb{C}^r$ 为 U上的一个带有厄米度量的平凡向量丛。设 $\Theta \in C^0(X, \Lambda^{1,1}T_X^* \otimes \mathrm{End}(E))$满足 $\Theta^* = -\Theta$。则

$$\mathrm{Im}[i\Theta, \Lambda_{\omega_1}] = \mathrm{Im}[i\Theta, \Lambda_{\omega_2}],$$

且对任意 E值的$(n, 1)$-微分形式 $u \in \mathrm{Im}[i\Theta, \Lambda_{\omega_1}]$,

$$\langle [i\Theta, \Lambda_{\omega_1}]^{-1}u, u\rangle_{\omega_1} dV_{\omega_1} = \langle [i\Theta, \Lambda_{\omega_2}]^{-1}u, u\rangle_{\omega_2} dV_{\omega_2}.$$

3. Dual Nakano positivity of direct image sheaves

3.1. 直接像层的光滑典范 Hermitian 度量。设 X 为一个维数为 $m+n$ 的 K¨ahler 流形， Y为一个维数为 m的复流形。考虑一个适当全纯浸没 $f: X \to Y$。与映射 f 相对应的相对典范丛$K_{X/Y}$ 为

$$K_{X/Y} = K_X \otimes f^* K_Y^{-1}.$$

限制在 t 的一般纤维 X_t 上，我们得到 $K_{X/Y}|_{X_t} \cong K_{X_t}$。

设 L 是 X 上的一个全纯 Hermitian 线丛，配备光滑半正 Hermitian 度量 h，即 $i\Theta_{L,h} \geq 0$。在本小节中，我们讨论 Y 上由 h 诱导的直接像层 $f_*(K_{X/Y} \otimes L)$ 的复结构，以及该层的光滑典范 Hermitian 度量 H （参见 [Ber09]）。固定一点 $t \in Y$，任意截面 $u \in H^0(X_t, K_{X_t} \otimes L|_{X_t})$ 都可以延拓，即存在一个全纯截面

$$U \in H^0(f^{-1}(\Omega), K_X \otimes L|_{f^{-1}(\Omega)}) \cong H^0(\Omega, K_Y \otimes f_*(K_{X/Y} \otimes L))$$

使得 $U|_{X_t} = u \wedge dt$ 对于 t 的某个邻域 Ω，这由 Ohsawa-TakegoshiL^2-延拓定理（参见 [OT87]）及 X的 K¨ahler 性得到。这里，我们滥用记号

表示 dt K_Y的局部生成元 $dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_m$的逆像。在 [Ber09], 中，曾声称总空间

$$F := \bigcup_{t \in Y} H^0(X_t, K_{X_t} \otimes L|_{X_t})$$

具有秩为 $r := h^0(X_t, K_{X_t} \otimes L_{X_t})$ 的全纯向量丛的自然结构，定义在 Y 上，并且与直接像 $f_*(K_{X/Y} \otimes L)$ 重合。因此， $F|_\Omega$ 的局部光滑截面的空间就是丛 $K_{X/Y} \otimes L|_{f^{-1}(\Omega)}$ 的截面，这些截面在 f 的每个纤维上的限制都是全纯的。

向量丛 $F = f_*(K_{X/Y} \otimes L)$ 具有如下自然的复结构。设 u 是 E 的一个局部截面，则当且仅当

$$\overline{\partial} u \wedge dt = 0.$$

This 等价于说， $K_X \otimes L$ 的截面 $u \wedge dt$ 是全纯的 .

注意到 u 是全纯的，即 $\overline{\partial} u \wedge dt = 0$，这意味着 $\overline{\partial} u$ 可以写成

$$\overline{\partial} u = \sum \eta^j \wedge dt_j,$$

其中 η^j 为双次数 $(n-1, 1)$ 的光滑形式。这里，已知以下 η^j 与 Kodaira-Spencer映射 ρ_t之间的关系（见 [Ber09]）： $T^1_{,Y}{}^0{}_{,t} \to H^0{}_{,1}(X_t, T^1_{,X_t}{}^0)$:

$$\eta^j = \theta_j \rfloor u,$$

在每个纤维上，类 $\rho_t(\partial/\partial t_j)$ 都可以由 Kodaira-Spencer形式θ_j 表示，即 $\{\theta_j\} \in \rho_t(\partial/\partial t_j)$。

厄米度量 h 诱导出 L的光滑典范 Hermitian 度量H，具体如下。设 u、 v是 F的两个局部截面。我们用 (u_t) 表示由 u诱导的纤维 K_{X_t} 上的一族 L-扭曲全纯 $(n, 0)$-微分形式。u_t 在 X_t 上的限制是唯一的，记为 u。由 h 诱导的典范Hermitian度量 H定义如下:

$$(u, v)_H(t) := \int_{X_t} c_n u_t \wedge \overline{v}_t e^{-\varphi} = \int_{X_t} c_n u \wedge \overline{v} e^{-\varphi},$$

其中 $h = e^{-\varphi}$ 在局部上成立，且 $c_n = i^{n^2}$。根据 Ehresmann纤维化定理以及每个纤维的紧致性，这个度量是光滑的。并且， H 的这个内积是 t 的函数，为方便起见，将此函数记作

$$(u, v)_H = f_*(c_n u \wedge \overline{v} e^{-\varphi}),$$

其中 u 和 v 是 X 上的微分形式，代表这些截面。这里， f_* 表示由以下方式定义的微分形式的直接像

$$\int_Y f_*(\alpha) \wedge \beta = \int_X \alpha \wedge f^*(\beta),$$

若 α 是 X 上的微分形式，且 β 是 Y上的微分形式。

3.2. Berndtsson 计算与中野正性。设 $(t_1,\cdots,t_m)$ 是一个局部坐标，其中心固定为点 $y\in Y$。设 u_j 是取值于 F 的 m元局部全纯截面组，满足在 y处有 $D'^H u_j=0$，即 $t=0$。用光滑形式表示 u_j 在 X 上的形式，并令

$$\hat{u}:=\sum u_j\wedge\widehat{dt_j}$$

于是我们得到

$$T_u^H=c_N f_*(\hat{u}\wedge\overline{\hat{u}}e^{-\varphi}),$$

$\widehat{\ }$其中 $N=n+m-1$，且 dt_j 是除 $dt_j\widehat{\ }$ 之外所有微分 dt_k 的楔积，使得 $dt_j\wedge dt_j=dt=dt_1\wedge\cdots\wedge dt_m$。

Usin根据以下命题，Berndtsson 在固定点处计算了 $i\partial\overline{\partial}T_u^H$。

命题 3.1.（参见. [Ber09，命题 4.2]）设 u 是定义在包含原点的开集 U 上的 F 的截面，满足 $\overline{\partial}u=0$ 属于 U，即为全纯，且在$t=0$处 $D'^H u=0$。那么 u 可以表示为一个光滑的（n，0）-形式，仍记作 u，使得

$$\overline{\partial}u=\sum\eta^k\wedge dt_k,$$

$wher$并且 η^k 在 X_0 上是原始的，即在 X_0 上满足 $\eta^k\wedge\omega=0$，此外 e

$$\partial^\varphi u\wedge\widehat{dt_j}=0,$$

对所有 j，在 $t=0$ 处。这里，$\partial^\varphi\cdot=e^\varphi\partial\,(e^{-\varphi}\cdot)$。

设 $u_j\in\mathcal{O}(F)$，使得 $D'^H u_j=0$ 在 $t=0$ 处成立，则有

$$i\partial\overline{\partial}T_u^H=-c_N f_*(\hat{u}\wedge\overline{\hat{u}}\wedge i\partial\overline{\partial}\varphi e^{-\varphi})-\Big(\int_{X_0}|\eta|^2e^{-\varphi}dV_z\Big)dV_t,$$

在 $t=0$ 处，其中 $\overline{\partial}u_j=\sum\eta_j^k\wedge dt_k$ 和 $\eta=\sum\eta_j^j$。

Fr由此计算和命题 2.1，可得以下定理 d.

定理 3.2。（参见 . [Ber09，定理 1.2]）若 L 具有光滑（半）正厄米度量，则 $F=f_*(K_{X/Y}\otimes L)$ 上的光滑典范 Hermitian 度量 H 是 Nakano（半）正的。

$\widetilde{\ }$3.3. 典范 Hermitian 度量下 $f_*(K_{X/Y}\otimes L)$ 的 T_u^H 计算。用光滑形式表示 u_j，并在 X 上令

$$\tilde{u}:=\sum\overline{u}_j\wedge\widehat{dt_j}$$

于是我们得到等式

$$\widetilde{T}_u^H=(-1)^n c_N f_*(\tilde{u}\wedge\overline{\tilde{u}}e^{-\varphi}),$$

其中使用了 $ic_N=(-1)^N(-1)^{nm}c_nc_m$ 和 $ic_m(-1)^m\widehat{dt_j}\wedge\widehat{d\overline{t}_k}=\widehat{dt_j\wedge d\overline{t}_k}$。

在本小节中，我们证明以下命题。

命题 3.3. 设 $u_j \in \mathcal{O}(F)$ 满足 $D'^H u_j = 0$ at $t = 0$，则有

$$i\partial\overline{\partial}\widetilde{T}_u^H = -c_N f_*(\hat{v} \wedge \overline{\hat{v}} \wedge i\partial\overline{\partial}\varphi e^{-\varphi}) + c_n\Big(\int_{X_0} \sum \eta_k^j \wedge \overline{\eta}_j^k e^{-\varphi}\Big) dV_t$$

在 $t = 0$ 处，其中 $u_j = U_j dz$、$\hat{v} = \sum \overline{U}_j \wedge dz \wedge \widehat{dt_j}$和 $\overline{\partial} u_j = \sum \eta_j^k \wedge dt_k$。这里，如果 φ 是多重次调和的，则 $c_N f_*(\hat{v} \wedge \overline{\hat{v}} \wedge i\partial\overline{\partial}\varphi e^{-\varphi}) \geq 0$。

特别地，如果 η_k^j 在 X_0 上是原始的，那么我们可以写成 $\eta_k^j = \sum \eta_{jkl} \widehat{dz_l} \wedge d\overline{z}_l$，并得到

$$c_n\Big(\int_{X_0} \sum \eta_k^j \wedge \overline{\eta}_j^k e^{-\varphi}\Big) dV_t = -\Big(\int_{X_0} \sum \eta_{jkl}\overline{\eta}_{kjl} e^{-\varphi} dV_z\Big) dV_t.$$

证明。由 $\partial^\varphi \cdot = e^\varphi \partial(e^{-\varphi} \cdot)$，我们得到

$$(-1)^n \partial \widetilde{T}_u^H = c_N f_*(\partial\tilde{u} \wedge \overline{\tilde{u}} e^{-\varphi}) + (-1)^N c_N f_*(\tilde{u} \wedge \partial^\varphi \overline{\tilde{u}} e^{-\varphi}).$$

由等式

$$\partial\tilde{u} = \sum \partial\overline{u}_j \wedge \widehat{dt_j} = \sum \overline{\overline{\partial} u_j} \wedge \widehat{dt_j} = \sum \overline{\eta}_j^l \wedge d\overline{t}_l \wedge \widehat{dt_j},$$

微分形式

$$\begin{aligned}
\partial\tilde{u} \wedge \overline{\tilde{u}} &= \sum \overline{\eta}_j^l \wedge d\overline{t}_l \wedge \widehat{dt_j} \wedge u_k \wedge \widehat{d\overline{t}_k} \\
&= (-1)^N \sum \overline{\eta}_j^l \wedge \widehat{dt_j} \wedge u_k \wedge d\overline{t}_l \wedge \widehat{d\overline{t}_k} \\
&= (-1)^N \sum \overline{\eta}_j^k \wedge \widehat{dt_j} \wedge u_k \wedge d\overline{t}
\end{aligned}$$

包含一个因子 $d\overline{t}$。另一方面，一个 $(n+m, n+m-1)$-微分形式的推前是双次数为 $(m, m-1)$ 的微分形式。于是我们得到

$$f_*(\partial\tilde{u} \wedge \overline{\tilde{u}} e^{-\varphi}) = 0.$$

因此，我们有

$$(-1)^n \overline{\partial}\partial \widetilde{T}_u^H = (-1)^N c_N f_*(\overline{\partial}^\varphi \tilde{u} \wedge \partial^\varphi \overline{\tilde{u}} e^{-\varphi}) + c_N f_*(\tilde{u} \wedge \overline{\partial}\partial^\varphi \overline{\tilde{u}} e^{-\varphi}).$$

由方程 $\overline{\partial}\partial^\varphi + \partial^\varphi\overline{\partial} = \partial\overline{\partial}\varphi$，我们得到

$$c_N f_*(\tilde{u} \wedge \overline{\partial}\partial^\varphi \overline{\tilde{u}} e^{-\varphi}) = c_N f_*(\tilde{u} \wedge \overline{\tilde{u}} \wedge \partial\overline{\partial}\varphi e^{-\varphi}) - c_N f_*(\tilde{u} \wedge \partial^\varphi \overline{\partial\tilde{u}} e^{-\varphi}),$$

并由消失 $f_*(\tilde{u} \wedge \overline{\partial\tilde{u}} e^{-\varphi}) = 0$，我们得到

$$0 = \partial f_*(\tilde{u} \wedge \overline{\partial\tilde{u}} e^{-\varphi}) = f_*(\partial\tilde{u} \wedge \overline{\partial\tilde{u}} e^{-\varphi}) + (-1)^N f_*(\tilde{u} \wedge \partial^\varphi \overline{\partial\tilde{u}} e^{-\varphi}).$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
(-1)^n \overline{\partial}\partial \widetilde{T}_u^H = {} & (-1)^N c_N f_*(\overline{\partial}^\varphi \tilde{u} \wedge \partial^\varphi \overline{\tilde{u}} e^{-\varphi}) \\
& + c_N f_*(\tilde{u} \wedge \overline{\tilde{u}} \wedge \partial\overline{\partial}\varphi e^{-\varphi}) + (-1)^N c_N f_*(\partial\tilde{u} \wedge \overline{\partial\tilde{u}} e^{-\varphi}).
\end{aligned}$$

注意，采用命题 3.1 给出的截面 u_j 的代表元后，我们有 $\overline{\partial}^\varphi \tilde{u} \wedge \partial^\varphi \overline{\tilde{u}} = 0$在 $t = 0$ 处。事实上，$\overline{\partial}^\varphi \tilde{u} = \sum \overline{\partial^\varphi u_j} \wedge \widehat{dt_j}$并且

$$\overline{\partial}^\varphi \tilde{u} \wedge \partial^\varphi \overline{\tilde{u}} = \sum \overline{\partial^\varphi u_j} \wedge \widehat{dt_j} \wedge \partial^\varphi u_k \wedge \widehat{d\overline{t}_k} = 0$$

$\widehat{\ }$在 $t = 0$处，其中 $\partial^\varphi u_j \wedge dt_k = 0$ 在 $t = 0$ 处对所有 k均成立。

引理 3.4。我们有

$$(-1)^N c_N f_*(\partial\tilde{u}\wedge\overline{\partial\tilde{u}}e^{-\varphi})=ic_n(-1)^n\Big(\int_{X_0}\sum\eta_k^j\wedge\overline{\eta}_j^k e^{-\varphi}\Big)dV_t$$

在 $t=0$ 处。特别地，如果 η_k^j 在 X_0 上是原始的，即在 X_0 上有 $\eta_k^j\wedge\omega=0$，那么我们可以写成 $\eta_k^j=\sum\eta_{jkl}\widehat{dz_l}\wedge d\overline{z}_l$，且该积分值为

$$-i(-1)^n\Big(\int_{X_0}\sum\eta_{jkl}\overline{\eta}_{kjl}e^{-\varphi}dV_z\Big)dV_t.$$

证明。在这里 $\partial\tilde{u}=\sum\overline{\eta}_j^l\wedge d\overline{t}_l\wedge\widehat{dt_j}$，于是

$$\partial\tilde{u}\wedge\overline{\partial\tilde{u}}=-(-1)^{nm}(-1)^{n^2}\sum\eta_k^j\wedge\overline{\eta}_j^k\wedge dt\wedge d\overline{t}.$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}(-1)^N c_N\partial\tilde{u}\wedge\overline{\partial\tilde{u}}&=-(-1)^N c_N(-1)^{nm}(-1)^{n^2}\sum\eta_k^j\wedge\overline{\eta}_j^k\wedge dt\wedge d\overline{t}\\&=ic_nc_m(-1)^n\sum\eta_k^j\wedge\overline{\eta}_j^k\wedge dt\wedge d\overline{t}\\&=ic_n(-1)^n\sum\eta_k^j\wedge\overline{\eta}_j^k\wedge dV_t,\end{aligned}$$

其中 $ic_N=(-1)^N(-1)^{nm}c_nc_m$。

如果 η_k^j 是原始的，我们可以写成 $\eta_k^j=\sum\eta_{jkl}\widehat{dz_l}\wedge d\overline{z}_l$。于是我们得到

$$\begin{aligned}\eta_k^j\wedge\overline{\eta}_j^k&=\sum\eta_{jkl}\widehat{dz_l}\wedge d\overline{z}_l\wedge\overline{\eta}_{kj\mu}\widehat{d\overline{z}_\mu}\wedge dz_\mu\\&=\sum\eta_{jkl}\overline{\eta}_{kjl}\widehat{dz_l}\wedge d\overline{z}_l\wedge\widehat{d\overline{z}_l}\wedge dz_l\\&=(-1)^{2n-1}\sum\eta_{jkl}\overline{\eta}_{kjl}dz_l\wedge\widehat{dz_l}\wedge d\overline{z}_l\wedge\widehat{d\overline{z}_l}\\&=-\sum\eta_{jkl}\overline{\eta}_{kjl}dz\wedge d\overline{z},\end{aligned}$$

其中 $c_ndz\wedge d\overline{z}=dV_z$。 □

因此，我们有

$$i\partial\overline{\partial}\widetilde{T}_u^H=-(-1)^n c_N f_*(\tilde{u}\wedge\overline{\tilde{u}}\wedge i\partial\overline{\partial}\varphi e^{-\varphi})+c_n\Big(\int_{X_0}\sum\eta_k^j\wedge\overline{\eta}_j^k e^{-\varphi}\Big)dV_t$$

在 $t=0$。令 $u_j=U_jdz$ 和 $\varphi_{jk}:=\partial_{t_j}\overline{\partial}_{t_k}\varphi$。此处若 φ 是多重次调和函数，则 $\widehat{c_N u}\wedge\widehat{\overline{u}}\wedge i\partial\overline{\partial}\varphi=\sum\varphi_{jk}U_j\overline{U}_k dV_z\wedge dV_t\geq 0$。根据 $\tilde{u}=\sum\overline{u}_j\wedge dt_j=\sum U_j d\overline{z}\wedge dt_j$ 和 $d\overline{z}\wedge dz=(-1)^{n^2}dz\wedge d\overline{z}=(-1)^n dz\wedge d\overline{z}$，我们有

$$c_N\tilde{u}\wedge\overline{\tilde{u}}\wedge i\partial\overline{\partial}\varphi=(-1)^n\sum\varphi_{jk}\overline{U}_jU_kdV_z\wedge dV_t=(-1)^n c_N\hat{v}\wedge\overline{\hat{v}}\wedge i\partial\overline{\partial}\varphi,$$

$\widehat{\ }$其中 $\hat{v} = \sum \overline{U}_j \wedge dz \wedge dt_j$ 且

$$\begin{aligned}(-1)^n c_N f_*(\tilde{u} \wedge \overline{\tilde{u}} \wedge i\partial\overline{\partial}\varphi e^{-\varphi}) &= c_N f_*(\hat{v} \wedge \overline{\hat{v}} \wedge i\partial\overline{\partial}\varphi e^{-\varphi}) \\ &= f_*(\sum \varphi_{jk}\overline{U}_j U_k e^{-\varphi} dV_z \wedge dV_t) \\ &= \Big(\int_{X_0} \sum \varphi_{jk}\overline{U}_j U_k e^{-\varphi} dV_z\Big) dV_t \\ &\geq 0,\end{aligned}$$

如果 φ 是多重次调和的。 □

3.4. 定理 1.1 的证明与射影化丛。设 V 是紧复流形 Y 上的有限秩全纯向量丛。设 π : $\mathbb{P}(V) \to Y$ 是一个射影化丛，其在 $t \in Y$ 处的纤维是 V_t^* 中所有直线构成的射影空间，即 $\mathbb{P}(V_t^*)$。对于任意一点 $t \in Y$，我们得到 $\pi^{-1}(t) = \mathbb{P}(V_t^*) \cong \mathbb{P}^{r-1}$，于是 $\mathbb{P}(V)$ 是一个全纯局部平凡纤维丛。这个射影化丛带有定义在 $\mathbb{P}(V)$ 上的典范线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$，其在任意纤维 $\mathbb{P}(V_t^*)$ 上的限制都与 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}(1)$ 相同。

我们将把命题 3.3 应用于线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(k) \to \mathbb{P}(V)$，其中 $k \in \mathbb{Z}$。设 $E(k)$ 是一个向量丛，其在点 $t \in Y$ 上的纤维是 $K_{\mathbb{P}(V_t^*)} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(k)$ 的全局全纯截面空间，即

$$\begin{aligned}E(k) &:= \bigcup_{t\in Y} H^0(\mathbb{P}(V_t^*), K_{\mathbb{P}(V_t^*)} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(k)|_{\mathbb{P}(V_t^*)}) \\ &= \pi_*(K_{\mathbb{P}(V)/Y} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(k)),\end{aligned}$$

其中 $E(k)_t = H^0(\mathbb{P}(V_t^*) K_{\mathbb{P}(V_t^*)} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(k)|_{\mathbb{P}(V_t^*)}) \cong H^0(\mathbb{P}^{r-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}(k-r))$。若 $k < r$，则每个纤维 $E(k)_t$ 都是零。Berndtsson 断言了以下事实

$$E(r+m) = S^m(V) \otimes \det V,$$

其中 $S^m(V)$ 是 m 的 V 次对称幂，并利用定理 3.2 证明了以下定理。

定理 3.5。（参见 . [Ber09，定理 1.3]）设 V 是复流形上的一个（有限秩）全纯向量丛。若 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ 带有光滑（半）正度量，则 $V \otimes \det V$ 带有光滑典范 Hermitian 度量，且为 Nakano （半）正。

这里，如果典范线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ 是充足的，则称向量丛 V 在 Hartshorne 的意义下是充足的（参见 [Har66]）。将 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(r+1)$ 替换为 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(r+m)$，我们还可得出，对于任意 $m \in \mathbb{N}$，$S^m(V) \otimes \det V$ 都是 Nakano（半）正的。

众所周知，Griffiths 猜想认为，丰向量丛是 Griffiths 正的，即具有光滑的 Griffiths 正厄米度量。根据 Demailly-Skoda定理（见 [DS80]），若 V 是 Griffiths（半）正的，则 $V \otimes \det V$ 是（对偶）中野（半）正的，因此该定理可视为 Griffiths 猜想的间接证据。此后，有研究表明 $S^m(V) \otimes \det V$ 具有 Nakano 正度量和对偶 Nakano 正度量（见 [LSY13，推论 4.12]）。当 Y 是紧曲线时，Griffiths 猜想已得到证明（参见 [Ume73]）；最近又有研究证明，在满足某个

关于该 L^2 度量的条件下，此猜想成立（见 [Nau21]）。由于在 [Nau21], 中，Kodaira-Spencer形式在某些条件下消失，我们得到以下关于典范Hermitian度量的对偶中野正性定理；该度量不同于 [LSY13] 中的度量。

定理 3.6. 设 V 是秩为 r 的充足全纯向量丛，定义在复流形 Y 上。若典范同构

$$K^{-1}_{\mathbb{P}(V)/Y} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(r) \otimes \pi^* \det V^*$$

在 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}$(1) 上的正度量以及 det$V$ 上的某个厄米度量下成为等距同构，那么对于任意 $m \in \mathbb{N}$，以及 h 上光滑的（半）正厄米度量 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(r+m)$，由 h 在 $S^m(V)$ 上诱导的光滑典范 Hermitian 度量 Hdet V 是对偶中野（半）正的。

我们将在下文证明这一点。设 $(t_1, \ldots, t_m)$ 和 $(z_1, \ldots, z_n)$ 分别是 Y 及其纤维上的局部坐标。由于 V 充足，存在 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}$(1) 上的光滑正厄米度量$h_{O(1)}$。对于正曲率度量的曲率，我们在局部写作

$$\begin{aligned}\omega_{\mathbb{P}(V)} &:= -i\partial\overline{\partial} \log h_{O(1)} \\ &= i\Big(g_{\alpha\overline{\beta}} dz_\alpha \wedge d\overline{z}_\beta + h^{O(1)}_{k\overline{\beta}} dt_k \wedge d\overline{z}_\beta + h^{O(1)}_{\alpha\overline{l}} dz_\alpha \wedge d\overline{z}_l + h^{O(1)}_{k\overline{l}} dz_k \wedge d\overline{z}_l\Big).\end{aligned}$$

因此，每个纤维上的 K¨ahler 微分形式为 $\omega_t := i\sum g_{\alpha\overline{\beta}} dz_\alpha \wedge d\overline{z}_\beta$，而 $K^{-1}_{\mathbb{P}\,V()/Y}$ 上的诱导度量可写为 det $(g_{\alpha\overline{\beta}})$。这里，这个正度量 $h_{O(1)}$ 诱导了上述典范同构。

根据 [Sch93], ，我们将底空间 Y 上切向量 $\partial/\partial t_j$ 的水平提升记为 v_j。它由下式给出：

$$v_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + \sum a^\alpha_j \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \quad \text{and} \quad a^\alpha_j = -\sum g^{\overline{\beta}\alpha} h^{O(1)}_{j\overline{\beta}}.$$

对于纤维化 $\pi\colon \mathbb{P}(V) \to Y$，我们通过下式得到 Kodaira-Springer形式：

$$\theta_j := \overline{\partial}(v_j)|_{X_t},$$

其中 $\theta_j \in \rho_t(\partial/\partial t_j)$。

命题 3.7.（参见. [Nau21，命题 1]）在定理 3.6 的假设下，Kodaira-Spencer形式 θ_j 是调和的，因此为零。

由于它是一个射影化丛，我们得到 $\mathscr{H}^{0,\,1}(\mathbb{P}(V_t^*)\ T^1,\ \mathbb{P}^{\ 0}{}_{(V_t^*)}) \cong H^{0,\,1}(\mathbb{P}(V_t^*)\ T^1,\ \mathbb{P}^{\ 0}{}_{(V_t^*)}) \cong H^{0,\,1}(\mathbb{P}^{r-1}, T^1,\ {}^{0}_{\mathbb{P}^{r-1}}) = 0$。于是 Kodaira-Spencer映射的值为零。这里 $\{\theta_j\} = \rho_t(\partial/\partial t_j) = 0$。根据这些微分形式，$\theta_j$ 是调和的，θ_j 作为微分形式为零。

定理 3.6 的证明。由 Kodaira-Spencer形式 θ_j 为零以及 $E(r+m)$ 中复结构的定义，对于任意局部全纯截面 $u \in \mathcal{O}(E(r+m))_t$，其限制

$$\overline{\partial} u = \sum \eta^j \wedge dt_j$$

在每个纤维上均为零。事实上，每个纤维上的光滑 $(n-1, 1)$-微分形式 η^j 等于 $\theta_j \rfloor u$。特别地，我们在每个纤维上得到 $\eta^j = \theta_j \rfloor u = 0$。

由命题 3.3，对于任意局部全纯截面 $u_j \in \mathcal{O}(E(r+m))$，若在 $t=0$ 处有 $D'^H u_j = 0$，则有

$$i\partial\overline{\partial}\widetilde{T}_u^H = -c_N\pi_*(\hat{v}\wedge\overline{\hat{v}}\wedge i\partial\overline{\partial}\varphi e^{-\varphi})$$

$\widehat{}$在 $t=0$处，其中局部有 $u_j = U_j dz$、$\hat{}v = \sum \overline{U}_j \wedge dz \wedge dt_j$和 $\varphi = -\log h$。这里，如果 φ 是（严格）多重次调和的，则 $c_N\pi_*(\hat{}v\wedge\hat{}\overline{v}\wedge i\partial\overline{\partial}\varphi e^{-\varphi}) \geq 0\,(resp.>0)$。

因此，该定理可由命题 2.4 得出。 □

与此证明类似，由命题 3.3 可得定理 1.1，因为如果 Kodaira-Spencer形式 θ_j 可以取为零，那么 η^j 在 $\theta_j \in \rho_t(\partial/\partial t_j)$处消失。由此得到以下推论。

推论 3.8。设 X 是紧致 K¨ahler 流形，Y 是复流形，L是 Z 上的全纯向量丛：$= X\times Y$配备光滑半正Hermitian度量 h。设 $\pi: Z = X\times Y \to Y$ 是自然投影映射。那么，$\pi_*(K_{Z/Y}\otimes L)$上的光滑典范 Hermitian 度量 H 具有对偶 Nakano 半正性。

4. Singular Hermitian metric and Positivity

4.1. 向量丛上的奇异厄米度量与正性。对于任意全纯向量丛 E，我们引入 h上的奇异厄米度量 E 的定义，以及类似于乘子理想层的 L^2-子层 $\mathscr{E}(h)\ \mathcal{O}(E)$。

定义 4.1。（参见 . [BP08，第 3], [节；PT18，定义 2.2.1]）如果 h 是 E 上的奇异厄米度量，则称 h 是从基流形 X 到纤维上的半正定 Hermitian 型空间的可测映射，并满足 $0 < \det h < +\infty$ 几乎处处成立。

定义 4.2。（参见 . [deC98，定义 2.3.1]）设 h 是 E上的奇异厄米度量。我们将 L^2-子层 $\mathscr{E}(h)$ 定义为 E 的局部全纯截面的芽所组成的层：

$$\mathscr{E}(h)_x := \{s_x \in \mathcal{O}(E)_x \mid |s_x|_h^2 \text{ is locally integrable around } x\}.$$

如果 E 是全纯线丛，则我们得到 $\mathscr{E}(h) = \mathcal{O}(E)\otimes\mathscr{I}(h)$。此外，我们定义 Griffiths 正性和负性，以及对偶中野正性和负性。

定义 4.3.（参见. [BP08，定义 3.1]，[PT18，定义 2.2.2]）我们称奇异厄米度量 h 是

(1) Griffiths 半负，如果对于 E的任意局部全纯截面 $u \in \mathcal{O}(E)$，$|u|_h$ 都是多重次调和的。(2) Griffiths 半正，如果 E^* 上的对偶度量 h^* 是 Griffiths 半负的。

定义 4.4.（参见. [Rau15，第 1]节）我们称E上的奇异厄米度量 h是中野半负的，如果对于任意n元局部全纯截面组 $u = (u_1,\cdots,u_n)$，$(n-1,n-1)$-微分形式 T_u^h都是多重次调和的。

定义 4.5。（参见. [Wat22a，定义 4.5]）若 E 上的奇异厄米度量h 的对偶度量 h^* 在 E^* 上是 Nakano 负的，则称该度量对偶中野半正。

对于奇异厄米度量，我们并不总能定义带测度系数的曲率流（见 [Rau15]）。不过，上述定义无需借助曲率流即可给出。一般而言，中野负向量丛的对偶并非中野正，因此我们无法像 Griffiths 的情形那样定义 Nakano 半正性；但对偶 Nakano 半正性的定义是自然的。根据以下定义，利用 L^2-估计刻画 Nakano 半正性，这已由 Deng-Ning-Wang-Zhou 的工作所确立（见 [DNWZ22]）。

定义 4.6。（参见. [DNWZ22，定义 1.1]）设 X 是一个维数为 n 的复流形，U 是 X 的一个开子集，其上具有 K¨ahler 度量 ω，并且该度量允许存在一个正 Hermitian 全纯线丛。设 (E,h) 是 X 上的一个（奇异）厄米向量丛。我们称 (E,h) 在 U 上满足最优 L^2-估计，如果对于 U 上的任意正 Hermitian 全纯线丛 (A,h_A)，以及任意 $f\in\mathscr{D}^{n,1}(U,E\otimes A)$（在 U 上满足 $\overline{\partial}f=0$），存在 $L^{2}_{n,0}(U,E\otimes A)$，使其在 U 上满足 $\overline{\partial}u=f$，并且

$$\int_U |u|^2_{h\otimes h_A,\omega}dV_\omega \le \int_U \langle B^{-1}_{A,h_A}f,f\rangle_{h\otimes h_A,\omega}dV_\omega,$$

在右侧有限的前提下，其中 $B_{A,h_A}=[i\Theta_{A,h_A}\otimes \mathrm{id}_E,\Lambda_\omega]$。

这里，$\mathscr{D}$ 表示具有紧支集的 C^∞ 截面空间。通过修改最优 L^2-估计条件，I na [Ina22]引入了一种 Nakano 半正性的定义，并据此建立了消失定理。

定义 4.7。（参见. [Ina22，定义 1.1]）假设 h 是 Griffiths 半正奇异 Hermitian 度量。如果对于任意 Stein 坐标 $S\subseteq X$（使得 $E|_S$ 平凡）、任意 S上的 K¨ähler 度量 ω_S、任意 S上的光滑严格多重次调函数 ψ、任意正整数 $q\in\{1,\cdots,n\}$以及任意 $\overline{\partial}$-闭 $f\in L^{2}_{n,q}(S,E,he^{-\psi},\omega_S)$，都存在$u\in L^{2}_{n,q-1}(S,E,he^{-\psi},\omega_S)$满足$\overline{\partial}u=f$ 以及

$$\int_S |u|^2_{h,\omega_S}e^{-\psi}dV_{\omega_S} \le \int_S \langle B^{-1}_{\psi,\omega_S}f,f\rangle_{h,\omega_S}e^{-\psi}dV_{\omega_S},$$

其中 $B_{\psi\,\omega_S}=[i\partial\overline{\partial}\psi\otimes \mathrm{id}_E,\Lambda_{\omega_S}]$。这里我们假设右侧有限 .

众所周知，乘子理想层在 [Nad89] 中是凝聚的。此后，Hosono 和 Inayama 证明，若 h 在 [HI20] 和 [Ina22] 的定义 4.7（或 4.6）中具有奇异意义下的 Nakano半正性，则 L^2-子层 $\mathscr{E}(h)$ 是凝聚的。

4.2. 无挠层上的奇异厄米度量与正性。设 X 为复流形，$\mathscr{F}$ 为 X 上的无挠相干层。设 $X(\mathscr{F})\subseteq X$ 表示 $\mathscr{F}$ 局部自由的极大开子集，则 $Z_{\mathscr{F}}:=X\setminus X(\mathscr{F})$ 是余维为 ≥ 2 的闭解析子集。若 $\mathscr{F}\neq 0$，则 $\mathscr{F}$ 在开子集 $X(\mathscr{F})$ 上的限制是秩为某个 $r\ge 1$ 的全纯向量丛 F。

定义 4.8。（参见. [HPS18，定义 19.1]）$\mathscr{F}$上的奇异厄米度量是全纯向量丛 F上的奇异厄米度量 h。若 h 在 X（$\mathscr{F}$）上具有 Griffiths 半正性，我们称该度量为 Griffiths 半正。

利用自然嵌入 $j\colon\ X(\mathscr{F}) = X \setminus Z_{\mathscr{F}} \hookrightarrow X$，我们如下定义 L^2-子层 $\mathscr{E}(h)$ 的自然延拓。这里，$j_*\mathcal{O}_{X\setminus Z_{\mathscr{F}}} \cong \mathcal{O}_X$ 已知。

定义 4.9. 设 h 是 $\mathscr{F}$ 上的奇异厄米度量，且其为 $X(\mathscr{F})$ 上 F 的奇异厄米度量。我们定义相对于 X 上的 h 的扩张自然 L^2-子层 $\mathscr{E}_X(h)$，如下：$\mathscr{E}_X(h) := j_*\mathscr{E}(h)$。

我们引入最小延拓性质的定义，并定义关于无挠凝聚层上的奇异厄米度量的 Nakano（半）正性。

定义 4.10.（参见 . [HPS18，定义 20.1]）我们称 $\mathscr{F}$ 上的奇异厄米度量h 具有最小延拓性质，若存在一个稠密闭解析子集 $Z \subseteq X$，满足以下两个性质：

(1) $\mathscr{F}$ 在 $X \setminus Z$ 上局部自由，或等价地，$X \setminus Z \subseteq X(\mathscr{F})$；(2) 对每个嵌入 $\iota\colon B \hookrightarrow X$，满足 $x = \iota(0) \in X \setminus Z$，以及每个满足$|v|_h(x) = 1$的 $v \in F_x$，都存在一个全纯截面 $s \in H^0(B, \iota^*\mathscr{F})$，使得

$$s(0) = v \quad \text{and} \quad \frac{1}{\mathrm{Vol}(B)} \int_B |s|_h^2 dV_B \leq 1,$$

其中 (F, h) 表示在开子集 $X(\mathscr{F})$ 上的限制。

定义 4.11. 若存在一个无处稠密的闭解析子集 $Z \subseteq X$，使得满足以下两个性质，则称奇异厄米度量 h on $\mathscr{F}$ 是局部 L^2-型 Nakano半正：

(1) $\mathscr{F}$ 在 $X \setminus Z$ 上局部自由，或等价地，$X \setminus Z \subseteq X(\mathscr{F})$；(2) 对任意 $t \in X \setminus Z$，存在 t 的一个开邻域 $U \subset X \setminus Z$，使得奇异厄米度量 h on E 在 U 上满足最优 L^2- 估计。这里 (F, h) 表示在开子集 $X(\mathscr{F})$ 上的限制。

特别地，如果我们可以取 $Z = X \setminus X(\mathscr{F})$，则称 h 在 $X(\mathscr{F})$ 上是全局局部 L^2-型 Nakano半正的。

定义 4.12. 若存在一个无处稠密的闭解析子集 $Z \subseteq X$，使得满足以下两个性质，则称奇异厄米度量 h on $\mathscr{F}$ 是局部 L^2-型 Nakano 正：

(1) $\mathscr{F}$在 $X \setminus Z$上局部自由，或者等价地，$X \setminus Z \subseteq X(\mathscr{F})$；(2) 对任意 $t \in X \setminus Z$，存在 t的一个开邻域 $U \subset X \setminus Z$，以及定义在 U 上的光滑严格多重次调函数 ψ，使得 E 上的奇异厄米度量he^{ψ} 在 U上具有最优 L^2估计。这里，(F, h)表示在开子集 $X(\mathscr{F})$上的限制。

特别地，如果我们可以取 $Z = X \setminus X(\mathscr{F})$，那么就称 h 在 $X(\mathscr{F})$上具有完全局部 L^2型 Nakano 正性。

定义 4.13. 若存在一个无处稠密的闭解析子集 $Z \subseteq X$，满足以下两个性质，则称 $\mathscr{F}$ 上的奇异厄米度量 h（全局）Nakano半正：

(1) $\mathscr{F}$ 在 $X \setminus Z$上局部自由，或等价地， $X \setminus Z \subseteq X(\mathscr{F})$;
(2) h 在 $X \setminus Z$上（全局）Nakano半正。

5. Nakano positivity of canonical singular Hermitian metric

5.1. 直接像层上的典范奇异厄米度量。设 $f : X \to Y$ 是两个连通复流形之间的射影满射全纯映射，其中 $\dim X = n + m$ 且 $\dim Y = m$，但可能存在奇异纤维。设 $L \to X$ 为一个配备伪有效奇异厄米度量 h的全纯线丛。在本小节中，我们以与[HPS18]中相同的方式定义直接像层 $\mathcal{E} := f_*(\omega_{X/Y} \otimes L \otimes \mathscr{I}(h))$上的典范奇异厄米度量。

在一切性质良好的扎里斯基开子集 $Y \setminus Z$ 上构造 $\mathcal{E}$ 的厄米度量，然后将其延拓到坏轨迹 Z上。首先，我们选取一个满足以下三个性质的稠密闭解析子集 $Z \subseteq Y$:

(1) 态射 f 在 $Y \setminus Z$ 上是下沉；(2) $\mathcal{E}$ 和商层 $f_*(\omega_{X/Y} \otimes L)/\mathcal{E}$ 在 $Y \setminus Z$ 上局部自由；(3) 在 $Y \setminus Z$ 上，局部自由层 $f_*(\omega_{X/Y} \otimes L)$ 具有基变换性质。

根据基变换定理，只要凝聚层 $R^i f_*(\omega_{X/Y} \otimes L)$ 在 $Y \setminus Z$ 上局部自由，第三个条件就成立。将 $\mathcal{E}$ 限制到开子集 $Y \setminus Z$ 上，得到秩为 $r \geq 1$ 的全纯向量丛 E 。第二个和第三个条件共同保证

$$E_t := \mathcal{E}|_t \subseteq f_*(\omega_{X/Y} \otimes L)|_t = H^0(X_t, \omega_{X_t} \otimes L|_{X_t})$$

只要 $t \in Y \setminus Z$，就有此结论。

引理 5.1。（参见 . [HPS18，引理 22.1]）对于任意 $t \in Y \setminus Z$，我们有如下包含关系

$$H^0(X_t, \omega_{X_t} \otimes L|_{X_t} \otimes \mathscr{I}(h|_{X_t})) \subseteq E_t \subseteq H^0(X_t, \omega_{X_t} \otimes L|_{X_t}).$$

这里，我们可以立即看出这两个子空间

$$H^0(X_t, \omega_{X_t} \otimes L|_{X_t} \otimes \mathscr{I}(h|_{X_t})) \subseteq E_t$$

几乎处处相等于 $t \in Y \setminus Z$。但是，除非 $\mathcal{E} = 0$，这两个子空间并不相同，例如在 $h|_{X_t}$ 恒等于 $+\infty$的点处。

在每个满足 $t \in Y \setminus Z$的 E_t 上，我们可以如下定义奇异厄米度量 H 。对于任意元素 $\alpha \in E_t \subseteq H^0(X_t, \omega_{X_t} \otimes L|_{X_t})$，我们可以在紧复流形 X_t 上积分，并定义 α 关于 H 的内积:

$$|\alpha|_H^2(t) := \int_{X_t} |\alpha|_h^2 \in [0, +\infty].$$

显然， $|\alpha|_H(t) < +\infty$ 当且仅当 $\alpha \in H^0(X_t, \omega_{X_t} \otimes L|_{X_t} \otimes \mathscr{I}(h|_{X_t}))$。根据 Ehresmann纤维化定理和富比尼定理，对于 E 的任意局部全纯截面 s ，函数 $t \mapsto |s|_H(t)$ 都是可测的。

根据 [HPS18], 中的讨论， $Y \setminus Z$ 上的奇异厄米度量 H 在整个开集 $Y(\mathcal{E})$ 上都有定义。于是我们称 E 上、$Y(\mathcal{E})$ 上的这个延拓度量 H 为 $\mathcal{E}$ 的典范奇异厄米度量。最后，我们作如下定义。

定义 第 5.2 节。我们定义集合 Σ_H on Y，其与 H 的无界性有关 y

$$\Sigma_H := \{t \in Y \mid \mathcal{E}_t \subsetneq H^0(X_t, K_{X_t} \otimes L|_{X_t})\}.$$

这里，对于任意 $t \in Y \setminus Z$，如果 $\mathscr{I}(h|_{X_t}) = \mathcal{O}_{X_t}$，那么 $t \notin \Sigma_H$，并且 $H(t)$ 被 $\int_{X_t} e^{-\varphi} < +\infty$ 所界，其中 $h = e^{-\varphi}$ 在局部成立。对于几乎处处的 $t \notin \Sigma_H$，我们得到 $H^0(X_t, K_{X_t} \otimes L|_{X_t} \otimes \mathscr{I}(h|_{X_t})) = \mathcal{E}_t = H^0(X_t, K_{X_t} \otimes L|_{X_t})$。设 $\Sigma_h := \{t \in Y \mid \int_{X_t} e^{-\varphi} = +\infty\}$ 是一个与 h 的无界性有关的集合，则有 $\Sigma_H \setminus Z \subseteq \Sigma_h \setminus Z$。

5.2. H 的整体 Nakano 半正性方法。我们考虑 X 为射影的情形。由于 X 的射影性，存在两个超曲面 Z_1 和 Z_2，使得 $X \setminus Z_1$ 是 Stein，且 $S := X \setminus (Z_1 \cup Z_2)$ 也是 Stein，并且 $L|_S$ 是平凡的。令 $\varphi := -\log h|_S$，则 φ 是定义在 S 上的多重次调和函数，并且 $h = e^{-\varphi}$ 在 S 上成立。根据 [FN80，定理 5.5],，存在一个光滑多重次调和函数序列 $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$，定义在 S 上，并逐点几乎处处递减至 φ。这里，存在一个定义在 S 上的光滑严格多重次调和穷尽函数 ψ，使得 $\sup_S \psi = +\infty$。令 $S_\nu := \{z \in S \mid \psi(z) < 1/\nu\}$ 为一个 Stein 次水平集。

设 $S_t^\nu := X_t \cap S_\nu$ 为 Stein 子集。对于任意元素 u、$v \in E_t$，我们定义 $Y \setminus Z$ 上 E 的 Hermitian 度量 H_ν 如下:

$$(u, v)_{H_\nu}(t) := \int_{\overline{S_t^\nu}} u \wedge \overline{v} e^{-\varphi_\nu} = \int_{S_t^\nu} u \wedge \overline{v} e^{-\varphi_\nu}.$$

那么 H_ν 是 由 $\overline{S_t^\nu}$ 的闭性、Ehresmann 定理和 Fubini 定理可知是光滑的 m.

Que问题 5.3. 这个光滑Hermitian度量 H_ν 是 Nakano 半正的吗?

注 5.4. 如果问题的答案是肯定的，那么 H （全局）具有 Nakano 半正性。事实上，$(H_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ 是一列光滑的 Nakano 半正 Hermitian 度量，且逐点几乎处处递增至 H，我们可以使用下面的命题。

命题 5.5.（参见 . [Ina22，命题 6.1]）设 h 是全纯向量丛上的奇异厄米度量。若存在一列光滑 Nakano 半正度量 $(h_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$，逐点几乎处处递增至 h，则 h （全局）是 Nakano 半正的。

与上面相同，将 H_ν 上的光滑Hermitian度量 E 扩张为 Y 上的 $F = f_*(\omega_{X/Y} \otimes L)$ 上的光滑~Hermitian度量 H_ν。固定 ν，令

$$G_t^\nu := \{f \in H^0(S_t^\nu, K_{S_t^\nu}) \mid \int_{S_t^\nu} |f|^2 e^{-\varphi_\nu} < +\infty\}$$

纤维上的 $K_{S_t^\nu} = K_{X_t}|_{S_\nu}$ 和 $L|_{S_\nu}$ 是平凡的。因此存在自然嵌入$F_t = H^0(X_t, K_{X_t} \otimes L) \hookrightarrow G_t^\nu$。我们定义无穷维向量丛 $G^\nu := \bigcup_{t\in Y} G_t^\nu \to Y$和厄米度量 H_{G^ν}，对于任意 f, $g \in G_t^\nu$,

$$(f, g)_{H_{G^\nu}}(t) := \int_{S_t^\nu} f \wedge \overline{g} e^{-\varphi_\nu}.$$

这里， F 是 G^ν 的自然子丛，且 $f|_{S_\nu}: S_\nu \to Y$ 是Stein纤维化。

注5.6。根据Berndtsson-P ˇaun的工作 [BP08]，，对于满足 K_U 为平凡的任意子集 $U \subset Y \setminus Z$，$G^\nu|_U$ 相对于Stein纤维化的相对Bergman核是多重次调和的。因此， H_{G^ν} 是Griffiths 半正的。

问题5.7。这个厄米度量 H_{G^ν} 在 G^ν 上是否具有Nakano 半正性? 如果确实如此，那么 H_{G^ν} 是否分别在$E = \mathcal{E}|_Y$上的$\sim H_\nu$和 H_ν上诱导出光滑厄米度量的Nakano 半正性 $(\mathcal{E})$ 以及 $F = f_*(\omega_{X/Y} \otimes L)$?

5.3。 L^2型中野（半）正性的局部性质。设 $f: X \to Y$ 是两个连通复流形之间的射影满态射，且 L 是 X 上的一个赋予伪有效厄米度量h的全纯向量丛。对于直接像层 $\mathcal{E} = f_*(\omega_{X/Y} \otimes L \otimes \mathcal{I}(h))$ 的典范奇异厄米度量 H，关于正性性质，以下定理是已知的。

定理 5.8。（参见. [HPS18，定理 21.1]）直接像层 $\mathcal{E} = f_*(\omega_{X/Y} \otimes L \otimes \mathcal{I}(h))$ 带有典范奇异厄米度量 H。该度量是 Griffiths 半正的，并满足最小延拓性质。

在本小节中，我们证明该度量 H 在 $\mathcal{E}$ 局部具有中野（半）正性。此证明受到利用 L^2-估计证明光滑情形的启发，参见[DNWZ22，定理 1.6]。

定理 5.9。设 H 是 $\mathcal{E} = f_*(\omega_{X/Y} \otimes L \otimes \mathcal{I}(h))$ 上由 h诱导的典范奇异厄米度量。若 X 是射影的，且存在解析集 A 使得 $\Sigma_H \subseteq A$，则 H 在 $Y(\mathcal{E})$ 上是全局局部 L^2-型中野半正的。

证明。首先，我们证明 H 是局部 L^2 型 Nakano半正的，也就是说，对于任意 $t \in Y \setminus Z$，存在 $U \subset Y \setminus Z$ 的一个开邻域，使得 H 在 U 上具有最优的 L^2 估计。我们可以取 U 为 Stein。设 $X_U = \pi^{-1}(U)$ 和 $X_U^\nu := X_U \cap S_\nu$，那么由于 f 是全纯的，X_U^ν 也是 Stein。设 $\overline{\partial}$-闭的 $g \in \mathscr{D}^{m,1}(U, E)$，并令 ψ 为 U 上任意一个光滑严格多重次调函数。我们可以将 $g(t) = \sum_{j=1}^m g_j(t)\, d\overline{t}_j \wedge dt$ 写成，其中 $g_j(t) \in E_t \subseteq H^0(X_t, \omega_{X_t} \otimes L|_{X_t})$。我们可以将 g 视为一个光滑紧支集 $(n+m, 1)$ - 微分形式 $\widetilde{g}(t, z) := \sum_{j=1}^m g_j(t, z)\, d\overline{t}_j \wedge dt$，定义在 X 上，其中 $g_j(t, z)$ 为全纯截面 $\omega_{X_t} \otimes L|_{X_t}$。我们有以下观察:

- $\overline{\partial}_z g_j(t, z) = 0$对于任意固定的 $t \in U$，因为 $g_j(t, z)$ 是 $\omega_{X_t} \otimes L|_{X_t}$ 的全纯截面,
- $\overline{\partial}_t g_j = 0$，因为 g 是 U 上的 $\overline{\partial}$-闭微分形式。

我们考虑积分

$$\begin{aligned}&\int_{X_U^\nu} \langle [i\Theta_{L,h_\nu} + i\partial\overline{\partial} f^*\psi \otimes \mathrm{id}_L, \Lambda_\omega]^{-1} \widetilde{g}, \widetilde{g}\rangle_{h_\nu,\omega} e^{-f^*\psi} dV_\omega \\ &= \int_{X_U^\nu} \langle [i\partial\overline{\partial}\varphi_\nu + i\partial\overline{\partial} f^*\psi, \Lambda_\omega]^{-1} \widetilde{g}, \widetilde{g}\rangle_\omega e^{-\varphi_\nu - f^*\psi} dV_\omega.\end{aligned}$$

注意，作用于 $\Lambda^{n+m,\ 1}T_X^*\otimes L$，我们有

$$(*)\qquad [i\Theta_{L,h_\nu}+i\partial\overline{\partial}f^*\psi,\Lambda_\omega]\geq[i\partial\overline{\partial}f^*\psi,\Lambda_\omega]\geq 0.$$

在 t 附近的 X 上取局部坐标 $(t_1,\ldots,t_m,z_1,\ldots,z_n)$，其中 $t_1,\ldots,t_m$ 是 $U\subset\mathbb{C}^m$ 上的标准坐标。令 $\omega'=i\sum_{j=1}^m dt_j\wedge d\overline{t}_j+i\sum_{j=1}^n dz_j\wedge d\overline{z}_j$ 和 $\omega_0=i\sum_{j=1}^m dt_j\wedge d\overline{t}_j$。注意

$$i\partial\overline{\partial}f^*\psi=\sum_{j,k=1}^m\frac{\partial^2\psi}{\partial t_j\partial\overline{t}_k}dt_j\wedge d\overline{t}_k,$$

我们有

$$[i\partial\overline{\partial}f^*\psi,\Lambda_{\omega'}]\widetilde{g}=\sum_{j,k}\frac{\partial^2\psi}{\partial t_j\partial\overline{t}_k}g_j(t,z)dt\wedge d\overline{t}_k,$$

$$[i\partial\overline{\partial}f^*\psi,\Lambda_{\omega'}]^{-1}\widetilde{g}=\sum_{j,k}\psi^{jk}g_j(t,z)dt\wedge d\overline{t}_k,$$

在 t 处，其中 $(\psi^{jk})=(\frac{\partial^2\psi}{\partial t_j\partial\overline{t}_k})^{-1}$。由引理 2.6，我们有

$$\begin{aligned}\langle[i\partial\overline{\partial}f^*\psi,\Lambda_\omega]^{-1}\widetilde{g},\widetilde{g}\rangle_\omega dV_\omega&=\langle[i\partial\overline{\partial}f^*\psi,\Lambda_{\omega'}]^{-1}\widetilde{g},\widetilde{g}\rangle_{\omega'}dV_{\omega'}\\&=\sum_{j,k}\psi^{jk}c_ng_j\wedge\overline{g}_kc_mdt\wedge d\overline{t}.\end{aligned}$$

由富比尼定理，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{X_U^\nu}\langle[i\partial\overline{\partial}f^*\psi,\Lambda_\omega]^{-1}\widetilde{g},\widetilde{g}\rangle_\omega e^{-\varphi_\nu-\pi^*\psi}dV_\omega&=\int_{X_U^\nu}\sum_{j,k}\psi^{jk}c_ng_j\wedge\overline{g}_ke^{-\varphi_\nu-f^*\psi}c_mdt\wedge d\overline{t}\\&=\int_U(g_j,g_k)_{H_\nu}(t)\psi^{jk}e^{-\psi}c_mdt\wedge d\overline{t}\\&=\int_U\langle[i\partial\overline{\partial}\psi,\Lambda_{\omega_0}]^{-1}g,g\rangle_{H_\nu,\omega_0}e^{-\psi}dV_{\omega_0}\\&\leq\int_U\langle[i\partial\overline{\partial}\psi,\Lambda_{\omega_0}]^{-1}g,g\rangle_{H,\omega_0}e^{-\psi}dV_{\omega_0}\\&<+\infty.\end{aligned}$$

由 H¨ormander 的 L^2-估计，即定理 2.5，存在解 $\widetilde{v}_\nu\in L^2_{n+m,\ 0}(X_U^\nu,L,h_\nu,\omega)$，使得 $\overline{\partial}\widetilde{v}_\nu=\widetilde{g}$ 在 X_U^ν 上成立，并满足以下估计

$$\begin{aligned}\int_{X_U^\nu}|\widetilde{v}_\nu|^2_{h_\nu}e^{-f^*\psi}dV_\omega&=\int_{X_U^\nu}c_{n+m}\widetilde{v}_\nu\wedge\overline{\widetilde{v}}_\nu e^{-\varphi_\nu-f^*\psi}\\&\leq\int_{X_U^\nu}\langle[i\Theta_{L,h_\nu}+i\partial\overline{\partial}f^*\psi\otimes\mathrm{id}_L,\Lambda_\omega]^{-1}\widetilde{g},\widetilde{g}\rangle_{h_\nu,\omega}e^{-f^*\psi}dV_\omega\\&\leq\int_U\langle[i\partial\overline{\partial}\psi,\Lambda_{\omega_0}]^{-1}g,g\rangle_{H,\omega_0}e^{-\psi}dV_{\omega_0}<+\infty.\end{aligned}$$

我们注意到，对于任意固定的 $t\in U$，$\overline{\partial}\widetilde{v}|_{S_t^\nu}=0$，因为在 X_U^ν 上 $\overline{\partial}\widetilde{v}=\widetilde{g}$，其中 $S_t^\nu:=X_t\cap S_\nu$。由 $|\bullet|^2_{h_\nu}$ 关于 ν 的单调性，随着 $(h_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ 增大，族 $(\widetilde{v}_\nu)_{\nu_1\leq\nu\in\mathbb{N}}$

构成了 $L^2_{n+m,0}(X_U^{\nu_1}, L, h_{\nu_1}, \omega)$ 中的一个有界序列。因此，我们可以在 $L^2_{n+m,0}(X_U^{\nu_1}, L, h_{\nu_1}, \omega)$ 中取到一个弱收敛子列。通过对角线论证，我们得到 $(\widetilde{v}_\nu)_{\nu_1\leq\nu\in\mathbb{N}}$ 的子列 $(\widetilde{v}_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}}$，它在 $L^2_{n+m,0}(X_U^{\nu_1}, L, h_{\nu_1}, \omega)$ 中对任意 ν_1 弱收敛，其中 $\widetilde{v}_{\nu_k} \in L^2_{n+m,0}(X_U^{\nu_k}, L, h_{\nu_k}, \omega) \subset L^2_{n+m,0}(X_U^{\nu_1}, L, h_{\nu_1}, \omega)$。

我们将 $\widetilde{v}$ 记为 $(\widetilde{v}_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}}$的弱极限。于是， $\widetilde{v}$ 在 X_U 上满足 $\overline{\partial}\widetilde{v} = \widetilde{g}$，并且

$$\int_{X_U^{\nu_k}} |\widetilde{v}|^2_{h_{\nu_k}} e^{-f^*\psi} dV_\omega \leq \int_U \langle [i\partial\overline{\partial}\psi, \Lambda_{\omega_0}]^{-1} g, g\rangle_{H,\omega_0} e^{-\varphi} dV_{\omega_0} < +\infty$$

对任意 $k \in \mathbb{N}$。取弱极限 $k \to +\infty$ 并应用单调收敛定理，可得以下估计

$$\begin{aligned}\int_{X_U} |\widetilde{v}|^2_h e^{-f^*\psi} dV_\omega &= \int_{X_U\setminus(Z_1\cup Z_2)} |\widetilde{v}|^2_h e^{-f^*\psi} dV_\omega \\ &\leq \int_U \langle [i\partial\overline{\partial}\psi, \Lambda_{\omega_0}]^{-1} g, g\rangle_{H,\omega_0} e^{-\psi} dV_{\omega_0} < +\infty,\end{aligned}$$

即 $\widetilde{v} \in L^2_{n+m,\ 0}(X_U, L, h, \omega)$。

这里记 $\widetilde{v}(t,z) = \widetilde{V}(t,z)dz\wedge dt$，则 $\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial\overline{z}_j} = 0$，即对于任意固定的 $t \in U$，$\widetilde{\ }$，由于 $\overline{\partial}\widetilde{v} = \widetilde{g}$ 在 X_U 上成立，$\overline{\partial}\widetilde{v}|_{X_t} = 0$。这意味着 $V(t,\cdot)dz \in H^0(X_t, \omega_{X_t} \otimes L|_{X_t})$。我们可以将 $\sim\widetilde{v}$ 识别为 U 上的一个 $(m,0)$-形式 $v(t) := V(t)dt$，其中 $V(t) = V(t,\cdot)dz \in H^0(X_t, \omega_{X_t} \otimes L|_{X_t})$。

根据富比尼定理，我们有

$$\int_{X_U} |\widetilde{v}|^2_h e^{-f^*\psi} dV_\omega = \int_{X_U} c_{n+m}\widetilde{v}\wedge\overline{\widetilde{v}} h e^{-f^*\psi} = \int_U ||v||^2_H e^{-\psi} dV_{\omega_0}.$$

因此，我们得到

$$\int_U ||v||^2_{H,\omega_0} e^{-\psi} dV_{\omega_0} \leq \int_U \langle [i\partial\overline{\partial}\psi, \Lambda_{\omega_0}]^{-1} g, g\rangle_{H,\omega_0} e^{-\psi} dV_{\omega_0} < +\infty.$$

这里，由于 $||v||^2_H$ 的积分有界，对于任意几乎处处成立的 $t \in U$，我们有 $||v||^2_H(t) < +\infty$，即 $V(t) \in H^0(X_t, K_{X_t} \otimes L|_{X_t} \otimes \mathscr{I}(h|_{X_t})) \subseteq \mathcal{E}_t$。

由假设 $\Sigma_H \subseteq A$，在 A 上将 $v = 0$ 替换为 $V = 0$ 后，对于任意 $t \in U$，我们得到 $V(t) \in H^0(X_t, K_{X_t} \otimes L|_{X_t}) = \mathcal{E}_t$。由于 A 的勒贝格测度为零，这意味着 $v \in L^2_{m,\ 0}(U, E, H, \omega_0)$，且 $\overline{\partial}v = g$ 在 $U \setminus A$ 上。由引理 5.10，我们得到 $\overline{\partial}v = g$ 在 U 上。因此，我们证明了 H 满足 U 上最优的 L^2-估计。

最后，我们证明 H 在 $Y(\mathcal{E})$ 上是充分局部 L^2 型 Nakano半正。令 $Z_\mathcal{E} := Y \setminus Y(\mathcal{E})$，则 $Z_\mathcal{E} \subseteq Z$，并且存在一个解析集 B，使得 $Z = Z_\mathcal{E} \cup B$。因此，只需证明对于任意 $t \in B \setminus Z_\mathcal{E}$，存在 t 的一个开邻域 $U \subset Y(\mathcal{E})$，使得 H 在 U 上具有最优的 L^2 估计。这可以通过使用引理 5.10，以与上文相同的方式证明。□

引理 5.10.（参见. [Dem82，引理 6.9]； [Ber10，引理 5.1.3]）设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 的一个开子集， Z 是 Ω 的一个复解析子集。假设 u 是一个系数为 L^2_{loc} 的 $(p, q-1)$- 微分形式，且 g 是一个系数为 L^1_{loc} 的 (p,q)-微分形式，并且 $\overline{\partial}u = g$ 在 Ω 上成立 $\setminus Z$（在流的意义下）。那么 $\overline{\partial}u = g$ 在 Ω 上成立。

引理 5.11.（参见. [Dem82，定理1.5]）设 X 是一个 K¨ahler 流形，且 Z 是 X 的一个解析子集。假设 Ω 是 X 的一个相对开子集，并且具有完备的 K¨ahler 度量。那么 $\Omega \setminus Z$ 带有完备的 K¨ahler 度量。

利用引理 5.11 和 Demailly逼近定理（见 [Dem94]），可以仿照上文证明如下结论。这里，在定理 5.9 的证明中，我们没有使用 Demailly逼近定理，因为（$*$）的左项不一定是半正的，且不能使用 H¨ormander 的 L^2-估计。

定理 5.12. 设 $\mathcal{E} = f_*(\omega_{X/Y} \otimes L \otimes \mathscr{I}(h))$ 上有一个由 h 诱导的典范奇异厄米度量 H 。假设 X 是紧致 K¨ahler，且 h 是大线丛。若存在解析集 A ，使得 $\Sigma_H \subseteq A$ ，则 H 在 $Y(\mathcal{E})$ 上是满的局部 L^2 型中野正。

这里， H 的 L^2-子层 $\mathscr{E}(H)$ 是 $E = \mathcal{E}|_{Y(\mathcal{E})}$ 在 $Y(\mathcal{E})$ 上的子层。对于自然嵌入 $j\colon Y \setminus Z_{\mathcal{E}} = Y(\mathcal{E}) \hookrightarrow Y$，按照定义 4.9，定义关于 H、在 Y 上的自然扩张的 L^2-子层为 $\mathscr{E}_Y(H) := j_*\mathscr{E}(H)$。

定理 5.13. 设 $f\colon X \to Y$ 是两个连通复流形之间的射影满射全纯映射，且 L 是 X上的一个配备伪有效度量 h的全纯线丛。设 H 是 $f_*(\omega_{X/Y} \otimes L \otimes \mathscr{I}(h))$上的典范奇异厄米度量。若 X 是射影的，且存在一个解析集 A，使得 $\Sigma_H \subseteq A$，则 Y 上的自然延拓的 L^2-子层 $\mathscr{E}_Y(H)$ 是凝聚的。

证明。由定理 5.9和 [Ina22，命题 4.4]，，我们得到 $Y(\mathcal{E})$上的 L^2-子层$\mathscr{E}(H)$ 是凝聚的。对于自然嵌入 $j\colon Y \setminus Z_{\mathcal{E}} = Y(\mathcal{E}) \hookrightarrow Y$，由于解析集 $Z_{\mathcal{E}} := Y \setminus Y(\mathcal{E})$ 的余维为 ≥ 2，我们已经知道 $j_*\mathcal{O}_{Y\setminus Z_{\mathcal{E}}} \cong \mathcal{O}_Y$。根据黎曼延拓定理，层 $j_*\mathscr{E}(H) = \mathscr{E}_Y(H)$ 也是凝聚的。□

推论 5.14. 设 H 是 $\mathcal{E} = f_*(\omega_{X/Y} \otimes L \otimes \mathscr{I}(h))$ 上由 L 上的伪有效度量 h 诱导的典范奇异厄米度量。设 $B_H \subseteq Y(\mathcal{E}) \setminus \Sigma_H$ 是一个开子集。这里，$\mathcal{E}|_{Y(\mathcal{E})} = E$ 是全纯向量丛。若 X 是射影的，则对于任意局部开子集 $U \subset B_H$，(E, H) 在 U 上满足最优的 L^2-估计。并且， L^2-子层 $\mathscr{E}_Y(H)$ 在 B_H 上是凝聚的。

备注 5.15. 根据定理 5.12，即使在 X 是紧 K¨ahler 且 h 是大线丛的情形下，该定理和推论仍然成立。

推论 5.16. 设 $\mathscr{F}$ 是复流形 X 上配备奇异厄米度量 h 的无挠相干层。若 h 在 $X(\mathscr{F})$ 上处处局部为全 L^2 型中野半正，则自然延拓的 L^2- 子层 $\mathscr{E}_X(h)$ 是凝聚的。

6。 The minimal extension property and Nakano semi-positivity

本节我们研究最小延拓性质与 Nakano 半正性之间的关系，并证明以下定理。对于全纯线丛，根据最优 Ohsawa-Takegoshi L^2-延拓定理（见 [Blo13], [GZ12]）以及 [HPS18, 定理21.1] 的证明，这两种性质等价。在

全纯向量丛的情形中，Ohsawa-Takegoshi L^2-延拓定理可由 Nakano 半正性推出，因此若其具有 Nakano 半正性，则很可能具有最小延拓性质。然而，事实证明一般而言反向结论并不成立。这一现象最早由 [HI20] 在一种与最小延拓性质密切相关的概念——弱 Ohsawa-Takegoshi 正性——的研究中提及。

定理6.1. 设 $\mathscr{F}$ 是复流形 X上的无挠相干层。即使 $\mathscr{F}$ 带有满足最小延拓性质的奇异厄米度量，它也未必带有奇异厄米度量 h ，使其（整体）中野半正且满足 $\nu(-\log\det h, x) < 2$，对任意点 $x \in X(\mathscr{F})$均成立。

这里，符号 ν 表示Lelong数，其定义为

$$\nu(\varphi, x) := \liminf_{z\to x} \frac{\varphi(z)}{\log|z-x|}$$

对于多重次调和函数 φ 以及 x附近的某个坐标$(z_1, \ldots, z_n)$。并且已知，若 $\nu(-\log\det h, x) < 2$，则 $\mathscr{E}(h)_x = \mathcal{O}(E)_x$。

6.1. 无挠相干层的正合列与正性。考虑正性在正合列中的继承。关于最小延拓性质，以下结论已为人所知。

命题6.2.（参见. [LS22，命题6和 7]）设

$$0 \longrightarrow \mathscr{S} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathscr{F} \overset{g}{\twoheadrightarrow} \mathscr{Q} \longrightarrow 0$$

构成一个无挠凝聚层的正合列，且 h 是定义在 $\mathscr{F}$ 上的具有最小延拓性质的奇异厄米度量。于是我们有如下结论

(a) 若 j 在一般点处是同构，则 h 可延拓为定义在 $\mathscr{G}$ 上的奇异厄米度量 $h_{\mathscr{G}}$，并满足最小延拓性质；(b) 诱导度量 $h_{\mathscr{Q}}$ 也具有最小延拓性质。

For 关于光滑度量的 Griffiths 正性和中野正性，以下结论已为人所知 .

命题 6.3。（参见 . [Dem-book，第七章，命题 6.10]）设 $0 \to S \to E \to Q \to 0$ 构成一个厄米向量丛的正合列。那么我们有如下结论：(a) $E \geq_{Grif} 0 \Longrightarrow Q \geq_{Grif} 0$，$(b)$ $E \leq_{Grif} 0 \Longrightarrow S \leq_{Grif} 0$，$(c)$ $E \leq_{Nak} 0 \Longrightarrow S \leq_{Nak} 0$；严格正性也有类似的蕴含关系。

特别地， E 的 Nakano 半正度量未必能诱导出 Q的 Nakano 半正度量。

这里，对于半正性从 E 到 Q的继承，中野半正性存在一个反例（见命题 6.7）；但通过改写条件（c），我们得到以下关于对偶中野正性的结论。

推论 6.4. 设 $g : E \twoheadrightarrow Q$ 是到一个全纯向量丛上的商映射。那么，如果 E 是对偶中野（半）正的，则 Q 也是对偶中野（半）正的。

证明. 存在一个全纯向量丛 S，使得 $0 \to S \to E \to Q \to 0$ 是全纯向量丛的正合列。于是，序列 $0 \to Q^* \to E^* \to S^* \to 0$ 也是正合的。根据假设，E^* 是中野（半）负的。由命题 6.3 的（c），Q^* 是中野（半）负的。□

我们研究奇异厄米度量的正性。对于 Griffiths 正性，[HPS18，命题 19.3] 已经为人所知，而对于（对偶）中野正性，我们得到以下命题。

命题 6.5。（参见. [HPS18，命题 19.3]）设 ϕ: $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$是两个无挠凝聚层之间的态射，且在一般点处为同构。若 $\mathscr{F}$ 带有奇异格里菲斯半正厄米度量，则 $\mathscr{G}$也如此。

命题 6.6。设 $0 \to S \to E \to Q \to 0$ 是一个全纯向量丛的正合列。设 h 是 E上的奇异厄米度量。那么：

(a) 若 h 是中野半负的，则 S 带有自然诱导的奇异厄米度量，且该度量为中野半负。(b) 若 h 是对偶中野半正的，则 Q 带有自然诱导的奇异厄米度量，且该度量为对偶中野半正。

特别地，命题 6.3 和推论 6.4 可由此命题推出。

证明。(a) 我们定义由 h 通过$|u|_{h_S}$ 诱导的 S 的自然奇异厄米度量 $h_S := |ju|_h$，其中 u 是 S的任意截面。根据假设，对于任意局部全纯截面 $s_j \in \mathcal{O}(E)$，$(n-1,n-1)$-微分形式 $T_u^h = \sum (s_j, s_k)_h \widehat{dz_j \wedge d\overline{z}_k}$是多重次调和的，即 $i\partial\overline{\partial} T_u^h \geq 0$。对于任意局部全纯截面 $u_k \in \mathcal{O}(S)$，其像 ju_k 也是 E的局部全纯截面，即 $ju_k \in \mathcal{O}(E)$。于是由等式

$$T_u^{h_S} = \sum (u_j, u_k)_{h_S} \widehat{dz_j \wedge d\overline{z}_k} = \sum (ju_j, ju_k)_h \widehat{dz_j \wedge d\overline{z}_k} = T_{ju}^h,$$

we 可知 $T_u^{h_S}$也是多重次调和的，即 h_S 是中野半负的 .

(b) 这里，序列 $0 \to Q^* \to E^* \to S^* \to 0$ 也是正合的。根据假设和(a)，Q^* 具有中野半负的奇异厄米度量。□

6.2. 一个具体例子。我们考虑以下全纯向量丛的正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \overset{j}{\hookrightarrow} \underline{V} := \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \overset{g}{\twoheadrightarrow} Q := \underline{V}/\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow 0.$$

Fr由该正合列，我们得到 $\det \underline{V} = \det Q \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$，并得到同构

$$\det Q \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1), \quad T_{\mathbb{P}^n} = Q \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \cong Q \otimes \det Q,$$

其中 $\det \underline{V}$ 也是平凡的。由 $\underline{V}$ 的Griffiths半正性以及推论 6.4，丛 Q 是对偶中野半正的，因而是Griffiths 半正的。因此，根据Demailly-Skoda定理（见 [DS80]），$T_{\mathbb{P}^n}$是中野半正的；由 $Q \geq_{Grif} 0$ 和$\det Q \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) > 0$可知，它还是Griffiths正的。然而，切丛 $T_{\mathbb{P}^n}$ 没有

光滑的Nakano 正度量。事实上，若 $T_{\mathbb{P}^n} >_{Nak} 0$，则由Nakano消灭定理，对于任意 $q \geq 1$ 都有 $H^q(\mathbb{P}^n, K_{\mathbb{P}^n} \otimes T_{\mathbb{P}^n}) = 0$。然而，这与下述结果矛盾

$$H^{n-1}(\mathbb{P}^n, K_{\mathbb{P}^n} \otimes T_{\mathbb{P}^n}) \cong H^1(\mathbb{P}^n, T^*_{\mathbb{P}^n}) = H^{1,1}(\mathbb{P}^n, \mathbb{C}) = \mathbb{C}.$$

命题 6.7. 我们有： Q 没有光滑的 Griffiths 正厄米度量，也没有满足 $\nu(-\log\det h, x) < 2$ 的奇异厄米度量，使其（全局）Nakano 半正；对任意点 $x \in \mathbb{P}^n$ 均如此。

证明. 首先，若 Q 有光滑的 Griffiths 正厄米度量，则根据 Demailly-Skoda定理，$T_{\mathbb{P}^n} \cong Q \otimes \det Q$ 有光滑的 Nakano 正厄米度量。其次，若 Q 有光滑的 Nakano 半正厄米度量，则由于 $\det Q \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ 是正线丛， $T_{\mathbb{P}^n} \cong Q \otimes \det Q$ 有光滑的 Nakano 正厄米度量。但这与 $T_{\mathbb{P}^n}$ 不是 Nakano 正相矛盾。

最后，若 Q 有一个奇异厄米度量 h ，该度量（全局）Nakano 半正且满足 $\nu(-\log\det h, x) < 2$，对任意点 $x \in \mathbb{P}^n$ 均成立，那么根据奇异 Nakano 半正性的消失定理（参见 [Wat22b, Theorem 6.1]），我们有

$$H^q(\mathbb{P}^n, K_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \otimes \mathscr{E}(h)) = 0$$

对于 $q \geq 1$。由如下事实：若 $\nu(-\log\det h, x) < 2$，则 $\mathscr{E}(h) = \mathcal{O}(Q)$（参见[Wat22b 定理 6.2] 的证明），可得

$0 = H^q(\mathbb{P}^n, K_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \otimes \mathscr{E}(h)) \cong H^q(\mathbb{P}^n, K_{\mathbb{P}^n} \otimes \det Q \otimes Q) \cong H^q(\mathbb{P}^n, K_{\mathbb{P}^n} \otimes T_{\mathbb{P}^n})$。

但这一消失性与 $H^{n-1}(\mathbb{P}^n, K_{\mathbb{P}^n} \otimes T_{\mathbb{P}^n}) \cong \mathbb{C}$ 矛盾。 □

定理6.1的证明。令 I_V 为 $\underline{V}$ 上的平凡厄米度量，则由最优 Ohsawa-Takegoshi L^2-延拓定理（参见 [Blo13], [GZ12]） ， I_V 具有最小延拓性质。根据命题6.2，诱导的厄米度量 h' 在 Q上具有最小延拓性质。于是由命题 6.7 得证。□

最后，我们通过具体计算确认，自然诱导的光滑度量 h_Q of Q 确实具有最小延拓性质。在此，该度量 h_Q 由 $I_{\underline{V}}$和 g 诱导，并由 $|u|_{h_Q}$ 定义：$= |g^* u|_{I_V}$ 对于 Q的任意截面 u 。

固定 $a \in \mathbb{P}^n$。选取 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的一个标准正交基（e_0、e_1、……、e_n），使得 $a = [e_0]$。考虑自然嵌入 $\mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ ： $0 \mapsto a$ ，它将 $z =$（z_1、……、z_n）$\mapsto [e_0 + z_1 e_1 + \cdots + z_n e_n]$。于是 ε（z） $= e_0 + z_1 e_1 + \cdots + z_n e_n$ 定义了 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)|_{\mathbb{C}^n}$的一个非零全纯截面。伴随同态 g^* ： $Q \to \underline{V}$ 为 C^∞，并可描述为上述正合列的正交分裂。e_1、……、e_n在 Q 中的像（$\tilde{e}_1$、……、$\tilde{e}_n$）定义了 $Q|_{\mathbb{C}^n}$ 的一个局部全纯标架，并且我们已经知道 $gg^* = \mathrm{id}_{\underline{V}}$ 以及

$$g^* \cdot \tilde{e}_j = e_j - \frac{\langle e_j, \varepsilon \rangle}{|\varepsilon|^2}\varepsilon = e_j - \frac{\overline{z}_j}{1+|z|^2}\varepsilon = e_j - \zeta_j \varepsilon,$$

其中令 $\zeta_j = \frac{\overline{z}_j}{1+|z|^2}$ （参见 [Dem-book，第五章]）。由 $gg^* = \mathrm{id}_{\underline{V}}$和 $\varepsilon \in \ker g$，可得$\tilde{e}_j = gg^* \tilde{e}_j = g(e_j - \zeta_j \varepsilon) = g e_j$。由此， g和 g^*相对于

标架 $(\tilde{e}_1,\ldots,\tilde{e}_n)$ 和 $(e_1,\ldots,e_n)$ 的矩阵表示如下。

$$g=\begin{pmatrix}-z_1\\ \vdots \quad I_n\\ -z_n\end{pmatrix},\quad g^*=\begin{pmatrix}0\\ I_n\end{pmatrix}+G^*,\quad G^*=\begin{pmatrix}-\zeta_1 & \cdots & \cdots & -\zeta_n\\ -\zeta_1 z_1 & & & -\zeta_n z_1\\ \vdots & & & \vdots\\ -\zeta_1 z_n & \cdots & \cdots & -\zeta_n z_n\end{pmatrix},$$

其中我们可以写作 $G^*=(-\zeta_1\varepsilon,\cdots,-\zeta_n\varepsilon)$。在此情形下，我们证明如下结论。

命题 6.8. 存在 $Q=\underline{V}/\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ 上的光滑Hermitian度量 h_Q，使得 h_Q 具有最小延拓性质。

证明. 令 I_V 为 $\underline{V}$ 上的平凡厄米度量，则由最优 Ohsawa-Takegoshi 定理，I_V 具有最小延拓性质。我们定义由 I_V 诱导的 Q 的自然光滑厄米度量 h_Q 如下：$|u|_{h_Q}:=|g^*u|_{I_V}$，对 Q的任意截面 u 均成立。我们证明 h_Q 具有最小延拓性质。由 I_V的最小延拓性质，对于任意 $a\in\mathbb{P}^n$ 以及满足$|v|_{h_Q}=|g^*v|_{I_V}=1$的任意 $v\in Q_a$，存在一个全纯截面 $s\in H^0(B,\underline{V})$，使得

$$s(0)=g^*v\quad\text{and}\quad\frac{1}{\mathrm{Vol}(B)}\int_B|s|^2_{I_V}dV_B\le 1,$$

其中 $g^*v\in\underline{V}_a$。由 $gg^*=\mathrm{id}_{\underline{V}}$ 可知，复合映射 gs 是全纯截面，即 $gs\in H^0(B,Q)$，且 $gs(0)=gg^*v=v$。因此，若 $|gs|^2_{h_Q}=|g^*gs|^2_{I_V}\le|s|^2_{I_V}$ 在 B 上成立，则 h_Q 具有最小延拓性质。

我们可以写成 $s=\sum_{j=0}^n s_je_j=\sigma_0\varepsilon+\sum_{j=0}^n\sigma_je_j\in H^0(B,\underline{V})$，其中 $\sigma_0=s_0$、$\sigma_j=s_j-s_0z_j$ 以及 $s_j\in\mathcal{O}(B)$。于是我们有

$$\begin{aligned}
gs&=\sum_{j=1}^n\sigma_jge_j=\sum_{j=1}^n\sigma_j\widetilde{e}_j,\\
g^*gs&=\sum_{j=1}^n\sigma_jg^*\widetilde{e}_j=\sum_{j=1}^n\sigma_j(e_j-\zeta_j\varepsilon)=\Big(\sum_{j=1}^n\zeta_j\sigma_j\Big)e_0+\sum_{j=1}^n\Big(\sigma_j-z_j\sum_{k=1}^n\zeta_k\sigma_k\Big)e_j,\\
|g^*gs|^2_{I_V}&=\left|\sum_{j=1}^n\zeta_j\sigma_j\right|^2+\sum_{j=1}^n\left|\sigma_j-z_j\sum_{k=1}^n\zeta_k\sigma_k\right|^2\\
&\le(1+|z|^2)\left|\sum_{j=1}^n\zeta_j\sigma_j\right|^2+\sum_{j=1}^n|\sigma_j|^2=\frac{1}{1+|z|^2}\left|\sum_{j=1}^n\overline{z}_j\sigma_j\right|^2+\sum_{j=1}^n|\sigma_j|^2\\
&\le\frac{1}{1+|z|^2}\Big(\left|\sum_{j=1}^n s_j\overline{z}_j\right|^2+|s_0|^2|z|^4\Big)+\sum_{j=1}^n\Big(|s_j|^2+|s_0|^2|z_j|^2\Big)\\
&=\frac{|z|^2}{1+|z|^2}\Big(\sum_{j=1}^n|s_j|^2+|s_0|^2|z|^2\Big)+\sum_{j=1}^n|s_j|^2+|s_0|^2|z|^2\\
&=\frac{1+2|z|^2}{1+|z|^2}\Big(\sum_{j=1}^n|s_j|^2+|s_0|^2|z|^2\Big),
\end{aligned}$$

其中 $\sum_{j=1}^n \overline{z}_j\sigma_j = \sum_{j=1}^n(s_j\overline{z}_j - s_0|z_j|^2) = \sum_{j=1}^n s_j\overline{z}_j - s_0|z|^2$。因此，如果

$$\frac{1+2|z|^2}{1+|z|^2}\Big(\sum_{j=1}^n |s_j|^2 + |s_0|^2|z|^2\Big) \le |s|_{I_V}^2 = \sum_{j=0}^n |s_j|^2,$$

即 $|z|^2\sum_{j=1}^n |s_j|^2 \le |s_0|^2(1-2|z|^4)$，于是我们得到 $|g^*gs|_{I_V}^2 \le |s|_{I_V}^2$。

这里，对于任意 j， s_j 都可表示为 s_0 的一个数乘积。事实上，根据平凡线丛的最优 Ohsawa–Takegoshi 延拓定理，存在一个全纯函数 $f \in \mathcal{O}(B)$，使得

$$f(0) = 1 \quad \text{and} \quad \frac{1}{\mathrm{Vol}(B)}\int_B |f|^2 dV_B \le 1.$$

我们写作 $g^*v = \sum_{j=0}^n w_j e_j \in \underline{V_a}$，其中 $1 = |g^*v|_{I_V}^2 = \sum_{j=0}^n |w_j|^2$ 且 $w_j \in \mathbb{C}$。通过更改局部平凡标架（e_j）的下标，可假设 $w_0 \neq 0$。因此，我们可以取 $s_j := w_j f = \frac{w_j}{w_0} f \in \mathcal{O}(B)$。事实上，它满足 $s(0) = \sum_{j=0}^n w_j f(0) e_j = \sum_{j=0}^n w_j e_j = g^*v$ 且 $|s|_{I_V}^2 = (\sum_{j=0}^n |w_j|^2)|f|^2 = |f|^2$。

因此，条件 $|z|^2\sum_{j=1}^n |s_j|^2 \le |s_0|^2(1-2|z|^4)$ 足以保证 $2|z|^2 + |z|^2(1 - 1/|w_0|^2) - 1 \le 0$。由于 w_0 被取为满足 $\sum_{j=0}^n |w_j|^2 = 1$ 的 $\{w_0, \dots, w_n\}$ 中非零元素之一，我们得到 $|w_0|^2 \ge \frac{1}{1+n}$。因此，若将 B 的半径取为小于 $(-n + \sqrt{n^2+8})/4 > 0$（它是 $2r^2 + nr - 1 = 0$ 的一个解），则对于任意 $g^*v \in \underline{V_a}$，以及最优 Ohsawa–Takegoshi 延拓定理的任意解 s，我们有 $|gs|_{h_Q}^2 = |g^*gs|_{I_V}^2 \le |s|_{I_V}^2$ 在 B 上成立。□

致谢。作者谨向导师高山茂晴教授致以谢意，感谢他给予的指导和宝贵建议；也感谢稻山隆弘教授提供的有益建议。此外，作者还感谢铃木良明就 Kodaira–Spencer 映射所进行的有益讨论。

References

[Ber09] B. Berndtsson，《全纯纤维化相关向量丛的曲率》，《数学年刊》169，(2009)，第2期，531-560。[Ber10] B. Berndtsson，《相关主题导论》，《解析几何与代数几何》，IAS/Park City 数学丛书，第17卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2010年，第7-76页。[BP08] B. Berndtsson 和 M. P˘aun，《Bergman 核与相对典范丛的伪有效性》，《杜克数学杂志》145，(2008)，第2期，341-378。[BPW19] B. Berndtsson、M. P˘aun 和 X. Wang，《代数纤维空间与高阶直接像的曲率》，arXiv:1704.02279v2。[Blo13] Z. B locki，《Suita 猜想与 Ohsawa-Takegoshi 延拓定理》，《数学创刊》193 (1)，149-158 (2013)。[deC98] M. A. A. de Cataldo，《向量丛上的奇异厄米度量》，《纯粹与应用数学杂志》502，(1998)，93-122。[Dem82] J. P. Demailly，《对完备 K L^2 ähler 流形上半正全纯向量丛算子$\overline{\partial}$ 的估计》，《法国高等师范学校科学年鉴》15，(1982)，457-511。[Dem90] J. P. Demailly，《正线丛上的奇异厄米度量》，载于《复代数簇会议论文集》（拜罗伊特，1990年4月2-6日），K. Hulek、T. Peternell、M. Schneider、F. Schreyer 编，数学讲义第1507卷，施普林格出版社，柏林，1992年。

[Dem93] J. P. Demailly, 《非常丰线丛的数值判别准则》, 《微分几何杂志》37 (1993), 323-374。[Dem94] J. P. Demailly, 《通过陈联络流正则化 (1,1) 型闭正流》, 载于向 P. Dolbeault 致敬研讨会论文集（1992年6月）, ´由 H. Skoda 和 J.-M. Tr´epreau 编, 《数学的若干方面》第 E 26 卷, Vieweg, 1994年, 105-126。[Dem-book]J. P. Demailly, 《复解析与微分几何》, https://www-fourier.ujf- grenoble.fr/ demailly/manuscripts/agbook.pdf。[DS80] J. P. Demailly 和 H. Skoda, 《Griffiths 的 P.A. 正性概念与 S. Nakano 正性概念之间的关系》, P. Lelong-H. Skoda 研讨会（分析）, 1978/79年度, 数学讲义第822号, 施普林格出版社, 柏林（1980）, 304-309。[DNWZ22] F. Deng、J. Ning、Z. Wang 和 X. Zhou, 《以 L^p的 $\overline{\partial}$条件刻画全纯向量丛的正性》, 《数学年刊》（2022）。https://doi.org/10.1007/s00208-021-02348-7。[FN80] J. E. Fornaess 和 R. Narasimhan, 《具有奇点的复空间上的 Levi 问题》, 《数学年刊》248, 47-72 (1980)。[GZ12] Q. Guan 和 X. Zhou, 《延拓定理中的最佳常数问题》, 《巴黎科学院数学报告》350 (15-16), 753-756 (2012)。[HPS18] C. Hacon、M. Popa 和 C. Schnell, 《阿贝尔簇上的代数纤维空间：围绕 Cao 和 P ˇaun 的一个近期定理》, 《代数几何中的局部与整体方法》, 143-195, Contemp. Math., 712, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2018。[Har66] R. Hartshorne, 《丰向量丛》, Publ. Math. I.H.E.S. 29 (1966), 63-94。[Hor90] L. H ¨ormander, 《多复变函数论导论》, 第三版, 北荷兰数学图书馆, 第7卷。北荷兰出版社, 阿姆斯特丹, (1990)。[HI20] G. Hosono 和 T. Inayama, 《H ¨ormander 的 L^2估计的逆命题及向量丛的新正性概念》, Sci. China Math. 64, 1745–1756 (2021)。https://doi.org/10.1007/s11425-019-1654-9。[Ina22]T. Inayama, 《奇异厄米度量的中野正性与 Demailly-Nadel-Nakano 型消失定理》, 《代数几何》9 (1) (2022) 69-92。[LSY13] K. Liu、X. Sun 和 X. Yang, 《丰向量丛的正性与消失定理》, J. Algebraic Geom. 22 (2013), 第2期, 303-331。[LS22] L. Lombardi 和 C. Schnell, 《奇异厄米度量与 Catanese、Fujita 和 Kawamata 的分解定理》, arXiv:2210.01087。[Nad89] A. M. Nadel, 《乘子理想层与正标量曲率的 K ¨ahler-Einstein 度量》, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 86 (1989), 7299-7300; 以及《数学年刊》132 (1990), 549-596。[Nak55] S. Nakano, 《论复解析向量丛》, J. Math. Soc. Japan 7 (1955) 1-12。[Nau21] P. Naumann, 《Griffiths 猜想的一种研究途径》, Math. Res. Lett. 28 (2021), 第5期, 1505-1523。[OT87] T. Ohsawa 和 K. Takegoshi, 《论 L^2 全纯函数的延拓》, Math. Z. 195, (1987), 第2期, 197-204。[PT18] M. P ˇaun 和 S. Takayama, 《扭曲相对多重正则丛及其直接像的正性》, J. Algebraic Geom. 27, (2018), 211-272。[Rau15] H. Raufi, 《全纯向量丛上的奇异厄米度量》, Ark. Mat. 53, (2015), 第2期, 359-382。[Sch93] G. Schumacher, 《K ¨ahler-Einstein 流形模空间上 Petersson-Weil 度量的曲率》, 载于《复分析与几何》, Univ. Ser. Math., 339-354, Plenum, 纽约（1993）。[Siu82] Y.-T. Siu, 《调和映射的复解析性、消失定理与 Lefschetz 定理》, 《微分几何杂志》17 (1982), 55–138。[Ume73] H. Umemura, 《向量丛理论的一些结果》, Nagoya Math. J. 52 (1973), 97-128。

[Wat22a] Y. Watanabe，关于配备正奇异厄米度量的全纯向量丛的 Bogomolov-Sommese 型消失定理，arXiv:2202.06603v2。[Wat22b] Y. Watanabe，Nadel 型、Bogomolov-Sommese 型消失定理与奇异对偶中野半正性，arXiv:2209.00823。

Yuta Watanabe 东京大学数学科学研究院 日本东京目黑区驹场3-8-1（E-$mail\ address$: watayu@g.ecc.u-tokyo.ac.jp）