arXiv:2302.09423v2 [math.AP] 5 Apr 2024

局部平滑空间上的一种新次调和性概念，以及 Braverman、Milatovic、Shubin 的一个猜想

BATU GÜNEYSU、STEFANO PIGOLA、PETER STOLLMANN 和 GIONA VERONELL I

摘要。给定一个强局部狄利克雷空间和 $\lambda \geqslant 0$，我们为 L^1_{loc}函数引入一种新的λ次调和性概念，称为局部 λ–偏移缺陷性；在黎曼情形中，它等价于分布意义下的 λ次调和性。我们研究这类函数在一类新的强局部狄利克雷空间上的正则性，这类空间称为局部平滑空间，包括黎曼流形（不作任何曲率假设）、有限维 RCD 空间、卡诺群和谢尔宾斯基地毯。作为这套正则性理论的一个副产品，我们在这一一般框架下证明了 Braverman、Milatovic、Shubin 关于完备黎曼流形上分布意义下的 L^q解的正性猜想。

1. 引言

给定 $q \in [1, \infty]$，若对每个 $f \in L^q(X)$，以下蕴含关系都成立，则称连通黎曼流形 X 具有 L^q-正性保持性质：

$$\Delta f \leqslant f \text{ in the sense of distributions} \Rightarrow f \text{ is nonnegative.} \tag{1.1}$$

这里，$\Delta = \sum_{ij} g^{ij}\partial_i\partial_j$ 是负定的拉普拉斯-贝尔特拉米算子。这一性质的重要性与微妙之处，至少可从以下观察中看出：

- 若 X 具有 L^2-正性保持性质，则 $-\Delta$ （定义在 $C_c^\infty(X)$上）本质自伴（在 $L^2(X)$) [12] 中，• X 随机完备，当且仅当 X 具有 L^∞-正性保持性质 [8],• 存在不具 L^1-正性保持性质的完备 X's [8],• Braverman、Milatovic 和 Shubin（BMS）在 2002 [12] 提出的一个猜想指出，若 X 完备，则 X 具有 L^2-正性保持性质。

BMS 猜想是在 L^2 框架下提出的，因为作者关注本质自伴性问题；其依据是经典结论：若 X 完备，则 $-\Delta$ 本质自伴。更一般地，可以问：完备性是否意味着对所有 $q \in (1、\infty)$ 都有 L^q 正性保持?

需要指出的是，证明这类猜想时，主要的技术难题在于上述 f 可能缺乏正则性。因为，若 f 属于 $W^{1,\,2\,\mathrm{loc}}(X)$，则通过一次分部积分可知，(1.1) 中的不等式等价于

$$\int_X (\nabla f, \nabla \phi) + \int_X f\phi \geqslant 0 \ \text{ for all } 0 \leqslant \phi \in W_c^{1,2}(X), \tag{1.2}$$

换言之，f 是弱 1-超调和的。若 f 甚至属于 $W^{1,\,0\,2}(X)$，则利用 [33], 意义下的一阶截断函数，很容易证明 (1.2) 推出 $f \geqslant 0$；这类函数的存在性等价于 X 的完备性。

另一方面，很容易看出，如果 X 按照 [33], 的意义存在一列拉普拉斯截断函数，那么对于所有 $q \in (1, \infty)$, X 都保持 L^q-正性。不过，一般而言，这一过程（需要进行两次分部积分 [34, 33]）除了要求 X完备之外，还要求 [7] 里奇曲率具有下界控制。

众所周知，(1.2) 形式的不等式可以在一个（正则且对称的）狄利克雷空间 $(X, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(X))$ [30, 49, 31, 15]中方便地抽象表述。事实上，给定一个非负实数 λ，我们可以自然地定义弱 λ-次调和函数和弱 λ-超调和函数 [62],，其中 $W^{1,\,2\,\mathrm{loc}}(X)$ 和 $W^{1,\,2}_{c}(X)$分别由 $\mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X)$ 和 $\mathscr{F}_c(X)$取代，而 $\mathscr{F}(X)$ 是底层二次型 $\mathscr{E}$的定义域。注意，在黎曼情形下，

$$\mathscr{F}(X) = W^{1,2}_0(X), \quad \mathscr{E}(f,g) = \int_X (\nabla f, \nabla g),$$

通常的能量形式。
本文将重点研究强局部狄利克雷空间。本文旨在探讨以下问题：

- 如何在这类空间上为 L^1_{loc}–函数定义 λ-次调和性（分别为 λ-超调和性），使得该定义与黎曼情形下的分布定义相一致？注意，这自然会引出 L^q-保持正性的强局部狄利克雷空间这一概念。•强局部狄利克雷空间上的 λ-次调和 L^1_{loc}–函数具有什么正则性？• 哪些强局部狄利克雷空间具有 L^q-保持正性?

关于第一个问题，首先要注意，在一般的强局部狄利克雷空间上，没有测试函数的自然替代物。为解决这一问题，对于每个开集 $U \subset X$，令 P^U_t表示具有狄利克雷型边界条件的 $(U, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(U))$ 半群。我们将 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathfrak{m})$ 称为局部 λ-移位缺陷的，如果对所有相对紧开集 $U \subset X$，都存在一个在 U 上的弱 λ-调和函数 $g \in C_b(U)$，使得

$$e^{-t\lambda} P^U_t(f|_U - g) \geqslant f|_U - g \quad \text{for all } t > 0.$$

这一新概念可以视为经典缺陷函数概念的一种局部化且无符号的变体；事实证明，在黎曼流形上，它等价于分布意义下的λ-次调和性（参见命题 4.3）。

为了进一步发展这一理论，我们引入一类新的强局部狄利克雷空间，并将其称为局部光滑空间。这一假设完全是局部性的，即所有黎曼流形（不作任何曲率假设）都是局部光滑的，并且局部光滑空间的所有开子集也具有这一性质。此外，我们还证明，所有有限维 RCD 空间、所有卡诺群以及无界谢尔宾斯基垫片都属于这类空间。

为了建立局部 λ–移位缺陷函数的正则性理论，我们始终假设 $(X, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(X))$ 是局部平滑的。一项核心技术步骤（或多或少是定义本身所固有的）是逼近结果引理 4.7，它表明局部 λ–移位缺陷函数总是具有上半连续代表。此外，定理 4.8 指出，$\mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X)$中的每个局部 λ–移位缺陷函数都是弱 λ次调和的；反过来，每个局部上有界的弱 λ次调和函数都是局部 λ–移位缺陷的（注意，在许多空间中，每个弱 λ次调和函数都自动局部上有界；参见注 4.9）。我们的主要正则性结果定理 5.4 指出，对于每个局部 λ–移位缺陷函数 f，对所有 $c \geqslant 0$, $q \in (1, \infty)$都有 $(f-c)^{q/2}_+ \in \mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X)$，这推广了 [62]中的早期结果。该结果的证明基于一个 Kato-Brezis 型结果，即定理 5.3；该定理指出，两个局部 λ–移位缺陷函数的逐点最大值仍具有这一性质。反过来，我们的 Kato-Brezis 定理的证明依赖于对局部 λ–移位缺陷函数的概率刻画，即命题 5.1；该刻画

基于 [17]中对局部有界弱 λ次调和函数的概率刻画。我们还得到了强极大值原理定理 6.1，该原理不需要 $\mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X)$ 或连续性假设。顺便指出，这些结果意味着：若f是 $\mathsf{RCD}^*(K,N)$ 空间上的弱 λ调和函数，且$\lambda f \in L^q{}_{\text{局部}}(X,\mathfrak{m})$ 对某个$q \geqslant \max(N,4)$成立，那么在每个开且相对紧的子集上，f的最小松弛斜率的平方 $|\nabla f|_*^2$ 都具有一个满足强极大值原理的上半连续代表（参见例 6.2）。请注意，这样的结果相当微妙，因为在 Alexandrov 空间上，$|\nabla f|_*^2$ 可能并非连续 [53], ；这一点基本上可由 [24, 51]中得到的结果推出。

自 Weyl 的开创性工作 [64]以来，调和函数与次调和函数的正则性一直是分析学及其他领域的核心主题。关于后者的讨论及其影响，可参见 [61] ；从一般偏微分方程的角度出发的论述，则可参见教材 [28, 38] 。此外，调和性也有半群和概率两种经典表述，关于欧几里得空间，可参见 Kakutani 和 Doob 的奠基性论文 [40], [25]。狄利克雷空间的框架显然非常适合刻画这一方面，因为狄利克雷空间与 Hunt过程一一对应 [30, 49, 31, 15]。其中一个重要而有趣之处在于，不同的（次）调和性概念要求不同的先验正则性假设，而本文的理论仅基于一个 L^1_{loc} 假设。在此背景下，我们注意到，近期文献 [53] 中提出了有限维 RCD 空间上次调和函数的分布意义下的概念 λ（尤其还可参见 [32] ，其中在附加局部正则性假设下，给出了这一概念非常有趣的等价刻画）。文献 [53, 32] 中的理论利用了这样一个事实：RCD 空间上存在一个自然的测试函数空间。然而，当应用于里奇曲率有下界的完备黎曼流形时，这类测试函数比光滑紧支撑函数更广，因此，即便在这种情形下，我们对分布不等式 $\Delta f \leqslant \lambda f$ 的定义似乎也稍具一般性。

最后，基于我们对局部 λ-移位过量函数的概念，我们定义了保持强局部狄利克雷空间的 L^q-正性，并证明了 BMS猜想的 L^q–变体，即 $q \in (1、\infty)$，适用于不可约且内禀完备的局部光滑空间。我们的证明结合了来自 [62] 的 L^q-李乌维尔性质与我们的主要正则性结果；特别是，它不依赖于拉普拉斯截断函数，因为在这种一般性下，拉普拉斯截断函数既无意义，也无法获得（不过请注意，在有限维 RCD-空间上，拉普拉斯截断函数原则上是存在的；参见 [50] 中的引理 3.1）。我们还要指出，最近 [54] 中证明了，在黎曼情形下，如果从一个完备黎曼流形中去除一个可能奇异的集合，且该集合的豪斯多夫余维严格大于 $2q/(q-1),$，那么 BMS猜想的 L^q–变体仍然成立，其中阈值 $2q/(q-1)$ 是尖锐的。

本文安排如下：第2节记录有关局部狄利克雷空间、其关联算子与热半群以及相应扩散过程的标准概念和记号。第3节介绍局部光滑空间，并列举若干属于这一框架的强局部狄利克雷空间类别。第4节首先回顾关于弱 λ-次调和函数和 λ-缺陷（带符号）函数的一些重要辅助结果。随后，我们用局部热半群给出黎曼流形上分布意义下 λ-次调和函数的一种等价刻画，这也促使我们引入局部 λ–移位缺陷函数的概念。接着，我们证明，在自然的先验正则性假设下，局部光滑空间中的“弱 λ-次调和性”与“局部 λ-移位缺陷性”这两个概念是一致的。第5节介绍前述局部 λ-移位缺陷函数的概率刻画、Kato-Brezis 定理以及正则性定理 5.4。第6节专门讨论最大值原理。最后，第7节在我们的广义框架下陈述并证明 BMS 猜想。

致谢：作者谨向 Sebastian Boldt、Kazuhiro Kuwae 和 Marcel Schmidt 致谢，感谢他们进行了非常有益的讨论。我们也感谢审稿人认真审阅本文并提出改进文章的建议。

利益冲突 利益冲突声明：本研究不存在利益冲突 .

数据可用性声明：本研究未处理任何数据。

2. 强局部狄利克雷空间

下文中，我们将函数空间视为定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数空间。我们采用标准记号，并请参阅 [31, 49] 中关于狄利克雷型的教材，以及 [23] 中对狄利克雷型进行深入探讨的近期文章。

定义 2.1. 强局部狄利克雷空间是一个四元组 $(X, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(X))$，其中 X 是局部紧、可分、可度量化空间，配备有全支撑的拉东测度 $\mathfrak{m}$；$\mathscr{E}$ 是 $L^2(X,\mathfrak{m})$ 上一个闭、对称、非负的双线性型，其定义域 $\mathscr{F}(X) \subset L^2(X,\mathfrak{m})$ 稠密，并满足

- （马尔可夫性质）对所有压缩映射 $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$（其中 $T(0)=0$）以及所有 $f \in \mathscr{F}(X)$，均有 $T\circ f \in \mathscr{F}(X)$，其中
$$\mathscr{E}(T\circ f, T\circ f) \leqslant \mathscr{E}(f,f),$$
- （正则性）空间 $\mathscr{F}(X)\cap C_c(X)$ 关于 $\|\bullet\|_\infty$ 在 $C_c(X)$ 中稠密，并关于内积在$\mathscr{F}(X)$ 中稠密
$$\mathscr{E}_1(u,v) := \mathscr{E}(u,v) + \langle u, v\rangle,$$
其中
$$\langle u, v\rangle = \int_X uv \mathrm{d}\mathfrak{m},$$
$L^2(X,\mathfrak{m})$ 中的内积；只要 $uv \in L^1(X,\mathfrak{m})$，我们也将更一般地使用这一记号。
- （强局部性）对于所有满足以下条件的 $u, v \in \mathscr{F}(X)$： u 在 v的支撑上为常数：
$$\mathscr{E}(u,v) = 0.$$

我们固定一个强局部狄利克雷空间 $(X, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(X))$。
对于开子集 $U, V \subset X$，我们用记号 $U \Subset V$表示$\overline{U}$是 X 的紧子集，且满足$\overline{U} \subset V$。

正则性性质蕴含 [31]： $\mathscr{F}(X)\cap L^\infty(X,\mathfrak{m})$是一个代数，并且对于每个$U_1 \Subset U_2 \Subset X$，都存在 $\psi \in \mathscr{F}(X)\cap C_c(X)$，使得 $\psi = 1$ 在$\overline{U_1}$上成立，且 $\mathrm{supp}(\psi) \subset U_2$。由正则性还可推出，存在一个 Choquet容量 [31]$\mathrm{Cap}(\cdot)$ 定义在 X 上，使得对于所有开 $U \subset X$，均有
$$\mathrm{Cap}(U) = \inf\{\mathscr{E}_1(f) \mid f \in \mathscr{F}(X), 1_U \leqslant f\}.$$
在博雷尔集上有 $\mathfrak{m} \ll \mathrm{Cap}$，并且在零容量集之外成立的性质称为准处处（q.e.）成立。函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ 称为准连续，如果对于所有$\epsilon > 0$ 都存在一个开集 $U_\epsilon \subset X$，使得 $\mathrm{Cap}(U_\epsilon) \leqslant \epsilon$，并且 $f|_{X\setminus U_\epsilon}$ 连续。$\mathscr{F}(X)$ 中的每个元素都有一个准连续代表，且任意两个这样的代表准处处相等，[31]。按照 [62]„ 另见 [31]，令
$$\begin{aligned}\mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X) &:= \big\{ f \in L^2_{\mathrm{loc}}(X,\mathfrak{m}) \,\big|\, \text{for all } U \Subset X \text{ there exists } h \in \mathscr{F}(X) \text{ with } f = h \text{ on } U\big\} \\ &= \big\{ f \in L^2_{\mathrm{loc}}(X,\mathfrak{m}) \,\big|\, \text{ for all } \phi \in \mathscr{F}(X)\cap C_c(X) \text{ one has } \phi f \in \mathscr{F}(X)\big\},\end{aligned}$$

由正则性可轻易验证上述等式。根据我们前面提到的内容，有$1 \in \mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X)$。注意，引入 $\mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X)$ 有不同的方法，见 [45, 29] 以及 [23]中的讨论。我们还注意到，由于局部性， $\mathscr{E}$可规范地延拓为一个双线性映射 $\mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X) \times \mathscr{F}_c(X) \to \mathbb{R}$，其中 $\mathscr{F}_c(X)$表示 $\mathscr{F}$中具有紧 $\mathfrak{m}$-支集的元素，其定义为 $\mathscr{E}(f,\phi) := \mathscr{E}(h,\phi)$，其中 $h \in \mathscr{F}(X)$ 满足： $h = f$位于 $\mathfrak{m}$-支集的某个开邻域内。

$\mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X)$中的每个元素都有一个除零测集外唯一确定的准连续代表，我们始终用同一个符号表示它。

强局部性蕴含*Beurling-Deny* 和 *Le Jan*公式

$$\mathscr{E}(f,g) = \int_X \mathrm{d}\Gamma(f,g) \quad \text{for all } f,g \in \mathscr{F}(X),$$

其中，对称的非负双线性映射

$$\Gamma : \mathscr{F}(X) \times \mathscr{F}(X) \longrightarrow \{\text{signed finite Radon measures on } X\},$$

所谓的能量测度 $(X, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(X))$，通过极化定义为

$$\int_X \phi \, \mathrm{d}\Gamma(f,f) = \mathscr{E}(f, \phi f) - \frac{1}{2}\mathscr{E}(f^2, \phi) \quad \text{for all } f \in \mathscr{F}(X) \cap L^\infty(X,\mathfrak{m}), \phi \in \mathscr{F}(X) \cap C_c(X).$$

只要有意义，我们就使用标准记号 $\mathscr{E}(f) := \mathscr{E}(f,f)$和$\Gamma(f) := \Gamma(f,f)$。能量测度具有以下性质：

- Γ不赋予零容量集任何质量 [62, 31],
- Γ 是强局部的，其含义是：对于所有 $U \subset X$ 开集、所有满足 u 在 U上为常数的 $u \in \mathscr{F}(X)$ ，以及所有 $v \in \mathscr{F}(X)$，均有 $1_U \mathrm{d}\Gamma(u, v) = 0$，参见 [62],
- Γ 满足莱布尼茨法则 [62], ，其含义是：对于所有

$$\mathrm{d}\Gamma(uv, w) = u\mathrm{d}\Gamma(v,w) + v\mathrm{d}\Gamma(u,w) \quad \text{for all } u,v \in \mathscr{F}(X) \cap L^\infty(X,\mathfrak{m}),\ w \in \mathscr{F}(X),$$

- Γ 满足链式法则 [62],，其含义是

$$\mathrm{d}\Gamma(\eta \circ u, v) = (\eta' \circ u)\mathrm{d}\Gamma(u,v) \quad \text{for all } u,v \in \mathscr{F}(X),$$

  其中 η 是任意一个在包含 u的 $\mathfrak{m}$-本质像的区间上具有有界导数的 C^1 函数。

- Γ 满足截断性质 [62], ，其含义是

$$\mathrm{d}\Gamma(u \wedge v, w) = 1_{\{u \geqslant v\}}\mathrm{d}\Gamma(u,w) + 1_{\{u<v\}}\mathrm{d}\Gamma(v,w) \quad \text{for all } u,v,w \in \mathscr{F}(X)$$

- Γ满足柯西-施瓦茨不等式

$$\int_X fg\mathrm{d}\Gamma(v,w) \leqslant \sqrt{\int_X f^2 \mathrm{d}\Gamma(v)}\sqrt{\int_X g^2 \mathrm{d}\Gamma(w)} \quad \text{for all } v,w \in \mathscr{F}(X),\ f,g \in \mathscr{F}(X) \cap L^\infty(X,\mathfrak{m}). \tag{2.1}$$

再次利用 Γ 的局部性，能量测度可扩展为一个非负定对称双线性形式

$$\Gamma : \mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X) \times \mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X) \longrightarrow \{\text{signed Radon measures on } X\},$$

也就是说，给定 f_1、 $f_2 \in \mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X)$ 和 $U \Subset X$，定义

$$1_U \mathrm{d}\Gamma(f_1, f_2) := 1_U \mathrm{d}\Gamma(h_1, h_2),$$

其中选择 h_1、 $h_2 \in \mathscr{F}(X)$，使得 $f_j = h_j$在 U上成立。若在这些陈述中将 $\mathscr{F}(X)$ 替换为 $\mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X)$，并相应地将 $L^\infty(X、\ \mathfrak{m})$ 替换为$L^\infty_{\mathrm{loc}}(X、\ \mathfrak{m})$，则上述能量测度的所有性质仍然成立。

为便于今后参考，我们还指出：

引理 2.2. 设 $0 \leqslant w \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(X,\mathfrak{m})$ 并假设存在一个序列 $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 属于 $\mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X)$，使得 $w_k \to w$ 属于 $L^2_{\mathrm{loc}}(X,\mathfrak{m})$，且

$$\sup_k \int_X \mathrm{d}\Gamma(w_k) < \infty.$$

那么 $w \in \mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X)$。

证明。由马尔可夫性质可轻易得出，$0 \leqslant v \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(X,\mathfrak{m})$ 属于 $\mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X)$，当且仅当对所有 $\phi \in C_c(X)\cap\mathscr{F}(X)$，都有 $\phi\wedge v \in \mathscr{F}(X)$。因此，任取$\phi \in C_c(X)\cap\mathscr{F}(X)$，我们对所有 k都有 $\phi\wedge w_k \in \mathscr{F}(X)$，剩下只需证明 $\phi\wedge w \in \mathscr{F}(X)$。为此，我们注意到 $\phi\wedge w_k \to \phi\wedge w$属于 $L^2(X,\mathfrak{m})$。此外，根据截断性质，

$$\mathscr{E}(w_k\wedge\phi) = \int_{\{\phi<w_k\}} \mathrm{d}\Gamma(\phi) + \int_{\{\phi\geqslant w_k\}} \mathrm{d}\Gamma(w_k) \leqslant \mathscr{E}(\phi) + \sup_k \int_X \mathrm{d}\Gamma(w_k).$$

由此可知，$(\phi\wedge w_k)_{k\in\mathbb{N}}$在希尔伯特空间 $(\mathscr{F}(X)$中有界，$\mathscr{E}_1)$。弱紧性意味着它存在一个弱收敛子列。其极限必与 $\phi\wedge w$一致，从而得到$\phi\wedge w \in \mathscr{F}(X)$。□

我们采用以下记号

$$\mathscr{E}_\lambda(u,v) := \mathscr{E}(u,v) + \lambda\langle u,v\rangle,$$

在有意义的情况下，并回顾一下，函数 $f \in \mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X)$ 称为

- 弱 λ次调和，如果

$$\mathscr{E}_\lambda(f,\phi) \leqslant 0 \text{ for all } 0 \leqslant \phi \in \mathscr{F}_c(X). \tag{2.2}$$

- 弱 λ超调和，如果 $-f$ 是弱 λ次调和的，• 弱 λ调和，如果 f 是弱 λ次调和且弱 λ超调和的。

如果 $\lambda = 0$，则只需称为弱（次调和/超调和）性。

引理 2.3。假设 $\lambda \geqslant 0$，且 f_1，$f_2 \in \mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X)$ 是弱 λ-次调和的。那么 $f_1\vee f_2$是弱 λ-次调和的。

证明。鉴于 $f_1\vee f_2 \in \mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X)$，该结论由 [46]中的定理 6.4 (iii) 得出。 □

令 $H \geqslant 0$表示 $L^2(X,\mathfrak{m})$ 中的非负自伴算子，该算子由 $\mathscr{E}$，[42, 31]诱导；并令 $P_t := \mathrm{e}^{-tH}$，其中 $t \geqslant 0$ （通过函数演算定义）。我们将 $P = (P_t; t \geqslant 0)$称为 $L^2(X,\mathfrak{m})$中与之关联的（自伴）热半群。对于所有 $q \in [1,\infty]$，热半群均可扩张为 $L^q(X)$ 上的保正马尔可夫压缩半群；该扩张在 q 中相容（因此，对于不同空间上形式上不同的半群，我们使用同一个符号），对 $q < \infty$ 强连续，并对 $q = \infty$弱-$*$-连续。

令 $\mathscr{B}(X)$ 和 $\mathscr{B}(X$、$\mathfrak{m})$ 分别表示 X 上的博雷尔函数空间以及 X 上博雷尔函数的 $\mathfrak{m}$-等价性空间。我们进一步扩展记号，令

$$P_t f(x) := \lim_{n\to\infty} P_t(f\vee(-n))(x) \in [-\infty,0] \quad \text{for every } 0 \geqslant f \in \mathscr{B}(X,\mathfrak{m}),$$

and

$$P_t f(x) := \lim_{n\to\infty} P_t(f\wedge n)(x) \in [0,\infty] \quad \text{for every } 0 \leqslant f \in \mathscr{B}(X,\mathfrak{m}).$$

令 $\infty_X \notin X$ 是一个墓地点。我们赋予连续路径空间 $\mathscr{W}(X)$

$$[0,\infty) \longrightarrow \hat{X} := X \cup \{\infty_X\}$$

$\hat{}$ 取值于 X 的亚历山德罗夫紧化 X，并赋予由坐标过程诱导的 σ-代数和滤过

$$\mathbb{X} : [0,\infty) \times \mathscr{W}(X) \longrightarrow \hat{X},$$

采用通常的记号 $\mathbb{X}_s := \mathbb{X}(s, \bullet)$。令

$$\theta_s : \mathscr{W}(X) \longrightarrow \mathscr{W}(X), \quad \gamma \longmapsto \gamma(s+\bullet)$$

表示平移算子，并且给定开子集 $V \subset X$，令

$$\tau_V : \mathscr{W}(X) \longrightarrow [0,\infty], \quad \tau_V(\gamma) := \inf\{s \geqslant 0 : \mathbb{X}_s(\gamma) \in X \backslash V\}.$$

由 Fukushima 的一个如今已成为经典的结果 [30] 可知，存在一族定义在 $\mathscr{W}(X)$ 上的扩散测度 $(\mathbb{P}^x)_{x\in X}$，使得对于任意 $f \in \mathscr{B}(X) \cap L^2(X、\ \mathfrak{m})$，都有

$$P_t f(x) = \mathbb{E}^x[f(\mathbb{X}_t)] := \int f(\mathbb{X}_t) \mathrm{d}\mathbb{P}^x \quad \text{for all } t>0, \mathfrak{m}\text{-a.e. } x \in X, \tag{2.3}$$

其中 $f(\infty_X) := 0$。关于拟正则情形，另见 [49]。

设 $U \subset X$ 为一个开子集。在方便时，我们将支集位于 U 之外的函数（以及 $\mathfrak{m}$–等价类）与其在 U 上的限制视为同一对象。通过令，我们得到强局部狄利克雷空间 $(U、\ \mathfrak{m}、\ \mathscr{E}、\ \mathscr{F}(U))$

$$\mathscr{F}(U) = \overline{C_c(U) \cap \mathscr{F}(X)}^{\mathscr{E}_1} = \big\{ f \in \mathscr{F}(X) \,\big|\, f = 0 \text{ q.e in } X\backslash U \big\}.$$

相应的算子、半群和扩散测度分别记为 H^U, P^U, $(\mathbb{P}^x_U)_{x\in X}$。众所周知，对于所有开 $U \subset V \subset X$，有

$$P^U_t f \leqslant P^V_t f \quad \text{for all } t>0,\ 0 \leqslant f \in \mathscr{B}(X,\mathfrak{m}).$$

此外，由于形式的单调收敛定理，[42, 58], 很容易推出

$$P^{U_n}_t f \uparrow P^V_t f \quad \text{as } n\to\infty, \text{for all } t>0,\ 0 \leqslant f \in \mathscr{B}(X,\mathfrak{m}),$$

只要 $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 V的开子集序列，且满足 $U_n \uparrow V$。

3. Locally smoothing spaces

我们汇集了一些经典概念，并根据当前情形稍作调整:

定义 3.1。我们称 [] $(X$的半群 $\mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(X))$ 为

- 超收缩，如果

$$P_t : L^1(X,\mathfrak{m}) \longrightarrow L^\infty(X,\mathfrak{m}) \quad \text{for all } t>0, \tag{3.1}$$

  也就是说，$P_t(L^1(X,\mathfrak{m})) \subset L^\infty(X,\mathfrak{m})$（这又根据闭图定理保证了诱导算子的连续性），

- 双重 *Feller*，如果满足以下映射性质

$$P_t : C_0(X) \longrightarrow C_0(X), \quad \text{for all } t \geqslant 0, \tag{3.2}$$

  and

$$P_t : L^\infty(X,\mathfrak{m}) \longrightarrow C(X) \quad \text{for all } t>0,$$

  并且

$$\lim_{t\to 0+} P_t f(x) = f(x) \quad \text{for all } f \in C_0(X),\ x \in X. \tag{3.3}$$

  Here $C_0(X)$ 表示在无穷远处消失的连续函数族。

- 不可约，若每个满足 $\mathscr{E}(f) = 0$（这等价于 $\Gamma(f) = 0$）的 $f \in \mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X)$ 都是常数。

我们称 [] $(X、\ \mathfrak{m}、\ \mathscr{E}、\ \mathscr{F}(X))$ 的生成元

- 存在谱隙，当且仅当 $H>0$，即 $\inf(\sigma(H))>0$.•具有纯离散谱；如果 H 的谱 $\sigma(H)$ 是纯离散的，也就是说，它由具有有限重数的孤立特征值组成。

下面给出几点简单的说明:

注 3.2. 1. 假设 (3.2) 和 (3.3) 成立。那么，根据 [9] 中的第 51 页练习 I-(9.13)，或 [10], 中的引理 1.4，可得 $P_t:\ C_0(X)\to C_0(X)$, $t>0$ 是强连续的。特别地，还具有如下映射性质

$$(H+\lambda)^{-1}: C_0(X)\longrightarrow C_0(X),\quad \text{for all } \lambda>0,$$

这可由如下表示式推出

$$(H+\lambda)^{-1}f=\int_0^\infty e^{-\lambda t}P_t f\,dt,\quad f\in C_0(X), \tag{3.4}$$

其中，广义黎曼积分在一致范数下收敛。

2. 如果 $(X、\ \mathfrak{m}、\ \mathscr{E}、\ \mathscr{F}(X))$ 具有纯离散谱，那么 $(X、\ \mathfrak{m}、\ \mathscr{E}、\ \mathscr{F}(X))$ 具有谱隙，当且仅当 $\mathrm{Ker}(H)=\{0\}$。

3. 空间 $(X、\ \mathfrak{m}、\ \mathscr{E}、\ \mathscr{F}(X))$ 是不可约的，当且仅当对于每个满足$P_t(1_Y f)=1_Y P_t f$的博雷尔集 $Y\subset X$，对所有 $t>0、\ f\in L^2(X、\ \mathfrak{m})$，都有 $\mathfrak{m}(Y)=0$ 或 $\mathfrak{m}(X\backslash Y)=0$。这等价于如下正性改善性质：对所有 $t>0、\ 0\leqslant f\in L^2(X、\ \mathfrak{m})\backslash\{0\}$，都有 $P_t f>0$。

4. 如果 $(X、\ \mathfrak{m}、\ \mathscr{E}、\ \mathscr{F}(X))$ 是不可约的，那么对所有 $0\leqslant f\in L^2(X、\ \mathfrak{m})\backslash\{0\}、\ \lambda>0$，都有 $(H+\lambda)^{-1}f>0$。这由前述备注和公式 (3.4) 得出，该公式在 L^2–Bochner 意义下对$f\in L^2(X、\ \mathfrak{m})$ 收敛。

5. 由自伴性，(3.1) 等价于

$$P_t: L^1(X,\mathfrak{m})\longrightarrow L^2(X,\mathfrak{m})\quad \text{for all } t>0,$$

特别 地，由谱定理和半群性质可得

$$P_t: L^1(X,\mathfrak{m})\longrightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Dom}(H^n)\quad \text{for all } t>0.$$

我们指出，在双重 Feller 情形下，底层扩散由半群逐点确定:

引理 3.3. 假设 $(X,\mathfrak{m},\mathscr{E},\mathscr{F}(X))$ 是双重 ***Feller*** 的。那么存在唯一确定的扩散测度族 $(\mathbb{P}^x)_{x\in X}$，定义在 $\mathscr{W}(X)$ 上，使得对于每个有界函数$f:\ X\to\mathbb{R}$、每个 $t>0$ 以及每个 $x\in X$，均有

$$P_t f(x)=\mathbb{E}^x[f(\mathbb{X}_t)]. \tag{3.5}$$

此外，还满足绝对连续性条件

$$(\mathbb{X}_t)_*\mathbb{P}^x\ll\mathfrak{m}\quad \textit{for all } t>0,\ x\in X,$$

特别地，对于所有 $q\in[1,\infty]$, $f\in L^q(X,\mathfrak{m})$, $t>0$，函数 $P_t f$ 都有一个逐点良定义的 $\mathfrak{m}$–代表元，由式 *(3.5)* 的右端给出。

证明。这一结果是标准的，可能例外的是这样一个事实：对于每个 $x\in X$，$\mathbb{P}^x$ 都集中在连续路径上（注意，费勒过程的标准理论只能得到集中在右连续左极限路径上的测度）。上述逐点集中性可由以下观察得出：$\mathscr{E}$ 的强局部性意味着这一性质对 $\mathfrak{m}$-几乎处处的 x 成立（事实上是准处处成立，

$x \in X$）；然后结合双重 Feller 性质以及 [31] 中的定理 4.5.4(iii)，即可得出逐点结论。□

定义 3.4。 $(X, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(X))$ 称为局部平滑，如果对所有 $U \Subset X$，都有

- $(U, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(U))$ 是超收缩的，•存在一个开集 $U' \subset X$，满足 $U \subset U'$和 $U' \backslash \overline{U} \neq \varnothing$，使得 $(U', \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(U'))$ 是双重 Feller 且不可约的。

注意，如果 $(X, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(X))$ 是局部平滑的，那么对每个开集 $U \subset X$， $(U, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(U))$ 也具有这一性质。

局部平滑空间具有以下自改进性质：

命题 3.5。 假设 $(X, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(X))$ 是局部平滑的，并令 $U \Subset X$。a) 对所有 $t > 0$，都有

$$P_t^U : L^1(U, \mathfrak{m}) \longrightarrow C_b(U). \tag{3.6}$$

b) $(U$、 $\mathfrak{m}$、 $\mathscr{E}$、 $\mathscr{F}(U))$ 的生成元具有纯离散谱和谱隙。

证明。 (a) 这一结论以多种形式广为人知（参见 [16, 18]）。为方便读者，我们给出详细证明：由半群性质，只需证明对所有 $f \in L^\infty(U, \mathfrak{m})$， $P_t^U f$ 是连续的。为此，取满足 $(U', \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(U'))$ 为双重 Feller 的开集 $U \subset U'$。我们先记录一个标准事实：对所有 $t > 0$，几乎处处的 $\mathfrak{m}$，都有 $x \in U$

$$P_t^U f(x) = \mathbb{E}_{U'}^x[1_{\{t<\tau_U\}} f(\mathbb{X}_t)],$$

并且我们将左端定义为右端逐点取值。由此可知，对所有 $0 < s < t$，根据一个依赖于马尔可夫性质的标准计算（参见 [56] 第 18 页），有

$$P_t^U f(x) - \left(P_s^{U'} P_{t-s}^U f\right)(x) = \mathbb{E}_{U'}^x \left[1_{\{s \geqslant \tau_U\}} \theta_s (1_{\{t-s<\tau_U\}} f(\mathbb{X}_{t-s}))\right] \quad \text{for all } x \in U.$$

因此，

$$\left| P_t^U f(x) - \left(P_s^{U'} P_{t-s}^U f\right)(x) \right| \leqslant \|f\|_\infty \, \mathbb{P}_{U'}^x (s \geqslant \tau_U).$$

由于 $P_s^{U'} P_{t-s}^U f$ 连续，接下来只需证明当 $s \to 0$ 时，$\mathbb{P}_{U'}^x(s \geqslant \tau_U)$ 在 x 中局部一致收敛到 0。然而，这显然是 $(U', \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(U'))$ 的 Feller 性质 (3.2) 的一个众所周知的推论（参见 [19] 中的引理 2.5）。

b) 取开集 $U \subset U'$，使得 $U' \backslash \overline{U} \neq \varnothing$，且 $(U', \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(U'))$ 不可约。由于 P_t^U 映射到 $L^\infty(U, \mathfrak{m})$，并且对于每个 $t > 0$， $\mathfrak{m}(U) < \infty$, P_t^U 都是希尔伯特–施密特算子，参见 [22], 11.2、11.16 以及 [59], 第 418 页中的讨论；因此 H^U 具有纯离散谱。假设 $\varphi_U \in \mathrm{Ker}(H^U)$。我们将证明 $\varphi_U = 0$。由 $\varphi_U \in \mathscr{F}(U) \subset \mathscr{F}(U')$ 且 $\mathscr{E}(\varphi_U) = 0$，根据 $(U', \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(U'))$ 的不可约性可知， φ_U 在 U' 上几乎处处（相对于 $\mathfrak{m}$）为常数。另一方面，$\mathfrak{m}(U' \backslash U) > 0$，并且在 $U' \backslash U$ 中我们有 $\varphi_U = 0$ $\mathfrak{m}$ 几乎处处，因此 $\varphi_U = 0$。

□

下面给出一些局部平滑空间的例子：

例 3.6. 任意黎曼流形： 设 X 是一个连通黎曼流形，带有其 Levi-Civita联络 ∇ 和黎曼体积测度 $\mathfrak{m}$。则

$$\mathscr{E}(f_1, f_2) := \int_X (\nabla f_1, \nabla f_2) \mathrm{d}\mathfrak{m} \tag{3.7}$$

定义域为 $\mathscr{F}(X) = W^{1,\,2}_{0}(X)$ 的通常能量形式，三元组 $(X$、 $\mathfrak{m}$、 $\mathscr{E}$、 $\mathscr{F}(X))$众所周知构成一个强局部狄利克雷空间。在这种情况下，有 $\mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X) = W^{1,\,2}_{\mathrm{loc}}(X)$，并且对所有开集 $U \subset X$都有 $\mathscr{F}(U) = W^{1,\,2}_{0}(U)$，因此受限的强局部狄利克雷空间

对应于狄利克雷边界条件。此外，$(X$、$\mathfrak{m}$、$\mathscr{E}$、$\mathscr{F}(X))$具有局部平滑性：事实上，给定 $U \Subset X$，由热核有 (3.1)，即

$$p^U(t,x,y) \leqslant p(t,x,y),$$

并且 $p(t,x,y)$ 在 (x,y) 中联合光滑（事实上，在 (t,x,y) 中也是如此）。此外，取 $U' \Subset X$ 连通且边界光滑，并满足 $U \subset U'$ 和 $U' \backslash \overline{U} \neq \varnothing$，则有 $(U', \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(U'))$ 是双重 Feller 的，因为 $p^{U'}(t,x,y)$ 是光滑的；又由于狄利克雷边界条件，$P_t^{U'} f$ 在 $\partial U'$ 上连续延拓为零（在此情形下，$P_t^{U'}$：$C_0(U') \to C_0(U')$ 的强连续性是自动满足的）。此外，$(U', \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(U'))$ 是不可约的，因为 U' 的连通性意味着 $p^{U'}(t,x,y) > 0$。

例 3.7. RCD*–空间：</style}设 , d 是一个完备、局部紧且可分的度量测度空间，是定义在 上、具有全支撑且在开球上取有限值的拉东测度；若存在 , 以及一个 Lipschitz 函数序列 ,, 使得函数 , 满足以下条件，则称其为 , 的 松弛斜率

- $f_n \to f$属于 $L^2(X, \mathfrak{m})$，且 $\mathrm{Lip}(f_n) \to \tilde{g}$ 在 $L^2(X, \mathfrak{m})$• $\tilde{g} \leqslant g$ 中弱收敛，

其中

$$\mathrm{Lip}(h)(x) := \limsup_{y \to x} \frac{|h(x) - h(y)|}{\mathsf{d}(x,y)}$$

表示局部 Lipschitz 函数 $h: X \to \mathbb{R}$ 的局部利普希茨常数。若这样的 g 在所有 f 的松弛斜率中具有最小的 L^2-范数，则称其为 f 的 最小松弛斜率，并记作 $|\nabla f|_* := g$。关于 $|\nabla f|_*$ 的等价定义，请读者参见 [1]。对于

$$\mathscr{F}(X) := \{f \in L^2(X, \mathfrak{m}) : f \text{ has a relaxed slope}\},$$

*Cheeger*形式 $\mathscr{E}$ 是定义在 $L^2(X$上的稠密定义泛函，$\mathfrak{m})$ 给出为

$$\mathscr{E}(f) := \int_X |\nabla f|_*^2 \mathrm{d}\mathfrak{m}, \quad f \in \mathscr{F}(X),$$

并且 $(X$，d $\mathfrak{m})$ 称为< стиль id='3'>无穷小希尔伯特性，若 $\mathscr{E}$是一个二次型。在这种情况下，给定f，$g \in \mathscr{F}(X)$ 极限

$$(\nabla f, \nabla g) := \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{1}{2\epsilon} \left(|\nabla(f + \epsilon g)|_*^2 - |\nabla f|_*^2 \right)$$

存在于 $L^1(X$，$\mathfrak{m})$中，并且 $(X$，$\mathfrak{m}$，$\mathscr{E}$，$\mathscr{F}(X))$ 成为一个强局部狄利克雷空间，其中

$$\mathrm{d}\Gamma(f,g) = (\nabla f, \nabla g)\mathrm{d}\mathfrak{m} \quad \text{for all } f, g \in \mathscr{F}(X).$$

在希尔伯特情形下，给定 $N \geqslant 1$，$K \in \mathbb{R}$，若 $(X$，d $\mathfrak{m})$ 是一个RCD*$(K$，$N)$-空间（参见 [27]及其中的参考文献），则

- 每个满足 $|\nabla f|_* \leqslant 1$的 $f \in \mathscr{F}(X)$ 都有一个1-Lipschitz $\mathfrak{m}$代表元，• 有

$$\int_X e^{-\mathsf{d}(x_0,x)^2} \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) < \infty \quad \text{for all } x_0 \in X,\ c > 0,$$

- 对于所有满足 $Hf \in \mathscr{F}(X)$ 的 $f \in \mathrm{Dom}(H)$，以及所有满足$Hg \in L^\infty(X, \mathfrak{m})$ 的 $0 \leqslant g \in \mathrm{Dom}(H) \cap L^\infty(X, \mathfrak{m})$，都有博赫纳不等式

$$-\frac{1}{2}\int_X (Hg)|\nabla f|_*^2 \mathrm{d}\mathfrak{m} + \int_X g \cdot (\nabla(Hf), \nabla f)\mathrm{d}\mathfrak{m} \geqslant K \int_X g|\nabla f|_*^2 \mathrm{d}\mathfrak{m} + \frac{1}{N}\int_X g \cdot (Hf)^2 \mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

这里， H 表示 $L^2(X,\mathfrak{m})$ 中与 $(\mathscr{E},\mathscr{F}(X))$ 相关联的非负自伴算子。如果 $(X,\ \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 是一个 $\mathsf{RCD}^*(K,N)$– 空间，那么该空间满足局部体积倍增假设 [27, 63], ，且 P_t 的热核满足双侧局部李–尧热核界 [37]。由附录中的命题 A.1 可知，此时 $(X,\mathfrak{m},\mathscr{E},\mathscr{F}(X))$ 是局部平滑的。

注意，若 $(X,\ \mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 由完备连通黎曼流形 X诱导而来，则 Cheeger形式等于能量形式，且 $\mathsf{RCD}^*(K,N)$假设等价于 $\mathsf{dim}(X)\leqslant N$ 和 $\mathsf{Ric}\geqslant K$。

例 3.8. 卡诺群：假设 G 是一个单连通李群，其李代数为$\mathfrak{g}$，并且存在 $N\geqslant 1$ 和一个分层

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{V}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{V}_N$$

使得 $[\mathfrak{V}_i,\mathfrak{V}_j]=\mathfrak{V}_{i+j}$ （注意，这种分层在本质上是唯一的 [47]），其中$\mathfrak{V}_k:=\{0\}$，对于 $k>N$。在这种情况下， G 是幂零的，称为卡诺群。令 $\mathfrak{m}$ 表示 G上的Haar测度，并令 $V_1,\ \ldots,\ V_d$表示 $\mathfrak{V}_1$ 的一组基，将其视为 G上的左不变向量场。则对称双线性形式在 $L^2(G,\mathfrak{m})$ 中的闭包 $(\mathscr{E},\mathscr{F}(G))$

$$C_c^\infty(G)\times C_c^\infty(G)\ni(f,g)\longmapsto\int_G\sum_{i,j=1}^d(V_if)(V_jg)\mathrm{d}\mathfrak{m}\in\mathbb{R}$$

使 $(X,\mathfrak{m},\mathscr{E},\mathscr{F}(X))$ 成为一个强局部狄利克雷空间，且

$$\mathrm{d}\Gamma(f,g)=\sum_{i,j=1}^d(V_if)(V_jg)\mathrm{d}\mathfrak{m}\quad\text{for all } f,g\in\mathscr{F}(G).$$

G 上的 Carnot-Carathéodory距离 d 是完备的，并诱导出 G[26], 上的原始拓扑；度量测度空间 $(G,\mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 则成为倍增且 Ahlfors正则的空间， $\mathfrak{m}(\mathsf{B}(x,r))\sim r^Q$，其中

$$Q:=\sum_{i=1}^N i\dim(\mathfrak{V}_i)$$

表示齐次维数。此外，正如 [11]中所示， P_t 的热核满足双边高斯估计：存在 $c_1,c_2,c_3,c_4>0$ ，使得对于所有 $t>0,\ x,y\in G$，都有

$$c_1t^{-Q/2}e^{-c_2\frac{\mathsf{d}(x,y)^2}{t}}\leqslant p(t,x,y)\leqslant c_3t^{-Q/2}e^{-c_4\frac{\mathsf{d}(x,y)^2}{t}}.$$

由附录中的命题 A.1可知， $(G,\mathfrak{m},\mathscr{E},\mathscr{F}(G))$ 是局部平滑的。注意，一般而言， $(G,\mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 并非 RCD^*-空间。事实上， [39] 中已证明，对于海森堡群 $\mathbb{H}_{2m+1}$，不存在一对 (N,K)，使得 $(\mathbb{H}_{2m+1},\mathsf{d}\ \mathfrak{m})$ 成为 $\mathsf{RCD}^*(K,N)$ 空间。

例 3.9. 无界谢尔宾斯基垫片：令 $X\subset\mathbb{R}^2$ 为无界谢尔宾斯基垫片，其通常的图逼近为 $(X_n)\subset X$。那么，取 $\alpha:=\mathsf{log}(3)/\mathsf{log}(2)$ 为 X 的豪斯多夫维数，并取 $\mathfrak{m}$ 为 X 上的 α 维豪斯多夫测度，对称双线性形式

$$\mathscr{E}(f,g):=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n\sum_{x,y\in X_n,x\sim y}(f(x)-f(y))^2,\quad\mathscr{F}(X):=\{f\in L^2(X,\mathfrak{m}):\mathscr{E}(f)<\infty\},$$

将 $(X,\mathfrak{m},\mathscr{E},\mathscr{F}(X))$ 转化为强局部狄利克雷空间。这可由结合 [4] 中的结果与命题 A.2 得出。

4. A new notion of subharmonic functions

本节首先给出以下经典定义，参见 [31, 49]:

定义 4.1。 给定 $\lambda \geqslant 0$，称 $h \in L^1_{\mathrm{loc}}(X\,\mathfrak{m})$ 为

(i) λ–缺陷的，如果对于所有 $t > 0$， $h \leqslant 0$ 且 $e^{-\lambda t} P_t h \geqslant h$；**(ii)** λ–过量的，如果 $-h$ 是 λ–缺陷的。

对于固定符号的次调和函数，以下刻画是众所周知的；如果考虑 $\mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X)$ 中的函数，参见 [31], 定理 2.2。1, [49], 命题 III.1.2。以下结果的要点在于，我们可以去掉这一局部正则性假设。对于 $\lambda = 0$，Sturm 已在 [62], 引理 3 中记录了这是可能的。不过请注意，其中的方法不能直接推广到 $\lambda > 0$ 情形；粗略地说，这是因为它们依赖于 $\mathscr{E}$ 的强局部性（而 $\mathscr{E}_\lambda$ 不具备这种性质）。

定理 4.2。 设 $h \in L^1_{\mathrm{loc}}(X,\ \mathfrak{m})$，并设 $\lambda \geqslant 0$。
(a) 假设 $h \leqslant 0$，并考虑以下性质：(i) h 是弱 λ–次调和的。(ii) 对所有 $f \in \mathscr{F}_c(X)$，都有 $h \vee f \in \mathscr{F}(X)$ 且 $\mathscr{E}_\lambda(h \vee f,\ f - h \vee f) \geqslant 0$.(iii) 对所有 $f \in \mathscr{F}_c(X)$，都有 $h \vee f \in \mathscr{F}(X)$ 且 $\mathscr{E}_\lambda(f,\ f - h \vee f) \geqslant 0$.(iv) 对所有 $f \in \mathscr{F}_c(X)$，都有 $h \vee f \in \mathscr{F}(X)$ 且 $\mathscr{E}_\lambda(h \vee f) \leqslant \mathscr{E}_\lambda(f)$.(v) h 是 λ– 缺陷的。于是有以下蕴含关系：(i)$\Longrightarrow$(ii)$\Longrightarrow$[(iii) 和 (iv)]$\Longleftrightarrow$(v)。(b) 假设 h 是 λ–缺陷的。那么有

$$\begin{aligned} h \in \mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X) &\Longleftrightarrow \exists h^\sharp \in \mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X) : h \geqslant h^\sharp \\ &\Longleftrightarrow \forall V \Subset X\ \exists h^\sharp_V \in \mathscr{F}_c(X) : h|_V \geqslant h^\sharp_V. \end{aligned}$$

特别地，如果 $h \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(X,\ \mathfrak{m})$，那么 $h \in \mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X)$。
（c）如果 h 是 λ–亏缺的，且 h 满足（b）中的某个等价条件，那么 h 是弱λ–次调和的。

证明。我们采用一种与 [57], 第 2.4 节思路相近的方法。
（a）（i）$\Longrightarrow$（ii）：这本质上是“代数”的，我们沿用 [57] 中引理 2.50 的证明。令$f \in \mathscr{F}_c(X)$，并考虑 $V \Subset X$，使得 $\mathrm{supp}(f) \subset V$。注意，根据假设， $h \in \mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X)$，因此存在 $h^\flat \in \mathscr{F}_c(X)$，使得

$$h = h^\flat \text{ on } V.$$

我们可以并且将假设 $h^\flat \leqslant 0$，并注意到

$$h \vee f = h^\flat \vee f \in \mathscr{F}_c(V).$$

鉴于此，在余下的计算中我们省略上标 $^\flat$。由于

$$h \vee f = \frac{1}{2}\left(h + f + |h - f|\right),$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_\lambda(h\vee f)-\mathscr{E}_\lambda(h\vee f,f) &= \mathscr{E}_\lambda(h\vee f,h\vee f-f)\\
&= \frac{1}{4}\mathscr{E}_\lambda\left(f+h+|h-f|,h+|h-f|-f\right)\\
&= \frac{1}{4}\left\{\mathscr{E}_\lambda\left(h+|h-f|\right)-\mathscr{E}_\lambda\left(f\right)\right\}\\
&= \frac{1}{4}\left\{\mathscr{E}_\lambda\left(h\right)+\mathscr{E}_\lambda\left(|h-f|\right)+2\mathscr{E}_\lambda\left(h,|h-f|\right)-\mathscr{E}_\lambda\left(f\right)\right\}\\
&\leqslant \frac{1}{4}\left\{\mathscr{E}_\lambda\left(h\right)+\mathscr{E}_\lambda\left(h-f\right)+2\mathscr{E}_\lambda\left(h,|h-f|\right)-\mathscr{E}_\lambda\left(f\right)\right\}\\
&= \frac{1}{4}\left\{2\mathscr{E}_\lambda\left(h\right)-2\mathscr{E}_\lambda\left(h,f\right)+2\mathscr{E}_\lambda\left(h,|h-f|\right)\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\mathscr{E}_\lambda\left(h,h-f+|h-f|\right)\right\}\\
&= \mathscr{E}_\lambda\left(h,(h-f)_+\right)\leqslant 0,
\end{aligned}$$

因为 h 是弱 λ次调和的，并且

$$0\leqslant (h-f)_+ = h\vee f-f\in\mathscr{F}_c(X).$$

由这一系列不等式可得：

$$\mathscr{E}_\lambda(h\vee f,f)\geqslant\mathscr{E}_\lambda(h\vee f),$$

这就是 (ii)；展开 $f=f-h\vee f+h\vee f$ 可得 (iii)，因为

$$\mathscr{E}_\lambda(f,f-h\vee f)\geqslant\mathscr{E}_\lambda(h\vee f,f-h\vee f)\geqslant 0,$$

而这显然成立。由 (ii) 和 (iii) 可得 (iv)：

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_\lambda(f)-\mathscr{E}_\lambda(h\vee f) &= \mathscr{E}_\lambda(f+h\vee f,f-h\vee f)\\
&= \mathscr{E}_\lambda(f,f-h\vee f)+\mathscr{E}_\lambda(f\vee h,f-h\vee f)\\
&\geqslant 0
\end{aligned}$$

等价性 [(iii) 和 (iv)]$\Longleftrightarrow$(v) 是以下结论的推论：根据[52]中给出的刻画，关于相应二次型的条件刻画了在半群作用下保持不变的凸集。详情如下：给定满足假设的 h，集合

$$K:=\{v\in L^2(X,\mathfrak{m})\mid v\geqslant h\}$$

在 $L^2(X,\mathfrak{m})$ 中是闭凸的，且投影 $\pi\colon L^2(X,\mathfrak{m})\to K$ 由 $\pi f=h\vee f$ 给出。显然，(v) 蕴含与 $\mathscr{E}_\lambda$ 关联的半群（由 $S_t=e^{-\lambda t}P_t$ 给出，其中 $t\geqslant 0$）保持 K 不变。将定理中各性质的以下更强版本记为(

iii') 对所有 $f\in\mathscr{F}(X)$ 有 $h\vee f\in\mathscr{F}\quad(X)$ 且 $\mathscr{E}_\lambda\left(f,f-h\vee f\right)\geqslant 0.$
(iv') 对所有 $f\in\mathscr{F}(X)$，有 $h\vee f\in\mathscr{F}(X)$ 且 $\mathscr{E}_\lambda(h\vee f)\leqslant\mathscr{E}_\lambda(f)$,
(iii')$\Longleftrightarrow$(iv')$\Longleftrightarrow$(v) 可由 [52] 中的定理 2.1 和推论 2.4 得出 .
标准的逼近论证可得 (iv) $\Rightarrow$(iv')，因此我们得到 以下蕴含关系：
(ii) $\Rightarrow$ [(iii) 且 (iv)] $\Rightarrow$ (iv') $\Leftrightarrow$ (v) $\Leftrightarrow$ (iii')，由此证明了 (a)。
（b）对于这两个等价性，还需证明最后一个性质蕴含第一个性质。其他蕴含关系显而易见。设 $V\Subset X$ 和 $h_V^\sharp$ 如所述。则（iii）蕴含 $h\vee h_V^\sharp\in\mathscr{F}(X)$ 和 $h\vee h_V^\sharp=h$ 于 V，从而得到 $h\in\mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X)$。
“特别是”这一结论是因为局部有界函数可在局部由（负的）平衡势从下方控制，见下文。

（c）这是一个标准的半群论证，加上一些逼近论证。只需考虑有界的 h：事实上，

$$\mathscr{E}_\lambda(h,f)=\lim_{n\to\infty}\mathscr{E}_\lambda(h\vee(-n),f)$$

对于任意 $f\in\mathscr{F}_c(X)$，若 $h\vee(-n)$ 是 λ–缺陷的，且 h 也是如此。通过重新缩放，我们可以并且将假设 $h\geqslant -1$。令 $f\in\mathscr{F}_c(X)$、$f\geqslant 0$，并选取 V、W 开集，使得 $\mathrm{supp}(f)\subset V$。令 e_W 为集合 $\overline{W}$ 的 λ–平衡势，见 [31],，其为 λ–过量的。因此，

$$h^\flat:=h\vee(-e_W)$$

其为 λ–缺陷的，在 W 上满足 $h=h^\flat$，并且满足 $h^\flat\in\mathscr{F}(X)$，因为 $-h^\flat$ 是 λ–过量的且 $0\leqslant -h^\flat\leqslant e_W\in\mathscr{F}(X)$。由此可得

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_\lambda(h,f)&=\mathscr{E}_\lambda(h^\flat,f)\\&=-\lim_{t\searrow 0}\left\langle h^\flat,\frac{1}{t}\left(e^{-\lambda t}P_tf-f\right)\right\rangle\\&=-\lim_{t\searrow 0}\left\langle\frac{1}{t}\left(e^{-\lambda t}P_th^\flat-h^\flat\right),f\right\rangle\\&\leqslant 0,\end{aligned}$$

证毕。 □

下面关于黎曼情形中 λ–分布意义下的次调和函数的刻画，为我们在下文定义 4.4 中提出次调和性的新概念提供了蓝本。回忆一下，在带有拉普拉斯-贝尔特拉米算子 Δ 的黎曼流形X上开集 U 中定义的分布 g，若 $(\Delta-\lambda)g=0$ 在 U 上按分布意义成立，则称其为 λ–调和的。根据局部椭圆正则性，这等价于 g 是后一个方程的光滑经典解，因而也等价于 g的弱 λ-调和性。

命题 4.3。 假设 X 是一个连通的黎曼 m流形（按照例 *3.6* 的意义，将其视为一个具有平滑作用的强局部狄利克雷空间），并设 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(X,\ \mathfrak{m})$, $\lambda\geqslant 0$。以下两个性质等价：

(i) $(\Delta-\lambda)f\geqslant 0$ 在分布意义下成立，也就是说，$\langle f,\ (\Delta-\lambda)\phi\rangle\geqslant 0$ 对所有 $0\leqslant\phi\in C_c^\infty(X)$ 均成立，(ii) 对所有 $U\Subset X$，存在一个定义在 U 上的 λ–调和函数 $g\in C_b(U)$，使得对所有 $t>0$ 均有 $e^{-t\lambda}P_t^U(f|_U-g)\geqslant f|_U-g$。

证明。 首先注意，在上述情形下，对所有 $t>0$，$e^{-t\lambda}P_t^U(f|_U-g)\geqslant f|_U-g$ 等价于

$$t\mapsto e^{-t\lambda}P_t^U(f|_U-g)\quad\text{ is increasing in }t>0.$$

(i) ⇒ (ii)：根据 [8]中的定理 D 或定理 3.2，我们可以选取开且光滑的邻域 $U\Subset U'\Subset U\Subset X$ 以及一个序列 $(f_k)\in C^\infty(U)$，使得

- $f_k|_{U'}\searrow f|_{U'}$，
- $\Delta f_k-\lambda f_k\geqslant 0$ 属于 U，
- $\sup_{U'}f_k|_{U'}\leqslant\sup_{U'}f|_{U'}+1$，对所有 k均成立。

注意，第一条性质通过控制收敛可推出 $f_k\to f|_{U'}$属于 $L^1(U')$，并且 f 可以取为上半连续。根据后一事实，我们可以选取 $c\in\mathbb{R}$，使得$f|_{U'}\leqslant c/2$ 且 $f_k|_{U'}\leqslant c$。令 $\tilde{g}$ 为下列方程的一个解：

$$\begin{cases}(\Delta-\lambda)\tilde{g}=0 & \text{on } U'\\ \tilde{g}|_{\partial U'}=c\end{cases}$$

并令 $h:=f|_{U'}-\tilde{g}$。我们有 $h_k:=f_k|_{U'}-\tilde{g}$在 U'上是 λ次调和的，并且 $h_k\leqslant 0$在$\partial U'$上。因此，根据（弱）最大值原理， $h=\lim_{k\to\infty}h_k\leqslant 0$在 U'上成立。此外， $h_k\to h$属于$L^1(U')$。令 $0\leqslant\phi\in C_c^\infty(U')$。对于所有 $t>0$，有

$$\begin{aligned}(d/dt)\left\langle e^{-\lambda t}P_t^{U'}h,\phi\right\rangle&=\left\langle(\Delta-\lambda)e^{-\lambda t}P_t^{U'}h,\phi\right\rangle=\left\langle e^{-\lambda t}P_t^{U'}h,(\Delta-\lambda)\phi\right\rangle\\&=\left\langle h,e^{-\lambda t}P_t^{U'}\left(\Delta\phi-\lambda\phi\right)\right\rangle=\left\langle h,(\Delta-\lambda)e^{-\lambda t}P_t^{U'}\phi\right\rangle.\end{aligned}$$

由于 $\Delta e^{-\lambda t}P_t^{U'}\phi=e^{-\lambda t}P_t^{U'}\Delta\phi$有界，后者是

$$=\lim_k\left\langle h_k,\Delta e^{-\lambda t}P_t^{U'}\phi-\lambda e^{-\lambda t}P_t^{U'}\phi\right\rangle.$$

接下来我们证明

$$\left\langle h_k,\Delta e^{-\lambda t}P_t^{U'}\phi-\lambda e^{-\lambda t}P_t^{U'}\phi\right\rangle\geqslant 0\quad\text{for all }k.$$

为此，我们计算

$$\begin{aligned}\left\langle h_k,\Delta e^{-\lambda t}P_t^{U'}\phi-\lambda e^{-\lambda t}P_t^{U'}\phi\right\rangle&=\int_{\partial U'}h_k\partial_\nu\left(e^{-\lambda t}P_t^{U'}\phi\right)\mathrm{d}\sigma-\int_{U'}(\nabla h_k,\nabla e^{-\lambda t}P_t^{U'}\phi)\mathrm{d}\mathfrak{m}\\&\quad-\int_{U'}\lambda h_ke^{-\lambda t}P_t^{U'}\phi\mathrm{d}\mathfrak{m}\\&\geqslant-\int_{U'}(\nabla h_k,\nabla e^{-\lambda t}P_t^{U'}\phi)\mathrm{d}\mathfrak{m}-\int_{U'}\lambda h_ke^{-\lambda t}P_t^{U'}\phi\mathrm{d}\mathfrak{m}\\&=\int_{U'}(\Delta h_k-\lambda h_k)e^{-\lambda t}P_t^{U'}\phi\mathrm{d}\mathfrak{m}-\int_{\partial U'}(e^{-\lambda t}P_t^{U'}\phi)\partial_\nu h_k\mathrm{d}\sigma\\&\geqslant 0,\end{aligned}$$

其中，在第一个不等式中我们使用了 $h_k\leqslant 0$和 $\partial_\nu e^{-\lambda t}P_t^{U'}\phi\leqslant 0$（因为 $e^{-\lambda t}P_t^{U'}\phi\geqslant 0$），在最后一个不等式中，我们在 $\partial U'$上使用了 $e^{-\lambda t}P_t^{U'}\phi=0$，并结合了 U'上的 $(\Delta-\lambda)h_k\geqslant 0$和 $P_t^{U'}\phi\geqslant 0$。因此，我们证明了对所有 $t>0$都有 $e^{-\lambda t}P_t^{U'}(f|_{U'}-\tilde{g})\geqslant f|_{U'}-\tilde{g}$。由于 $P_t^{U'}\to 0$当$t\to\infty$在 $L^1(U$中强收敛于 $\mathfrak{m})$（详细论证见下文引理 4.6(b)的证明），我们有 $f|_{U'}-\tilde{g}\leqslant 0$。因此，

$$e^{-\lambda t}P_t^U(f|_U-\tilde{g}|_U)\geqslant e^{-\lambda t}P_t^{U'}(f|_{U'}-\tilde{g})\quad\text{on }V,$$

令 $g:=\tilde{g}|_U$，即可得出该结论。

(i) $\Leftarrow$ (ii)：任取 $U\Subset X$，并根据假设选取 U 上的一个 λ–调和函数 g。我们有 $e^{-\lambda t}P_t^U(f|_U-g)\to f|_U-g$属于 $L^1(U,\mathfrak{m})$，因此 $e^{-\lambda t}P_t^U(f|_U-g)\to f|_U-g$与 $t\to 0+$在分布意义下相等。由于

$$(\Delta-\lambda)e^{-\lambda t}P_t^U(f|_U-g)=\partial_te^{-\lambda t}P_t^U(f|_U-g)\geqslant 0,$$

由于 $e^{-\lambda t}P_t^U(f|_U-g)$关于 t递增，因此对所有 $0\leqslant\phi\in C_c^\infty(U)$，有

$$\begin{aligned}\int_Uf(\Delta\phi-\lambda\phi)\mathrm{d}\mathfrak{m}&=\int_U(f-g)(\Delta\phi-\lambda\phi)\mathrm{d}\mathfrak{m}=\lim_{t\to 0+}\left\langle e^{-\lambda t}P_t^U(f|_U-g),\Delta\phi-\lambda\phi\right\rangle\\&=\lim_{t\to 0+}\left\langle(\Delta-\lambda)e^{-\lambda t}P_t^U(f|_U-g),\phi\right\rangle\geqslant 0,\end{aligned}$$

证明完毕。 □

前一个结果引出了以下问题：

定义 4.4。 设 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(X,\mathfrak{m})$, $\lambda\geqslant 0$。我们称 f 为

- 局部 λ–平移缺陷的，如果对所有 $U \Subset X$ ，都存在一个弱 λ–调和函数$g \in C_b(U)$ ，使得

$$e^{-t\lambda} P_t^U(f|_U - g) \geqslant f|_U - g \quad \text{for all } t > 0, \tag{4.1}$$

- 局部 λ–移位过量，如果 $-f$ 是局部 λ–移位缺陷的。

若 $\lambda = 0$，那么我们就简称为“局部移位缺陷（过量）”。

注 4.5. 1. 我们强调，上述定义不要求 f 具备任何先验正则性，只需满足某种相当弱的 L^1_{loc}条件。

2. 请注意，在局部 λ–移位缺陷的定义中，我们没有明确要求$f|_U - g \leqslant 0$。不过，在局部平滑情形下，后者将自动成立（参见下文的传递原理）。换言之，在局部平滑情形下， $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathfrak{m})$ 是局部 λ–移位缺陷的，当且仅当对于所有 $U \Subset X$ ，都存在一个 λ–调和函数$g \in C_b(U)$，使得 $f|_U - g$在 U中是 λ–缺陷的，因此 $f|_U - g \leqslant 0$。这也说明了“局部 λ–移位缺陷”这一名称的由来。

3. 函数 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathfrak{m})$ 显然是局部 λ–移位缺陷函数，当且仅当 $f|_U$ 是局部λ–移位缺陷函数，对每个 $U \Subset X$,均成立；也就是说，相对于 $(U, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(U))$而言。此外，局部 λ–移位缺陷函数的类在求和、乘以正数以及减去常数时保持不变。

对于局部平滑空间，我们得到以下结果，它将使我们能够把带符号函数的结果传递到变号函数：

引理 4.6。 **(传递原理)** 设 $(X, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(X))$ 均为局部平滑且 $\lambda \geqslant 0$。(a) 对每个 $c \in \mathbb{R}$, $U \Subset X$ ，都存在一个 $g \in C_b(U)$ ，它在 U 上弱 λ-调和，且满足 $g \geqslant c$。(b) 若 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathfrak{m})$ 是局部 λ–移位缺陷函数，则取定义 ***4.4*** 中的 U, g，有$f|_U - g \leqslant 0$。

证明。(a) 取一个开集 $U' \subset X$，使得 $U \Subset U'$ 和 $U' \backslash \overline{U} \neq \varnothing$，并且使得 $(U'、\ \mathfrak{m}、\ \mathscr{E}、\ \mathscr{F}(U'))$ 是双重 Feller 且不可约的。取 $0 \leqslant \psi \in C_c(U') \backslash \{0\}$，满足 $\mathrm{supp}(\psi) \subset U' \backslash \overline{U}$。

首先假设 $\lambda > 0$。那么我们可以定义

$$0 < h := (H^{U'} + \lambda)^{-1} \psi \in C_0(U') \cap \mathrm{Dom}(H^{U'}).$$

由于 h 连续，且 U 的闭包是 U' 的紧子集，因此 $\inf h|_U > 0$，所以存在某个 $a > 0$ 使得 $c \leqslant g := a \cdot h|_U \in C_b(U) \cap \mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(U)$，并且给定 $\phi \in \mathscr{F}_c(U)$ ，我们有

$$\mathscr{E}(g, \phi) + \lambda \langle g, \phi \rangle = a\mathscr{E}(h, \phi) + \lambda a \langle h, \phi \rangle = a\langle H^{U'} h, \phi \rangle + a\lambda \langle h, \phi \rangle = a \langle \psi, \phi \rangle = 0.$$

对于 $\lambda = 0$，我们只需取一个常函数。

(b) 对所有 $t \geqslant 1$ ，我们有

$$e^{-t\lambda} P^U_{t-1} P^U_1 (f|_U - g) \geqslant f|_U - g,$$

其中 $P^U_1(f|_U - g) \in L^2(U、\ \mathfrak{m})$。由谱演算可知， P^U_s 在 $s \to \infty$ 时于 $L^2(U$ 中强收敛，$\mathfrak{m})$ 收敛到投影到 $\mathrm{Ker}(H^U)$ 上；后一个空间等于 $\{0\}$，因为 H^U 有谱隙。□

我们继续：

引理 4.7。 （逼近引理） 假设 $(X,\ \mathfrak{m},\ \mathscr{E},\ \mathscr{F}(X))$ 是局部平滑的，且 $\lambda \geqslant 0$。设 f 是局部 λ–移位缺陷的。

给定 $U \Subset X$，按照定义 ***4.4*** 选取一个在 U 上的弱 λ–调和函数 $g \in C_b(U)$ 。那么，对于每个 $k \in \mathbb{N}$,

$$f^U_k := e^{-\lambda/k} P^U_{1/k}(f|_U - g) + g \in \mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(U) \cap C_b(U)$$

是局部 λ–平移缺陷且弱 λ–次调和的，并且有 $f_k^U \downarrow f|_U$ $\mathfrak{m}$-几乎处处成立，因此$f_U^\bullet$：$=$下确界 $_{k\in\mathbb{N}} f_k^U$是 $f|_U$ 的一个上半连续（*u.s.c.*） $\mathfrak{m}$-代表。特别地，函数 f 有一个上半连续的 $\mathfrak{m}$-代表。

证明。 设 $V \Subset U$。我们有

$$e^{-\lambda t}P_t^V(f_k^U|_V - g|_V) = e^{-\lambda t}P_t^V\left(e^{-\lambda/k}(P_{1/k}^U(f|_U - g))|_V\right) \geqslant \left(e^{-\lambda t}P_t^U(e^{-\lambda/k}P_{1/k}^U(f|_U - g))\right)|_V$$
$$= \left(e^{-\lambda(t+1/k)}P_{t+1/k}^U(f|_U - g)\right)|_V \geqslant \left(e^{-\lambda/k}P_{1/k}^U(f|_U - g)\right)|_V = f_k^U|_V - g|_V,$$

其中，第一次估计用到了 $f|_U - g \leqslant 0$ （传递原理的 (b) 部分），并且 f 是局部 λ–移位缺陷的。因此， f_k^U是局部 λ–移位缺陷的。由于 $f_k^U - g \leqslant 0$ 连续且具有 λ–缺陷，根据定理 4.2 (c)，它是弱 λ–次调和的。该序列在 U上逐点单调递减地收敛，且极限函数是上半连续的，并且与 $f|_U$在 $\mathfrak{m}$几乎处处相同。

“特别地”的结论可通过单位分解论证得到。 □

利用传递原理，我们可以得到以下与定理 4.2 类似的结果，此处适用于变号函数：

定理 4.8。 设 $\lambda \geqslant 0$，并且 $(X,\ \mathfrak{m},\ \mathscr{E},\ \mathscr{F}(X))$ 均为局部平滑的。
(a) 若 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X,\mathfrak{m})$ 是局部 λ–移位缺陷的，且属于 $\mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X)$，则 f 是弱 λ–次调和的。特别是，若 $f \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(X,\mathfrak{m})$ 是局部 λ–移位缺陷的，则 f 是弱 λ–次调和的(b) 若 $f \in \mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X)$ 是弱 λ–次调和的，且局部上有界，则 f 是局部 λ–移位缺陷的。

证明。 (a) 任取 $U \Subset X$，并取满足定义 4.4 的 g。由传递原理， $f|_U - g \in \mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(U)$在 U 上是 λ–缺陷的；将定理 4.2(c) 应用于 U 上的 $h = f|_U - g$ （而非 X），可知该函数在 U 上是弱 λ–次调和的，因此 $f|_U = f|_U - g + g$在 U 上是弱 λ–次调和的。

(b) 令 $U \Subset X$ 为任意函数，并选取满足 $f|_U \leqslant c$ 的 $c \in \mathbb{R}$。利用传递原理，选取在 U 上弱 λ–调和的 $g \in C_b(U)$，且满足 $g \geqslant c$。于是 $f|_U - g \leqslant 0$ 在U 上弱 λ–次调和，因此将定理 4.2 (a) 应用于 U 上的 $h = f|_U - g$，可得

$$e^{-\lambda t}P_t^U(f|_U - g) \geqslant f|_U - g,$$

证明至此完成。 □

注 4.9。 前一定理 (b) 中所要求的局部上有界性，通常可以由椭圆或抛物子解估计推出；这些估计在空间满足一些温和的局部假设时成立。据我们所知，关于这一点最一般的结果可参见 [48] 中的定理 4.7：在假设空间 $(X,\mathfrak{m},\mathscr{E},\mathscr{F}(X))$ 满足如下性质的条件下——在每个 $U \Subset X$ 上，有限尺度范围内均满足体积加倍和 Poincare 不等式——抛物子解估计成立，由此可知，每个弱 λ-次调和函数都自动局部上有界。事实上，若 f 是弱 λ-次调和的，那么根据引理 2.3， f_+ 也是如此；接着将 [48] 中的定理 4.7 应用于 $(t,x) \mapsto e^{-t\lambda}f_+(x)$，即可得出，在这样的空间上， f_+ 自动局部有界，因此 f 局部上有界。这适用于上述所有局部光滑空间的例子。

5. λ-平移缺陷函数的 Kato-Brezis 定理与正则性

本节从以下局部 λ–移位缺陷函数的概率刻画开始：

命题 5.1. 假设 $(X, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(X))$ 是局部平滑的，且 $\lambda \geqslant 0$。函数 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathfrak{m})$ 是局部 λ–移位缺陷的，当且仅当对所有 $U \Subset X$，都存在 $f|_U$ 的一个 ***u.s.c***$\mathfrak{m}$-代表元 $f^\bullet_U$，使得对于所有满足 $U \backslash \overline{V} \neq \varnothing$ 的 $V \Subset U$，都有

$$\mathbb{E}^x_U \left[e^{-\lambda \tau_V} f^\bullet_U(\mathbb{X}_{\tau_V}) \right] \geqslant f^\bullet_U(x) \text{ for q.e. } x \in V. \tag{5.1}$$

证明基于 Chen 和 Kuwae 的以下技术性结果，该结果在任意强局部狄利克雷空间上成立，并且可通过将定理 2.9 应用于 [17]（另见[14]）中的狄利克雷型（该狄利克雷型由 λ 平移而得）得到；注意，其中的结果适用于非局部狄利克雷型:

引理 5.2。函数 $h \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(X)$ 是弱 λ-次调和的，当且仅当对于所有满足 $X \backslash \overline{V} \neq \varnothing$ 的 $V \Subset X$，都有

$$\mathbb{E}^x \left[e^{-\lambda \tau_V} h(\mathbb{X}_{\tau_V}) \right] \geqslant h(x) \text{ for q.e. } x \in V. \tag{5.2}$$

注意，如果 $h \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(X)$ 是弱 λ-调和的，则在（5.2）中得到等式。

命题 *5.1* 的证明。 $\Rightarrow$: 令 $U \Subset X$。考虑来自逼近引理 4.7 的函数 g、f^U_k、$f^\bullet_U$。对于每个 $k \in \mathbb{N}$，函数 $f^U_k - g \leqslant 0$ 在 U 上是连续的且为 λ– 缺陷的，特别地，根据定理 4.2(c)，其在 U 上是弱 λ-次调和的。利用前述引理及 $h = f^U_k - g$ 可得

$$\mathbb{E}^x_U \left[e^{-\lambda \tau_V} (f^U_k - g)(\mathbb{X}_{\tau_V}) \right] \geqslant (f^U_k - g)(x) \text{ for q.e. } x \in V.$$

对于 $k \to \infty$，我们得到

$$\mathbb{E}^x_U \left[e^{-\lambda \tau_V} (f^\bullet_U - g)(\mathbb{X}_{\tau_V}) \right] \geqslant (f^\bullet_U - g)(x) \text{ for q.e. } x \in V,$$

利用前述引理和 $h = g$，可得

$$\mathbb{E}^x_U \left[e^{-\lambda \tau_V} g(\mathbb{X}_{\tau_V}) \right] = g(x) \text{ for q.e. } x \in V, \tag{5.3}$$

从而证明了 (5.1)。

$\Leftarrow$: 对于给定的 $U \Subset X$，函数 $f^\bullet|_U$ 有上界。如上所述，我们可以选取一个弱λ–调和函数 $g \in C_b(U)$，使得在 U 上 $f^\bullet|_U - g \leqslant 0$。给定满足 $U \backslash \overline{V} \neq \varnothing$ 的 $V \Subset U$，关于 f 的假设连同 (5.3) 蕴含

$$\mathbb{E}^x_U \left[e^{-\lambda \tau_V} (f^\bullet_U - g)(\mathbb{X}_{\tau_V}) \right] \geqslant f^\bullet_U(x) - g(x), \text{ for q.e. } x \in V.$$

对于任意的 $n \in \mathbb{N}$，这意味着

$$\mathbb{E}^x_U \left[e^{-\lambda \tau_V} \left((f^\bullet_U - g) \vee (-n) \right) (\mathbb{X}_{\tau_V}) \right] \geqslant (f^\bullet_U(x) - g(x)) \vee (-n), \text{ for q.e. } x \in V.$$

因此，根据前述引理，局部有界函数 $(f^\bullet_U - g) \vee (-n)$ 在 U 上是弱 λ–次调和的。由定理 4.2(a) 可知，$(f^\bullet_U - g) \vee (-n)$ 在 U 上是 λ–亏损的。由于这对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都成立，我们得到 $f^\bullet_U - g$ 在 U 上是 λ–亏损的。□

如上所述，引理 5.2 是 [17]中定理 2.9 的推论。后者在先验假设函数属于L^∞_{loc}的条件下，对弱 λ-次调和性给出了概率刻画。该假设在 [17] 中部分用于验证必要的可测性性质，并确保（5.2）左端的期望有定义。需要指出的是，证明通过一个中间步骤，以次鞅性质的形式给出刻画。

请注意，在命题 5.1 中我们并未作出 L^∞_{loc} 假设，而是在引理 5.2 等价性的一个方向上，用局部 λ 移位缺陷假设取代了弱 λ 次调和性假设。主要原因是，根据空间上的局部光滑化假设，我们得到了一个上半连续的 $\mathfrak{m}$ 代表元。定理 2.9 在 [17], 中的主要优势

然而，显而易见，这一结果最引人注目的特点在于它适用于非局部形式（只需满足一些较弱的附加正则性假设）。
作为命题 5.1 的一个应用，我们立即得到 Kato 著名不等式的一个推论的如下推广： [41], 中的引理 A 指出，对于所有满足 $\Delta f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 的 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，都有

$$\Delta|f| \geqslant \operatorname{sign}(f)\Delta f \tag{5.4}$$

在分布意义下。这立即给出

$$\Delta f_+ \geqslant 1_{\{f\geqslant 0\}}\Delta f. \tag{5.5}$$

后来，Brezis 和 Ponce 在文章 [13] 中将其推广并加强（详见 Ancona 的综述 [3] ），使其适用于 Δf 为拉东测度的情形。无需赘言，为确保 (5.4) 和 (5.5) 的右端是定义良好的分布，需要对 Δf 作出一定的正则性假设。后一估计的一个直接推论是， Δf_+ 是一个正分布，换言之， f_+ 在分布意义下是次调和的。值得注意的是，利用迄今为止得到的结果，我们在一般情形下得到了对陈述 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ 在分布意义下是次调和的 $\Rightarrow$ f_+ 在分布意义下是次调和的的大幅强化；在这种情形下，测试函数和分布都无从谈起。事实上，以下结果可由命题 5.1 立即推出：

定理 5.3。 （Kato-Brezis）假设 $(X, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(X))$ 具有局部平滑性，且 $\lambda \geqslant 0$。若 $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathfrak{m})$ 是局部 λ–移位缺陷的，则 $f \vee g$也是如此。若 $0 \leqslant f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathfrak{m})$ 是局部 λ–移位缺陷的，则 f 是局部移位缺陷的。

读者可以在关于黎曼流形的 [54] 和关于卡诺群的 [20] 中找到类似的陈述。

作为上述定理的第一个应用，我们将证明：

定理 5.4。 （正则性定理）设 $(X, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(X))$ 具有局部平滑性，设 $\lambda \geqslant 0$，且设 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathfrak{m})$ 是局部 λ-移位缺陷的。于是，对每个 $c \geqslant 0$， $q > 1$ ，都有$(f-c)_+^{q/2} \in \mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X),$ ；当 $q \geqslant 2$ 时，此函数是弱次调和的。

证明。 函数 $f - c$ 是局部 λ-移位缺陷的，因此根据 Kato-Brezis， $(f-c)_+$ 是局部 λ-移位缺陷的。于是我们可以假设 $c = 0$ 和 $f \geqslant 0$。然后，再次根据 Kato-Brezis， f 是局部移位缺陷的。由于 f 具有一个 u.s.c. $\mathfrak{m}$-代表元， f 局部上有界（并且根据 $f \geqslant 0$ 局部有界），因此根据定理 4.8 (a) 是弱次调和的。由此，根据链式法则立即得到，对于 $q \geqslant 2$ ，函数 $f^{q/2}$ 也是弱次调和的（参见 [62] 中引理 2 a) 的证明中的计算）。
对于任意的 $q > 1$ ，我们按如下方式证明 $f^{q/2} \in \mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X)$: 任取 $V \Subset X$ ，并选取满足 $V \Subset U \Subset X$ 的 U。我们还选取满足 $1_V \leqslant \phi \leqslant 1_U$ 的 $0 \leqslant \phi \in C_c(U) \cap \mathscr{F}(U)$，以及引理 4.7 中的一个序列 $\left(f_k^U\right)_{k\in\mathbb{N}}$，并为方便记号，令 $0 \leqslant f|_U \leqslant f_k := f_k^U \in \mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(U) \cap C_b(U)$。如有必要，将 f_k 替换为 $f_k + 1/k$，则可假设 $f_k > 0$，且仍有 $f_k \downarrow f|_U$。由链式法则可得 $f_k^{q-1} \in \mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(U)$，因此

$$0 \leqslant \psi_k := \phi^2 f_k^{q-1} \in \mathscr{F}(U) \cap C_c(U)$$

是一个测试函数。由于 f_k 是弱次调和的，

$$\begin{aligned} 0 \geqslant \mathscr{E}(f_k, \psi_k) &= \int_U \mathrm{d}\Gamma(f_k, \phi^2 f_k^{q-1}) \\ &= \int_U \phi^2 \mathrm{d}\Gamma(f_k, f_k^{q-1}) + \int_U f_k^{q-1} \mathrm{d}\Gamma(f_k, \phi^2) \\ &= (q-1)\int_U \phi^2 f_k^{q-2} \mathrm{d}\Gamma(f_k) + 2\int_U f_k^{q-1}\phi \mathrm{d}\Gamma(f_k, \phi), \end{aligned}$$

此处用到了链式法则。对第二项应用柯西-施瓦茨不等式 (2.1)，并取

$$v = f_k, \quad w = \phi, \quad f = \phi f_k^{q/2-1}, \quad g = f_k^{q/2},$$

可得，对于 $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} 2\left|\int_U f_k^{q-1}\phi \mathrm{d}\Gamma(f_k, \phi)\right| &\leqslant 2\left(\int_U \phi^2 f_k^{q-2}\mathrm{d}\Gamma(f_k)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_U f_k^q \mathrm{d}\Gamma(\phi)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \epsilon\int_U \phi^2 f_k^{q-2}\mathrm{d}\Gamma(f_k) + \frac{1}{\epsilon}\int_U f_k^q \mathrm{d}\Gamma(\phi) \end{aligned}$$

当 $\epsilon > 0$ 足够小时（仅取决于 q），我们可推出

$$0 \geqslant (q-1-\epsilon)\int_U \phi^2 f_k^{q-2}\mathrm{d}\Gamma(f_k) - \epsilon^{-1}\int_U f_k^q \mathrm{d}\Gamma(\phi),$$

利用链式法则

$$\mathrm{d}\Gamma(f_k^{q/2}) = \frac{q^2}{4} f_k^{q-2}\mathrm{d}\Gamma(f_k),$$

最终得到其中的第二个估计

$$\int_V \mathrm{d}\Gamma(f_k^{q/2}) \leqslant \int_U \phi^2 \mathrm{d}\Gamma(f_k^{q/2}) \leqslant \frac{q^2}{4\epsilon(q-1-\epsilon)}\int_U f_k^q \mathrm{d}\Gamma(\phi) \leqslant \frac{q^2}{\epsilon(q-1-\epsilon)}\int_U f_1^q \mathrm{d}\Gamma(\phi),$$

后一个表达式是有限的，因为 $f_1^q \in L^\infty(U, \mathfrak{m})$。最后，应用引理 2.2，并取 $w_k := f_k^{q/2}|_V$,，我们可以得出结论 $f^{q/2}|_V \in \mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(V)$,，因为显然 $w_k \to f^{q/2}|_V$在 $L^2_{\mathrm{loc}}(V, \mathfrak{m})$中（事实上，在$L^2(V, \mathfrak{m})$中）。□

6. 最大值原理

本节的主要结果如下:

定理 6.1 (最大值原理**)**。 设 $(X, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(X))$ 均为局部平滑，且 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathfrak{m})$。

a) 如果 f 是局部移位缺陷的，那么对于每个 $V \Subset X$，都存在一个定义在 $\overline{V}$ 上的 $f|_V$ 的上半连续 $\mathfrak{m}$-代表元 $f_V^\bullet$，使得

$$\sup_{\overline{V}} f_V^\bullet = \sup_{\partial V} f_V^\bullet.$$

b) 如果 $\lambda \geqslant 0$，且 f 是局部 λ–移位亏缺的，那么对于每个 $V \Subset X$，存在一个上半连续的 $\mathfrak{m}$-代表元 $f_{+,\,V}^\bullet$ 在 $\overline{V}$ 上属于 $f_+|_V$，使得

$$\sup_{\overline{V}} f_{+,V}^\bullet = \sup_{\partial V} f_{+,V}^\bullet.$$

注意，b) 部分可由 a) 部分立即推出，因为根据 Kato-Brezis 定理， f_+ 是局部移位亏缺的。还要注意，根据命题 5.1 可立即得到

$$f_V^\bullet \leqslant \sup_{\partial V} f_V^\bullet \quad \text{q.e. in } V.$$

从这个意义上说，定理 6.1 的要点是证明可以保证得到这种形式的逐点不等式。

定理 *6.1 a)* 的证明。根据局部移位缺陷性的定义，很容易看出，只需证明：对于每个定义在 V 的某个开邻域 $U \Subset X$ 内的缺陷函数 h，都存在一个 $\mathfrak{m}$- 代表元 $h^\bullet$，使得

$$\sup_{\partial V} h^\bullet \geqslant \sup_V h^\bullet.$$

由于 $P_t^U h(x)$ 在 x 上连续且关于 t 单调递增，我们定义

$$h^\bullet := \lim_{n\to\infty} P_{1/n}^U h.$$

反设存在 $\bar{x} \in V$，使得 $h^\bullet(\bar{x}) > \sup_{\partial V} h^\bullet$。我们选取$\delta_1$、 $\delta_2 \in \mathbb{R}$，使得

$$h^\bullet(\bar{x}) > \delta_1 > \delta_2 > \sup_{\partial V} h^\bullet.$$

由于 $h^\bullet$ 是上半连续的，因此在 V 中 ∂V 的某个开邻域 $N_{\partial V}$ 内有 $h^\bullet < \delta_2$；并且，通过选取更小的集合，我们总可以假设

$$h^\bullet \leqslant \delta_2 \text{ in } \overline{N_{\partial V}}.$$

我们声称，通过对 Dini 定理证明的一种变式，存在足够小的 $t_0 > 0$，使得对所有 $0 < t < t_0$,

$$P_t^U h < \delta_1 \text{ in } \overline{N_{\partial V}}.$$

事实上，令

$$E_t := \{x \in \bar{V} : P_t^U h < \delta_1\}.$$

由于 h 有缺陷，对于 $t > s$， $E_t \subseteq E_s$，由逐点收敛可得

$$\overline{N_{\partial V}} \subset \bigcup_{t>0} E_t.$$

因此，对于某个足够小的 t_0，有 $E_{t_0} \supset N_{\partial V}$，所声称的性质便得证。另一方面

$$P_t^U h(\bar{x}) \geqslant h^\bullet(\bar{x}) > \delta_1.$$

现在， $P_t^U h$在 U上以及在 $\mathscr{F}(U) \cap C_b(U)$中有缺陷。因此，定理 4.2 (c) 蕴含 $P_t^U h$，进而 $u := P_t^U h - \delta_1$ 是弱次调和的。由于 $u \leqslant 0$ 在 $\bar{V}\backslash Y$中，其中 $Y := \bar{V}\backslash N_{\partial V}$，由 [62, 引理 4] 的弱最大值原理可得， $u \leqslant 0$ 在 V 上。特别地,

$$P_t^U h(\bar{x}) \leqslant \delta_1.$$

矛盾由此完成证明。

□

例 6.2. 假设 $(X, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(X))$ 来自某个 RCD$^*(0, N)$ 空间，其中 $N \geqslant 1$ 满足某些条件，见上文例 3.7。由于 $|\nabla \cdot|_*$ 是局部的，因此对 $f \in \mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X)$ 也可以定义 $|\nabla f|_*$。令 f 对某个 $\lambda \geqslant 0$ 弱 λ-调和，且 $\lambda f \in L^q{}_{\mathrm{loc}}(X, \mathfrak{m})$，其中某个 $q >$ 满足 $\max(N, 4)$。于是，由局部化 Bochner 不等式（参见 [36]）可知， $|\nabla f|_*^2$ 是弱次调和的。根据注 4.9，该函数局部有界（从上方），因此定理 4.8(b) 表明

该函数局部移位缺陷。由此可知，对每个 $V \Subset X$，都存在一个 u.s.c.m–代表元 $|\nabla f|^{2,\bullet}_{*V}$，使得 $|\nabla f|^2_*|_V$

$$\sup_{\overline{V}} |\nabla f|^{2,\bullet}_{*V} = \sup_{\partial V} |\nabla f|^{2,\bullet}_{*V}.$$

7. 局部光滑空间上的 BMS 猜想证明

我们仍假设 $(X, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(X))$ 是一个强局部狄利克雷空间。那么，在 X 上存在一个可能退化的伪度量 $\mathsf{d}^{\mathscr{E}}$（也就是说，对于某些 $x, y \in X$，可能有 $\mathsf{d}^{\mathscr{E}}(x,y) = \infty$；或者对于某些满足 $x \neq y$ 的 $x, y \in X$，可能有 $\mathsf{d}^{\mathscr{E}}(x,y) = 0$），称为 内蕴度量，其定义为

$$\mathsf{d}^{\mathscr{E}}(x,y) := \sup\{f(x) - f(y) : f \in \mathscr{F}_{\mathrm{loc}}(X) \cap C(X), \mathrm{d}\Gamma(f) \leqslant \mathrm{d}\mathfrak{m}\},$$

其中，条件 $\mathrm{d}\Gamma(f) \leqslant \mathrm{d}\mathfrak{m}$ 表示 $\Gamma(f)$ 关于 $\mathfrak{m}$ 绝对连续，其密度为 $\leqslant 1$。

定义 7.1. 我们称 $(X, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(X))$ 是

- 严格局部，如果 $\mathsf{d}^{\mathscr{E}}$ 诱导出 X 上的原拓扑；
- 内蕴完备，如果该空间严格局部且完备。

如果 $(X, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(X))$ 是严格局部的，那么内蕴完备性等价于真性。这可由局部紧长度空间的 Hopf–Rinow定理以及严格局部狄利克雷空间是长度空间这一事实推出 [60]。

秉承 [62], 的精神，对于给定的 $q \in [1, \infty]$，如果每个弱次调和函数 $0 \leqslant f \in L^q(X, \mathfrak{m})$ 都是常数，我们就称 $(X, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(X))$ 具有 L^q-李乌维尔性质。Sturm 的开创性论文 [62] 中的一项主要结果指出：

定理 7.2。 如果 $(X, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(X))$ 是内蕴完备且不可约的，那么对于每个 $q \in (1, \infty)$，它都具有L^q-李乌维尔性质。

以下定义改编自 [33], ，该文讨论了黎曼流形的情形：

定义 7.3. 给定 $q \in [1, \infty]$，称 $(X, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(X))$ 是 L^q-保正的，如果对于每个局部 1-移位超过函数 $f \in L^q(X, \mathfrak{m})$，都有 $f \geqslant 0$。

根据这个定义，我们很容易得到：

命题 7.4. 若 $(X, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(X))$ 具有 L^q-李欧维尔性质且局部平滑，其中某个 $q \in (1, \infty)$，则它是 L^q-保正的。

证明. 若 $f \in L^q(X, \mathfrak{m})$ 是局部 1-移位超额的，则 $-f$ 是局部 1-移位亏损的，因此由正则性定理 5.4，$0 \leqslant (-f)_+ \in L^q(X, \mathfrak{m})$ 是弱次调和函数；于是，根据 L^q-李欧维尔性质，该函数必为常数，从而 $= 0$。□

最后，正如引言中所述，定理 7.2 与命题 7.4 结合起来，立即可以证明 Braverman、Milatovic 和 Shubin 的一个猜想在我们的一般情形下的推广（见附录 B 第 679 页的猜想 P，以及 [35] 中的讨论）：

定理 7.5。 （BMS 猜想） 若 $(X, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(X))$ 是局部平滑的、内禀完备且不可约的，则对于所有 $q \in (1, \infty)$，它都是 L^q-正性保持的。

注意，每个连通且完备的黎曼流形、每个 RCD*–空间以及每个卡诺群都满足本定理的假设。事实上，在黎曼情形中，内蕴完备性是众所周知的；在 RCD*–情形中，这一点见 [2], ；对于卡诺群，则见 [26]。在所有情形下，不可约性都源于热核的严格正性。

A. 附录：一类局部平滑空间

本节假设 $(X,\mathfrak{m},\mathscr{E},\mathscr{F}(X))$ 是一个强局部狄利克雷空间，其中 $(X,\ \mathsf{d})$是一个度量空间，并且对于所有开球 $\mathsf{B}(x,r)$ ，都有

$$\mathfrak{m}(x,r):=\mathfrak{m}(\mathsf{B}(x,r))<\infty.$$

此外，我们假设 $t\mapsto P_t$ 具有严格正的马尔可夫热核，即存在一个联合连续函数

$$p:(0,\infty)\times X\times X\longrightarrow(0,\infty)$$

with

$$\int_X p(t,x,y)\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)=1,\quad p(t+s,x,y)=\int_X p(t,x,z)p(s,z,y)\mathrm{d}\mathfrak{m}(z)\quad \text{for all } t,s>0,\ x,y\in X,$$

使得对所有 $t>0$、 $0\leqslant f\in L^2(X、\ \mathfrak{m})$ ，都有

$$P_tf(x)=\int_X p(t,x,y)f(y)\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\quad \text{for } \mathfrak{m}\text{-a.e. } x\in X.$$

于是，同一公式给出了 P_tf 的一个逐点良定义代表元，对所有 $f\in L^q(X、\ \mathfrak{m})、q\in[1、\ \infty]$均成立；对于非负或非正的 $f\in\mathscr{B}(X、\ m)$也成立。

本节的主要结果如下：

命题 A.1。 假设在上述情形中满足以下两个条件：

- （局部体积倍增） 存在常数 $C>0$、 $\alpha\geqslant 1$，使得对所有 $0<r<R$、 $x\in X$ ，均有

$$\frac{\mathfrak{m}(x,R)}{\mathfrak{m}(x,r)}\leqslant Ce^{CR}(R/r)^{\alpha}.$$

- （局部李-姚热核上界） 存在常数 c_1， c_2， c_3， >0，使得对所有 $t>0$、 x， $y\in X$ ，均有

$$p(t,x,y)\leqslant c_1\mathfrak{m}(x,\sqrt{t})^{-1}e^{-c_2\frac{\mathsf{d}(x,y)^2}{t}}e^{c_3t}.$$

那么，对所有 $U\Subset X$，空间 $(U$， $\mathfrak{m}$， $\mathscr{E}$， $\mathscr{F}(U))$ 都是超收缩的，而 $(X$， $\mathfrak{m}$， $\mathscr{E}$， $\mathscr{F}(X))$ 是双重 ***Feller*** 且不可约的。特别地， $(X$， $\mathfrak{m}$， $\mathscr{E}$， $\mathscr{F}(X))$ 是局部平滑的。

证明。 我们先记录局部体积倍增的以下推论：首先，存在 $D>0$ ，使得对所有 x、 $y\in X$ 以及所有 $t>0$ ，均有

$$\frac{\mathfrak{m}(x,\sqrt{t})}{\mathfrak{m}(y,\sqrt{t})}\leqslant De^{Dt}e^{\frac{\mathsf{d}(x,y)^2}{t}}. \tag{A.1}$$

这一事实众所周知（参见 [5]中的第2节，其中给出了简明论证）。其次，存在 A、 $B>0$，使得对所有 δ、 $t\in[0、\ 1)$、 $x\in X$，都有

$$\int_{\{\mathsf{d}(x,y)\geqslant\delta\}}e^{-\frac{-\mathsf{d}(x,y)^2}{ct}}\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\leqslant\mathfrak{m}(x,\sqrt{t})Ae^{-\frac{\delta^2}{Bt}}. \tag{A.2}$$

这是 [55] 中的引理5.2.13以及局部体积倍增的推论。

1. 设 $U\Subset X$。空间 $(U、\ \mathfrak{m}、\ \mathscr{E}、\ \mathscr{F}(U))$ 是超收缩的：事实上，给定 $0\leqslant f\in L^1(U、\ \mathfrak{m})$，有

$$P_t^Uf(x)\leqslant P_tf(x)=\int_U p(t,x,y)f(y)\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\leqslant\Big(\sup_{x',y'\in U}p_t(x',y')\Big)\int_U f(y)\mathrm{d}\mathfrak{m}(y),$$

因为 $(x,y)\mapsto p(t,x,y)$ 是连续的。

2. 空间 $(X, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(X))$ 是双重 Feller：我们首先证明 P_t：$C_0(X) \to C_0(X)$。显然，只需证明对所有 $f \in C_c(X)$，$P_t f \in C_0(X)$。设 K 为 f的支撑，局部 Li-Yau 界意味着

$$|P_t f(x)| \leqslant c_1 e^{c_3 t} \sup_{y \in K} \mathfrak{m}(\mathsf{B}(y, \sqrt{t}))^{-1} \|f\|_\infty \int_K e^{-c_2 \frac{\mathsf{d}(x,y)^2}{t}} \mathrm{d}\mathfrak{m}(y),$$

当 $x \to \infty$ 趋于 0 时，我们可以通过控制收敛看出 $x \mapsto P_t f(x)$ 的连续性。注意

$$\sup_{y \in K} \mathfrak{m}(\mathsf{B}(y, \sqrt{t}))^{-1} < \infty$$

这是 (A.1) 的结果，并且 $\mathfrak{m}$ 具有全支撑。

接下来，我们证明 P_t： $L^\infty(X, \mathfrak{m}) \to C(X)$: 由于 P_t 具有联合连续的积分核， [56] 中的推论 2.2（该推论针对 $\mathbb{R}^n$ 提出，但其证明适用于我们的情形）表明，只需证明 P_t： $C_b(X) \to C(X)$。同样地（参见 [56] 中推论 2.2 之前的注释），这可由 $P_t 1$ 连续这一事实推出，因为

$$P_t 1(x) = \int_X p(t, x, y) \mathrm{d}\mathfrak{m}(y) = 1,$$

以及对所有 $f \in C_c(X)$ 均有 $P_t f \in C(X)$ 这一事实（我们已经在上文证明了这一点）。接下来我们证明

$$\lim_{t \to 0+} P_t f = f \quad \text{uniformly in every compact } K \subset X, \text{ for all } f \in C_0(X). \tag{A.3}$$

为此，给定 $\epsilon > 0$，我们可以选取 $\delta > 0$，使得对所有 $x \in K$、所有 $y \in B(x$ 和 $\delta)$，都有 $|f(x) - f(y)| \leqslant \epsilon$。对于所有 $t > 0$，我们有

$$|P_t f(x) - f(x)| \leqslant \int_{\{\mathsf{d}(x,y) < \delta\}} p(t, x, y) |f(x) - f(y)| \mathrm{d}\mathfrak{m}(y) + \int_{\{\mathsf{d}(x,y) \geqslant \delta\}} p(t, x, y) |f(x) - f(y)| \mathrm{d}\mathfrak{m}(y).$$

第一项为

$$\leqslant \epsilon \int_X p(t, x, y) \mathrm{d}\mathfrak{m}(y) = \epsilon.$$

第二项根据局部 Li-Yau 界估计如下

$$\leqslant 2 c_1 e^{c_3 t} \|f\|_\infty \mathfrak{m}(B(x, \sqrt{t}))^{-1} \int_{\{\mathsf{d}(x,y) \geqslant \delta\}} e^{-c_2 \frac{\mathsf{d}(x,y)^2}{t}} \mathrm{d}\mathfrak{m}(y),$$

由 (A.2)，对所有 $0 < t < 1$，有

$$\leqslant 2 c_1 e^{c_3 t} \|f\|_\infty A e^{-\frac{\delta^2}{Bt}}.$$

至此，双重 Feller 性质的证明完成。

3. 空间 $(X, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(X))$ 是不可约的：事实上，给定 $0 \leqslant f \in L^2(X) \backslash \{0\}$，这可由下式推出

$$P_t f(x) = \int_X p(t, x, y) f(y) \mathrm{d}\mathfrak{m}(y) > 0,$$

因为 $(x、\ y) \mapsto p(t、\ x、\ y) > 0$ 连续，且 $\mathfrak{m}$ 具有全支撑。

□

我们记录上述结果证明的以下推论：

命题 A.2. 假设在上述情形下有

- P_t： $C_b(X) \to C(X)$ 对所有 $t > 0$，
- P_t： $C_c(X) \to C_0(X)$ 对所有 $t > 0$，
- 极限 $\lim_{t \to 0+} P_t f(x) = f(x)$ 对所有 $f \in C_0(X)$, $x \in X$。

那么，对于所有 $U \Subset X$，空间 $(U, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(U))$ 都是超收缩的，而 $(X, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(X))$ 是双重 ***Feller*** 且不可约的。特别地，$(X, \mathfrak{m}, \mathscr{E}, \mathscr{F}(X))$ 是局部平滑的。

参考文献

[1] Ambrosio, L. & Gigli, N. & Savaré, G.，度量测度空间中 Lipschitz 函数的稠密性与弱梯度的等价性。Rev. Mat. Iberoam. 29 (2013), no. 3, 969–996.[2] Ambrosio, L. & Gigli, N. & Savaré, G.，Bakry-Emery 曲率条件与黎曼 Ricci 曲率界。Ann. Prob. (2015), Vol. 43, No. 1, 339–404.[3] Ancona, A.，椭圆算子、余法向导数与函数的正部（附录由 Haïm Brezis 撰写）。Journal of Functional Analysis, 257(7), 2124–2158, 2009.[4] Barlow, M. T. & Perkins, E. A.，Sierpiński 垫片上的布朗运动。Probab. Theory Related Fields 79 (1988), no. 4, 543–623.[5] Baumgarth, R. & Devyver, B. & Güneysu, B.，微分形式上的热半群协变导数估计及协变 Riesz 变换。Math. Ann. 386, 1753–1798, 2023.[6] Beznea, L & Cîmpean, I. & Röckner, M.，马尔可夫过程的路径连续性与 Kolmogorov 算子的局部性。Stoch PDE: Anal Comp, DOI:10.1007/s40072-023-00304 (2023)[7] Bianchi, D. & Setti, A.，拉普拉斯截断函数、流形上的多孔介质方程与快速扩散及其他应用。Calculus of Variations and Partial Differential Equations 57 (1), 4, 2018.[8] Bisterzo, A. & Marini, L.，L^∞正性保持性质与随机完备性。Potential Analysis, 59, 2017–2034 (2023).[9] Blumenthal, R.M. & Getoor, R.K.，马尔可夫过程与势理论。Courier Corporation, 2007.[10] Böttcher, B., Schilling, R., & Wang, J.，Lévy 相关专题 III。Lecture Notes in Mathematics, 2099, 71–80, 2013.[11] Bonfiglioli, A. & Lanconelli, E. & Uguzzoni, F.，卡诺群上热算子基本解的一致高斯估计。Adv. Differential Equations 7 (10) 1153–1192, 2002.[12] Braverman, M., Milatovic, O., & Shubin, M.，流形上 Schrödinger 型算子的本质自伴性。Russian Mathematical Surveys, 57(4), 641, 2002.[13] Brezis, H. & Ponce, A.C.，当 Δu 是测度时的 Kato 不等式。C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 338, 599–604, 2004.[14] Chen, Z. Q.，关于调和性的概念。Proceedings of the American Mathematical Society, 137(10), 3497–3510, 2009.[15] Chen, Z. Q. & Fukushima, M.，马尔可夫过程、时间变换与边界理论(LMS-35) (Vol. 35)。Princeton University Press, 2012.[16] Chen, Z.-Q. & Kuwae, K.，关于双重 Feller 性质。Osaka J. Math. 46, No. 4, 909–930 (2009).[17] Chen, Z.-Q. & Kuwae, K.，关于对称马尔可夫过程的次调和性。Journal of the Mathematical Society of Japan, 64(4) 1181–1209 October, 2012.[18] Chung, K.L.，具有乘法泛函的双重 Feller 过程。载于：Çinlar, E., Chung, K.L., Getoor, R.K., Glover, J. (编) Seminar on Stochastic Processes, 1985。Progress in Probability and Statistics, vol 12。Birkhäuser Boston.[19] Chung, K.L. & Getoor, R.K.，电容器问题。Ann. Probab. 5, 82–86, 1977.[20]D'Ambrosio, L. & Mitidieri, E.，卡诺群上半线性方程与不等式的唯一性和比较原理。Advances in Nonlinear Analysis, vol. 7, no. 3, 2018, pp. 313–325. https://doi.org/10.1515/anona-2017-0164[21] Davies, E.B.，热核与谱理论。Cambridge Tracts in Mathematics, 92。Cambridge University Press, Cambridge, 1990.[22] Defant, A., & Floret, K.，张量范数与算子理想。Elsevier, 1992.[23] Dello Schiavo, L., & Suzuki, K.，强局部狄利克雷空间的 Rademacher 型定理与 Sobolev 到 Lipschitz 性质。Journal of Functional Analysis, 281(11), 109234, 2021.[24] De Philippis, G. & Núnez-Zimbrón, J.，RCD空间奇异点处调和函数的行为。Manuscripta math. 171, Issue 1-2, 155–168, 2023.[25] Doob, L.，半鞅与次调和函数，Trans. Amer. Math. Soc. 77, 86–121, 1954.[26] Dragoni, F.，Carnot-Carathéodory 度量与黏性解。博士论文，Scuola Normale Superiore, 比萨, 意大利, 2006.[27] Erbar, M., Kuwada, K., & Sturm, K. T.，度量测度空间中熵曲率维数条件与 Bochner 不等式的等价性。Inventiones mathematicae, 201(3), 993–1071, 2015.[28] Evans, L. C.，偏微分方程(Vol. 19)。American Mathematical Society, 2022。

[29] Frank, R. L., Lenz, D., & Wingert, D.，非局部对称狄利克雷型的内禀度量及其在谱理论中的应用。Journal of Functional Analysis, 266(8), 4765–4808, 2014.[30] Fukushima, M.，狄利克雷型与马尔可夫过程。Elsevier Science & Technology, 1980.[31] Fukushima, M., Oshima, Y., & Takeda, M.，狄利克雷型与对称马尔可夫过程。De Gruyter 数学研究丛书, 19。Walter de Gruyter & Co., 柏林, 1994.[32] Gigli, N., Mondino, A., & Semola, D.，关于 RCD 空间上的拉普拉斯算子界的概念及其应用。Proc. Amer. Math. Soc. 152, 829–841, 2024.[33]Güneysu, B.，拉普拉斯截断函数序列。J Geom Anal 26, 171–184 (2016). https://doi.org/10.1007/s12220-014-9543-9[34] Güneysu, B.，黎曼流形上的协变薛定谔半群。算子理论：进展与应用丛书 264。Birkhäuser, 2017.[35]Güneysu, B.，BMS猜想。乌尔姆研讨会 20 (2017) 97–101。预印本见 https://arxiv.org/pdf/1709.07463.pdf.[36] Hua, B., Kell, M. & Xia, C.：度量测度空间上的调和函数。arXiv:1308.3607v2.[37] Jiang, R. & Li, H. & Zhang, H.，度量测度空间上的热核估计及若干应用。Pot. Anal. 44 (2016), Issue 3, 601–627.[38] Jost, J.，偏微分方程 (Vol. 214)。Springer Science & Business Media 2012.[39] Juillet, N.，海森堡群中的几何不等式与广义里奇曲率界。Int. Math. Res. Not. IMRN 2009, no. 13, 2347–2373.[40] Kakutani, S.，143. 二维布朗运动与调和函数。Proceedings of the Imperial Academy, 20(10), 706–714, 1944.[41] Kato, T.，具有奇异势的薛定谔算子。Israel J. Math. 13, 135–148 (1972)[42] Kato, T.，线性算子的扰动理论。1980 年版重印。数学经典。Springer-Verlag, 柏林, 1995.[43] Kurniawaty, M., Kuwae, K., & Tsuchida, K.，关于预解式的双重 Feller 性质。Kyoto Journal of Mathematics, 57(3), 637–654, 2017.[44] Kuwada, K. & Kuwae, K.， $RCD^*(K、N)$ 空间上的径向过程。J. Math. Pures Appl. (9) 126 (2019), 72–108.[45] Kuwae, K.，狄利克雷型的函数演算。Osaka J. Math., 35:683–715, 1998.[46] Kuwae, K.，通过局部半狄利克雷型研究次调和函数的最大值原理。Can. J. Math. 60, No. 4, 822–874, 2008.[47] Le Donne, E.，卡诺群入门：齐性群、卡诺–卡拉西奥多里空间及其等距变换的正则性。《度量空间中的分析与几何》，第 5 卷，第 1 期，2017 年，第 116–137 页。[48] Lierl, J.，分形型度量测度狄利克雷空间上的抛物型哈纳克不等式。Rev. Mat. Iberoam. 34 (2018), no. 2, pp. 687–738.[49] Ma, Z. M., & Röckner, M.，(非对称)狄利克雷型理论导论。Springer Science & Business Media, 2012.[50] Mondino, A. & Naber, A.，具有里奇曲率下界的度量测度空间的结构理论。J. Eur. Math. Soc. 21 (2019), no. 6, pp. 1809–1854.[51] Otsu, Y. & Shioya, T.，Alexandrov空间的黎曼结构。J. Differ. Geom. 39 (1994), 629–658.[52] Ouhabaz, E.，闭凸集的不变性与半群的控制判据。Potential Analysis 5: 611–625, 1996.[53] Peng, Y. & Zhang, H.-C. & Zhu, X. P.，RCD$(K、N)$ 度量测度空间上的魏尔引理。arXiv:2212.09022.[54] Pigola, S. & Valtorta, D. & Veronelli, G.，黎曼流形上的逼近、正则性与正性保持。arXiv:2301.05159.[55] Saloff-Coste, L.，索ბ列夫型不等式的若干方面。伦敦数学会讲义系列, 289。Cambridge University Press, Cambridge, 2002.[56] Schilling, R. L., & Wang, J.，费勒过程与半群的强费勒连续性。Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 15(02), 1250010, 2012.[57] Schmidt, M.，能量型。博士论文，耶拿, 2016.[58] Simon, B.，二次型的典范分解及其在单调收敛定理中的应用。Journal of Functional Analysis, 28(3), 377–385, 1978.[59] Stollmann, P.，有限容量障碍物的散射。J. Funct. Anal. 121, 416–425, 1994.[60] Stollmann, P.，长度空间的对偶刻画及其在狄利克雷度量空间中的应用。Studia Mathematica 198 (2009): 221–233。

[61] Stroock, D. W.，《魏尔引理：众多引理之一》。群与分析，354，164–173，2008。[62] Sturm, K.-T.，《局部狄利克雷空间上的分析 I：常返性、保守性与 L^p-Liouville 性质》。《纯粹与应用数学杂志》456（1994），173–196。[63] Sturm, K.-T.，《度量测度空间的几何 II》。《数学学报》196（2006），第 1 期，133–177。[64] Weyl, H.，《势理论中的正交投影方法》，《杜克数学杂志》7，414–444，1940。