arXiv:2302.09472v1 [math.DS] 19 Feb 2023

余切丛上托内利哈密顿系统的无穷多个制动轨道

张端志*和赵志浩†

中国，南开大学数学科学学院

摘要

我们证明，在带有恰当磁形式的闭流形的扭曲余切丛上，含时托内利哈密顿量的一个哈密顿系统具有无穷多个制动轨道。更准确地说，通过应用勒让德变换，我们证明了在构形空间上，对偶欧拉－拉格朗日系统存在无穷多个对称轨道。该结果包含了 G. Lu 在 [Lu09a, Remark 6.1] 末尾提出的关于存在无穷多个托内利欧拉-拉格朗日系统的对称轨道的断言。在本文中，我们将给出这一断言的完整证明。

目录

1 引言 1 2 预备知识 3 2.1 对称环空间.3 2.2 哈密顿设定与勒让德变换.4 2.3 莫尔斯指标与马斯洛夫型指标.6

3 (T^*M,ω) 上的哈密顿流与对偶拉格朗日流 10

4 凸二次修正 11

5 定理 1.3 的证明 19

6 引理 5.2 的证明 22

A 附录 29

*通讯作者，电子邮箱：zhangdz@nankai.edu.cn

†电子邮箱：zhaozhihao@mail.nankai.edu.cn

1 引言

设 M 为一个闭的 N 维光滑流形。我们用三元组 (T^*M,ω,R) 表示与反辛 involution R 相关联的辛流形 (T^*M,ω)，即 $R^*\omega=-\omega$ 和 $R^2=id$。设 $H\colon S_\tau\times T^*M\to\mathbb{R}$ 是辛流形 (T^*M,ω) 上一个光滑的τ-周期哈密顿量。本文关注满足以下条件的 H：

（H1） H 的纤维方向海森矩阵是正定的，即

$$\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\partial p_j}(t,q,p)w_iw_j>0$$

对于所有（t，q，p）$\in S_\tau\times T^*M$ 以及非零的 $w=\sum_{i=1}^{N}w_i\frac{\partial}{\partial p_i}\in T_pT_q^*M.$

（H2） H 是纤维方向超线性的，即

$$\lim_{|p|_q\to\infty}\frac{H(t,q,p)}{|p|_q}=\infty,$$

对于所有（t，q）$\in S_\tau\times M.$

（H3） R^*H（$-t$，$\cdot$）$=H$（t，$\cdot$）。

(H1)(H2) 是所谓的托内利条件，我们称 H 为托内利哈密顿量。此外，如果 H 满足 (H3)，则称 H 是定义在 (T^*M,ω,R) 上的哈密顿量。 τ-周期制动轨道定义为以下哈密顿系统的解

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=X_H(t,x(t)),\\ Rx(t)&=x(-t),\\ x(t)&=x(t+\tau),\end{aligned}\tag{1.1}$$

其中， X_H 是由 $i_{X_H}\omega=-\mathrm{d}H$ 定义的哈密顿向量场。

如果 $H=K+V$ 是动能与势能之和，且关于动量对称，那么 $R_0^*H=H$ 和 H 定义了 (T^*M,ω_0,R_0) 上的经典力学系统，其中 $\omega_0=\mathrm{d}q\wedge\mathrm{d}p$，$p\in T_q^*M$ 和 $R_0\colon(q,p)\to(q,-p)$ 是 T^*M 上的标准反辛对合，其不动点集为零截面 M_0。此情形下制动轨道的存在性可追溯至 [Sei48, Bol78]。与关于 (T^*M,ω_0) 上哈密顿系统存在无穷多个周期轨道的猜想类似（参见例如 [Lon00, Lu09b, Maz11]），自然会考虑哈密顿系统在 (T^*M,ω_0) 上存在无穷多个制动轨道的问题。 [LW07, LW09] 研究了 H 和 M 的一些特殊情形。 [Lu09b] 中的最新结果表明，当 H 是一个 τ-周期的凸二次增长哈密顿量时，该问题有肯定答案。更确切地说，如果存在常数 $0<h_1<h_2$，它们依赖于 M 的局部坐标，使得

$$\begin{aligned}&h_1|w|_q^2\le\sum_{ij}\tfrac{\partial^2 H}{\partial p_i\partial p_j}(t,q,p)w_iw_j\le h_2|w|_q^2,\ \forall 0\ne w=\sum_{i=1}^{N}w_i\tfrac{\partial}{\partial p_i}\in T_q^*M,\\ &\left|\tfrac{\partial^2 H}{\partial q_i\partial p_j}(t,q,p)\right|\le h_2(1+|p|_q),\ \left|\tfrac{\partial^2 H}{\partial q_i\partial q_j}(t,q,p)\right|\le h_2(1+|p|_q^2),\end{aligned}\tag{1.2}$$

那么， H 的哈密顿流 Ψ_H^t 的时间-τ 映射（庞加莱映射）在 $T^*M.$ 的零截面 M_0 上有无穷多个周期点。注意，

Ψ_H^t中位于 M_0 的每个 τ-周期点，都对应于 T^*M 中的一个 τ-周期制动轨道。

设 σ 是闭连通黎曼流形 M 上的闭 2-形式（磁形式）。在 T^*M 上赋予扭曲辛形式 $\omega = \omega_0 - \pi^*\sigma$，其中 $\pi: T^*M \to M$ 是自然投影。当 $\sigma = \mathrm{d}\theta$ 恰当时，存在一个反辛 involution $R: T^*M \to T^*M$，其定义如下：

$$R_1 : (q,p) \mapsto (q, -p - 2\theta(q))$$

（参见第 3 节）。我们证明，若 H 是时间依赖的 Tonelli 哈密顿量，且 $R_1^*H(-t,\cdot) = H(t,\cdot)$，则哈密顿系统在 (T^*M, ω) 上存在无穷多个制动轨道。我们始终假设 H 在 T^*M. 上定义全局哈密顿流

主要结果如下。

定理 1.1. 设 M 是光滑闭流形，σ 是 M 上的恰当磁形式。 $H: S_1 \times T^*M \to \mathbb{R}$ 是定义在 $(T^*M, \omega_0 - \pi^*\sigma, R_1)$ 上且具有全局流的光滑 1-周期 Tonelli 哈密顿量。则 H 在 $(T^*M, \omega_0 - \pi^*\sigma)$ 上的哈密顿系统存在无穷多个周期为 2 的幂的制动轨道。

特别地，对于 ω_0 on T^*M 上的标准辛形式以及 (T^*M, ω_0, R_0) 上的托内利哈密顿量 H，我们有如下结果，该结果已在 Lu09a 的注记 6.1] 中非正式地陈述过。

推论 1.2. 设 M 是一个光滑闭流形。 $H: S_1 \times T^*M \to \mathbb{R}$ 是 (T^*M, ω_0, R_0) 上光滑的 1-周期托内利哈密顿量，且具有全局流。那么，(T^*M, ω_0) 上由 H 生成的哈密顿系统存在无穷多个周期为 2 的幂的制动轨道。

设 $L: S_1 \times TM \to \mathbb{R}$ 是 H 的对偶拉格朗日量。众所周知，勒让德变换在 $(T^*M, \omega_0 - \pi^*\sigma)$ 上由 H 生成的整数周期（制动）解与 M 上由 $L + \theta$ 生成的欧拉-拉格朗日系统的整数周期（对称）解之间建立了一一对应关系，其中 θ 是 σ 的一个原函数（见第 3 节）。因此，定理 1.1 也可以等价地表述为以下拉格朗日形式。

定理 1.3. 设 M 是一个带有光滑恰当磁形式 $\sigma = \mathrm{d}\theta$ 的光滑闭流形， $L: S_1 \times TM \to \mathbb{R}$ 是一个具有全局流的光滑 1-周期托内利拉格朗日量，且 $(L+\theta)(-t,q,-v) = (L+\theta)(t,q,v)$。那么 $L + \theta$ 的欧拉-拉格朗日系统存在无穷多个周期为 2 的幂的对称周期解。

定理 1.3 的证明基于 [Lon00] 的方法。更确切地说，设 a 是实数集 $\mathbb{R}$中的某个较大数，我们反设平均拉格朗日作用量小于a的对称周期解只有有限个，由此推得存在一个对称周期解，其局部莫尔斯同调在无穷多个迭代下均非零。这将与基于第 6 节中定义的时间可逆 Bangert 同伦所得的同调消失结果相矛盾。据我们所知，在任何重参数化下， [BK83] 中定义的 Bangert 同伦（另见 [Lu09b]）都可能不是时间可逆的。在引理 6.1 中，我们构造了时间可逆 Bangert 同伦，并将其用于同调消失定理的证明。

2 预备知识

2.1 对称回路空间

我们定义 $S_\tau := \mathbb{R}/\tau\mathbb{Z}, \forall \tau \in \mathbb{N}.$设 M是一个带有黎曼度量 $\langle\cdot$的 N 维光滑流形。我们用 $H(\tau) := W^{1,2}(S_\tau, M)$ 表示 M 中弱导数平方可积的绝对连续回路空间。

设 $\gamma\colon S_\tau \to M$是 $H(\tau)$ 中的一个 C^∞ τ-周期回路， $\gamma^*TM \to S_\tau$是切丛 TM 在 $\gamma.$ 下的拉回。我们用 $W^{1,2}(\gamma^*TM)$ 表示由丛 $\gamma^*TM \to S_\tau$ 的 $W^{1,2}$ 截面构成的希尔伯特空间，其希尔伯特结构由下式给出

$$\langle\!\langle \xi, \zeta \rangle\!\rangle_\gamma := \int_0^\tau [\langle \xi(t), \zeta(t)\rangle_{\gamma(t)} + \langle \nabla_t \xi(t), \nabla_t \zeta(t)\rangle_{\gamma(t)}]\mathrm{d}t,\ \xi, \zeta \in W^{1,2}(\gamma^*TM), \tag{2.1}$$

其中 ∇_t 表示关于黎曼流形 $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上 Levi-Civita 联络的协变导数。众所周知， $H(\tau)$ 是一个希尔伯特流形，且在 γ 处的切空间为 $W^{1,2}(\gamma^*TM)$，而 (2.1) 在 $H(\tau)$ 上定义了一个希尔伯特-黎曼度量。在此情形下， $H(\tau)$ 是一个完备希尔伯特-黎曼流形（参见 [Kli78]）。

如果 $\gamma \in H(\tau)$ 是时间可逆的，即 $\gamma(-t) = \gamma(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$，我们称 γ为对称环路。我们沿用 [Lu09b] 中的记号，并用 $EH(\tau)$ 表示由 $H(\tau)$ 中时间可逆环路组成的对称（偶）回路空间。

现在假设 $\gamma \in EH(\tau)$ 是光滑的。令 $EW^{1,2}(\gamma^*TM)$ 为由 $W^{1,2}(\gamma^*TM)$ 中的时间可逆 $W^{1,2}$-截面组成的子空间。则 $EW^{1,2}(\gamma^*TM)$ 是 $W^{1,2}(\gamma^*TM)$ 的希尔伯特子空间，其希尔伯特结构由（2.1）定义。令 $\epsilon > 0$ 为一个小于 $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的单射半径的常数。我们定义 $N_\epsilon := \{v \in T_qM \mid q \in M, |v|_q < \epsilon\}$ 和 $\gamma^*N_\epsilon := \gamma^*TM \cap N_\epsilon$。那么， $EW^{1,2}(\gamma^*N_\epsilon) \subset EW^{1,2}(\gamma^*TM)$ 是沿 γ 且取值于 N_ϵ 内的截面所组成的开集。我们定义一个单射映射

$$\exp_\gamma : EW^{1,2}(\gamma^*N_\epsilon) \to H(\tau)$$

as

$$(\exp_\gamma \xi)(t) := \exp_{\gamma(t)}(\xi(t)), \quad \forall \xi \in EW^{1,2}(\gamma^*N_\epsilon).$$

容易得知，$(\exp_\gamma \xi)(-t) = (\exp_\gamma \xi)(t)$。令 $\mathcal{U}_\gamma$ 为 $\exp_\gamma$的像，则以下自然图册

$$\left\{(\exp_\gamma^{-1}, \mathcal{U}_\gamma), \quad \text{for time-reversible } \gamma \in C^\infty(S_\tau, M)\right\}$$

定义了 $EH(\tau)$ 的可微结构。若将 $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ 限制在 $EH(\tau)$ 上，则 (2.1) 也定义了 $EH(\tau)$ 上的希尔伯特 - 黎曼度量，并使后者成为一个完备希尔伯特 - 黎曼流形。

对于每个 $\gamma \in EH(\tau)$，我们定义一个同伦 γ_s ，连接 $\gamma_0 := \gamma(0)$ 和$\gamma_1 := \gamma$ ，其定义如下：

$$\gamma_s(t) := \begin{cases} \gamma(st), & t \in [0, \frac{\tau}{2}) \\ \gamma(s(\tau - t)), & t \in [\frac{\tau}{2}, \tau]. \end{cases}$$

因此， γ 是可缩的，而 $EH(\tau)$ 是 $H(\tau)$ 的可缩环空间的子空间。

设 $S_{n\tau}:=\mathbb{R}/n\tau\mathbb{Z}$ 是 n 重覆盖 S_τ.。我们定义迭代映射

$$\psi^{[n]}: H(\tau) \hookrightarrow H(n\tau)$$

使得 $\gamma^{[n]} := \psi^{[n]}(\gamma)$ 定义为 γ 与 S_τ. 的 n 重覆盖映射的复合。对于每个 $\gamma \in H(\tau)$，容易知道， $\psi^{[n]}$ 的微分 $\mathrm{d}\psi^{[n]}$ 定义了一个迭代映射

$$\mathrm{d}\psi^{[n]}: W^{1,2}(\gamma^*TM) \hookrightarrow W^{1,2}(\gamma^{[n]*}TM),$$

它与 $\psi^{[n]}$ 的迭代映射相似，并且 $\exp^{\gamma^{[n]}} \circ \mathrm{d}\psi^{[n]} = \psi^{[n]} \circ \exp^{\gamma}\cdot$。我们注意到，映射 $\psi^{[n]}$ 和 $\mathrm{d}\psi^{[n]}$ 分别在 $EH(\tau)$ 和 $EW^{1,2}(\gamma^*TM)$ 上限制为迭代映射。

2.2 哈密顿设定与勒让德变换

设 H 是辛流形 (T^*M, ω_0, R_0) 上一个光滑的 τ-周期托内利哈密顿量。托内利条件 (H1)(H2) 保证逆勒让德变换的全局存在，其定义为

$$\mathcal{L}_H: S_\tau \times T^*M \to S_\tau \times TM,\ (t,q,p) \to (t,q,\partial_p H(t,q,p)).$$

$\mathcal{L}_H$ 定义了一个保纤维的 C^∞-微分同胚。

在这种情况下，托内利哈密顿量 $H:\ S_1 \times T^*M \to \mathbb{R}$ 的芬切尔变换定义为

$$L(t,q,v) := \max\{p[v] - H(t,q,p)\,|\,p \in T_q^*M\}, \quad \forall (t,q,v) \in S_1 \times TM,$$

将是一个 C^∞ 拉格朗日函数，并满足

$$L(t,q,v) = p(t,q,v)[v] - H(t,q,p(t,q,v)),$$

其中， $p = p(t,q,v)$ 是由等式 $v = \partial_p H(t,q,p)$ 唯一确定的点。关于托内利函数和勒让德变换的性质，更多详情请参阅 [Fat08] 。容易看出，对偶拉格朗日量L 满足以下性质。

(L1) L 的纤维方向海森矩阵是正定的，即

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}(t,q,v) u_i u_j > 0$$

对所有 $(t,q,v) \in S_\tau \times TM$ 以及非零的 $u = \sum_{i=1}^N u_i \frac{\partial}{\partial v_i} \in T_qM$.

(L2) L 是纤维方向超线性的，即

$$\lim_{|v|_q \to \infty} \frac{L(t,q,v)}{|v|_q} = \infty,$$

对所有 $(t,q) \in S_\tau \times M$.

(L3) $L(-t,\ q,\ -v) = L(t,\ q,\ v)\quad \forall\ (t,\ q,\ v) \in S_\tau \times TM.$

(L1)(L2) 是 L 的托内利条件，我们称 L 为托内利拉格朗日量。我们在位形空间 M 上定义 L 的欧拉-拉格朗日系统如下：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v_j}(t,\gamma(t),\dot\gamma(t)) = \frac{\partial L}{\partial q_j}(t,\gamma(t),\dot\gamma(t)),\ j = 1,\dots,N. \tag{2.2}$$

在任意局部坐标 $(q_1, \dots, q_N)$ 下。众所周知，欧拉-拉格朗日流 Ψ_L^t 在 $\mathcal{L}_H$ 的共轭下与 H 的哈密顿流 Ψ_H^t 共轭（见 [Fat08，定理 3.4.2]）。因此， L 的欧拉-拉格朗日系统的周期解与 H 的哈密顿系统的周期解之间存在一一对应关系。特别地，当且仅当 $x(t) = (\gamma(t), \partial_v L(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t)))$ 是满足 (H1)(H2) 的哈密顿系统 (1.1) 的 τ-周期制动轨道时， $\gamma(t)$ 是方程 (2.2) 的 τ-周期对称解。

对于每个 $\tau \in \mathbb{N}$，我们定义关于 L 在 $H(\tau)$ 上的平均作用泛函为

$$A^{[\tau]}(\gamma) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau L(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \mathrm{d}t.$$

我们记 $EA^{[\tau]} := A^{[\tau]}|_{EH(\tau)}$. $A^{[\tau]}$ 和 $EA^{[\tau]}$ 分别在 $H(\tau)$ 和 $EH(\tau)$ 上盖托可微。每个 τ-周期对称解 $\gamma\colon S_\tau \to M$，它是欧拉-拉格朗日系统 (2.2) 的解，都是光滑的，且是 $A^{[\tau]}$ 和 $EA^{[\tau]}$的极值曲线（例如参见 [Fat08，推论 2.2.11]）。

设 $\gamma \in EH(\tau)$ 为 $EA^{[\tau]}$的弱 C^0-极值曲线，即对于每个光滑截面 $\xi \in EW^{1,2}(\gamma^* TM)$, γ 满足 $dEA^{[\tau]}(\gamma)[\xi] = 0$。记

$$\Xi : W^{1,2}(\gamma^* TM) \to W^{1,2}(\gamma^* TM),\ \xi(t) \mapsto \xi(-t)$$

该对合，我们有

$$dA^{[\tau]}(\gamma)[\Xi(\xi)] = dA^{[\tau]}(\gamma)[\xi]. \tag{2.3}$$

我们改写 $\xi = \frac{1}{2}(\xi + \Xi(\xi)) + \frac{1}{2}(\xi - \Xi(\xi)) := \xi_0 + \xi_1$. 由于 $\xi_0 \in EW^{1,2}(\gamma^* TM)$ 是时间可逆的，因此有 $dA^{[\tau]}(\gamma)[\xi_0] = dEA^{[\tau]}(\gamma)[\xi_0] = 0$ 并且

$$\begin{aligned} dA^{[\tau]}(\gamma)[\xi] &= dA^{[\tau]}(\gamma)[\xi_1] \\ &= \tfrac{1}{2} dA^{[\tau]}(\gamma)[\xi] - \tfrac{1}{2} dA^{[\tau]}(\gamma)[\Xi(\xi)] \\ &= 0 \quad \text{by } (2.3) \end{aligned} \tag{2.4}$$

对于每个光滑截面 $\xi \in W^{1,2}(\gamma^* TM)$。因此， γ 是 $A^{[\tau]}$的弱 C^0极值曲线。然而，除非 γ 是 C^1，否则 γ 可能不是欧拉-拉格朗日方程（(2.2)）的解。

值得注意的是，每个托内利拉格朗日量都可以修改为当 $|v|$ 足够大时，在 v 上呈二次增长（参见第5节或 [AF07]）。我们假设存在依赖于 M 的局部坐标的$0 < l_1 < l_2$，使得

$$\begin{aligned} &\sum_{ij} \tfrac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}(t,q,v) u_i u_j \geq l_1 |u|_q^2,\ \forall\ 0 \neq u = \sum_{i=1}^N u_i \tfrac{\partial}{\partial v_i} \in T_q M, \\ &\left| \tfrac{\partial^2 L}{\partial v \partial v}(t,q,v) \right| \leq l_2,\ \left| \tfrac{\partial^2 L}{\partial q \partial v}(t,q,v) \right| \leq l_2(1 + |v|_q),\ \left| \tfrac{\partial^2 L}{\partial q \partial q}(t,q,v) \right| \leq l_2(1 + |v|_q^2). \end{aligned} \tag{2.5}$$

在这种情况下， L 就是所谓的凸二次增长拉格朗日量。我们介绍平均作用泛函 $A^{[\tau]}$ 的性质： $H(\tau) \to \mathbb{R}$，其作用量为 L，如下所示。

(i) $A^{[\tau]}$ 是 C^1-连续且二阶盖托可微；

(ii) 临界点恰好是 L 的欧拉-拉格朗日系统的（光滑）解；

(iii) $A^{[\tau]}$ 满足 Palais–Smale条件；

详情参见 [AS09, 命题 3.1] 和 [AF07, 命题 4.2] 。 $EA^{[\tau]}$也具有类似性质。更具体地说，

(i') 由于 $EA^{[\tau]}$ 是 $A^{[\tau]}$ 在 $EH(\tau)$上的限制， $EA^{[\tau]}$ 是 C^1-连续的，且二阶盖托可微。

(ii') 由 (2.4)， $EA^{[\tau]}$ 的每个临界点 γ 都是 $A^{[\tau]}$的临界点。因此， γ 是光滑的，并且是 L的欧拉-拉格朗日系统的对称解。

(iii') 设 $\{\gamma_n\} \subset EH(\tau)$是一个序列，使得 $EA^{[\tau]}(\gamma_n)$有界，且

$$\|dEA(\gamma_n)|_{EW^{1,2}(\gamma_n^*TM)}\|_* \to 0, \quad \text{as } n \to \infty.$$

这里， $\|\cdot\|_*$ 是对偶空间 $EW^{1,2}(\gamma_n^*TM)^*$的对偶范数。我们有

$$\begin{aligned} &\|dA(\gamma_n)|_{W^{1,2}(\gamma_n^*TM)}\|_* \\ &= \sup_{\|\xi\|=1} |dA^{[\tau]}(\gamma_n)[\xi]| = \sup_{\|\xi\|=1} |\tfrac{1}{2} dEA^{[\tau]}(\gamma_n)[\xi_0]| \\ &= \sup_{\|\xi_0\|=1} |dEA^{[\tau]}(\gamma_n)[\xi_0]| \to 0 \text{ as } n \to \infty. \end{aligned}$$

因此， $\{\gamma_n\}$ 是 $A^{[\tau]}$的 Palais–Smale序列，它在 $H(\tau)$中紧致。我们将 $\{\gamma_n\}$ 改写为 $\{\gamma_n\}$ 的子序列，使得 $H(\tau)$. γ 中的 $\gamma_n \to \gamma$ 是 $\{\gamma_n\}$的一致极限，因此 $\gamma(\tau - t) = \gamma(t)$。由此可得， $EA^{[\tau]}$ 满足 Palais–Smale条件。

我们将简单记为 $A = A^{[1]}$ 和 $EA = EA^{[1]}$. 。设 $\psi^{[n]}$ 分别是定义在 $H(\tau)$ 和 $EH(\tau)$ 上的迭代映射，则

$$A^{[n\tau]} \circ \psi^{[n]} = A^{[\tau]}, \quad EA^{[n\tau]} \circ \psi^{[n]} = EA^{[\tau]}.$$

2.3 莫尔斯指标和马斯洛夫型指标

设 $L: S_\tau \times TM \to \mathbb{R}$ 是一个光滑的时间可逆凸二次增长拉格朗日量。我们引入 $A^{[\tau]}$ 和 $EA^{[\tau]}$ 在 γ处的莫尔斯指标和零度。

由于 γ是可缩的， γ^*TM是一个平凡丛，因此我们可以选取一个光滑的正交平凡化

$$S_\tau \times \mathbb{R}^N \to \gamma^*TM, \quad (t, q) \mapsto \Phi(t)q$$

与 $\Phi(-t) = \Phi(t) \ \ \forall t \in S_\tau$.

取 ρ为小于 $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的单射半径的正数，并令 $B_\rho := B_\rho^N(0)$ 为 $\mathbb{R}^N$ 中以 0 为中心、半径为 ρ的开球。则对于每个 $k \in \mathbb{N}$，以下可微单射给出 $H(k\tau)$ 上的一个坐标图，其中包含 $\gamma^{[k]}$,

$$\Theta_\gamma^{[k]} : W^{1,2}(S_{k\tau}, B_\rho) \to \mathcal{U}_{\gamma^{[k]}} \subset H(k\tau), \ \xi \mapsto \exp_{\gamma^{[k]}}(\Phi^{[k]}\xi). \tag{2.6}$$

这里， $\Phi^{[k]}$ 是 Φ 与 S_τ. 的 k重覆盖映射的复合。因此，在$\mathcal{U}_{\gamma^{[k]}}$内 $\gamma^{[k]}$ 的一个邻域中，$A^{[k\tau]}$ 限制为一个泛函 $W^{1,2}(S_{k\tau}, B_\rho) \to$

$\mathbb{R}$，并且

$$\begin{aligned}
&A^{[k\tau]}\circ\Theta_\gamma^{[k]}(\xi)\\
=&\frac{1}{k\tau}\int_0^{k\tau}L\left(t,\Theta_\gamma^{[k]}(\xi)(t),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Theta^{[k]}(\gamma^{[k]})(t)\right)\mathrm{d}t\\
=&\frac{1}{k\tau}\int_0^{k\tau}L\left(t,\Theta_\gamma^{[k]}(\xi)(t),\mathrm{d}(\Theta_\gamma^{[k]})(\xi)\cdot\dot{\xi}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Theta_\gamma^{[k]}(t)\circ\xi\right)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

现在我们将 $\pi_\gamma^{[k]}$ 定义为： $S_\tau\times B_\rho\times\mathbb{R}^N\to S_\tau\times TM$ 为

$$(t,q,v)\mapsto\left(t,\Theta_\gamma^{[k]}(q)(t),\mathrm{d}(\Theta_\gamma^{[k]})(q)\cdot v+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Theta_\gamma^{[k]}(t)\circ q\right)$$

then

$$A^{[k\tau]}\circ\Theta_\gamma^{[k]}(\xi)=\frac{1}{k\tau}\int_0^{k\tau}L\circ\pi_\gamma^{[k]}(t,\xi(t),\dot{\xi}(t))\mathrm{d}t,$$

且 $\mathbf{0}=(\Theta_\gamma^{[k]})^{-1}(\gamma^{[k]})\in W^{1,2}(S_{k\tau},B_\rho)$ 是 $A^{[k\tau]}\circ\Theta_\gamma^{[k]}$. 的一个临界点

由于 $\gamma\in EH(\tau)$ 是对称的，且 $\Phi(-t)=\Phi(t)$，我们有

$$\Theta_\gamma^{[k]}(\xi)(-t)=\Theta_\gamma^{[k]}(\xi)(t),\ \ \forall\xi\in EW^{1,2}(S_{k\tau},B_\rho).$$

因此， $\Theta_\gamma^{[k]}$ 限制为 $EH(k\tau)$ 在 γ. 处的一个坐标图。此外，我们计算得到 $\forall(t,q,v)\in S_\tau\times B_\rho\times\mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned}
L\circ\pi_\gamma^{[k]}(-t,q,-v)&=L\circ\pi_\gamma^{[k]}(t,q,v),\\
L\circ\pi_\gamma^{[k]}(t+1,q,v)&=L\circ\pi_\gamma^{[k]}(t,q,v).
\end{aligned}$$

因此， $L\circ\pi_\gamma^{[k]}$ 满足性质（2.5），并且是一个时间可逆凸二次增长拉格朗日量。

在下文中，我们将分别用 L、 $A^{[k\tau]}$、 $EA^{[k\tau]}$ 表示 $L\circ\pi_\gamma^{[k]}$、 $A^{[k\tau]}\circ\Theta_\gamma^{[k]}$ 和 $EA^{[k\tau]}\circ\Theta_\gamma^{[k]}$。然后， $\gamma^{[k]}$ 将与希尔伯特空间 $W^{1,2}(S_{k\tau},\mathbb{R}^N)$ 中的点 0 等同。不失一般性，假设 $M=\mathbb{R}^N$ 并且

$$\begin{aligned}
&L:S_{k\tau}\times\mathbb{R}^{2N}\to\mathbb{R},\\
&A^{[k\tau]}:W^{1,2}(S_{k\tau},\mathbb{R}^N)\to\mathbb{R},\\
&EA^{[k\tau]}:EW^{1,2}(S_{k\tau},\mathbb{R}^N)\to\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

我们将临界点 $\mathbf{0}\in W^{1,2}(S_{k\tau},\mathbb{R}^N)$ 处 $A^{[k\tau]}$ 的海森矩阵记作 $\mathrm{Hess}A^{[k\tau]}(\mathbf{0})$。对于每个 $\xi,\eta\in W^{1,2}(S_{k\tau},\mathbb{R}^N)$，我们有

$$\mathrm{Hess}A^{[k\tau]}(\mathbf{0})[\xi,\eta]=\frac{1}{k\tau}\int_0^{k\tau}(P(t)\dot{\xi}\cdot\dot{\eta}+Q(t)\xi\cdot\dot{\eta}+Q^T(t)\dot{\xi}\cdot\eta+R(t)\xi\cdot\eta)\mathrm{d}t,$$

其中

$$\begin{aligned}
P_{i,j}(t)&:=\frac{\partial^2L}{\partial v_i\partial v_j}(t,0,0),\\
Q_{i,j}(t)&:=\frac{\partial^2L}{\partial q_i\partial v_j}(t,0,0),\\
R_{i,j}(t)&:=\frac{\partial^2L}{\partial q_i\partial q_j}(t,0,0).
\end{aligned}\tag{2.7}$$

且对于每个 $t \in S_{k\tau}$.， $P(1-t) = P(t)$ $Q(1-t) = -Q(t)$ $R(1-t) = R(t)$. $Q^T(t)$ 是 $Q(t)$ 的转置。这里，我们不区分 P、Q、R 及其 k 次迭代。根据 $EA^{[k\tau]}$ 的定义，我们有

$$\mathrm{Hess} EA^{[k\tau]}(\mathbf{0}) = \mathrm{Hess} A^{[k\tau]}(\mathbf{0})|_{EW^{1,2}\times EW^{1,2}}.$$

Let

$$W^{1,2}(S_{k\tau},\mathbb{R}^N) = W^{1,2}(S_{k\tau},\mathbb{R}^N)^+ \oplus W^{1,2}(S_{k\tau},\mathbb{R}^N)^0 \oplus W^{1,2}(S_{k\tau},\mathbb{R}^N)^-,$$
$$EW^{1,2}(S_{k\tau},\mathbb{R}^N) = EW^{1,2}(S_{k\tau},\mathbb{R}^N)^+ \oplus EW^{1,2}(S_{k\tau},\mathbb{R}^N)^0 \oplus EW^{1,2}(S_{k\tau},\mathbb{R}^N)^-$$

分别是按照 $\mathrm{Hess} A^{[k\tau]}(0)$ 关于 $\mathrm{Hess} A^{[k\tau]}(0)$ 和 $\mathrm{Hess} EA^{[k\tau]}(0)$ 的正定、零和负定分解所得到的正交分解。于是， γ 关于 $A^{[k\tau]}$ 的莫尔斯指标和零度定义为

$$m^-(A^{[k\tau]},\gamma) := \dim W^{1,2}(S_{k\tau},\mathbb{R}^N)^-,$$
$$m^0(A^{[k\tau]},\gamma) := \dim W^{1,2}(S_{k\tau},\mathbb{R}^N)^0,$$

它们是良定义的（可以为无穷大），因为它们不依赖于 $\gamma^{[k]*}TM$ 的平凡化和平凡坐标图 $\Theta_\gamma^{[k]}$. 的选择。同样，

$$m^-(EA^{[k\tau]},\gamma) := \dim EW^{1,2}(S_{k\tau},\mathbb{R}^N)^-,$$
$$m^0(EA^{[k\tau]},\gamma) := \dim EW^{1,2}(S_{k\tau},\mathbb{R}^N)^0$$

定义为 $\gamma^{[k]}$ 关于 $EA^{[k\tau]}$的莫尔斯指标和零度。众所周知，对于每个非零的 $k \in \mathbb{N}$, $A^{[k\tau]}$ 和 $EA^{[k\tau]}$ 的每个临界点都具有有限的莫尔斯指标和零度（参见 [Ben86]），并且

$$0 \le m^-(EA^{[k\tau]},\gamma) \le m^-(A^{[k\tau]},\gamma), \tag{2.8}$$
$$0 \le m^0(EA^{[k\tau]},\gamma) \le m^0(A^{[k\tau]},\gamma) \le 2N \tag{2.9}$$

（参见 [LW09，定理 3.4]）。

另一方面，还有一个与 γ. 相关的马斯洛夫型指标。回顾第 2.2 节中勒让德变换的定义，我们有如下定义的对偶哈密顿量H： $S_\tau \times \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$

$$H(t,q,p) = p[v(t,q,p)] - L(t,q,v(t,q,p)),$$
$$p = \partial_v L(t,q,v(t,q,p)).$$

相应的哈密顿系统为

$$\dot p = \partial_q H(t,q,p) = -\partial_q L(t,q,v(t,q,p)),$$
$$\dot q = \partial_p H(t,q,p) = v(t,q,p).$$

而环路 $x(t) = (0, \partial_v L(t, 0, 0))$ 是对应的 τ-周期解。沿 x 线性化，得到线性周期哈密顿系统

$$\begin{aligned} \dot\xi &= Q^T P^{-1}\xi + Ry - Q^T P^{-1} Q y, \\ \dot y &= P^{-1}\xi - P^{-1} Q y. \end{aligned} \tag{2.10}$$

We denote $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \xi \\ y \end{pmatrix}$ and

$$B(t) = \begin{pmatrix} P(t)^{-1} & -P(t)^{-1}Q(t) \\ -Q(t)^T P(t)^{-1} & Q(t)^T P(t)^{-1} Q(t) - R(t) \end{pmatrix}$$

于是，(2.10) 可简洁地写为

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = JB(t)\mathbf{u},$$

这里，$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$. 该线性哈密顿系统的基本解 Ψ_γ，其初始点为 $\Psi_\gamma(0) = I$，是一条沿着 $x(t)$的辛路径。这里，下标 γ 表示该辛路径依赖于 γ，因为哈密顿环路 $x(t)$本质上是拉格朗日环路 $\gamma(t)$的勒让德变换。由 C. Conley、E. Zehnder、Y. Long 和 C. Viterbo 定义的马斯洛夫型指标对以及 k迭代指标对 Ψ_γ

$$(i(\Psi_\gamma), \nu(\Psi_\gamma)), \quad (i(\Psi_\gamma, k), \nu(\Psi_\gamma, k))$$

（例如，参见 [Lon02]）。众所周知，泛函 $A^{[k\tau]}$ 在 $\gamma^{[k]}$ 处的莫尔斯指标对（$m^-(A^{[k\tau]}, \gamma)$ $m^0(A^{[k\tau]}, \gamma)$）与 Ψ_γ的 k迭代马斯洛夫型指标相同，即

$$(m^-(A^{[k\tau]}, \gamma), m^0(A^{[k\tau]}, \gamma)) = (i(\Psi_\gamma, k), \nu(\Psi_\gamma, k))$$

（参见 [Vit90, LA98, Abb03]）。

此外，$x(-t) = R_0 x(t)$意味着 $x: S_\tau \to \mathbb{R}^{2N}$ 实际上是一个制动轨道。于是，Ψ_γ的 Maslov 型 L_0指标对及其相应的 k迭代指标对

$$(i_{L_0}(\Psi_\gamma), \nu_{L_0}(\Psi_\gamma)), \quad (i_{L_0}(\Psi_\gamma, k), \nu_{L_0}(\Psi_\gamma, k))$$

适用 [Liu07] 中定义的结果。根据 [LW09 定理 3.4] 以及 [LZ14 命题 6.1], , 我们得到了莫尔斯指标对（$m^-(EA^{[\tau]}, \gamma)$ $m^0(EA^{[\tau]}, \gamma)$）与 Maslov 型 L_0指标对之间关系的类似结果，即

$$(m^-(EA^{[k\tau]}, \gamma), m^0(EA^{[k\tau]}, \gamma)) = (i_{L_0}(\Psi_\gamma, k) + N, \nu_{L_0}(\Psi_\gamma, k)).$$

Let

$$\widehat{m}^-(A^{[\tau]}, \gamma) := \lim_{k\to\infty} \frac{m^-(A^{[k\tau]}, \gamma)}{k}, \quad \widehat{m}^-(EA^{[\tau]}, \gamma) := \lim_{k\to\infty} \frac{m^-(EA^{[k\tau]}, \gamma)}{k}$$

分别表示 $m^-(A^{[k\tau]}, \gamma)$和 $m^-(EA^{[k\tau]}, \gamma)$的平均莫 Morse 指数。我们有

$$\widehat{m}^-(EA^{[\tau]}, \gamma) = \widehat{i}_{L_0}(\Psi_\gamma) = \frac{1}{2}\widehat{i}(\Psi_\gamma) = \frac{1}{2}\widehat{m}^-(A^{[\tau]}, \gamma),$$

其中

$$\widehat{i}_{L_0}(\Psi_\gamma) := \lim_{k\to\infty} \frac{i_{L_0}(\Psi_\gamma, k)}{k}, \quad \widehat{i}(\Psi_\gamma) := \lim_{k\to\infty} \frac{i(\Psi_\gamma, k)}{k},$$

中间的等式引自 [LZ14 命题 4.1]。由于

$$i(\Psi_\gamma, k) + \nu(\Psi_\gamma, k) \le k\widehat{i}(\Psi_\gamma) + N$$

（例如参见 [Lon02，第 213 页定理 2]），我们有

$$0 \le m^-(EA^{[k\tau]}, \gamma) + m^0(EA^{[k\tau]}, \gamma) \le N, \text{ if } \widehat{m}^-(EA^{[\tau]}, \gamma) = 0. \tag{2.11}$$

3 (T^*M,ω) 上的哈密顿流与对偶拉格朗日流

和之前一样，我们假设 M 是一个闭连通光滑流形。设 σ 是 M 上的光滑磁形式， $\omega=\omega_0-\pi^*\sigma$ 是 T^*M 上的扭曲辛形式。若 σ 是恰当的，我们将证明辛流形（T^*M， ω）与（T^*M， ω_0）之间存在一个辛同胚。

定理 3.1. 若 $\sigma=\mathrm{d}\theta$ 是恰当的，则存在一个整体微分同胚 $\Phi:(T^*M,\omega_0)\to(T^*M,\omega)$，使得 Φ 是辛的，即 $\Phi^*\omega=\omega_0$。

证明. 我们采用 J. Moser 所谓的变形方法。定义

$$\omega_t=\omega_0-t\pi^*\mathrm{d}\theta,\quad 0\le t\le 1,$$

使得 $\omega_1=\omega$. 注意到，对于每个 $t\in[0,1].$， ω_t 都是一个辛形式。我们寻找一族微分同胚 $\phi^t\colon T^*M\to T^*M$，满足 $\phi^0=\mathrm{id}$，并且

$$(\phi^t)^*\omega_t=\omega_0,\quad 0\le t\le 1.$$

我们记作 $\Phi=\phi^1$。那么 Φ 就是我们问题的解。

我们将构造一个依赖于 t 的向量场 X_t ，使 ϕ^t 由其流生成。由于

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi^t)^*\omega_t=(\phi^t)^*\mathrm{d}\left(i_{X_t}\omega_t-\pi^*\theta\right).$$

X_t 必须满足线性方程

$$i_{X_t}\omega_t=\pi^*\theta.$$

注意，对于 $0\le t\le 1$， ω_t 在 T^*M 上是非退化的，而 $\pi^*\theta$ 是 T^*M上的全局 1-形式；根据上述关于 $0\le t\le 1$.的方程， X_t 在 T^*M上被唯一确定。接下来，我们证明对于所有 $t\in[0,1].$， X_t 都是利普希茨连续的。注意，扭曲余切丛（T^*M,ω）是强几何有界的（见[Lu98，命题 4.1]），因此存在 $\alpha>0$ 使得

$$\alpha\left\|X_t\right\|_g^2\le\omega_t(X_t,J_tX_t)=\pi^*\theta[J_tX_t]$$

其中， g 是由 M 上的黎曼度量诱导的标准度量， J_t 是 T（T^*M）上的几乎复结构，使得 ω_t（$J_t\cdot,\cdot$）$=g$（$\cdot,\cdot$）。因此

$$\left\|X_t\right\|_g\le\frac{1}{\alpha}\sup_{(q,p)\in T^*M}|\pi^*\theta(q,p)|=\frac{1}{\alpha}\sup_{q\in M}|\theta(q)|<V$$

对于某个常数 $V>0.$，流 ϕ^t 对所有$t\in[0,1]$.都在 T^*M 上全局存在

□

上述辛同胚 Φ 是众所周知的动量平移映射（见 [GS84]）。经过简单计算，我们得到，在局部坐标（$q_1,\ldots,q_N$）中， $\Phi(q,p)=(q,p-\theta(q))$。记 $R_1:=\Phi\circ R_0\circ\Phi$，则$R_1^*\omega=-\omega$是（$T^*M,\omega$）上的反辛 involution。此外，我们有$R_1(q,p)=\Phi\circ R_0\circ\Phi(q,p)=(q,-p-2\theta(q))\ \forall(q,p)\in T^*M$。

设 $H\colon S_1 \times T^*M \to \mathbb{R}$ 是一个 1-周期 Tonelli 哈密顿量。定义 $H_\theta = H \circ \Phi$, 则 H_θ 也是一个 1-周期 Tonelli 哈密顿量。记 X_K 为某个哈密顿量 K 的哈密顿向量场，Ψ_K^t 为其哈密顿流。由于 Φ 是辛的，（T^*M, ω）上 H 的哈密顿流 Ψ_H^t 与（T^*M, ω_0）上 H_θ 的流 $\Psi_{H_\theta}^t$ 在动量平移映射 Φ 下共轭。此外，存在一一对应关系：(T^*M, ω, R_1)中 H 的 τ-周期制动轨道与 (T^*M, ω_0, R_0)中 H_θ 的 τ-周期制动轨道相对应。

如第 2.2 节所述，哈密顿流 $\Psi_{H_\theta}^t$ 也通过勒让德变换与欧拉-拉格朗日流 $\Psi_{L_\theta}^t$ 共轭。H_θ 在（T^*M，ω_0，R_0）中的 τ-周期制动轨道，与位形空间 M中 L_θ 的 τ-周期对称轨道一一对应。因此，若 L 恰为 H 的对偶拉格朗日量，且 θ 是 σ.的一个原函数，则定理 1.3 等价于定理 1.1

记 L、L_θ 分别为 H 和 H_θ的对偶托内利拉格朗日量，其中 $S_1 \times TM \to \mathbb{R}$，则有

$$\begin{aligned} L_\theta(t,q,v) &= \max_{p \in T_q^*M} \{p[v] - H_\theta(t,q,p)\} \\ &= \max_{p \in T_q^*M} \{p[v] - H(t,q,p-\theta(q))\} \\ &= \max_{p \in T_q^*M} \{(p+\theta(q))[v] - H(t,q,p)\} \\ &= \max_{p \in T_q^*M} \{p[v] - H(t,q,p) + \theta(q)[v]\} \\ &= L(t,q,v) + \theta(q)[v], \end{aligned}$$

且 $L_\theta(-t, q, -v) = L_\theta(t, q, v)$。

4 凸二次修正

我们采用 [Maz11] 的方法，将托内利拉格朗日量修正为具有凸二次增长的拉格朗日函数。

回顾一下，$L_\theta = L + \theta$ 是定义在（T^*M, ω_0, R_0）上的 Tonelli 哈密顿量 H_θ的对偶拉格朗日量。定义 $K := \max_{q \in M} \sup_{|v|_q = 1} |\theta(q)[v]|$，并且

$$\begin{aligned} C(H,\theta) &:= \max\{H(t,q,p) \mid (t,q,p) \in S_1 \times T^*M,\ |p|_q \le K+1\} \\ &\ge \max\{H(t,q,p-\theta(q)) \mid (t,q,p) \in S_1 \times T^*M,\ |p|_q \le 1\} \\ &= \max\{H_\theta(t,q,p) \mid (t,q,p) \in S_1 \times T^*M,\ |p|_q \le 1\}, \end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned} L_\theta(t,q,v) &\ge \max_{|p|_q \le 1} \{p[v] - H_\theta(t,q,p)\} \\ &\ge \max_{|p|_q \le 1} \{p[v]\} - \max_{|p|_q \le 1} \{H_\theta(t,q,p)\} \\ &\ge |v|_q - \max\{H_\theta(t',q',p') \mid (t',q',p') \in S_1 \times T^*M, |p'|_{q'} \le 1\} \\ &\ge |v|_q - C(H,\theta). \end{aligned}$$

定义 4.1（凸二次修正）。拉格朗日函数 $L_T\colon S_1 \times TM \to \mathbb{R}$ 是托内利拉格朗日量 L 的凸二次 T修正，当且仅当对于每个满足 $|v|_q \le T$的 $(t,q,v) \in S_1 \times TM$，都有 (M1)$L_T(t,q,v) = L(t,q,v)$;

(M2) L_T 是凸二次增长拉格朗日量，即满足 (2.5)；
(M3)$L_T(t,q,v) \geq |v|_q - C$对于每个 $(t,q,v) \in S_1 \times TM$，以及某个常数$C \in \mathbb{R}$。

对于每个实数 $T>0$， L_θ的凸二次 T修正（记作$L_{\theta,\ T}\colon\ S_1 \times TM \to \mathbb{R}$）存在，且也是时间可逆的，即

$$L_{\theta,T}(-t,q,-v) = L_{\theta,T}(t,q,v),\ \forall t \in S_1.$$

为方便读者，我们简要介绍一下。详细内容见 [AF07]。设 $\phi\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个光滑递增函数，满足 $\phi(s) = s$ 当 $s \leq 1$ 时成立，且当 $s \geq 2$时， $\phi(s)$为常数。设 λ 为一个正数，使得

$$\lambda \geq \max\{L_\theta(t,q,v)\,|\,(t,q,v) \in S_1 \times TM,\ |v|_q \leq 2T\},$$

且 $L_{1,\ T}\colon\ S_1 \times TM \to \mathbb{R}$ 是 $L_{1,\ T} := \lambda\phi(\frac{L_\theta}{\lambda})$。由于 L_θ 满足第 2.2 节中的 (L1)，且 $L_{1,\ T}$ 在一个紧集之外为常数，因此我们可以找到一个正数 μ，使得 $\mu I + \partial_{vv}L_{1,\ T} > 0$ 在 $S_1 \times TM$. 上成立。我们定义 $\psi\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为 $\psi(s) = 0$ 当$s \leq T^2$时成立，且 $\psi(s) = \mu s - 2\mu T^2$ 当 $s \geq 4T^2$时成立。于是，可以构造出凸二次增长T修正如下

$$L_{\theta,T} := L_{1,T}(t,q,v) + \psi(|v|_q^2).$$

事实上，如果我们选择 μ 满足

$$4T\mu \geq 1, \quad 2T^2\mu \geq 2T - C(H,\theta) - \min L_{1,T},$$

$L_{\theta,\ T}$ 将满足 (M1)(M2)(M3)（见 [AF07，第 5]节）。相应的平均作用泛函为

$$EA_T(\xi) = \int_0^1 L_{\theta,T}(t,\xi(t),\dot{\xi}(t))\mathrm{d}t,\ \forall \xi \in EH(1).$$

现在我们介绍凸二次 T-修正$L_{\theta,\ T}$的 EA_T的性质。

命题 4.1. 设 $\gamma : S_1 \to M$ 是 L_θ的欧拉-拉格朗日系统的对称 1-周期解，且 $U > \max\{|\dot{\gamma}(t)|_{\gamma(t)}\,|\,t \in S_1\}$，则
(1) 对每个 $T \geq U$， γ 都是 EA_T 的临界点；
(2)

$$(m^-(EA_T,\gamma), m^0(EA_T,\gamma)) = (m^-(EA_U,\gamma), m^0(EA_U,\gamma));$$

证明. (1) 注意到 $L_\theta(t,\gamma,\dot{\gamma}) = L_{\theta,\ T}(t,\gamma,\dot{\gamma})$，那么 γ也是$L_{\theta,\ T}$的欧拉-拉格朗日系统的解。这意味着 γ是 EA_T.的极值曲线
注 4.1. 反过来，如果 γ 是 EA_U 的临界点，那么 γ 实际上是光滑的，并且是 L_θ 的欧拉-拉格朗日系统的解U （例如参见 [Fat08, BGH98]）。此外，如果我们有 $U > \max\{|\dot{\gamma}(t)|_{\gamma(t)}|\ t \in S_1\}$，那么 γ 将是 L_θ 的欧拉-拉格朗日系统的光滑对称 1-周期解。

(2) 由于 L_θ 和 $L_{\theta,\ T}$ 在提升曲线 $(\gamma,\dot\gamma):\ S_1\to TM$ 上对每个 $T\geq U$ 都重合，因此我们有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hess}EA_T(\gamma)[\xi,\eta]\\
=&\int_0^1[\partial_{vv}L_{\theta,T}(t,\gamma(t),\dot\gamma(t))\dot\xi\cdot\dot\eta+\partial_{qv}L_{\theta,T}(t,\gamma(t),\dot\gamma(t))\xi\cdot\dot\eta\\
&\quad+\partial_{vq}L_{\theta,T}(t,\gamma(t),\dot\gamma(t))\dot\xi\cdot\eta+\partial_{qq}L_{\theta,T}(t,\gamma(t),\dot\gamma(t))\xi\cdot\eta]dt\\
=&\int_0^1[\partial_{vv}L_\theta(t,\gamma(t),\dot\gamma(t))\dot\xi\cdot\dot\eta+\partial_{qv}L_\theta(t,\gamma(t),\dot\gamma(t))\xi\cdot\dot\eta\\
&\quad+\partial_{vq}L_\theta(t,\gamma(t),\dot\gamma(t))\dot\xi\cdot\eta+\partial_{qq}L_\theta(t,\gamma(t),\dot\gamma(t))\xi\cdot\eta]dt \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

因此， EA_T 在 γ 处的海森矩阵与为 $T\geq U$选择 T 的方式无关。特别地，我们有

$$\mathrm{Hess}EA_U(\gamma)=\mathrm{Hess}EA_T(\gamma)$$

这就得出了结论。 □

对于 EA_T的对称临界点，有一个先验估计，这是 [AF07，引理 5.2]的直接推论。

~ ~命题 4.2。对于每个 $\alpha>0$和 $m\in\mathbb{N}$，存在 $T=T\ \alpha\ m\ >0(,)$，使得对于任意 T-L_θ修改，$_T$ 的 L_θ ，其中 $T>T$ ，以及任意 $n\in\{1,\dots,m\}$，以下结论成立：如果 γ是 $EA_T^{[n]}$的一个临界点，且$EA_T^{[n]}\leq\alpha$，那么 max$\{|\dot\gamma(t)|_{\gamma(t)}|t\in S_n\}\leq\tilde T$。特别地， γ是 L_θ的欧拉-拉格朗日系统的一个周期解，并且 $EA^{[n]}(\gamma)=EA_T^{[n]}(\gamma)$。 □

设 $\gamma^{[m]}=\psi^{[m]}(\gamma)$ 是 $EA_T^{[m]}$ 的一个孤立临界点，其临界值为 $c=EA_T^{[m]}($ $\gamma^{[m]})$，且 max$\{|\dot\gamma(t)|_{\gamma(t)}\,|\,t\in S_1\}<U/2.$。下文中，我们将考虑 $EA_T^{[m]}$ 在 $\gamma^{[m]}$ 处的局部同调群，定义为

$$C_*(EA_T^{[m]},\gamma):=H_*((EA_T^{[m]})_c\cup\{\gamma^{[m]}\},(EA_T^{[m]})_c),$$

其中，$(EA_T^{[m]})_c:=(EA_T^{[m]})^{-1}(-\infty,c)$ 是 $EA_T^{[m]}$ 在 c 处的次水平集，而 H_* 是任意系数群上的奇异同调因子。

由于局部同调群具有局部性质，我们按照第 2.3 节，在 γ 附近考虑局部坐标。

我们先给出一些记号。设 ρ 是 M 的单射半径， $B_\rho\subset\mathbb{R}^N$ 是 $0\in\mathbb{R}^N$ 的一个半径为 ρ 的开邻域。记 $V_\rho(m):=_{EW^{1,2}}(S_m,B_\rho)$ 和 $EW(m):=EW^{1,2}(S_m,\mathbb{R}^N)$。令

$$X(m):=\{\text{ time-reversible loops in }C^1(S_m,\mathbb{R}^N)\}$$

为带有 C^1-范数的巴拿赫空间。令 $V_\rho^X(m):=V_\rho(m)\cap X(m)$。

由于 γ 是光滑的， $\gamma^{[m]}$ 附近的局部坐标由下式给出

$$\Theta_{\gamma^{[m]}}:V_\rho(m)\to\mathcal{U}_{\gamma^{[m]}}\subset EW(m),\ \xi\mapsto\exp_{\gamma^{[m]}}(\Phi^{[m]}\xi), \qquad (4.2)$$

then

$$\begin{aligned}
&EA_T^{[m]} \circ \Theta_{\gamma^{[m]}}(\xi) \\
=&\frac{1}{m}\int_0^m L_\theta \left(t, \Theta_{\gamma^{[m]}}(\xi)(t), \mathrm{d}(\Theta_{\gamma^{[m]}})(\xi)\cdot\dot{\xi} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Theta_{\gamma^{[m]}}(t)\circ\xi\right)\mathrm{d}t \\
=&\frac{1}{m}\int_0^m L_\theta \circ \pi_{\gamma^{[m]}}(t,\xi(t),\dot{\xi}(t))\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

我们进一步将 ρ 取足够小，使得

$$\max_{t\in S_1, q\in\bar{B}_\rho}\left|\frac{d}{dt}\Theta_\gamma(q)(t)\right| < U/2.$$

Let

$$C_\rho := \max_{t\in S_1, q\in\bar{B}_\rho}\sup_{|v|=1}|d\Theta_\gamma(q)(t)\cdot v|. \tag{4.3}$$

. ‸那么，对于每个满足 ess $\sup_{t\in S_m}|\xi(t)| < T/2C_\rho =$ 的 $T \geq U$ 和 $\xi \in V_\rho(m)$，有

$$\left|d\Theta_{\gamma^{[m]}}(\xi)\cdot\dot{\xi}(t) + \frac{d}{dt}\Theta_{\gamma^{[m]}}(t)\circ\xi\right| < T.$$

因此，

$$\begin{aligned}
L_{\theta,T}\circ\pi_{\gamma^{[m]}}(t,\xi(t),\dot{\xi}(t)) &= L_\theta\circ\pi_{\gamma^{[m]}}(t,\xi(t),\dot{\xi}(t)), \\
EA_T^{[m]}\circ\Theta_{\gamma^{[m]}}(\xi) &= EA^{[m]}\circ\Theta_{\gamma^{[m]}}(\xi).
\end{aligned}$$

这里， $0 = \Theta_\gamma^{-1}\gamma$ 是 $EA^{[m]}\circ\Theta_{\gamma^{[m]}}$ 和 $EA_T^{[m]}\circ\Theta_{\gamma^{[m]}}$ 的（光滑）临界点。记

$$\widehat{L} = L_\theta\circ\pi_{\gamma^{[m]}},\ \widehat{L}_{\widehat{T}} = L_{\theta,T}\circ\pi_{\gamma^{[m]}} : S_m\times B_\rho\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R},$$

and

$$\widehat{EA}_{\widehat{T}}^{[m]} = EA_T^{[m]}\circ\Theta_{\gamma^{[m]}} : EW(m)\to\mathbb{R}.$$

Then

$$\widehat{L}_{\widehat{T}}(t,q,v) = \widehat{L}(t,q,v), \quad \forall (t,q,v)\in S_1\times B_\rho\times\mathbb{R}^N \text{ with } |v| < \widehat{T}. \tag{4.4}$$

注意，为简化记号，我们分别用 L、L_T 和 $EA_T^{[m]}$ 表示 $\widehat{L}$、$\widehat{L}_{\widehat{T}}$ 和 $\widehat{EA}_{\widehat{T}}^{[m]}$ 。

由于 L_T 是凸二次增长拉格朗日量， $EA_T^{[m]}$ 在 $EW(m)$ 上是 C^{2-0}，众所周知， $EA_T^{[m]}$ 满足 Lu 在 [Lu13] 中给出的广义分裂引理条件 (S)(F)(B)（见附录）。更确切地说，我们有以下结论。

不失一般性，我们考虑 $m = 1$ 的情形，并记为$V_\rho = V_\rho(1)$ $X = X(1)$ $V_\rho^X = V_\rho^X(1)$ 和 $EW = EW(1)$。

（S）由于 X 在 EW 中稠密，且 V_ρ^X在 V_ρ. X 中稠密，因此满足条件（S）。

(F1) 由于 $EA_T\colon V_\rho\to\mathbb{R}$ 是一个 C^{2-0} 泛函， EA_T 满足条件 (F1)。

(F2) 我们用 $EA_{T,X} := EA_T|_{V_\rho^X}$表示。$EA_{T,X}$ 是一个 C^2 泛函。设 $\nabla EA_T \in EW$ 为 EA_T 关于度量 $\langle\!\langle \cdot,\cdot \rangle\!\rangle$的梯度，即

$$dEA_T(\gamma)[\xi] = dEA_{T,X}(\gamma)[\xi] = \langle\!\langle \nabla EA_T(\gamma), \xi \rangle\!\rangle \quad \forall \gamma \in V_\rho^X,\ \xi \in X.$$

于是， ∇EA_T的像包含于 X中，并且 $\mathcal{A}_T := \nabla EA_T|_{V_\rho^X}$: $V_\rho^X \to X$是连续可微的（参见 [Lu09a，引理 3.2]）。

（F3）根据 [Jia99，命题 2.1], ，存在一个一致连续映射$\mathcal{B}_T$: $V_\rho^X \to L_s($ $EW)$，使得对于每个 $\gamma \in V_\rho^X$， $\mathcal{B}_T(\gamma)$是 EW 上的有界线性自伴算子，并且

$$d^2EA_{T,X}(\gamma)[\xi,\eta] = \langle\!\langle \mathcal{B}_T(\gamma)\xi, \eta \rangle\!\rangle.$$

（B）这些条件已在 [Lu09a，引理 3.4、3.5]中得到验证。

根据（4.1）， $\mathcal{B}_T(0)$与 $T \geq U$所取的 T无关。记$\mathcal{B}: = \mathcal{B}_T(0)$。令 $EW^0: =$ Ker$\mathcal{B}$， EW^-（分别为 EW^+）为 EW中 $\mathcal{B}$ 的负定（分别为正定）子空间。（B）中的条件意味着 EW^0和 EW^1都是包含于 X中的有限维子空间（参见[Lu13，命题 B.2]）。令 $X = EW^0 \oplus X^\pm$，其中 $X^\pm: = X \cap EW^\pm = X^- + X \cap EW^+$. 令 B_ϵ为 EW中半径为 ϵ的 0 的邻域。我们定义 $B_\epsilon^*: = B_\epsilon \cap EW^*$，其中 $* = 0$、$+$、$-$、$\pm$。

引理 4.3（广义分裂引理）。在上述假设 (S)(F)(B) 下，对于每个 $T \geq U$，若 $m^0(EA_T, 0) > 0$，则存在 $\epsilon_T, \bar{\epsilon}$，使得 $0 < \epsilon_T \leq \bar{\epsilon}$，一个（唯一的）$C^1$ 映射 $h: B_{\bar{\epsilon}}^0 \to X^\pm$ 满足 $h(0) = 0$，并且

$$(I - P^0)\mathcal{A}_T(z + h(z)) = 0, \quad z \in B_{\bar{\epsilon}}^0,$$

0 的一个开邻域 $W_T \subset B_{\bar{\epsilon}}^0$ 以及一个保原点同胚

$$\Phi_T : B_{\epsilon_T}^0 \times (B_{\epsilon_T}^+ + B_{\epsilon_T}^-) \to W_T$$

形式为 $\Phi_T(z, u^+ + u^-) = z + h(z) + \phi_{z,\ T}(u^+ + u^-)$，其中 $\phi_z(u^+ + u^-) \in H^\pm$，且 $\phi_{z,\ T}(u^+ + u^-) \in EW^\pm$，使得使得

$$EA_T \circ \Phi_T(z, u^+ + u^-) = \|u^+\|^2 - \|u^-\|^2 + EA_T(z + h(z))$$

对于所有 $(z, u^+ + u^-) \in B_{\epsilon_T}^0 \times (B_{\epsilon_T}^+ + B_{\epsilon_T}^-)$，并且

$$\Phi_T(B_{\epsilon_T}^0) \times (B_{\epsilon_T}^+ + B_{\epsilon_T}^-) \subset X.$$

此外，同胚 Φ_T 还具有以下性质:

(a1) 对于每个 $z \in B_{\epsilon_T}^0$， $\Phi_T(z, 0) = z + h(z)\, \phi_{z,T}(u^+ + u^-) \in EW^-$ 当且仅当 $u^+ = 0$。

(a2) 将 Φ_T 限制在 $B_{\epsilon_T}^0 \times B_{\epsilon_T}^-$ 上，即使这两个集合上的拓扑取为由 X诱导的拓扑， Φ_T 也是从 $B_{\epsilon_T}^0 \times B_{\epsilon_T}^- \subset X \times X$到 $\Phi_T(B_{\epsilon_T}^0 \times B_{\epsilon_T}^-) \subset X$的同胚。

映射 h 和函数 $B_{\bar{\epsilon}}^0 \ni z \mapsto EA_T(z + h(z))$ 还满足:

(b1) 映射 h 在 V_ρ^X 中是 C^1，并且

$$h'(z) = -[(I - P^0)\mathcal{A}'_T(z)|_{X^\pm}]^{-1}(I - P^0)\mathcal{A}'_T(z) \quad z \in B_{\bar{\epsilon}}^0;$$

(b2) $\beta(z) := EA(z + h(z)) = EA_T(z + h(z))$ *for each* $T \geq U$*;*

(b3) 对任意 $z \in B^0_{\bar\epsilon}$, β 都是 C^2，并且

$$d\beta(z_0)(z) = \langle\langle \mathcal{A}_T(z_0 + h(z_0)), z\rangle\rangle \quad z_0 \in B^0_{\bar\epsilon};$$

(b4) 如果 $EA_{T,X}$ 的 0 是一个孤立临界点，那么它也是 β 的一个孤立临界点。

证明。由于 EA_T 是凸二次增长拉格朗日量L_T的平均作用量，根据广义分裂引理（见附录 A.1），对于每个 $T \geq U$，存在 $\epsilon_T > 0$、一个（唯一的）C^1 映射 h_T: $B^0_{\epsilon_T} \to X^\pm$，满足 $h_T(0) = 0$，并且

$$(I - P^0)\mathcal{A}_T(z + h_T(z)) = 0, \quad z \in B^0_{\epsilon_T},$$

0 的一个开邻域 $W_T \subset B^0_{\epsilon_T}$，以及一个保原点同胚

$$\Phi_T : B^0_{\epsilon_T} \times (B^+_{\epsilon_T} + B^-_{\epsilon_T}) \to W_T$$

形式为 $\Phi_T(z, u^+ + u^-) = z + h_T(z) + \phi_{z,T}(u^+ + u^-)$，满足条件 (a1)(a2) 和 (b1)(b3)(b4)。

这里我们只需证明 h_T 实际上与选择 T. 无关。令 $\widehat{U} := \frac{U}{2C_\rho}$，其中 C_ρ 在 (4.3) 中定义。我们有如下

断言。存在一个正的 $\bar\epsilon < \frac{U}{2}$，以及唯一的映射 h: $B^0_{\bar\epsilon} \to X^\pm$，使得 (i) $h(0) = 0$，且对所有 $z \in B^0_{\bar\epsilon}$，均有 $(I - P^0)(\mathcal{A}_T(z + h(z))) = 0$；(ii) $\|h'(z)\|_{X^\pm} \leq 1$, $\forall z \in \bar B^0_{\bar\epsilon}$。

对每个 $z \in \bar B^0_{\bar\epsilon} \subset X$，我们都有 $\max\{|\dot z(t)| \mid t \in S_1\} < \frac{U}{2}$。条件 (ii) 蕴含

$$|\dot z(t) + h'(z)\dot z(t)| < \widehat{U}.$$

因此，由 (4.4) 可得，对所有 $z \in \bar B^0_{\bar\epsilon}$ 及每个 $T \geq U$，均有 $EA_T(z + h(z)) = EA(z + h(z))$。

该断言的结论隐含在 [Lu13, 引理 3.1] 的证明中。现在我们给出详细证明。在 (B) 中的假设下，[Jia99] 已证明 $\mathcal{B}(X^\pm) \subset X^\pm$ 且 $\mathcal{B}|_{X^\pm}$: $X^\pm \to X^\pm$ 是一个同构。

设 $\widehat{U}, \widehat{B}_{X,\ r}$ 都 U 对于每个 $x \in B_{X,\ r}$，半径为 r 的邻域。若 $0 < r < \widehat{U}$，那么对于 $\mathbf{0} \in X$ 的一个半径为 r 的邻域，若 $0 < r < \widehat{U}$ $\mid \mid t \in S_1\} < r < U \leq T$，并且

$$L_T(t, x(t), \dot x(t)) = L(t, x(t), \dot x(t)).$$

因此，

$$\|\mathcal{A}_T(x_1) - \mathcal{B}x_1 - \mathcal{A}_T(x_2) + \mathcal{B}x_2\|_X = \|\mathcal{A}_U(x_1) - \mathcal{B}x_1 - \mathcal{A}_U(x_2) + \mathcal{B}x_2\|_X.$$

由于 $\mathcal{A}_U$ 是 C^1，它在 $\mathbf{0} \in X$ 处严格 F-可微。因此

$$\|\mathcal{A}_U(x_1) - \mathcal{B}x_1 - \mathcal{A}_U(x_2) + \mathcal{B}x_2\|_X \leq K_r\|x_1 - x_2\|_X$$

对所有的 $x_1, x_2 \in B_{X,\ r}$，其常数为 $K_r \to 0$，当 $r \to 0$ 时（参见 [26,推论3] 的证明）。令 $C_1 = \|\mathcal{B}|_{X^\pm}\|^{-1}_{L(X^\pm,\ X^\pm)}$，$C_2 = \|I - P^0\|_{L(X^\pm, X^\pm)}$。我们固定一个足够小的 $0 < \bar\epsilon < \frac{U}{2}$，使得 $C_1C_2K_r < \frac{1}{2}$。

我们考虑映射

$$S_T : B_{\bar{\epsilon}} \times (B_{X,\bar{\epsilon}} \cap X^{\pm}) \to X^{\pm}$$

由.....给出

$$S_T(z,x) = -(\mathcal{B}|_{X^{\pm}})^{-1}(I-P^0)\mathcal{A}_T(z+x)+x.$$

设 z_1、$z_2 \in B^0_{\bar{\epsilon}}$ 和 x_1、$x_2 \in B_{X,\ \bar{\epsilon}} \cap X^{\pm}$。由于 $\mathcal{B}x_i \in X^{\pm}$ 和 $\mathcal{B}z_i = 0$、$i = 1$、2，我们得到

$$\begin{aligned}
&\|S_T(z_1,x_1) - S_T(z_2,x_2)\|_{X^{\pm}} \\
\leq& C_1C_2\|\mathcal{A}_T(z_1+x_1) - \mathcal{B}(z_1+x_1) - \mathcal{A}_T(z_2+x_2) + \mathcal{B}(z_2+x_2)\|_X \\
=& C_1C_2\|\mathcal{A}_U(z_1+x_1) - \mathcal{B}(z_1+x_1) - \mathcal{A}_U(z_2+x_2) + \mathcal{B}(z_2+x_2)\|_X \\
\leq& C_1C_2K_{\bar{\epsilon}}\|z_1+x_1-z_2-x_2\|_X \\
<& \frac{1}{2}\|z_1+x_1-z_2-x_2\|_X, \quad \text{if } (z_1,x_2) \neq (z_2,x_2).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

特别地，对于任意的 $z \in B_{\bar{\epsilon}}$ 和 x_1、$x_2 \in B_{X,\ \bar{\epsilon}} \cap X^{\pm}$，有

$$\|S_T(z,x_1) - S_T(z,x_2)\|_{X^{\pm}} < \frac{1}{2}\|x_1-x_2\|_X, \quad x_1 \neq x_2,$$

并且 $\|S_T(z,0)\|_{X^{\pm}} < \frac{1}{2}\|z\|_X < \frac{\bar{\epsilon}}{2}$。众所周知，存在唯一的映射

$$h_T : B^0_{\bar{\epsilon}} \to B_{X,\bar{\epsilon}} \cap X^{\pm}$$

使得 $S_T(z,h_T(z)) = h_T(z)$，或者等价地

$$(I-P^0)\mathcal{A}_T(z+h_T(z)) = 0, \quad \forall z \in B_{\bar{\epsilon}}.$$

显然，$h_T(0) = 0$。根据 S_T 的定义和 (4.5)，我们有

$$\|h_T(z_1) - h_T(z_2)\|_X < \|z_1-z_2\|_X, \quad \forall z_1,z_2 \in B^0_{\bar{\epsilon}}.$$

由于 h_T 在 $B^0_{\bar{\epsilon}}$ 上可微，我们有

$$\|h'_T(z)\|_{X^{\pm}} \leq 1, \forall z \in \bar{B}^0_{\bar{\epsilon}},$$

这意味着 $|\dot{z}(t) + h'_T(z)\,\dot{z}(t)| < U$，并且

$$L_T(t,z(t)+h_T(z)(t),\dot{z}(t)+h'_T(z)\dot{z}(t)) = L_U(t,z(t)+h_T(z)(t),\dot{z}(t)+h'_T(z)\dot{z}(t)).$$

h_T 满足方程

$$(I-P^0)\mathcal{A}_U(z+h_T(z)) = 0, \quad \forall z \in B^0_{\bar{\epsilon}}$$

以及 h_U。根据上述方程的解的唯一性，我们必有 $h_T = h_U$，

□

推论 4.4（移位）。设 γ 是 EA_T 的一个孤立临界点，并满足 $\max\{|\dot{\gamma}(t)|_{\gamma(t)}\,|\,t \in S_1\} < U/2.$。对于每个 $T \geq U$，我们有

$$C_*(EA_T,\gamma;\mathbb{G}) \cong C_{*-m^-(EA_U,0)}(\beta,0;\mathbb{G}).$$

其中 $\beta(z) = EA\circ\Theta_\gamma(z+h(z))$，$\mathbb{G}$ 是一个阿贝尔群。特别地，如果

$$* < m^-(EA_U,\gamma) \ \text{ or } * > m^-(EA_U,\gamma) + m^0(EA_U,\gamma). \tag{4.6}$$

证明。由引理 4.3 和移位定理 A.2，我们得到同调同构

$$C_*(EA_T,\gamma;\mathbb{G}) \cong C_*(EA_T\circ\Theta_\gamma,0;\mathbb{G}) \cong C_*(\alpha+\beta,0;\mathbb{G}) \cong C_{*-m^-(EA_T,\gamma)}(\beta,0;\mathbb{G}).$$

因此，$C_*(EA_T,\gamma;\mathbb{G}) = 0$ 若

$$* < m^-(EA_T,\gamma) \text{ or } * > m^-(EA_T,\gamma) + m^0(EA_T,\gamma).$$

由命题 4.1(ii) 可得 (4.6)。 □

我们记

$$\mathcal{X}(m) = \{ \text{ time-reversible loops in } C^1(S_m, M)\} \tag{4.7}$$

其为 C^2-巴拿赫流形，其拓扑由时间可逆环路及其导数的一致收敛给出。于是，$\mathcal{X}(m) \subset EH(m)$ 在 $EH(m)$ 中稠密，且包含映射 $\mathcal{X}(m) \hookrightarrow EH(m)$ 连续。$\gamma^{[m]} \in \mathcal{X}(m)$ 若 γ 是 L_θ. 的欧拉-拉格朗日系统的解。我们将证明，$\mathcal{X}(m)$ 与 $EH(m)$ 之间的包含映射在 γ 处诱导了 $EA_T^{[m]}|_{\mathcal{X}(m)}$ 与 $EA_T^{[m]}$ 的局部同调之间的同构。特别地，我们将证明，$EA_T^{[m]}$ 在 γ 处的局部同调与针对 $T \geq U$ 所作的选择 T 无关。

我们简记为 $\mathcal{X} = \mathcal{X}(1)$ 和

$$EA^{[m]}_{U,\mathcal{X}} := EA^{[m]}_U|_{\mathcal{X}(m)}.$$

令 $\widehat{U} := \frac{U}{2C_\rho}$, $\mathcal{W}(m) := \Theta_{\gamma^{[m]}}(B_{\widehat{U}}(m))$ 和 $\mathcal{U}(m) := \Theta_{\gamma^{[m]}}(B^X_{\widehat{U}}(m))$，其中$B_{\widehat{U}}(m) = \{\xi \in V_\rho(m) \mid \|\xi\| < \widehat{U}\}$且 $B^X_{\widehat{U}}(m) = \{\xi \in V^X_\rho(m) \mid \|\xi\|_X < \widehat{U}\}$。由于 $\|\xi\| \leq \|\xi\|_X$，我们有 $\mathcal{U}(m) \subset \mathcal{W}(m)$ 和 $\mathcal{U}(m) \subset \mathcal{W}^{\mathcal{X}}(m) := \mathcal{W}(m) \cap \mathcal{X}(m)$（赋予其作为 $\mathcal{X}(m)$ 子集所诱导的拓扑）是 $\mathcal{W}^{\mathcal{X}}(m)$ 的一个开子集。因此，我们有

$$EA^{[m]}_{U,\mathcal{X}}|_{\mathcal{U}(m)} = EA^{[m]}_{T,\mathcal{X}}|_{\mathcal{U}(m)} = EA^{[m]}_{T,\mathcal{X}}|_{\mathcal{W}^{\mathcal{X}}(m)}.$$

特别地，对于 $m = 1$，我们有以下两个包含映射，

$$I_{\mathcal{X}} : ((EA_{U,\mathcal{X}}|_{\mathcal{U}})_c \cup \{\gamma\}, (EA_{U,\mathcal{X}}|_{\mathcal{U}})) \to ((EA_{T,\mathcal{X}}|_{\mathcal{W}^{\mathcal{X}}})_c \cup \{\gamma\}, (EA_{T,\mathcal{X}}|_{\mathcal{W}^{\mathcal{X}}})_c),$$
$$I_{\mathcal{X},EH} : ((EA_{T,\mathcal{X}}|_{\mathcal{W}^{\mathcal{X}}})_c \cup \{\gamma\}, (EA_{T,\mathcal{X}}|_{\mathcal{W}^{\mathcal{X}}})_c) \to ((EA_T|_{\mathcal{W}})_c \cup \{\gamma\}, (EA_T|_{\mathcal{W}})_c).$$

根据切除性质，$I_{\mathcal{X}}$ 诱导出同调同构

$$I_{\mathcal{X}*} : C_*(EA_{U,\mathcal{X}}|_{\mathcal{U}},\gamma) \xrightarrow{\simeq} C_*(EA_{T,\mathcal{X}}|_{\mathcal{W}^{\mathcal{X}}},\gamma). \tag{4.8}$$

命题 4.5. 设 γ 是 EA_T 的一个孤立临界点，其临界值为 $c := EA_T(\gamma)$。假设 $\max\{|\dot\gamma(t)|_{\gamma(t)} \mid t \in S_1\} < U/2$，则包含映射

$$J := I_{\mathcal{X},EH} \circ I_{\mathcal{X}} : (((EA_{U,\mathcal{X}}|_{\mathcal{U}})_c \cup \{\gamma\}), (EA_{U,\mathcal{X}}|_{\mathcal{U}})) \to (((EA_T|_{\mathcal{W}})_c \cup \{\gamma\}), (EA_T|_{\mathcal{W}})_c)$$

诱导出系数取自域 $\mathbb{F}$的同调同构

$$J_* : C_*(EA_{U,\mathcal{X}},\gamma;\mathbb{F}) \xrightarrow{\simeq} C_*(EA_T,\gamma;\mathbb{F}). \tag{4.9}$$

证明。我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccc}((EA_{U,\mathcal{X}}\circ\Theta_\gamma|_{B^X_{\widehat{U}}})_c\cup\{0\},(EA_{U,\mathcal{X}}\circ\Theta_\gamma|_{B^X_{\widehat{U}}})_c) & \xrightarrow{I_{X,EW}} & ((EA_T\circ\Theta_\gamma|_{B_{\widehat{U}}})_c\cup\{0\},(EA_T\circ\Theta_\gamma|_{B_{\widehat{U}}})_c)\\ \downarrow{\scriptstyle\Theta_\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\Theta_\gamma}\\ ((EA_{U,\mathcal{X}}|_{\mathcal{U}})_c\cup\{\gamma\},(EA_{U,\mathcal{X}}|_{\mathcal{U}})_c) & \xrightarrow{I_{\mathcal{X},EH}} & ((EA_T|_{\mathcal{W}})_c\cup\{\gamma\},(EA_T|_{\mathcal{W}})_c),\end{array}$$

其中 $I_{X,\ EW}$ 是由连续包含 $X\hookrightarrow EW$.诱导的包含映射

由于 $EA_{U,\ \mathcal{X}}\circ\Theta_\gamma$ 满足条件 (S)(F)(B)，定理 A.3 表明，$I_{X,\ EW}$ 在系数取自 $\mathbb{F}$的同调中诱导一个同构。容易看出，坐标映射 Θ_γ 在同调中诱导一个同构。因此，$I_{\mathcal{X},\ EH}$ 也在系数取自 $\mathbb{F}$的同调中诱导一个同构。J_*将是两个同调同构 $I_{X,\ EW*}$和 $I_{\mathcal{X}*}$的复合 □

命题 4.6. 设 γ 是 EA_T 的一个孤立临界点，其临界值为$c:=EA_T(\gamma)$。假设对于某个$m\in\mathbb{N}$，γ 也是 $EA_T^{[m]}$ 的一个孤立临界点。如果

$$(m^-(EA_T,\gamma),m^0(EA_T,\gamma))=(m^-(EA_T^{[m]},\gamma^{[m]}),m^0(EA_T^{[m]},\gamma^{[m]})),$$

那么，迭代映射 $\psi^{[m]}$限制为如下形式的成对空间之间的映射时

$$\psi^{[m]}:((EA_T)_c\cup\{\gamma\},(EA_T)_c)\hookrightarrow((EA_T^{[m]})_c\cup\{\gamma\},(EA_T^{[m]})_c),$$

诱导同调同构

$$\psi_*^{[m]}:C_*(EA_T,\gamma)\xrightarrow{\simeq}C_*(EA_T^{[m]},\gamma).\tag{4.10}$$

该结论是 [Lu13]中广义分裂引理的因子性质的推论。证明见 [Lu09b] 。

5 定理 1.3 的证明

令 $\mathbb{K}:=\{2^n\,|\,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$ 和 $a\in\mathbb{R}$ 为大于.....的常数

$$\max_{q\in M}\left\{\int_0^1 L(t,q,0)dt\right\}.$$

我们假设周期属于 $\mathbb{K}$ 且平均作用量小于 a 的 $L_\theta=L+\theta$ 的欧拉-拉格朗日系统的对称解只有有限个，并由此导出矛盾。我们将这些轨道记为

$$\gamma_1,\ldots,\gamma_r.$$

令 2^n 为它们在 $\mathbb{K}$ 中的公周期的最小值。众所周知，$\tilde{\gamma}:\mathbb{R}\to M$ 是下述时间重参数化的托内利拉格朗日量所对应的欧拉-拉格朗日系统的 j-周期解

$$\widetilde{L}_1(t,q,v):=L_1(2^nt,q,2^{-n}v)$$

当且仅当 $\gamma := \tilde{\gamma}(2^{-n}\cdot) : \mathbb{R} \to M$ 是 L_1 所对应的欧拉-拉格朗日系统的 $2^n j$-周期解时，此外， $\tilde{\gamma}$ 和 γ 相对于 L_1 和 L_1 分别具有相同的平均作用量 $\widetilde{\ }$。不失一般性，以下我们假设所有这些轨道 $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ 的周期均为 1。此外，本节所考虑的同调群假设其系数取自域 $\mathbb{Z}_2$.

引理 5.1. 对每个 $T > 0$ 和 $n \in \mathbb{N}$，次水平集 $(EA_T^{[n]})_a$的同调在次数 N上非平凡，即

$$H_N((EA_T^{[n]})_a) \neq 0.$$

证明. 根据我们在定理 (1.3) 中对常数 a 的选取，我们有

$$EA_T^{[n]} \circ \mathrm{pt}^{[n]}(q) = EA^{[n]} \circ \mathrm{pt}^{[n]}(q) < a, \quad \forall q \in M,$$

其中 $\mathrm{pt}^{[n]} : M \hookrightarrow EH(n)$ 是将一点映射到该点处的常值环的嵌入。于是 $\mathrm{pt}^{[n]}(q) \in (EA^{[n]})_a$. 因此，同调同态

$$\mathrm{pt}_*^{[n]} : H_N(M) \to H_N((EA_T^{[n]})_a)$$

由 $\mathrm{pt}^{[n]}$ 诱导，是一个单态射。由于 $H_N(M) \neq 0$，引理得证。 □

令 $U/2 > \max\{|\dot{\gamma}_\nu(t)|_{\gamma(t)} \mid t \in S_1, \nu = 1, \dots, r\}$。那么对每个 $m \in \mathbb{K}$, $EA_T^{[m]}$ 在每个 γ_ν 处的莫尔斯指标和零度均与选择 T 无关，其中$T \geq U$. 记为

$$(m^-(EA^{[m]}, \gamma_\nu^{[m]}), m^0(EA^{[m]}, \gamma_\nu^{[m]})) := (m^-(EA_T^{[m]}, \gamma_\nu^{[m]}), m^0(EA_T^{[m]}, \gamma_\nu^{[m]})).$$

令 $\{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$ 为平均莫 Morse 指数为零的对称轨道，$\{\gamma_{s+1}, \dots, \gamma_r\}$ 为平均指标为正的对称轨道。我们取足够大的 $m_1 \in \mathbb{K}$ ，使得

$$m^-(EA^{[m_1]}, \gamma_\nu) \geq N + 1, \ \forall \nu \in \{s+1, \dots, r\}.$$

由推论 4.4，得

$$C_N(EA_T^{[m_1]}, \gamma_\nu) = 0, \ \forall \nu \in \{s+1, \dots, r\} \text{ and } T \geq U.$$

由莫 Morse 不等式，得

$$0 \neq H_N((EA_T^{[m_1]})_a) \leq \sum_{\nu=1}^{s} C_N(EA_T^{[m_1]}, \gamma_\nu)$$

因此 $\exists \gamma \in \{\gamma_1, \cdots, \gamma_s\}$ 使得 $C_N(EA_T^{[m_1]}, \gamma) \neq 0$。由于 $\widehat{m}^-(EA, \gamma) = 0$, (2.11) 推出

$$0 \leq m^-(EA^{[m]}, \gamma) + m^0(EA^{[m]}, \gamma) \leq N, \ \forall m \in \mathbb{K}.$$

我们选取一个无限子集 $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}$ ，使得对于每个 $m \in \mathbb{K}'$,

$$(m^-(EA^{[m]}, \gamma), m^0(EA^{[m]}, \gamma) = m^-(EA^{[m_1]}, \gamma), m^0(EA^{[m_1]}, \gamma)).$$

对拉格朗日函数 L_θ 进行时间重标度后，我们假设 $1 \in \mathbb{K}'$。

根据命题 4.6，迭代映射 $\psi^{[m]}$ 诱导出同调同构

$$\psi_*^{[m]} : 0 \neq C_N(EA_T, \gamma) \xrightarrow{\simeq} C_N(EA_T^{[m]}, \gamma),\ \forall T \geq U \tag{5.1}$$

令 $c := EA(\gamma) = EA_T(\gamma) = EA_T^{[m]}(\gamma^{[m]})$，并令 $\epsilon > 0$ 充分小，使得 $c + \epsilon < a$ 且不存在 $\gamma_\nu \in \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$ 使得 $EA(\gamma_\nu) \in (c, c+\epsilon)$。

根据命题 4.2，若我们选择 $m \in \mathbb{K}'$ 并令 $T > \max\{U, T(a, m)\}$，则不存在值位于 $(c, c+\epsilon)$ 内的 $EA_T^{[m]}$ 临界点。这意味着包含映射

$$((EA_T^{[m]})_c \cup \{\gamma^{[m]}\}, (EA_T^{[m]})_c) \hookrightarrow ((EA_T^{[m]})_{c+\epsilon}, (EA_T^{[m]})_c) \tag{5.2}$$

在同调上诱导出一个单态射（见 [Cha93，第 1 章，定理 4.2]）。根据命题 4.5，包含映射

$$\begin{aligned} J^{[m]} : (((EA_{U,\mathcal{X}}^{[m]}|_{\mathcal{U}(m)})_c \cup \{\gamma^{[m]}\}), (EA_{U,\mathcal{X}}^{[m]}|_{\mathcal{U}(m)})) \to \\ (((EA_T^{[m]}|_{\mathcal{W}(m)})_c \cup \{\gamma^{[m]}\}), (EA_T^{[m]}|_{\mathcal{W}(m)})_c) \end{aligned} \tag{5.3}$$

诱导出同调同构。

根据 (5.2)(5.3)，我们得到一个同调单态射

$$\rho_*^{[m]} : C_*(EA_{U,\mathcal{X}}^{[m]}|_{\mathcal{U}(m)}, \gamma) \to H_*((EA_T^{[m]})_{c+\epsilon}, (EA_T^{[m]})_c) \tag{5.4}$$

对于每个 $m \in \mathbb{K}'$ 和 $T > \max\{U, T(a, m)\}$。

注意，迭代映射 $\psi^m : EH(m_1) \to EH(m)$ 在每个作用次水平集 $(EA_T)_c$ 上都限制为包含映射，并且与 $\rho^{[m]}$ 交换。也就是说，对于每个 $m \in \mathbb{K}'$ 和 $T > \max\{U, \tilde{T}(a, m)\}$，

$$\begin{array}{ccc} ((EA_{U,\mathcal{X}})_c \cup \{\gamma\}, (EA_{U,\mathcal{X}})_c) & \xrightarrow{\psi^{[m]}} & ((EA_{U,\mathcal{X}}^{[m]})_c \cup \{\gamma^{[m]}\}, (EA_{U,\mathcal{X}}^{[m]})_c) \\ \downarrow \rho & & \downarrow \rho^{[m]} \\ ((EA_T)_{c+\epsilon}, (EA_T)_c) & \xrightarrow{\psi^{[m]}} & ((EA_T^{[m]})_{c+\epsilon}, (EA_T^{[m]})_c). \end{array}$$

这在同调中诱导出以下交换图

$$\begin{array}{ccc} C_*(EA_{U,\mathcal{X}}, \gamma) & \xrightarrow{\psi_*^{[m]}} & C_*(EA_{U,\mathcal{X}}^{[m]}, \gamma) \\ \downarrow \rho_* & & \downarrow \rho_*^{[m]} \\ H_*((EA_T)_{c+\epsilon}, (EA_T)_c) & \xrightarrow{\psi_*^{[m]}} & H_*((EA_T^{[m]})_{c+\epsilon}, (EA_T^{[m]})_c). \end{array}$$

我们将证明

引理 5.2（同调消失）。设 $[\mu] \in C_*(EA_{U,\mathcal{X}}, \gamma)$。则存在 $\bar{m} = \bar{m}(L_\theta, [\mu]) \in \mathbb{K}'$ 和 $T = T(L_\theta, [\mu])$，使得对每个 $T \geq T$，

$$\psi_*^{[\bar{m}]} \circ \rho_*[\mu] = 0 \text{ in } H_*((EA_T^{[\bar{m}]})_{c+\epsilon}, (EA_T^{[\bar{m}]})_c).$$

定理 1.3 可由此引理直接推出。事实上，设 $0 \neq [\mu] \in C_N(EA_{U,\mathcal{X},\gamma})$。

~ ¯我们取 $m \in \{m \in \mathbb{K}' \mid m \geq \bar{m}\}$ 和 $T \geq \max\{U, T(a,m)\ T\}$，于是

$$\psi_*^{[m]} \circ \rho[\mu] = \psi_*^{[m/\bar{m}]} \circ \left(\psi_*^{[\bar{m}]} \circ \rho_*[\mu]\right) = 0$$

在 $H_N((EA_T^{[m]})_{c+\epsilon}, (EA_T^{[m]})_c)$ 中。然而，上述交换图意味着

$$(0 \neq)\rho_*^{[m]} \circ \psi_*^{[m]}[\mu] = \psi_*^{[m]} \circ \rho_*[\mu],$$

这与假设矛盾。 □

6 引理 5.2 的证明

引理 5.2 的证明基于一种本质上源自 Bangert 的同伦技巧。需要指出的是，此处所需的 Bangert 同伦应当是时间可逆的，这与 [BK83、Lon00、Lu09b、Maz11] 中的情形不同。

设 $L\colon S_1 \times TM \to \mathbb{R}$ 是一个满足以下条件的凸二次增长拉格朗日量

$$L(-t,q,-v) = L(t,q,v), \quad (t,q,v) \in S_1 \times TM.$$

$EA\colon EH(1) \to \mathbb{R}$ 是 L 的平均作用泛函。

引理 6.1（时间可逆 Bangert 同伦）。设 $c_1 < c_2 \leq \infty$ 和 $\sigma : \Delta^q \to EH(1)$ 是一个连续奇异单形，使得

$$\sigma(\Delta^q) \subset (EA)_{c_2}, \quad \sigma(\partial\Delta^q) \subset (EA)_{c_1}.$$

那么，存在 $\bar{n} = \bar{n}(L,\sigma) \in \mathbb{N}$，并且对每个整数 $n \geq \bar{n}$，存在一个同伦

$$B_\sigma^{[2n]} : [0,1] \times (\Delta^q, \partial\Delta^q) \to ((EA)_{c_2}, (EA)_{c_1}),$$

我们称之为 Bangert 同伦，使得

(i) $B_\sigma^{[2n]}(0,\cdot) = \sigma^{[2n]} := \psi^{[2n]} \circ \sigma$,
(ii) $B_\sigma^{[2n]}(1,\Delta^q) \subset (EA^{[2n]})_{c_1}$,
(iii) $B_\sigma^{[2n]}(\cdot,z) = B_\sigma^{[2n]}(0,z)$ *if* $z \in \partial\Delta^q$.

证明。首先，我们引入一些记号。设 $\alpha_i : [a_i,b_i] \to M$ for$i = 1,\ 2$ 是定义在有界区间上的两条路径，且 $\alpha_1(b_1) = \alpha_2(a_2)$。我们将逆路径 α_1^{-1}定义为沿着 α_1 从 $\alpha_1(b_1)$ 到 $\alpha_1(a_1)$ 行进的路径。我们用 $\overline{\alpha_1}\colon [a,b] \to M$ 表示 α_1 在 $[a,b]$ 上的重参数化，其公式为

$$\overline{\alpha_1}(t) := \alpha\left(\tfrac{t-a}{b-a} \cdot (b_1 - a_1) + a_1\right).$$

此外，$\alpha_1 * \alpha_2$ 是拼接路径，先沿着 α_1 行进，再沿着 α_2行进。$\alpha_1 * \alpha_2$ 在 $[a_1, b_1 + b_2 - a_2]$ 上的一个参数化由下式给出

$$\alpha_1 * \alpha_2(t) := \begin{cases} \alpha_1(t), & t \in [a_1, b_1). \\ \overline{\alpha_2}(t), & t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2]. \end{cases}$$

现在我们在 $EH(2n)$ 中构造一个适当同伦。考虑一个连续映射 $\theta\colon [x_0,x_1] \to EH(1)$，其中 $[x_0,x_1] \subset \mathbb{R}$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们定义

$\theta^{[2n]} := \psi^{[2n]} \circ \theta : [x_0, x_1] \to EH(2n)$。我们将构造另一个连续映射$\theta^{\langle 2n\rangle}$，这是构造 Bangert 同伦的关键步骤。

记 $\mathrm{ev} : W^{1,2}(S_1, M) \to M$为求值映射，其定义为

$$\mathrm{ev}(\xi) = \xi(0), \quad \forall \xi \in W^{1,2}(S_1, M).$$

该映射是光滑的，这意味着初始点曲线 $\mathrm{ev}\circ\theta : [x_0, x_1] \to M$ 是一致连续的。

步骤 1. 如果 $\mathrm{dist}(\mathrm{ev}\circ\theta(x), \mathrm{ev}\circ\theta(x'))$ 小于单射半径，则我们将 $\theta_x^{x'}$ 定义为连接点 $\mathrm{ev} \circ \theta(x)$ 和 $\mathrm{ev} \circ \theta(x')$ 的最短测地线。注意，这条测地线关于其端点光滑依赖。对于每个 $x \in [x_0, x_1]$，$\mathrm{dist}(\mathrm{ev} \circ \theta(x_0), \mathrm{ev} \circ \theta(x))$ 可能大于单射半径。在此，我们选择 $l \in \{0, 1, \ldots, l_1\}$ 使得 $x_0 + l\rho \le x \le x_0 + (l+1)\rho$，其中 l_1满足 $x_0 + l_1\rho \le x_1 \le x_0 + (l_1+1)\rho$。于是，我们可以定义分段测地线$\theta_{x_0}^{x} : [x_0, x] \to M$以及 $\theta_x^{x_1} : [x, x_1] \to M$，定义为

$$\begin{aligned}
\theta_{x_0}^{x} &:= \theta_{x_0}^{x_0+\rho} * \theta_{x_0+\rho}^{x_0+2\rho} * \cdots * \theta_{x_0+l\rho}^{x}, \\
\theta_{x}^{x_1} &:= \theta_{x}^{x_0+(l+1)\rho} * \theta_{x_0+(j+1)\rho}^{x_0+(j+2)\rho} * \cdots * \theta_{x_0+l_1\rho}^{x_1}.
\end{aligned}$$

步骤 2. 对于每个 $x \in [x_0, x_1]$，我们按如下方式定义一个环路 $\tilde{\theta}^{\langle 2n\rangle}(x)$。设 $l \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$ 和 $y \in [0, \frac{x_1 - x_0}{n}]$，令

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}^{\langle 2n\rangle}(x_0 + y) &:= \theta^{[n-1]}(x_0) * \theta_{x_0}^{x_0+ny} * \theta^{[2]}(x_0 + ny) \\
&\quad * (\theta_{x_0}^{x_0+ny})^{-1} * \theta^{[n-1]}(x_0), \\
\tilde{\theta}^{\langle 2n\rangle}\big(x_0 + \tfrac{l}{n}(x_1 - x_0) + y\big) &:= \theta^{[n-l-1]}(x_0) * \theta_{x_0}^{x_0+ny} * \theta(x_0 + ny) * \theta_{x_0+ny}^{x_1} * \theta^{[2l]}(x_1) \\
&\quad * (\theta_{x_0+ny}^{x_1})^{-1} * \theta(x_0 + ny) * (\theta_{x_0}^{x_0+ny})^{-1} * \theta^{[n-l-1]}(x_0), \\
\tilde{\theta}^{\langle 2n\rangle}\big(x_0 + \tfrac{n-1}{n}(x_1 - x_0) + y\big) &:= \theta(x_0 + ny) * \theta_{x_0+ny}^{x_1} * \theta^{[2n-2]}(x_1) \\
&\quad * (\theta_{x_0+ny}^{x_1})^{-1} * \theta(x_0 + ny).
\end{aligned}$$

注意，这些环路

$$\tilde{\theta}^{\langle 2n\rangle}(x_0 + y),\ \tilde{\theta}^{\langle 2n\rangle}\big(x_0 + \tfrac{l}{n}(x_1 - x_0) + y\big),\ \tilde{\theta}^{\langle 2n\rangle}\big(x_0 + \tfrac{n-1}{n}(x_1 - x_0) + y\big)$$

分别定义在

$$[0, 2n(1+y)],\ [0, 2n + 2(x_1 - x_0)],\ [0, 2n + 2(x_1 - x_0 - ny)].$$

步骤 3. 对于每个 $y \in [0, \frac{x_1 - x_0}{n})$ 和 $x = x_0 + \frac{l}{n}(x_1 - x_0) + y \in [x_0, x_1)$，我们将环路 $\tilde{\theta}^{\langle 2n\rangle}(x)$ 重新参数化为 $EH(2n)$ 中的时间可逆环路 $\theta^{\langle 2n\rangle}(x)$。更准确地说，

$$\theta^{\langle 2n\rangle}(x_0 + y)|_{[0,n]} := \begin{cases} \theta^{[n-1]}(x_0), & t \in [0, n-1] \\ \overline{\theta_{x_0}^{x_0+ny}}, & t \in [n-1, n-1+\frac{ny}{ny+1}] \\ \overline{\theta(x_0 + ny)}, & t \in [n-1+\frac{ny}{ny+1}, n]. \end{cases}$$

$$\theta^{\langle 2n\rangle}\big(x_0 + \tfrac{1}{n}(x_1 - x_0) + y\big)|_{[0,n]} := \begin{cases} \theta^{[n-2]}(x_0), & t \in [0, n-2] \\ \overline{\theta_{x_0}^{x_0+ny}}, & t \in [n-2, n-2+\frac{ny}{ny+1}] \\ \overline{\theta(x_0 + ny)}, & t \in [n-2+\frac{ny}{ny+1}, n-1] \\ \overline{\theta_{x_0+ny}^{x_1}}, & t \in [n-1, n-1+\frac{x_1 - x_0 - ny}{x_1 - x_0 - ny + 1}] \\ \overline{\theta(x_1)}, & t \in [n-1+\frac{x_1 - x_0 - ny}{x_1 - x_0 - ny + 1}, n] \end{cases}$$

$$\theta^{\langle 2n\rangle}\big(x_0+\tfrac{l}{n}(x_1-x_0)+y\big)|_{[0,n]} := \begin{cases} \theta^{[n-l-1]}(x_0), & t\in[0,n-l-1] \\ \overline{\theta_{x_0}^{x_0+ny}}, & t\in[n-l-1,n-l-1+\frac{ny}{ny+1}] \\ \overline{\theta(x_0+ny)}, & t\in[n-l-1+\frac{ny}{ny+1},n-l] \\ \overline{\theta_{x_0+ny}^{x_1}}, & t\in[n-l,n-l+\frac{x_1-x_0-ny}{x_1-x_0-ny+1}] \\ \overline{\theta(x_1)}, & t\in[n-l+\frac{x_1-x_0-ny}{x_1-x_0-ny+1},n-l+1] \\ \overline{\theta^{[l-1]}(x_1)}, & t\in[n-l+1,n]. \end{cases}$$

对于 $l=2,\dots,n-2$.

$$\theta^{\langle 2n\rangle}\big(x_0+\tfrac{n-1}{n}(x_1-x_0)+y\big)|_{[0,n]} := \begin{cases} \theta(x_0+ny), & t\in[0,1] \\ \overline{\theta_{x_0+ny}^{x_1}}, & t\in[1,1+\frac{x_1-x_0-ny}{x_1-x_0-ny+1}] \\ \overline{\theta(x_1)}, & t\in[1+\frac{x_1-x_0-ny}{x_1-x_0-ny+1},2] \\ \overline{\theta^{[n-2]}(x_1)}, & t\in[2,n]. \end{cases}$$

且 $\theta^{\langle 2n\rangle}(x_1)|_{[0,n]} := \theta^{[2n]}(x_1)$。对于 $t\in[-n,0]$，我们定义

$$\theta^{\langle 2n\rangle}(x)(t) := \theta^{\langle 2n\rangle}(x)(-t), \quad \forall x\in[x_0,x_1].$$

由于 $\theta^{\langle 2n\rangle}(x)(n) = \theta^{\langle 2n\rangle}(x)(-n) = 0$，$\theta^{\langle 2n\rangle}(x)$ 可以扩展为周期为 $2n$ 的环路。容易看出，对于每个 $x\in[x_0,x_1]$，$\theta^{\langle 2n\rangle}(x)$ 是 S_{2n} 上的连续环路，并且是 $\tilde{\theta}^{\langle 2n\rangle}(x)$ 的重参数化。（见图1中的示例 $\theta^{\langle 6\rangle}(x)$）。

对于固定的 $l\in\{-n+1,-n+2,\dots,n-1\}$，$\theta^{\langle 2n\rangle}\left(x_0+\frac{l}{n}(x_1-x_0)+y\right)$ 关于 $y\in[0,\frac{x_1-x_0}{n})$ 连续。此外，

$$\lim_{y\to(x_1-x_0)/n}\theta^{\langle 2n\rangle}\left(x_0+\tfrac{l}{n}(x_1-x_0)+ny\right)=\theta^{\langle 2n\rangle}\left(x_0+\tfrac{l+1}{n}(x_1-x_0)\right)$$

对于每个 $l\in\{-n+1,-n+2,\dots,n-1\}$. 因此，$\theta^{\langle 2n\rangle}:\ [x_0,x_1]\to EH(2n)$ 是一个连续映射。

我们注意到映射 $\tilde{\theta}^{\langle 2n\rangle}$ 在 [Maz11] 中定义的对象不能重新参数化为对称回路，因为移动环路 $\theta(x_0+ny)$ 是 1-周期的，而对称回路必须在某个时刻 t 和 $n-t$ 两次经过移动环路 $\theta(x_0+ny)$。这就是我们定义一个 $2n$-周期环路 $\tilde{\theta}^{\langle 2n\rangle}$ 并在 $\tilde{\theta}^{\langle 2n\rangle}$ 中考虑两个移动环路 $\theta(x_0+ny)$ 的原因。

对于每个 $x\in[x_0,x_1]$，我们定义 $\widehat{\theta}(x):\ S_2\to M$，即通过从 $\tilde{\theta}^{\langle 2n\rangle}$ 的公式中消去 $\theta(x_0)$ 和 $\theta(x_1)$ 的幂次项，并在 $[0,2]$ 上重新参数化而得到的环路。注意，θ 与整数 $n\in\mathbb{N}$ 无关，并且对于每个 $x\in[x_0,x_1]$，作用 $EA(\theta(x))$ 是有限的，并且连续依赖于 x_0。特别地，我们有

$$\begin{aligned} C(\theta) &:= \max_{x\in[x_0,x_1]}\{EA(\widehat{\theta}(x))\} \\ &= \max_{x\in[x_0,x_1]}\left\{\int_0^2 L\left(t,\widehat{\theta}(x)(t),\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{\theta}(x)(t)\right)\mathrm{d}t\right\}<\infty. \end{aligned}$$

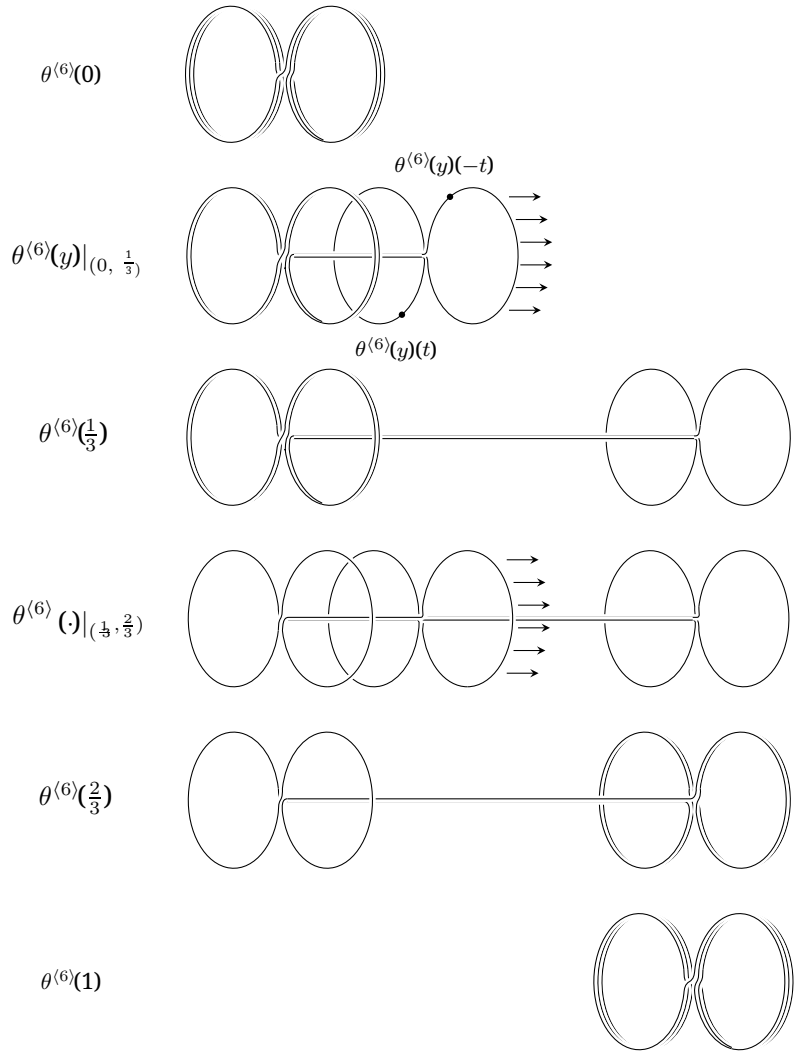

图1： $\theta^{\langle 6\rangle}(y)$的描述

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们有如下估计

$$\begin{aligned} EA^{[2n]}(\theta^{\langle 2n\rangle}(x)) &\leq \tfrac{1}{2n}[(n-2)\max\{EA(\theta(x_0)), EA(\theta(x_1))\} + EA(\widehat{\theta}(x))] \\ &\leq \max\{EA(\theta(x_0)), EA(\theta(x_1))\} + \tfrac{C(\theta)}{2n}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

步骤 4。现在，我们针对 q-奇异单形 $\sigma\colon\ \Delta^q \to (EA)_{c_2}$ 构造同伦。令 $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^q$ 为一条经过原点和 $\Delta^q \subset \mathbb{R}^q$. 重心的直线。那么， $\mathbb{L}^\perp \oplus \mathbb{L}$ 是 $\mathbb{R}^q$. 的一个正交分解。我们可以将 $\mathrm{z} \in \Delta^q$ 写成 $(\mathrm{y}\ x) \in \mathbb{L}^\perp \oplus \mathbb{L}.$。对于每个 $s \in [0,1]$, 令 $s\Delta^q = \{s\mathrm{z} \mid \mathrm{z} \in \Delta^q\}$。对于每个固定的 $\mathrm{y} \in \mathbb{L}^\perp$，我们将 $[x_0(\mathrm{y}\ s)\ x_1(\mathrm{y}\ s)] \subset \mathbb{L}$ 记为满足 $\{\mathrm{y}\} \times [x_0(\mathrm{y}\ s)\ x_1(\mathrm{y}\ s)] \subset s\Delta^q$. 的最大区间。注意到

$$\sigma(\mathbf{y}, \cdot)|_{[x_0(\mathbf{y},s), x_1(\mathbf{y},s)]} : [x_0(\mathbf{y}, s), x_1(\mathbf{y}, s)] \to (EA)_{c_2}$$

是一个连续映射，我们有相关的时间可逆映射 $\sigma(\mathrm{y}\ \cdot)^{\langle 2n\rangle}$，对每个$n \in \mathbb{N}.$。现在定义 Bangert 同伦 $B_\sigma^{[2n]}(s, \mathrm{z}) :\ [0,1] \times \Delta^q \to EH(2n)$ 如下

$$B_\sigma^{[2n]}(s, \mathbf{z}) := \begin{cases} \sigma(\mathbf{y},)|_{[x_0(\mathbf{y},s), x_1(\mathbf{y},s)]}{}^{\langle 2n\rangle}(x) & \mathbf{z} = (\mathbf{y}, x) \in s\Delta^q, \\ \sigma^{[2n]}(\mathbf{z}) & \mathbf{z} = (\mathbf{y}, x) \in \Delta^q \setminus s\Delta^q. \end{cases}$$

由于 $\sigma(\Delta^q) \subset (EA)_{c_2}$ 且 $\sigma(\partial\Delta^q) \subset (EA)_{c_1}$，由 (6.1) 可知，存在 $\epsilon > 0$ 使得

$$EA^{[2n]}(\sigma^{[2n]}(\Delta^q)) < c_2 - \epsilon,\ EA^{[2n]}(\sigma^{[2n]}(\partial\Delta^q)) < c_1 - \epsilon.$$

容易看出， $B_\sigma^{[2n]}$ 是相对于 $\partial\Delta^q$ 的，我们有

$$EA(B_\sigma^{[2n]}(s, \partial\Delta^q)) < c_1 - \epsilon,\ \forall s \in [0,1].$$

Let

$$C(\sigma) := \max\{C(\sigma(\mathbf{y}, \cdot)|_{[x_0(\mathbf{y},s), x_1(\mathbf{y},s)]}) \mid s \in [0,1], (\mathbf{y}, x) \in \Delta^q\}.$$

容易计算得

$$EA^{[2n]}(B_\sigma^{[2n]}(s, \mathbf{z})) \leq \max_{z \in \Delta^q}\{EA(\sigma(\mathbf{z}))\} + \tfrac{C(\sigma)}{2n} < c_2 - \epsilon + \tfrac{C(\sigma)}{2n},$$

and

$$EA^{[2n]}(B_\sigma^{[2n]}(1, \mathbf{z})) \leq \max_{z \in \partial\Delta^q}\{EA(\sigma(\mathbf{z}))\} + \tfrac{C(\sigma)}{2n} < c_1 - \epsilon + \tfrac{C(\sigma)}{2n}.$$

注意到 $C(\sigma)$ 取决于 L 和 σ，记为 $\bar{n}(L, \sigma) := \lceil \frac{C(\sigma)}{2\epsilon} \rceil$。对每个 $n \geq \bar{n}(L, \sigma)$, $B_\sigma^{[2n]}$ 满足该引理的性质。 □

我们还需要以下引理。参见 [BK83，引理 1]。

引理 6.2. 设 (X, A) 是一对拓扑空间，且 α a singular relative$p$-cycle of (X, A)。令 $\Sigma(\alpha)$ 表示 α 中所有奇异单形及其

所有面的集合。假设对每个 $\sigma \in \Sigma(\alpha)$，都有一个映射 $\sigma : \Delta^q \to X$，$0 \le q \le p$ 与之对应，使得

(a)$P_\sigma(0,\cdot) = \sigma$ 当 $z \in \Delta^q$(b)$P_\sigma(1,\Delta^q) \subset A(c)P_\sigma(s,\cdot) = \sigma$ 若 $\sigma(\Delta^q) \subset A(d)P_\sigma(\cdot, F_i(\cdot))$ $= P_{\sigma\circ F_i}$ 当 $i = 0,\ldots,q$，其中 F_i: $\Delta^{q-1} \to \Delta^q$ 是映射到 Δ^q 的 i^{th} 面的标准仿射映射

于是，同调类 $[\alpha] \in H_p(X, A)$ 消失。

引理 5.2 的证明。由 (5.4)，对于每个 $T > \max\{U, T(a,1)\}$，我们有 $\rho_*[\mu] \in H_*((EA_T)_{c+\epsilon}, (EA_T)_c)$。此外，由于 $C_N(EA_U, u, \gamma) \neq 0$，$\gamma$不可能是 EA_U, u 在 $\mathcal{X}$ 上的局部极小值。由 $\mathcal{X}$ 在 $EH(1)$ 中的稠密性，对于每个$T > \max\{U, T(a,1)\}$，都有 $(EA_T)_c \neq \emptyset$。

令 $\Sigma(\mu)$ 为 μ 的奇异单形及其所有面组成的集合。对于每个 σ: $\Delta^q \to EH(1) \in \Sigma(\mu)$，我们注意到 $\sigma(\Delta^q) \subset \mathcal{U}$，$\sigma$ 的像是 C^1-有界的，并且

$$\sup_{z\in\Delta^q} \max_{t\in S_1} \{|\tfrac{d}{dt}\sigma(z)(t)|_{\sigma(z)(t)}\} < U, \quad \forall \sigma \in \Sigma(\mu).$$

因此，$\rho(\sigma)$ 的像是 C^1-有界的，其上界为 U。对于每个 $T \ge U$，我们有

$$EA(\rho(\sigma)(z)) = EA_T(\rho(\sigma)(z)) < c + \epsilon, \quad \forall z \in \Delta^q, \tag{6.2}$$

从而

$$\rho(\sigma)(\Delta^q) \subset (EA)_{c+\epsilon}, \quad \rho(\sigma)(\partial\Delta^q) \subset (EA)_c.$$

现在我们证明存在 $2\bar{n} = 2\bar{n}(L_\theta, \sigma) \in \mathbb{K}'$ 以及一个映射

$$P_\sigma^{[2\bar{n}]} : [0,1] \times \Delta^q \to (EA^{[2\bar{n}]})_{c+\epsilon}$$

使得

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} P_\sigma^{[2\bar{n}]}(0,\cdot) = \psi^{[2\bar{n}]} \circ \rho(\sigma)\\
&\text{(ii)} P_\sigma^{[2\bar{n}]}(1,\Delta^q) \subset (EA^{[2\bar{n}]})_c\\
&\text{(iii)} P_\sigma^{[2\bar{n}]}(s,\cdot) = \psi^{[2\bar{n}]} \circ \rho(\sigma) \quad \text{ if } \rho(\sigma)(\Delta^q) \subset (EA)_c\\
&\text{(iv)} P_\sigma^{[2\bar{n}]}(\cdot, F_i(\cdot)) = P_{\sigma\circ F_i}^{[2\bar{n}]} \quad \text{ for } i = 0,\ldots,q
\end{aligned}$$

注意，$P_\sigma^{[2\bar{n}]}$ 的像包含于 $(EA^{[2\bar{n}]})_{c+\epsilon}$，这隐含地要求 $P_\sigma^{[2\bar{n}]}$ 关于时间可逆，即

$$P_\sigma^{[2\bar{n}]}(\cdot,\cdot)(t) = P_\sigma^{[2\bar{n}]}(\cdot,\cdot)(-t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

在这种情况下，引理 6.1 中修改过的 Bangert 同伦足以用于构造 $P_\sigma^{[2\bar{n}]}$。现在，我们简要说明对每个 $\sigma \in \Sigma(\mu)$，$\bar{n}(L_\theta, \sigma)$ 和 $P_\sigma^{[2\bar{n}]}$ 存在性的证明。更多细节请参阅 [BK83, Maz11]。

若 $\sigma \in \Sigma(\mu)$ 是一个平凡的 q-奇异单纯形，即 $\rho(\sigma)(\Delta^q) \subset (EA)_{c_1}$，则取 $\bar{n} = 1$ 和 $P_\sigma^{[2]} = \psi^{[2]} \circ \rho(\sigma)$。下文中，我们始终假设每个 $\sigma \in \Sigma(\mu)$

均为非平凡的。我们通过对$p=\max\{\dim\sigma\,|\,\sigma\in\Sigma(\mu)\}$使用归纳法，证明 $\bar{n}(L_\theta,\sigma)$ 和 $P_\sigma^{[2\bar{n}]}$ 的存在性。

我们只考虑 $\sigma(\Delta^q)\not\subseteq(EA)_c$ 的情形。若 $p=0$ 且 $\eta:=\rho(\sigma)(0)\in(EA)_{c+\epsilon}$ 是对称回路。由于 $(EA)_c\neq\emptyset$，我们选择一条路径 $\Gamma:[0,1]\to(EA)_{c+\epsilon}$，连接 η 和 $(EA)_c$ 中的一个环路。我们选择 $\bar{n}=1$ 和 $P_\sigma^{[2]}(t,0)=\psi^{[2]}\circ\Gamma(t)$。

当 μ 是一个带有 $p>0$ 的相对 p-循环时。对于每个带有 $0\le q<p$ 的 q-奇异单纯形 $\nu\in\Sigma(\mu)$，我们假设 $P_\nu^{[2n]}$ 是针对 $2n\in\mathbb{K}'$ 得到的，使得

$$2n\ge 2\tilde{n}(L,\mu):=\max\{\bar{n}(L,\nu)\in\mathbb{K}'\text{ for }q\text{-simplex }\nu\text{ with }0\le q<p\}.$$

设 $\sigma\in\Sigma(\mu)$ 是一个 p-奇异单纯形，且 $\sigma\circ F_i:\Delta^{p-1}\to(EA)_{c_2}$ 是 σ 的 i^{th} 面。于是，对每个面 $\sigma\circ F_i$，都可以得到 $P_{\sigma\circ F_i}^{[2n]}$。我们构造一个新的映射

$$Q^{[2n]}:\{0\}\times\Delta^p\cup[0,\tfrac{1}{2}]\times\partial\Delta^p\to(EA^{[2n]})_{c+\epsilon}$$

as

$$Q^{[2n]}(s,z)=\begin{cases}\psi^{[2n]}\circ\rho(\sigma)(s,z) & \text{if }(s,z)\in\{0\}\times\Delta^p,\\ P_{\sigma\circ F_i}^{[2n]}(2s,z) & \text{if }(s,F_i(z))\in[0,\tfrac{1}{2}]\times\partial\Delta^p,\ \forall i=0,\dots,p.\end{cases}$$

由于 $\{0\}\times\Delta^p\cup[0,\frac{1}{2}]\times\partial\Delta^p$ 是 $[0,\frac{1}{2}]\times\Delta^p$ 的收缩，$Q^{[2n]}$ 可以扩展为一个连续映射

$$Q^{[2n]}:[0,\tfrac{1}{2}]\times\Delta^p\to(EA^{[2n]})_{c+\epsilon}.$$

根据 $P_{\sigma\circ F_i}^{[2n]}$ 的性质 (ii)，我们有 $Q^{[2n]}(1_2,\partial\Delta^p)\subset(EA^{[2n]})_c$.因此

$$\sigma':=Q^{[2n]}(\tfrac{1}{2},\cdot):(\Delta^p,\partial\Delta^p)\to((EA^{[2n]})_{c+\epsilon},(EA^{[2n]})_c)$$

是一个 p-奇异单纯形。由引理 6.1，存在 $\bar{n}(L_\theta,\sigma')$和一个 Bangert 同伦

$$B_{\sigma'}^{[2n]}:[0,1]\times(\Delta^p,\partial\Delta^p)\to((EA^{[2n]})_{c+\epsilon},(EA^{[2n]})_c)$$

对于 $\mathbb{K}'$ 中的每个 $n\ge\bar{n}(L_\theta,\sigma')$。

设 $\bar{n}:=\bar{n}(L_\theta,\sigma)=\max\{\tilde{n}(L_\theta,\mu)\ \bar{n}(L_\theta,\sigma')\}$，则 $P_\sigma^{[2\bar{n}]}$由下式构造

$$P_\sigma^{[2\bar{n}]}(s,z)=\begin{cases}Q^{[2\bar{n}]}(s,z) & \text{if }(s,z)\in[0,\frac{1}{2}]\times\Delta^p,\\ B_{\sigma'}^{[2\bar{n}]}(2s-1,z) & \text{if }(s,z)\in[\frac{1}{2},1]\times\Delta^p.\end{cases}$$

满足性质 (i)(ii)(iii)(iv)。

现在我们已得到 $\bar{n}(L_\theta,\sigma)$ 和 $P_\sigma^{[2\bar{n}]}$，对每个 $\sigma\in\Sigma(\mu)$ 都成立。由于每个奇异单纯形 $\sigma\in\Sigma(\mu)$ 的像都是 C^1-有界的，Bangert 同伦 $B_\sigma^{[2n]}$ 的像是 $W^{1,\infty}$-有界的。因此，$P_\sigma^{[2\bar{n}]}$ 的构造意味着 $P_\sigma^{[2\bar{n}]}:[0,1]\times\Delta^q\to(EA^{[2\bar{n}]})_{c+\epsilon}$ 的像是 $W^{1,\infty}$-有界的，即

$$\text{(v)}\quad\sup_{(t,z)\in[0,1]\times\Delta^q}\operatorname*{ess\,sup}_{t\in S_1}\left|\tfrac{d}{dt}P_\sigma^{[2\bar{n}]}(s,z)(t)\right|_{P_\sigma^{[2\bar{n}]}(s,z)(t)}<T(L_\theta,\sigma)$$

对于某个 $T(L_\theta,\sigma)$, >0. (i) 蕴含 $T(L_\theta,\sigma) > U$。由于 $\Sigma(\mu)$ 是有限集，令

$$\bar{m} := \bar{m}(L_\theta,[\mu]) = \max\{2\bar{n}(L_\theta,\sigma) \,|\, \sigma \in \Sigma(\mu)\},$$
$$\bar{T} := \bar{T}(L_\theta,[\mu]) = \max\{\tilde{T}(a,\bar{m}),\, T(L_\theta,\sigma) \,|\, \sigma \in \Sigma(\mu)\}.$$

注意，对每个 $n \in \{n \in \mathbb{K}' \,|\, n \geq \bar{n}\}$, $P_\sigma^{[2n]}$也满足上述性质 (i)(ii)(iii)(iv)。于是，对每个 q-奇异单纯形 $\sigma \in \Sigma(\mu)$ 以及每个 $T \geq T$，我们有

$$P_\sigma^{[\bar{m}]}([0,1]\times\Delta^q) \subset (EA_T^{[\bar{m}]})_{c+\epsilon}.$$

容易验证, $P_\sigma^{[\bar{m}]}$满足这些性质

$$\begin{aligned}
&\text{(i')} P_\sigma^{[\bar{m}]}(0,\cdot) = \psi^{[\bar{m}]}\circ\rho(\sigma)\\
&\text{(ii')} P_\sigma^{[\bar{m}]}(1,\Delta^q) \subset (EA_T^{[\bar{m}]})_c\\
&\text{(iii')} P_\sigma^{[\bar{m}]}(s,\cdot) = \psi^{[\bar{m}]}\circ\rho(\sigma) \quad \text{if } \rho(\sigma)(\Delta^q) \subset (EA_T)_c\\
&\text{(iv')} P_\sigma^{[\bar{m}]}(\cdot,F_i(\cdot)) = P_{\sigma\circ F_i}^{[\bar{m}]} \quad \text{for } i=0,\ldots,q
\end{aligned}$$

由于 $\psi_*^{[\bar{m}]}\circ\rho_*[\mu] \in H_*((EA_T^{[\bar{m}]})_{c+\epsilon}, (EA_T^{[\bar{m}]})_c)$，由引理 6.2 可得

$$\psi_*^{[\bar{m}]}\circ\rho_*[\mu] = 0 \text{ in } H_*((EA_T^{[\bar{m}]})_{c+\epsilon}, (EA_T^{[\bar{m}]})_c).$$

引理 5.2 得证。

A 附录

我们介绍广义分裂引理。

广义分裂引理的条件。设 H 是一个内积为 $\langle\cdot$、诱导范数为 $\cdot\rangle_H$ 的希尔伯特空间 $\|\cdot\|$。设 X 是一个范数为 $\|\cdot\|$ 的巴拿赫空间，使得

（S） $X \subset H$ 在 H 中稠密，且包含映射 $X \hookrightarrow H$ 是连续的，即可设 $\|x\| \leq \|x\|_X$、$\forall x \in X$。

记 $V^X := V \cap X$ 为 X 中 0 的一个开邻域，其中 V 是原点 $0 \in H$ 的一个开邻域。

（F）设泛函 $\mathcal{L}$： $V \to \mathbb{R}$ 满足以下条件:

（F1） $\mathcal{L}$： $V \to \mathbb{R}$ 是一个 C^1-泛函。原点 $0 \in X$ 是 $\mathcal{L}|_{V^X}$ 的临界点，且 $\mathcal{L}$。

（F2）存在一个映射 $\mathcal{A} \in C^1(V^X, X)$，使得

$$d\mathcal{L}(x)(u) = \langle \mathcal{A}(x), u\rangle_H, \quad \forall x \in V^X,\, u \in X.$$

（F3）存在一个映射 $\mathcal{B} \in C(V^X, L_s(H))$，使得

$$\langle d\mathcal{A}(x)[u], v\rangle_H = \langle \mathcal{B}_T(\gamma)u, v\rangle_H, \quad \forall x \in V^X,\, u,v \in X.$$

(B) $\mathcal{B}$ 必须满足以下性质：(B1) 0 不属于谱 $\sigma(\mathcal{B}(0))$，或者是 $\sigma(\mathcal{B}(0))$ 的孤立点。(B2) 若 $u \in H$ 满足 $\mathcal{B}(0)(u) = v$ 对某个 $v \in X$ 成立，则 $u \in X$。

(B3) 映射 $\mathcal{B}: V_X \to L_s(H,H)$ 有一个变形

$$\mathcal{B}(x) = P(x) + Q(x), \quad x \in V \cap X$$

其中 $P(x): H \to H$ 是一个正定线性算子，而 $Q(x): H \to H$是一个紧线性算子，且具有以下性质

(i) 算子 $\mathcal{B}(0)$ 的所有对应于负特征值的特征函数都属于 X;

(ii) 对于任意满足 $\|x_k\| \to 0$ 的序列 $\{x_k\} \subset V \cap X$，对于任意 $u \in H$，都有 $\|P(x_k)u - P(0)u\| \to 0$；

(iii) 映射 Q 关于 $V \cap X$ 上由 H 诱导的拓扑在 0 处连续;

(iv) 存在正常数 $\epsilon > 0$ 和 $C > 0$，使得

$$\langle P(x)u, u\rangle \geq C\|u\|^2 \quad \forall u \in H, \forall x \in B_H(0,\epsilon) \cap X.$$

注 A.1. 条件 (B2)(B3) 意味着 H^0 和 H^- 都是包含于 X 中的有限维子空间（参见 Lu13，命题 B.2]）。令 $* = +, -, 0$。我们用 P^* 表示到 H^* 上的正交投影，并用 $X^* = X \cap H^* = P^*(H)$ 表示。令 $H^\pm = H^+ \oplus H^-$ 和 $X^\pm := X \cap H^\pm = X^- + H^+ \cap X$.。我们用 B_ϵ 表示以 $0 \in H$ 为中心、半径为 ϵ 的邻域，并令 $B_\epsilon^* := B_\epsilon \cap H^*, * = 0, +, -$。注意，$\dim H^-$ 和 $\dim H^0$ 分别是 $\mathcal{L}$ 在临界点 0 处的莫尔斯指标和零度，即 $m^-(\mathcal{L}, 0) = \dim H^-$，且 $m^0(\mathcal{L}, 0) = \dim H^0$。

定理 A.1（[Lu09a，定理 1.1]）。设 $\mathcal{L}: V \to \mathbb{R}$ 是满足假设 (S)(F)(B) 和 $\nu > 0$ 的泛函。存在一个正的 $\epsilon \in \mathbb{R}$、一个（唯一的）C^1 映射 $h: B_{H^0}(0,\epsilon) \to X^\pm$，满足 $h(0) = 0$，并且

$$(I - P^0)\mathcal{A}(z + h(z)) = 0 \quad z \in B_\epsilon^0,$$

一个包含 H 中 0 的开邻域 W，以及一个保原点同胚

$$\Phi : B_{H^0}(0,\epsilon) \times (B_\epsilon^+ + B_\epsilon^-) \to W$$

其形式为 $\Phi(z, u^+ + u^-) = z + h(z) + \phi_z(u^+ + u^-)$，其中 $\phi_z(u^+ + u^-) \in H^\pm$，使得

$$\mathcal{L} \circ \Phi(z, u^+ + u^-) = \|u^+\|^2 - \|u^-\|^2 + \mathcal{L}(z + h(z))$$

对所有 $(z, u^+ + u^-) \in B_\epsilon^0 \times (B_\epsilon^+ + B_\epsilon^-)$ 均成立，并且

$$\Phi(B_{H^0}(0,\epsilon)) \times (B_\epsilon^+ + B_\epsilon^-) \subset X.$$

此外，同胚 Φ 还具有以下性质:

(a) 对每个 $z \in B_\epsilon^0$，$\Phi(z, 0) = z + h(z)$ $\phi_z(u^+ + u^-)$ 当且仅当 $u^+ = 0$。

(b) Φ 在 $B_\epsilon^0 \times B_\epsilon^-$上的限制是一个从 $B_\epsilon^0 \times B_\epsilon^- \subset X \times X$ 到 $\Phi(B_\epsilon^0 \times B_\epsilon^-) \subset X$ 的同胚，即使这两个集合上的拓扑取为由 X诱导的拓扑。

映射 h 和函数 $B_\epsilon^0 \ni z \mapsto \beta(z) := \mathcal{L}(z + h(z))$也满足:

(i) 映射 h 在 V_ρ^X中为 C^1，且

$$h'(z) = -[(I - P^0)\mathcal{A}'(z)|_{X^\pm}]^{-1}(I - P^0)\mathcal{A}'(z), \quad \forall z \in B_\epsilon^0;$$

(ii) β 为 C^2，且

$$d\beta(z_0)(z) = \langle\langle \mathcal{A}(z_0 + h(z_0)), z \rangle\rangle, \quad \forall z_0 \in B_\epsilon^0,\, z \in H^0,$$

(iii) 若 0 是 $\mathcal{L}|_{V^X}$ 的孤立临界点，则它也是 $\mathcal{L}^0$ 的孤立临界点。

推论 A.2（移位，[Lu13，推论 2.6]）。在定理 A.1 的假设下，若 0 是 $\mathcal{L}$ 的孤立临界点，则对每个阿贝尔群 $\mathbb{G}$，都有

$$C_*(\mathcal{L}, \mathbf{0}; \mathbb{G}) = C_{*-m^-(\mathcal{L},0)}(\beta, \mathbf{0}; \mathbb{G}).$$

定理 A.3（[Lu13，推论 2.11]）。在定理 A.1 的假设下，设 0 是 $\mathcal{L}$ 的孤立临界点，其临界值为 $c := \mathcal{L}(\mathbf{0})$，则对 V 中 0 的任意开邻域 W，包含映射

$$I_{X,H} : ((\mathcal{L}_X|_{W^X})_c \cup \{\mathbf{0}\}, (\mathcal{L}_X|_{W^X})_c) \to (((\mathcal{L}|_W)_c \cup \{\mathbf{0}\}), (\mathcal{L}|_W)_c)$$

诱导出以下以域 $\mathbb{F}$ 为系数的同调同构

$$I_{X,H*} : C_*(\mathcal{L}_X, \mathbf{0}; \mathbb{F}) \xrightarrow{\simeq} C_*(\mathcal{L}, \mathbf{0}; \mathbb{F}).$$

参考文献

[Abb03] Alberto Abbondandolo. 关于拉格朗日系统莫尔斯指标的研究。《非线性分析：理论、方法与应用》，53(3-4):551–566，2003年5月。[AF07] Alberto Abbondandolo 和 Alessio Figalli. 紧致构型空间上托内利拉格朗日量与超线性哈密顿量的高作用量轨道。《微分方程杂志》，234(2):626–653，2007年3月。[AS09] Alberto Abbondandolo 和 Matthias Schwarzy. 拉格朗日作用泛函的光滑伪梯度。《非线性研究进展》，9(4):597–623，2009年11月。[Ben86] Vieri Benci. 紧流形上拉格朗日系统的周期解。《微分方程杂志》，63(2):135–161，1986年。[BGH98] Giuseppe Buttazzo、Mariano Giaquinta 和 Stefan Hildebrandt. 一维变分问题：导论。牛津数学及其应用讲座丛书第15卷。克拉伦登出版社；牛津大学出版社，牛津：纽约，1998年。[BK83] V. Bangert 和 W. Klingenberg. 由迭代闭测地线生成的同调。《拓扑学》，22，1983年。[Bol78] S. Bolotin. 自然动力系统的天平动。《莫斯科大学学报，I辑：数学与力学》，6，1978年。[Cha93] K. C. Chang. 无限维莫尔斯理论与多解问题。波士顿伯克豪泽出版社，波士顿，马萨诸塞州，1993年。

[Fat08] 阿尔贝·法蒂. 拉格朗日动力学中的弱 KAM 定理：第10版预印本。剑桥大学出版社，2008年。[GS84] 维克多·吉耶曼和什洛莫·斯滕伯格. 《物理学中的辛技巧》。剑桥大学出版社，剑桥 [剑桥郡]；纽约，1984年。[Jia99] 蒋某. 莫尔斯引理的推广及其应用。《非线性分析：理论、方法与应用》，36(8):943–960，1999年。[Kli78] 威廉·克林根贝格. 《闭测地线讲义》。数学科学基础丛书第230卷。施普林格，柏林-海德堡，纽约，1978年。[LA98] 龙以明和安天庆. 哈密顿系统的不稳定域指标化。《非线性微分方程与应用》，5(4):461–478，1998年11月。[Liu07] 刘春根. 具有拉格朗日边界条件的辛路径的马斯洛夫型指标理论。《非线性研究进展》，7(1):131–161，2007年2月。[Lon00] 龙以明. 环面上拉格朗日系统庞加莱映射的多个周期点。Mathematische Zeitschrift，233(3):443–470，2000年3月。¨Lon[Y. Long. 《辛路径指标理论及其应用》。巴塞尔伯克豪泽出版社，巴塞尔，2002年。02] Lu¨陆广存. 关于包含全纯球面的某些辛流形上的魏因斯坦猜想。《九州数学杂志》，52(2):331–351，1998年。[Lu09a98] G. Lu. 勘误：余切丛上哈密顿系统的康利猜想及其在拉格朗日系统中的对应问题。arXiv 电子预印本，2009年。[Lu09b] 陆广存. 余切丛上哈密顿系统的康利猜想及其在拉格朗日系统中的对应问题。《泛函分析杂志》，256(9):2967–3034，2009年5月。[Lu] 陆广存. 希尔伯特空间上非光滑泛函的分裂引理 I。《离散与连续动力系统 A辑》，33(7):2939–2990，2013年。[LW13] 陆广存和王明彦. 环面上拉格朗日自治系统的无穷多个制动轨道。i mf，2:2333–2338，2007年。[LW07] 陆广存和王明彦. 任意黎曼环面上具有偶时间势的拉格朗日系统的无穷多个偶周期解。《当代数学通讯》，11(02):309–335，2009年4月。[LZ09] 刘春根和张端志. L-指标的迭代理论与制动轨道的重数。《微分方程杂志》，257(4):1194–1245，2014年8月。

[Maz11] Marco Mazzucchelli. 拉格朗日 Conley 猜想. Commentarii Mathematici Helvetici, 第 189–246 页, 2011.[Sei48] H. Seifert. 机械系统的周期运动. Mathematische Zeitschrift, 51(2):197–216, 1948 年 3 月.[Vit90] C. Viterbo. 嵌入拉格朗日环面的新障碍. Inventiones Mathematicae, 100(1):301–320, 1990 年 12 月.