arXiv:2302.09474v1 [math.QA] 19 Feb 2023

顶点代数的轨形理论与伽罗瓦对应

董崇颖 *

数学系，加利福尼亚大学圣克鲁兹分校，美国加利福尼亚州圣克鲁兹市 95064

任力 †

数学学院，四川大学，中国成都 610064

杨超

Sc数学学院，四川大学，中国成都 610064

2023年2月21日

摘要

设 V 是可数维单顶点代数，G 是 V 的有限自同构群，σ 是 G 的中心元。假设 $\mathcal{S}$ 是有限个两两不等价的不可约 σ 扭曲 V-模所成的集合，且 $\mathcal{S}$ 在 G 的作用下不变。那么，对于适当的 2-余循环 α，存在一个有限维半单结合代数 $\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S})$，它由 G 在 $\mathcal{S}$ 上的作用自然确定，使得 $(\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S})\ V^G)$ 在 $\mathcal{S}$ 中 σ 扭曲 V-模的直和 $\mathcal{M}$ 上构成一个对偶对，具体而言：(1) $\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S})$ 与 V^G 在 $\mathcal{M}$ 上的作用彼此交换；(2) 每个不可约 $\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S})$-模都在 $\mathcal{M}$ 中出现；(3) 每个不可约 $\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S})$-模的重数空间都是不可约 V^G-模；(4) 不同不可约 $\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S})$-模的重数空间是两两不等价的 V^G-模。作为应用，每个不可约 V-模都是有限个不可约 V^G-模的直和，而出现在不同 G-轨道中的不可约 V^G-模彼此不等价。这一结果推广了许多先前的结果。我们还建立了 G 的子群与包含 V^G. 的 V 子代数之间的双射。

*由西蒙斯基金会资助，项目编号 634104

†部分由国家自然科学基金委员会项目 12071314 资助

1 引言

本文研究具有有限自同构群 G. 的可数维单顶点代数 V 的轨形理论。主要目标是理解 V^G- 模。由于任意 σ 扭曲 V- 模 M 限制到 $\sigma \in G$ 后都是 V^G- 模，首要任务是从 M. 中寻找不可约 V^G 模。本文解决了 σ 是 G. 的中心元时这一问题。更准确地说，对于 G 中的任意中心元 σ，以及任意有限集 $\mathcal{S}$（其中包含两两不等价的不可约 σ-扭曲模），只要 $\mathcal{S}$ 在 G 的作用下不变，我们就为 V^G 与半单结合代数 $A_\alpha(G,\mathcal{S})$ 在 $\mathcal{S}$. 中不可约模的直和上建立了施尔-外尔型对偶结果。特别地，任意 σ 扭曲模都是有限个不可约 V^G-模的直和。我们还得到了 G 在 V. 上作用的量子伽罗瓦对应。

对顶点算子代数的轨形理论进行系统研究始于 [DM1]，并在 G 为可解群时，建立了关于 V 上(G,V^G)的对偶性结果。 [DLM0]将这一对偶性结果推广到了任意紧李群 G 。基于该对偶性结果， [DM1、HMT、DM2]推导出了 G 的子群与包含 V^G 的 V 的顶点算子子代数之间的伽罗瓦对应。 [DY] 进一步将对偶性结果推广到了σ-扭曲模，其中 σ 为中心元。正如 [DY] 所指出的，与其考虑单个模，不如考虑一个由有限个互不等价的不可约 σ-扭曲模组成的 G-稳定集合。这一一般框架对于确定不可约 σ-扭曲 V-模中的不可约 V^G-模，以及从不同的扭曲模中辨认不可约 V^G-模，都是必要的。

受结合代数理论的启发，$A_{g,\ n}(V)$针对 g 有限阶自同构以及 [DLM2、DLM3], 中涉及的 G任意有限自同构群，分别引入并研究了结合代数$A_{G,\ n}(V)$，相关研究见 [MT]。这促使人们研究同时在 G作用下保持不变的任意有限个两两不等价的不可约扭曲模。 [DYa、YY] 中也为顶点算子超代数得到了类似结果。

如果 V 是有理的且 C_2-余有限，那么顶点算子代数轨形理论的结果会更加丰富。在这种情况下，可以定义扭曲 V-模的量子维数，并利用量子维数给出完整的伽罗瓦理论 [DJX]。如果 V^G 也有理且C_2-余有限，那么每个不可约 V^G-模都会出现在某个不可约 g-扭曲 V-模中[DRX]。这些结果对顶点算子超代数也成立 [DRY]。另请参阅 [CM] ，了解 V的有理性和 C_2-余有限性如何在 G 可解时蕴含 V^G 具有相同性质；以及 [DNR] ，了解 V^G-模范畴与最小模扩张之间的联系。

所有关于顶点算子代数 orbifold 理论的上述结果，都严重依赖这样一个事实：对于顶点算子代数而言，一个可容许的 g-扭模是 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次的（在经典意义上属于某种最高权模）。为处理顶点算子的可容许扭 V-模，人们在 [Z, DLM1, DLM2, DLM3, MT] 中定义并研究了各种结合代数。因此，研究顶点算子代数 orbifold 理论的技术和工具并不适用于其自身甚至都不是分次的顶点代数。这也解释了为什么关于顶点代数一般轨形理论的研究非常有限。

然而，近期关于顶点算子超代数的 Whittaker 模和弱模 [ALPY1, ALPY2, HY, T] 的研究表明， [DY] 中关于可容许模的一些结果对弱 V-模也成立。本文的定理表明， [DY] 中的所有主要结果

在将 V 替换为顶点代数、将可容许模替换为任意 V-模时仍然成立（对于顶点代数，我们没有可容许模这一概念）。Schur–Weyl 型对偶始终是研究轨形理论的主要思路。本文不使用 $A_{g,\ n}(V)$ 的新思路，是在顶点代数框架下引入广义 Jacobson 稠密性定理（见定理 4.7）。推广到顶点超代数的结果将在另一篇论文中发表。

遗憾的是，由于在没有结合代数 $A_{G,n}(V)$ 可用的情况下，我们不知道如何同时处理所有扭曲模，因此无法像对顶点算子代数那样，将 [MT] 中的对偶性结果推广到顶点代数。不过，我们相信 [MT] 中的对偶性结果对顶点代数仍然成立。

本文组织如下。第 2 节回顾顶点代数的基础知识。第4节回顾结合代数的一些事实，重点介绍 Jacobson 稠密性定理及其在顶点代数中的应用。第4节在顶点代数的框架下引入对偶对，并证明将 Jacobson 稠密性定理与对偶性联系起来的关键定理 Dual-Th。在第 5 节中，我们证明 $(\mathbb{C}[G], V^G)$ 在 V 上构成一个对偶对。在第 6 节中，我们证明 $(\mathbb{C}^{\alpha_M}[G], V^G)$ 在任意不可约 σ-扭曲 V-模 M 上构成一个对偶对，其中该模是 G-稳定的，而 σ 是 $G.$ 的一个中心元。在第7节中，我们证明一个最一般的结果，即 $(\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S})\ V^G)$ 在 $\mathcal{M}$ 上构成一个对偶对，其中 $\mathcal{M}$ 是若干互不同构的不可约 σ-扭曲模之和，并且这些模在 $G.$ 的作用下保持不变

本文中，我们在复数域 $\mathbb{C}$ 上进行研究。为简单起见，$\otimes$ 表示 $\otimes_{\mathbb{C}}$.

2 基础知识

本节回顾顶点代数的基础知识（参见 [B, LL]）。

定义 2.1. 顶点代数 $(V, Y(\quad z), 1)$ 是一个配备线性映射的向量空间：

$$\begin{aligned} &V \to (\operatorname{End} V)[[z, z^{-1}]], \\ &v \mapsto Y(v,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1} \quad (v_n \in \operatorname{End} V) \end{aligned}$$

并且具有一个指定向量 $\mathbf{1} \in V$，满足以下条件：对于 $u, v \in V$ 和 $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} &u_n v = 0 \quad \text{for } n \text{ sufficiently large;} \\ &Y(\mathbf{1}, z) = Id_V; \\ &Y(v,z)\mathbf{1} \in V[[z]] \ \text{ and } \ \lim_{z\to 0} Y(v,z)\mathbf{1} = v; \end{aligned}$$

并且 Jacobi 恒等式成立：

$$\begin{aligned} &z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right) Y(u,z_1)Y(v,z_2) - z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0}\right) Y(v,z_2)Y(u,z_1) \\ &= z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right) Y(Y(u,z_0)v, z_2) \end{aligned}$$

定义 2.2. 若顶点代数 V 上的可逆线性变换 g 满足 $g\mathbf{1}=\mathbf{1}$ 和 $gY(u,z)g^{-1}=Y(gu,z)$，对所有 $u\in V$ 均成立，则称其为自同构。我们用 Aut(V) 表示 V 的所有自同构构成的集合。

若 $G\leq \mathrm{Aut}(V)$，则不动点

$$V^G=\{v\in V\mid gv=v, g\in G\}$$

是 $V.$的顶点子代数

设 g 是 V 的一个阶为 $T<\infty.$ 的自同构。对于 $r=0$、$\cdots$、$T-1$，令

$$V^r=\{v\in V\mid gv=e^{-2\pi ir/T}v\}$$

为 g 的特征值为 $e^{-2\pi ir/T}$ 的特征子空间。则 $V=\oplus_{r=0}^{T-1}V^r.$

定义 2.3。一个 g-扭曲的 V-模 M 是一个配备线性映射的向量空间：

$$\begin{aligned} Y_M: V&\to (\mathrm{End}M)\{z^{1/T},z^{-1/T}\}\\ v&\mapsto Y_M(v,z)=\sum_{n\in\frac{1}{T}\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}\ (v_n\in \mathrm{End}M)\end{aligned}$$

满足以下条件，其中 $0\leq r\leq T-1$、$u\in V^r$、$v\in V$、$w\in M$：

$$Y_M(u,z)=\sum_{n\in-\frac{r}{T}+\mathbb{Z}} u_n z^{-n-1},$$

$$u_l w=0\ for\ l\gg 0,$$

$$Y_M(\mathbf{1},z)=Id_M,$$

$$\begin{aligned} &z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right)Y_M(u,z_1)Y_M(v,z_2)-z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_2-z_1}{-z_0}\right)Y_M(v,z_2)Y_M(u,z_1)\\ &=z_2^{-1}\left(\frac{z_1-z_0}{z_2}\right)^{-r/T}\delta\left(\frac{z_1-z_0}{z_2}\right)Y_M(Y(u,z_0)v,z_2).\end{aligned}$$

我们指出，若 V 是顶点算子代数，则此定义中的 g-扭模称为弱 g-扭 V-模 [DLM1]。对于顶点算子代数，我们还有可容许的 g-扭模和普通 g-扭 V-模等概念。但对于顶点代数，我们没有这些概念，因为顶点代数本身没有分次。

若 $g=1$，我们有顶点代数的 V-模这一概念。

由定义可得以下弱结合性，后文将用到（另见[Li2]）。

引理 2.4。（弱结合性）设 M 是一个 g-扭曲的 V-模。设 $u\in V^r$，其中 r 和 $w\in W$。设 l 是一个非负整数，使得对于任意 $n\geq l$，都有 $u_{n+\frac{r}{T}}w=0$。则有

$$(z_0+z_2)^{l+\frac{r}{T}}Y_M(u,z_0+z_2)Y_M(v,z_2)w=(z_2+z_0)^{l+\frac{r}{T}}Y_M(Y(u,z_0)v,z_2)w.$$

引理 2.5。设 M 是一个 g-扭曲的 V-模。设 X 是 M 的有限维子空间。设 u^1、$\cdots$、$u^k \in V$ 以及 n_1、$\cdots$、$n_k \in \frac{1}{T}\mathbb{Z}$。则存在 a^1、$\cdots$、$a^t \in V$ 以及 m_1、$\cdots$、$m_t \in \frac{1}{T}\mathbb{Z}$，使得

$$u^1_{n_1}\cdots u^k_{n_k}(w) = a^1_{m_1}w + \cdots + a^t_{m_t}w$$

对任意 $w \in X$。

证明。只需证明，对于 $u \in V^r$、$v \in V^s$ 以及 p、$q \in \mathbb{Z}$，存在 a^1、$\cdots$、$a^t \in V$以及 m_1、$\cdots$、$m_t \in \frac{r+s}{T}\mathbb{Z}$，使得

$$u_{p+\frac{r}{T}}v_{q+\frac{s}{T}}w = a^1_{m_1}w + \cdots + a^t_{m_t}w$$

对任意 $w \in X$。

由于 X 是有限维的，我们可以取一个非负整数 l，使得对任意 $n \geq l$ 和任意 $w \in X$，都有 $u_{n+\frac{r}{T}}w = 0$。因此，根据弱结合性，对任意 $w \in X$，有

$$(z_0+z_2)^{l+\frac{r}{T}}Y_M(u,z_0+z_2)Y_M(v,z_2)w = (z_2+z_0)^{l+\frac{r}{T}}Y_M(Y(u,z_0)v,z_2)w. \tag{2.1}$$

我们还注意到，存在一个非负整数 m，使得

$$\mathrm{Res}_z z^{p+\frac{s}{T}+n}Y_M(v,z)w = 0,$$

对任意 $n > m$ 和任意 $w \in X$，都有。因此，对任意 $i > m$，有

$$\mathrm{Res}_{z_2} z_0^{p-l-i}z_2^{q+\frac{s}{T}+i}[(z_0+z_2)^{l+\frac{r}{T}}Y_M(u,z_0+z_2)Y_M(v,z_2)w] = 0. \tag{2.2}$$

对于任意 $w \in X$，结合 (2.1) 和 (2.2)，我们得到

$$\begin{aligned}
&u_{p+\frac{r}{T}}v_{q+\frac{s}{T}}w\\
&= \mathrm{Res}_{z_1}\mathrm{Res}_{z_2} z_1^{p+\frac{r}{T}}z_2^{q+\frac{s}{T}}Y_M(u,z_1)Y_M(v,z_2)w\\
&= \mathrm{Res}_{z_0}\mathrm{Res}_{z_1}\mathrm{Res}_{z_2} z_0^{-1}\delta\Big(\frac{z_1-z_2}{z_0}\Big)z_1^{p+\frac{r}{T}}z_2^{q+\frac{s}{T}}Y_M(u,z_1)Y_M(v,z_2)w\\
&= \mathrm{Res}_{z_0}\mathrm{Res}_{z_1}\mathrm{Res}_{z_2} z_1^{-1}\delta\Big(\frac{z_0+z_2}{z_1}\Big)z_1^{p+\frac{r}{T}}z_2^{q+\frac{s}{T}}Y_M(u,z_1)Y_M(v,z_2)w\\
&= \mathrm{Res}_{z_0}\mathrm{Res}_{z_1}\mathrm{Res}_{z_2} z_1^{-1}\delta\Big(\frac{z_0+z_2}{z_1}\Big)(z_0+z_2)^{p+\frac{r}{T}}z_2^{q+\frac{s}{T}}Y_M(u,z_0+z_2)Y_M(v,z_2)w\\
&= \mathrm{Res}_{z_0}\mathrm{Res}_{z_2}(z_0+z_2)^{p+\frac{r}{T}}z_2^{q+\frac{s}{T}}Y_M(u,z_0+z_2)Y_M(v,z_2)w\\
&= \mathrm{Res}_{z_0}\mathrm{Res}_{z_2}(z_0+z_2)^{p-l}z_2^{q+\frac{s}{T}}[(z_0+z_2)^{l+\frac{r}{T}}Y_M(u,z_0+z_2)Y_M(v,z_2)w]\\
&= \mathrm{Res}_{z_0}\mathrm{Res}_{z_2}\sum_{i=0}^{m}\binom{p-l}{i}z_0^{p-l-i}z_2^{q+\frac{s}{T}+i}[(z_0+z_2)^{l+\frac{r}{T}}Y_M(u,z_0+z_2)Y_M(v,z_2)w]\\
&= \mathrm{Res}_{z_0}\mathrm{Res}_{z_2}\sum_{i=0}^{m}\binom{p-l}{i}z_0^{p-l-i}z_2^{q+\frac{s}{T}+i}[(z_2+z_0)^{l+\frac{r}{T}}Y_M(Y(u,z_0)v,z_2)w]\\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{p-l}{i}\binom{l+\frac{r}{T}}{j}(u_{p-l-i+j}v)_{q+\frac{s}{T}+\frac{r}{T}+l+i-j}w.
\end{aligned}$$

若 j 足够大，则对于任意 $0 \leq i \leq m$，都有 $u_{p-l-i+j}v = 0$。因此，上面的最后一个方程是有限和。现在，证明完成。 □

注记 2.6. 若 M 是一个 V-模且 $\dim X = 1$，引理 2.5 已在 [LL] 中给出。

对于顶点代数 V，设 $\mathcal{D}$ 是由 $\mathcal{D}(v) = v_{-2}\mathbf{1}$ for$v \in V$定义的 V 的自同态。假设 g 是 V的一个阶为 T的自同构。设 t 为一个不定元。回顾 [B, DLM1] , $\mathbb{C}[t^{\frac{1}{T}}, t^{-\frac{1}{T}}]$ 具有顶点代数结构，其顶点算子定义为

$$Y(f(t), z)h(t) = f(t+z)h(t) = (e^{z\frac{d}{dt}}f(t))h(t).$$

那么张量积 $\mathcal{L}(V) = V \otimes \mathbb{C}[t^{\frac{1}{T}}, t^{-\frac{1}{T}}]$ 也是一个顶点代数。 g的作用自然延拓为张量积顶点代数的一个自同构，如下所示:

$$g(u \otimes t^m) = e^{-2\pi i m}(gu \otimes t^m)$$

对于 $u \in V$和 $m \in \frac{1}{T}\mathbb{Z}$。将 g的不变子空间记为 $\mathcal{L}(V, g)$，它是 $\mathcal{L}(V)$的一个顶点子代数。此外，显然

$$\mathcal{L}(V, g) = \oplus_{r=0}^{T-1} V^r \otimes t^{r/T}\mathbb{C}[t, t^{-1}].$$

Let

$$V[g] = \mathcal{L}(V, g)/\mathcal{D}\mathcal{L}(V, g).$$

对于 $v \in V$和 $n \in \frac{1}{T}\mathbb{Z}.$，我们用 $v(n)$表示 $v \otimes t^n$ 在 $V[g]$ 中的像。众所周知， $V[g]$ 是一个李代数，其李括号为

$$[u(n), v(m)] = \sum_{i \geq 0}(u_i v)(m+n-i)$$

对于 $u, v \in V$和 $m, n \in \frac{1}{T}\mathbb{Z}$。

设 $\mathcal{U}(V[g])$ 是李代数 $V[g]$ 的泛包络代数。注意，若M是一个 g-扭曲的 V-模，则 M成为一个 $V[g]$-模，使得 $u(m)$ 的作用为 u_m （见[DLM1]）。自然地， M是一个 $\mathcal{U}(V[g])$-模。若 $g = 1$，则用 $\mathcal{U}(V)$ 表示 $\mathcal{U}(V[g])$。

以下结果显然成立。

引理 2.7. 设 V 是一个顶点代数，且 M 和 N 是 g-扭曲的 V-模。则

(1) M 是简单的 g-扭曲 V-模，当且仅当 M 是简单的 $\mathcal{U}(V[g])$-模。(2) M 和 N 是同构的 g-扭曲 V-模，当且仅当 M 和 N 是同构的$\mathcal{U}(V[g])$-模。(3)（舒尔引理）若 V 是可数维的且 M 是简单的，则

$$\text{End}_V(M) \cong \text{End}_{\mathcal{U}(V[g])}(M) \cong \mathbb{C}.$$

3 结合代数

本节回顾一些关于结合代数的事实，这些内容在后文中会用到。

引理 3.1. [Lang，第 XVII 章，定理 3.2] 设 R 为一个环， M 为一个半单 R-模。设$R' = \text{End}_R(M)$。设 $f \in \text{End}_{R'}(M)$。设 $x_1, \cdots, x_n \in M$.那么存在一个元素$a \in R$，使得 $f(x_i) = ax_i$，其中 $i = 1, \cdots, n$。

以下广为人知的 Jacobson 稠密性定理是引理 3.1 的直接推论。

推论 3.2。（Jacobson 稠密性定理 I）设 A 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的结合代数。设 M 是一个可数维的简单 A-模。那么，对于 X 的任意有限维子空间以及任意 $f \in$同态$_{\mathbb{C}}(X, M)$，存在一个元素 $a \in A$，使得对于任意$x \in X$， $f(x) = ax$。

下面的 Jacobson 稠密性定理是推论 3.2 的更一般形式，将在第7节中用到。

推论 3.3。（Jacobson 稠密性定理 II）设 A 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的结合代数。设M^1、$\cdots$、M^n是两两不等价的可数维简单 A-模。设 X_i 是 M^i 的有限维子空间，其中 $i = 0$、$\cdots$、n。那么，对于任意

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X_1, M^1) \bigoplus \cdots \bigoplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X_n, M^n),$$

存在一个元素 $a \in A$，使得对于任意 $x \in X_i$ 和 $i = 0$、$\cdots$、1， $f(x) = ax$。

证明。设 $A' =$End$_A(M^1 \bigoplus \cdots \bigoplus M^n)$。由于 M^1、$\cdots$、M^n是可数维的、彼此不等价的简单 A-模，我们得到

$$A' \cong \mathrm{End}_A(M^1) \bigoplus \cdots \bigoplus \mathrm{End}_A(M^n) \cong \mathbb{C}^n.$$

容易验证

$$\mathrm{End}_{A'}(M^1 \bigoplus \cdots \bigoplus M^n) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M^1) \bigoplus \cdots \bigoplus \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M^n).$$

~注意，任意 $f_i \in$Hom$_{\mathbb{C}}(X_i, M^i)$ 都可以扩张为线性映射 $f_i \in$End$_{\mathbb{C}}(M^i)$。因此存在一个元素

$$\widetilde{f} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M_1) \bigoplus \cdots \bigoplus \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M_n) \cong \mathrm{End}_{A'}(M^1 \bigoplus \cdots \bigoplus M^n)$$

~使得对于 $i = 1$、$\cdots$、n， $f = f$在 X_i 上成立。现在，结论由引理 3.1 得出。 □

引理 3.4。设 V是一个可数维的单顶点代数，且 M是一个 g-扭曲的V-模。若 v^1、$\cdots$、$v^s \in V$线性无关，且 w^1、$\cdots$、$w^s \in M$不全为零，则

$$Y_M(v^1, z)w^1 + \cdots + Y_M(v^s, z)w^s \neq 0.$$

证明。假设

$$Y_M(v^1, z)w^1 + \cdots + Y_M(v^s, z)w^s = 0.$$

根据弱结合性，对于任意 r 和任意 $u \in V^r$，都存在某个 $k \in \mathbb{Z}_+$，使得

$$\begin{aligned}
&(z_2 + z_0)^{k+\frac{r}{T}}(Y_M(Y(u, z_0)v^1, z_2)w^1 + \cdots + Y_M(Y(u, z_0)v^s, z_2)w^s) \\
&= (z_0 + z_2)^{k+\frac{r}{T}}(Y_M(u, z_0 + z_2)Y(v^1, z_2)w^1 + \cdots + Y_M(u, z_0 + z_2)Y(v^s, z_2)w^s) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

这意味着

$$Y_M(Y(u,z_0)v^1,z_2)w^1+\cdots+Y_M(Y(u,z_0)v^s,z_2)w^s=0.$$

因此，对于任意 $u\in V$和 $n\in\mathbb{Z}$，我们有

$$Y_M(u_nv^1,z_2)w^1+\cdots+Y_M(u_nv^s,z_2)w^s=0. \tag{3.1}$$

设 $X=\mathbb{C}v_1\bigoplus\cdots\bigoplus\mathbb{C}v_n$。定义线性映射 $f\in$同态$_{\mathbb{C}}(X,V)$，使得 $f(v_1)=v_1$且 $f(v_i)=0$，对任意 $i\neq 0.$。由于 V是一个可数维的简单 $\mathcal{U}(V)$-模，根据推论 3.2 和推论 2.5，存在一些 $u^1,\cdots,u^p\in V$以及 $i_1,\cdots,i_p\in\mathbb{Z}$，使得

$$(u^1_{i_1}+\cdots+u^p_{i_p})v^1=v^1 \text{ and } (u^1_{i_1}+\cdots+u^p_{i_p})v^i=0, \text{ for } i\neq 1.$$

由 (3.1)，我们得到 $Y_M(v^1,z_2)w^1=0$。类似地，再次利用弱结合性，我们看到，对于任意 $u\in V$和 $n\in\mathbb{Z}$，有$Y_M(u_nv^1,z_2)w^1=0$。由于 V是简单的，对于任意$u\in V$，有 $Y_M(u,z_2)w^1\equiv 0$。这与 $Y_M(1,z)w^1=w^1\neq 0$ 这一事实矛盾。证明完毕。 □

注 3.5. 当 V 是一个单顶点代数，且 M 是不可约可容许的 V 模时，引理 3.4 已在 [DM1] 中得到。

以下引理是众所周知的（另见 [Lang] ）。

引理 3.6. 设 G 是一个有限群。设 $\rho\colon G\to \mathrm{End}(M)$ 是 $G.$ 的一个有限维忠实表示。那么 G 的每个不可约表示都出现在 $M^{\otimes n}$ 中，其中某个$n\geq 0$ （此处及下文中， $M^{\otimes 0}=\mathbb{C}$ 表示平凡表示）。

推论 3.7. 设 G是一个有限群。设 M 是 G 的一个忠实表示（我们不假设 M 是有限维的）。那么 G 的每个不可约表示都出现在$M^{\otimes n}$ 中，其中某个 $n\geq 0$。

证明. 注意， M 是一个半单的 G-模。设 N_1,..., N_k 是 G 的最大两两不等价简单子模。也就是说， M 的每个简单子模都同构于 N_i，其中某个 $i.$。令 $N=\sum_{i=1}^k N_i$，它是 $M.$ 的一个有限维忠实子模。根据引理 3.6， G 的每个不可约表示都出现在 $N^{\otimes n}$ 中，其中某个 $n\geq 0.$。结论得证。 □

4 对偶对

本节中，我们介绍顶点代数背景下的对偶对。

定义 4.1. 设 A 是一个结合代数， V 是一个顶点代数。如果 M 既是一个 A-模，也是一个 V-模，且 A 的作用与 V 在 M 上的作用彼此可交换，那么称 M 是一个 $A\otimes V$-模。

$A\otimes V$-模同构和简单 $A\otimes V$-模的定义显而易见。

注 4.2. 在接下来的几节中，我们令 A 为群代数或其推广，并令 V 为不动点顶点代数 V^G。

注意，对于一个 A-模 S 和一个 V-模 W，通过定义 $a(s\otimes w)=as\otimes w$ 和 $v_n(s\otimes w)=s\otimes v_nw$，$S\otimes W$ 是一个 $A\otimes V$-模，其中 $a\in A$、$v\in V$、$s\in S$、$w\in W$ 和 $n\in\mathbb{Z}$。

设 A 为一个有限维半单结合代数。设 Λ 为 A的所有不可约特征的集合。对于 $\lambda\in\Lambda$，我们将相应的不可约表示记为 W_λ。

假设 M 是一个 $A\otimes V$-模。设 M^λ 为 M中所有与 W_λ同构的 A-子模之和。由于 A 的作用与 V 在 M 上的作用彼此可交换，M^λ实际上是 M的一个 $A\otimes V$-子模。因此，M作为一个 $A\otimes V$-模，具有如下直和分解：

$$M=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}M^\lambda.$$

令 $M_\lambda=\mathrm{Hom}_A(W_\lambda,M)$为 M中 W_λ的重数空间。注意，通过定义下式，M_λ具有一个 V-模结构

$$(v_nf)(w)=v_n(f(w)) \tag{4.1}$$

对于 $v\in V$、$f\in M_\lambda$、$n\in\mathbb{Z}$和 $w\in W_\lambda.$，我们可以按如下方式将 M_λ实现为 M的一个 V-子模：令 $w\in W_\lambda$为一个固定的非零向量。于是，我们可以将 $\mathrm{Hom}_A(W_\lambda,M)$与如下子空间对应起来

$$\{f(w)\mid f\in\mathrm{Hom}_A(W_\lambda,M)\}$$

M^λ的。注意，这种实现取决于对 w的选择。

定义线性映射 θ：$W_\lambda\otimes M_\lambda\to M^\lambda$，使得对 $w\in W_\lambda$和$f\in M_\lambda$，有 $\theta(w\otimes f)=f(w)$。现在，我们有如下引理。

引理 4.3. 映射 θ 是一个 $A\otimes V$-模同构。

证明. 众所周知，θ 是一个线性同构（另见 [GW，命题 4.1.15]）。容易验证，θ 是一个 $A\otimes V$-模同态。证明完毕。 □

根据上述讨论，M作为一个 $A\otimes V$-模，有如下分解：

$$M=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}W_\lambda\otimes M_\lambda.$$

定义 4.4. 设 A 是一个有限维半单结合代数，V是一个顶点代数。若 M是一个 $A\otimes V$-模，使得

(1) M_λ 是任意 $\lambda\in\Lambda$ 下的不可约 V-模，(

2) $M_\lambda\cong M_\mu$ 当且仅当 $\lambda=\mu$,

那么我们称对 (A,V) 在 $M.$ 上构成一个对偶对

注 4.5. 设 M是一个 $A\otimes V$-模。记 $\mathrm{Irr}_M(A)$ 为满足 $\mathrm{Hom}_A(W,M)\neq 0$的不可约 A-模 W 的同构类集合，并记 $\mathrm{Irr}_M(V)$ 为满足 $\mathrm{Hom}_V(N,M)\neq 0$的不可约 V-模 N的同构类集合。若 (A,V) 在 M上构成一个对偶对，则 $\mathrm{Irr}_M(A)$ 与 $\mathrm{Irr}_M(V)$ 之间存在一一对应。

注 4.6. 假设 (A,V) 在 M上构成一个对偶对。由于 Λ 是有限集，且对于任意 $\lambda\in\Lambda$， W_λ 都是有限维的，因此 M 是有限多个不可约 V-模的直和。

以下结果是后续讨论的关键。

定理 4.7. 设 A 是有限维半单结合代数， V 是顶点代数。设 M 是一个 $A\otimes V$-模。假设对于 M 的任意有限维 A-子模 X，以及任意 $f\in$同态$_A(X,M)$，都存在 $v^1,\cdots,v^n\in V$ 和 $i_1,\cdots,i_n\in\mathbb{Z}$，使得

$$f=v^1_{i_1}+\cdots+v^n_{i_n}.$$

Then

(1) 对任意 $\lambda\in$不可约表示集合$_M(A)$， M_λ 都是不可约 V-模；(2) $M_\lambda\cong M_\mu$ 当且仅当 $\lambda=\mu$.

证明. (1) 设 $\lambda\in$不可约表示集合$_M(A)$，且 $x,y\in M_\lambda$ 非零。我们需要找到 $v^1,\cdots,v^n\in V$ 和 $i_1,\cdots,i_n\in\mathbb{Z}$，使得 $y=(v^1_{i_1}+\cdots+v^n_{i_n})x$。因此， M_λ 是不可约V-模。

设 $X=W_\lambda\otimes x$。那么 X 是 M 的一个有限维 A-子模。定义映射 $f\in$Hom$_{\mathbb{C}}(X,M)$，使得 $f(w\otimes x)=w\otimes y$，其中 $w\in W_\lambda$。显然， $f\in$Hom$_A(X,M)$。于是，存在 $v^1,\cdots,v^n\in V$ 和 $i_1,\cdots,i_n\in\mathbb{Z}$，使得

$$f=v^1_{i_1}+\cdots+v^n_{i_n}.$$

因此我们有

$$w\otimes y=f(w\otimes x)=(v^1_{i_1}+\cdots+v^n_{i_n})(w\otimes x)=w\otimes(v^1_{i_1}+\cdots+v^n_{i_n})x,$$

对任意 $w\in W_\lambda$ 均成立。这说明 $(v^1_{i_1}+\cdots+v^n_{i_n})x=y$，如所要求的。

(2) 设 $\lambda,\mu\in\in$Irr$_M(A)$，且 $\lambda\neq\mu$。假设 $\phi\colon M_\lambda\to M_\mu$ 是一个 V-模同构。设 $0\neq x\in M_\lambda.$。那么 $0\neq y=\phi(x)\in M_\mu.$。令 $X=(W_\lambda\otimes x)\oplus(W_\mu\otimes y)$，它是 $M.$ 的一个 A-子模。定义 $f\in$Hom$_A(X,M)$，使得 $f(w_1\otimes x+w_2\otimes y)=w_2\otimes y$，其中 $w_1\in W_\lambda$ 且 $w_2\in W_\mu.$。于是存在 $v^1,\cdots,v^n\in V$ 和 $i_1,\cdots,i_n\in\mathbb{Z}$，使得

$$f=v^1_{i_1}+\cdots+v^n_{i_n}.$$

于是 $(v^1_{i_1}+\cdots+v^n_{i_n})x=0$和 $(v^1_{i_1}+\cdots+v^n_{i_n})y=y.$因此

$$0=\phi((v^1_{i_1}+\cdots+v^n_{i_n})x)=(v^1_{i_1}+\cdots+v^n_{i_n})\phi(x)=(v^1_{i_1}+\cdots+v^n_{i_n})y=y,$$

矛盾。证明完成。 □

下一个结果告诉我们，如果 V是可数维的，那么定理 4.7 的逆命题也成立，不过本文并不需要这一结果。

命题 4.8. 设 A 是一个有限维半单结合代数， V 是一个可数维顶点代数。设 M 是一个 $A\otimes V$-模。假设 (1) 对任意 $\lambda\in$Irr$_M(A)$， M_λ 都是不可约 V-模；(2) $M_\lambda\cong M_\mu$ 当且仅当 $\lambda=\mu.$。那么，对于 M 的任意有限维 A-子模 X 以及任意 $f\in$Hom$_A(X,M)$，存在 v^1、 $\cdots$、 $v^n\in V$ 和 i_1、 $\cdots$、 $i_n\in\mathbb{Z}$，使得

$$f=v^1_{i_1}+\cdots+v^n_{i_n}.$$

证明. 注意 $M=\oplus_{\lambda\in \mathrm{Irr}_M(A)}W_\lambda\otimes M_\lambda$。设 X 是 M 的一个有限维 A-子模，并设 $f\in \mathrm{Hom}_A(X,M)$。注意，对于 $\lambda\in \mathrm{Irr}_M(A)$，存在 M_λ 的一个有限维子空间 N_λ，使得 $X=\bigoplus_{\lambda\in \mathrm{Irr}_M(A)} W_\lambda\otimes N_\lambda$。此外，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(X,M)&=\mathrm{Hom}_A(\oplus_{\lambda\in \mathrm{Irr}_M(A)}W_\lambda\otimes N_\lambda,\oplus_{\lambda\in \mathrm{Irr}_M(A)}W_\lambda\otimes M_\lambda)\\&\cong \oplus_{\lambda\in \mathrm{Irr}_M(A)}\mathrm{Hom}_A(W_\lambda\otimes N_\lambda,W_\lambda\otimes M_\lambda)\\&\cong \oplus_{\lambda\in \mathrm{Irr}_M(A)}\mathrm{Hom}(N_\lambda,M_\lambda).\end{aligned}$$

由于 $M_\lambda,\lambda\in \mathrm{Irr}_M(A)$ 是不可等价的、可数维不可约 $\mathcal{U}(V)$-模，由推论 2.5 和推论 3.3 可知，存在 $v^1,\cdots,v^n\in V \mathrm{and} i_1,\cdots,i_n\in\mathbb{Z}$，使得

$$f=v^1_{i_1}+\cdots+v^n_{i_n},$$

如所需。 □

5 对偶性 I

从现在起，我们始终假设 V 是一个可数维单顶点代数，并且 G 是 V 的有限自同构群。注意，V 自然是一个忠实的 G-表示。此外，由于 G 和 V^G 在 V 上的作用彼此交换，V 是一个 $\mathbb{C}[G]\otimes V^G$- 模。本节将给出 G 和 V^G 在 V 上的作用的一个对偶性结果。

设 $V[[z_1^{\pm1},\cdots,z_n^{\pm1}]]$ 是变量 $z_1,\cdots,z_n$ 中取值于 V 的形式幂级数。那么 $V[[z_1^{\pm1},\cdots,z_n^{\pm1}]]$ 自然是一个 G-表示，使得

$$g(\sum_{i_1,\cdots,i_n\in\mathbb{Z}}v^{i_1,\cdots,i_n}z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n})=\sum_{i_1,\cdots,i_n\in\mathbb{Z}}(gv^{i_1,\cdots,i_n})z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n},$$

其中 $g\in G$，且每个 $v^{i_1,\cdots,i_n}\in V$。给定一个 $J=(j_1,\cdots,j_n)\in\mathbb{Z}^n$，我们定义一个投影

$$P_J:V[[z_1^{\pm1},\cdots,z_n^{\pm1}]]\to V$$

by

$$P_J(\sum_{i_1,\cdots,i_n\in\mathbb{Z}}v^{i_1,\cdots,i_n}z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n})=v^{j_1,\cdots,j_n}.$$

显然，对于任意 $J\in\mathbb{Z}^n$，P_J 都是一个 G-同态。

设 $n\geq 0$。定义一个线性映射

$$\varphi_n:V^{\otimes(n+1)}\to V[[z_1^{\pm1},\cdots,z_n^{\pm1}]]$$

by

$$\varphi_n(v^n\otimes\cdots\otimes v^1\otimes v^0)=Y(v^n,z_n)\cdots Y(v^1,z_1)v^0.$$

注意 $\varphi_0=Id_V$.

引理 5.1。映射 φ_n 是一个单射的 G-同态。

证明。由于 $G \leq \mathrm{Aut}(V)$，我们有

$$\begin{aligned}\varphi_n(g(v^n \otimes \cdots \otimes v^1 \otimes v^0)) &= Y(gv^n, z_n)\cdots Y(gv^1, z_1)gv^0 \\ &= g(Y(v^n, z_n)\cdots Y(v^1, z_1)v^0) \\ &= g\varphi_n(v^n \otimes \cdots \otimes v^1 \otimes v^0)\end{aligned}$$

对于 $g \in G.$，也就是说，φ_n 是一个 G-同态。

现在我们对 n 使用归纳法来证明 φ_n 是单射（另见 [Li1]）。假设 $v^1 \otimes \alpha_1 + \cdots + v^s \otimes \alpha_s \in \mathrm{Ker}(\varphi_n)$，其中 v^1、$\cdots$、$v^s \in V$ 线性无关，且 α_1、$\cdots$、$\alpha_s \in V^{\otimes n}.$ 那么

$$Y(v^1, z_n)\varphi_{n-1}(\alpha_1) + \cdots + Y(v^s, z_n)\varphi_{n-1}(\alpha_s) = 0.$$

由引理 3.4，我们得到 $\varphi_{n-1}(\alpha_1) = \cdots = \varphi_{n-1}(\alpha_s) = 0.$。由归纳法可得 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_s = 0$。因此 $\mathrm{Ker}(\varphi_n) = \{0\}$，证毕。 □

推论 5.2。每个不可约 G-模都出现在 V 中。

证明。设 W 是任意一个不可约 G-模。根据推论 3.7，W 在某个 $V^{\otimes n}$ 中出现，其中 $n \geq 0$。若 $n = 0$，则 W 是平凡模。于是，$W \cong \mathbb{C}\mathbf{1} \leq V$ 作为 G-模。若 $n = 1$，证明即告完成。因此，我们可以假设 $n \geq 2$。由于 φ_{n-1} 是单射，存在某个 $J = (j_1, \cdots, j_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$，使得 $0 \neq P_J\varphi_{n-1}(W) \leq V.$。因此，$W \cong P_J\varphi_{n-1}(W)$ 在 V 中出现。证明完成。 □

注 5.3。当 V 是顶点算子代数时，推论 5.2 已在 [HMT, DLM0] 中得到。

以下引理是证明本节主要定理5.5的关键。

引理 5.4。设 X 是一个有限维的 $\mathbb{C}G$-子模，且设 f 是 $\mathrm{Hom}_G(X, V)$ 中的任意元素。则存在 v^1、$\cdots$、$v^n \in V^G$ 以及 i_1、$\cdots$、$i_n \in \mathbb{Z}$，使得

$$f = v^1_{i_1} + \cdots + v^n_{i_n}.$$

证明。注意到 V 是一个简单的 $\mathcal{U}(V)$-模。于是，根据推论 3.2 和推论 2.5，存在某些 u^1、$\cdots$、$u^n \in V$ 以及 i_1、$\cdots$、$i_n \in \mathbb{Z}$，使得

$$f = u^1_{i_1} + \cdots + u^n_{i_n}.$$

由于 $f \in \mathrm{Hom}_G(X, V)$，对于任意 $g \in G$，我们有

$$f = gfg^{-1} = gu^1_{i_1}g^{-1} + \cdots + gu^n_{i_n}g^{-1} = (gu^1)_{i_1} + \cdots + (gu^n)_{i_n}.$$

对于 $i = 1$、$\cdots$、n，令 $v^i = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gu^i \in V^G$。现在，我们有

$$f = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}((gu^1)_{i_1} + \cdots + (gu^n)_{i_n}) = v^1_{i_1} + \cdots + v^n_{i_n}.$$

这证明了该定理。 □

与之前一样，令 Λ 为 $\mathbb{C}[G]$. 的所有不可约特征集合。对于 $\lambda \in \Lambda$，我们将对应的不可约表示记为 W_λ。

令 V^λ 为 V中所有同构于 W_λ的 $\mathbb{C}[G]$-子模之和。则 V^λ 是一个 $\mathbb{C}[G] \otimes V^G$-模。令 $V_\lambda = \mathrm{Hom}_G(W_\lambda, V)$为 V中 W_λ 的重数空间。根据第4节中的讨论， V_λ 是一个 V^G-模，因此 $W_\lambda \otimes V_\lambda$ 是一个 $\mathbb{C}[G] \otimes V^G$-模。此外，作为 $\mathbb{C}[G] \otimes V^G$-模，我们有 $V^\lambda \cong W_\lambda \otimes V_\lambda$。因此， V作为一个 $\mathbb{C}[G] \otimes V^G$-模，具有如下直和分解:

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda \otimes V_\lambda.$$

注意，如果 λ 是平凡特征，则 $V^\lambda = V_\lambda = V^G$.

定理5.5。 $\mathbb{C}[G] \otimes V^G$-模分解:

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda \otimes V_\lambda$$

在 V上给出了一个对偶对（$\mathbb{C}[G]$， V^G）：

（1）对于任意 $\lambda \in \Lambda$， V_λ 均非零。（2）每个 V_λ 都是一个不可约 V^G-模。（3） V_λ 和 V_μ 是同构的 V^G-模，当且仅当 $\lambda = \mu$。

特别地， V是一个完全可约的 V^G-模。

证明。（ （1）已在推论 5.2 中证明。（2）和（3）由引理 5.4 和定理 4.7 得出。

□

我们指出，定理5.5将 [DLM0] 的定理2.4从顶点算子代数推广到了顶点代数。

利用定理5.5，我们可以建立 G 的子群与包含 V^G的 V子代数之间的伽罗瓦对应，从而将顶点算子代数中的伽罗瓦对应 [DM1, HMT] 推广到顶点代数。

定理5.6。设 V是一个可数维的简单顶点代数， G是 V的有限自同构群。那么， $H \mapsto V^H$ 在 G 的子群与包含 V^G. 的 V子代数之间给出一个双射。特别地， V的任何包含 V^G 的子代数都是简单的。

证明。由定理5.5可知，对于任意 $H < G$、 V^H ， V^G. 是一个包含 H_1的简单顶点代数。假设 $H_2 < G$ 、 G. 是的两个不同子群。那么

$$V^{H_i} = \oplus_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda^{H_i} \otimes V_\lambda$$

对于 $i = 1$， 2。根据 [DM1，引理3.2],，存在 $\lambda \in \Lambda$，使得 $W_\lambda^{H_1} \neq W_\lambda^{H_2}$.。因此，映射 $H \mapsto V^H$ 是单射。

为了证明映射 $H \mapsto V^H$ 是满射，我们可以并且将会把每个 W_λ 选为 V 的子空间，使得 $\lambda \in \Lambda$. 令 U 为 V 的子代数，满足 $V^G \subset U \subset V$. 我们需要证明存在 $H < G$，使得 $U = V^H$. 注意到， U 分解为如下的 V^G-模:

$$U = \oplus_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda \otimes V_\lambda$$

其中 $R_\lambda \subset W_\lambda$. 我们令

$$W = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda, \quad R = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda$$

并将 W 视为 G的子模 V. 当然 $R \subset W$. 在[HMT、DM2] 中针对顶点算子代数给出的满射证明, 除下面的引理 5.7 外，仍然成立。 [HMT、DM2] 中针对顶点算子代数给出的该引理证明并不适用于顶点代数。 □

引理 5.7. 假设 π 是从 $W\otimes_{\mathbb{C}} W$到 W. 的 G同态。那么 $\pi(R\otimes R) \subset R$.

证明。只需证明，对于任意非零的 π: $W_\lambda \otimes W_\mu \to W_\nu$，满足 λ,μ,ν属于 Λ，有 $\pi($ $R_\lambda \otimes R_\mu) \subset R_\nu$.

容易验证，下列由 $\mathbb{C}[G]$模和 $\mathbb{C}[G]$同态构成的图表是交换的:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Im}(\varphi_1) & \overset{\varphi_1}{\leftarrow} & W_\lambda \otimes W_\mu & \overset{\pi}{\to} & W_\nu \\ \downarrow i & & & & \uparrow\rho \\ V[[z,z^{-1}]] & & \overset{=}{\to} & & V[[z,z^{-1}]] \end{array}$$

其中 i 是包含映射，而 ρ 是将 $\pi\circ\varphi_1^{-1}$扩张到 $V[[z,z^{-1}]]$的某个映射。

注意，作为 $\mathbb{C}[G]$-模，$V[[z,z^{-1}]] \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(W_\gamma \otimes V_\gamma)[[z,z^{-1}]]$. 由于 ρ是一个 $\mathbb{C}[G]$-同态， $\rho(W_\lambda \otimes V_\lambda[z,z^{-1}]) = 0$ 对 $\gamma \neq \nu$成立。另一方面，给定一个 $x \in V_\nu[z,z^{-1}]$，对任意 $w \in W_\nu$，由舒尔引理可得 $\rho(w\otimes x) = kw$，其中 $k \in \mathbb{C}$是某个元素。因此，我们有

$$\begin{aligned} \rho(U[z,z^{-1}]) &= \rho(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda \otimes V_\lambda[z,z^{-1}]) \\ &= \rho(R_\nu \otimes V_\nu[z,z^{-1}]) \subseteq R_\nu. \end{aligned}$$

注意， $\varphi_1(R_\lambda \otimes R_\mu) \subseteq U[[z,z^{-1}]]$. 因此， $\pi(R_\lambda \otimes R_\nu) = \rho(i(\varphi_1(R_\lambda \otimes R_\nu))) \subseteq\rho($ $U[z,z^{-1}]) \subseteq R_\nu$，如所需。 □

6 对偶性 II

设 V 是一个可数维单顶点代数， G 是 V 的有限自同构群。设 $Z(G)$ 是 G 的中心。在本节及后续各节中，我们固定 $Z(G)$ 中一个阶为 T 的元素 σ。对于 $r = 0$、$\cdots$、$T-1$，设 $V^r = \{v \in V|\sigma v = e^{-2\pi ir/T}v\}$ 是 σ 对应于特征值 $e^{-2\pi ir/T}$ 的特征子空间。本节将为任意不可约的 σ-扭曲 V-模建立一个对偶性结果。

设 $(M,Y_M($ $z)$ 是一个不可约的 σ-扭曲 V-模。对于 $g \in G$，我们定义一个新的不可约 σ-扭曲 V-模 $(M\cdot g,Y_{M\cdot g})$，使得 $M\cdot g = M$ 作为向量空间，并且对于 $v \in V$ [DLM4、DRX]，有 $Y_{M\cdot g}$ $(v,z) = Y_M(gv,z)$。

在本节中，我们假设 M 关于 G是稳定的，即对于任意的 $g \in G$， M 和$M\cdot g$ 都是同构的 σ-扭曲 V-模。于是，对于 $g \in G$ 和 $v \in V$，存在一个线性映射$\phi(g)$: $M \to M$，使得

$$\phi(g)Y_M(v,z)\phi(g)^{-1} = Y_M(gv,z). \tag{6.1}$$

若 $g = 1$，我们只需取 $\phi(g) = \mathrm{Id}_M$.。结合舒尔引理可知， M 的简单性表明，对于 g, $h \in G$，存在一个非零的 $\alpha_M(g,h)$，使得

$$\phi(g)\phi(h) = \alpha_M(g,h)\phi(gh).$$

容易验证， $g \to \phi(g)$是 G在 M 上的投影表示，而 α_M 是 $C^2(G, C^*)$中的相应 2-余循环（参见 [DY]）。

Set

$$\mathbb{C}^{\alpha_M}[G] = \bigoplus_{g\in G} \mathbb{C}\bar{g}$$

并定义

$$\bar{g}\bar{h} = \alpha_M(g,h)\overline{gh}$$

对于 $g, h \in G.$，则 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G]$ 是有限维半单结合代数（参见 [DY]）。此外， M是一个 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G]$-模，满足对 $\bar{g} \in G$和 $m \in M$， $\bar{g}m = \phi(g)m$。由于 G 的作用与 V^G 在 M 上的作用彼此可交换， M是一个 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G] \otimes V^G$-模。

设 Λ_M为 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G]$的不可约特征集合。对于 $\lambda \in \Lambda_M$，我们用 W_λ表示相应的不可约表示。设 M^λ为 M中所有与 W_λ同构的 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G]$-子模之和。则 M^λ是 M的一个 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G] \otimes V^G$-子模。令 $M_\lambda = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^{\alpha_M}[G]}(W_\lambda, M)$为 W_λ在 M中的重数空间。与第 4 节中的讨论类似， M_λ 是一个 V^G-模，因此 $W_\lambda \otimes M_\lambda$ 是一个 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G] \otimes V^G$-模。此外，作为$\mathbb{C}^{\alpha_M}[G] \otimes V^G$-模，我们有 $M^\lambda \cong W_\lambda \otimes M_\lambda$。因此， M作为一个 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G] \otimes V^G$-模，具有以下直和分解:

$$M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda_M} W_\lambda \otimes M_\lambda.$$

下一个引理是引理 5.4 的扭曲版本。

引理 6.1. 设 X 是 M 的一个有限维 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G]$ 子模，且 f 是同态$_{\mathbb{C}^{\alpha_M}[G]}(X, M)$ 中的任意元素。那么存在 $v^1, \cdots, v^n \in V^G$ 和 $i_1, \cdots, i_n \in \mathbb{Z}$，使得

$$f = v^1_{i_1} + \cdots + v^n_{i_n}.$$

证明. 注意到 M 是一个简单的 $\mathcal{U}(V[\sigma])$-模。由推论 3.2 和推论 2.5，存在一些 $u^1, \cdots, u^n \in V$ 和 $i_1, \cdots, i_n \in \frac{1}{T}\mathbb{Z}$，使得

$$f = u^1_{i_1} + \cdots + u^n_{i_n}.$$

由于 $f \in$同态$_{\mathbb{C}^{\alpha_M}[G]}(X, M)$，对任意 $g \in G$，由 (6.1) 可得

$$\begin{aligned} f &= \phi(g) f \phi(g)^{-1} \\ &= \phi(g)u^1_{i_1}\phi(g)^{-1} + \cdots + \phi(g)u^n_{i_n}\phi(g)^{-1} \\ &= (gu^1)_{i_1} + \cdots + (gu^n)_{i_n}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

对于 $i=1,\cdots,n$，设 $v^i=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(gu^i)\in V^G$。由 (6.2) 可得

$$\begin{aligned} f&=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}((gu^1)_{i_1}+\cdots+(gu^n)_{i_n})\\ &=v^1_{i_1}+\cdots+v^n_{i_n}. \end{aligned}$$

注意，若 $i_k\notin\mathbb{Z}$ 对于某个 k 成立，则 $v^k_{i_k}=0$，因为 $v^k\in V^G$. 这就证明了该定理。 □

为了证明下面的推论 6.5，我们需要一些事实（见 [DY, K]）。

(1) 若 A 是一个 $\mathbb{C}G$-模，且 B 是一个 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G]$-模，则在由 $\bar{g}(a\otimes b)=ga\otimes\bar{g}b$ 定义的作用下，$A\otimes B$ 是一个 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G]$-模，其中 $a\in A$、$b\in B$ 和 $g\in G$。

(2) 若 A 是一个 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G]$-模，则在由下式定义的作用下，$A[[z^{\frac{1}{T}},z^{-\frac{1}{T}}]]$ 也是一个 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G]$-模：

$$\bar{g}(\sum_i a_iz^i)=\sum_i(\bar{g}a_i)z^i \text{ for } g\in G \text{ and } a_i\in A.$$

(3) 对于 $n\in\frac{1}{T}\mathbb{Z}$，令 P_n 为从 $M[[z^{\frac{1}{T}},z^{-\frac{1}{T}}]]$ 到 $Mz^n\cong M$ 的投影。注意，对任意 $n\in\frac{1}{T}\mathbb{Z}$，$P_n$ 都是一个 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G]$-模同态。

(4) 定义线性映射 φ：$V\otimes M\to M[[z^{\frac{1}{T}},z^{-\frac{1}{T}}]]$，其定义为 $\varphi(v\otimes m)=Y_M(v,z)m$，其中 $v\in V$ 和 $m\in M$。由 (6.1) 和引理 3.4，φ 是一个单射 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G]$-模同态。

(5) 如果 A 和 B 都是 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G]$-模，令 $A^*=\mathrm{Hom}(A,\mathbb{C})$。则 $A^*\otimes B$ 在如下定义的作用下成为一个 $C[G]$-模：$g(f\otimes b)=f\bar{g}^{-1}\otimes\bar{g}b$，其中 $f\in A^*$、$b\in B$ 和 $g\in G$。

(6) 如果 S 是有限维 $\mathbb{C}[G]$-模，X 和 Y 是有限维 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G]$-模，则

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(S,X^*\otimes Y)\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^{\alpha_M}[G]}(S\otimes X,Y). \tag{6.3}$$

注 6.2. 如果 $\alpha_M\equiv 1$，则上面的同构 (6.3) 的证明是标准的，并且依据有限维 G-模范畴具有刚性这一事实（参见 [EGNO]）。对于一般的 α_M，(6.3) 的证明类似。

引理 6.3. 设 S 是 $V\otimes M$ 的任意简单 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G]$-子模。那么 S 出现在 M 中。

证明. 由于 φ 是单射，存在某个 $n\in\frac{1}{T}\mathbb{Z}$ 使得 $0\neq P_n\varphi(S)\leq M$. 因此，$S\cong P_n\varphi(S)$ 是 M 的一个 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G]$- 子模，证毕。 □

若 A 是一个结合代数，则令 $\mathrm{Irr}(A)$ 为简单 A-模的同构类集合。

引理 6.4. 设 $\Delta\subseteq$ 不可约表示集合$(\mathbb{C}^{\alpha_M}[G])$。假设对于任意 $S\in$ 不可约表示集合$(\mathbb{C}[G])$ 和任意 $W\in\Delta$，$S\otimes W$ 中的每个不可约 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G]$-子模都属于 Δ。那么 $\Delta=$ 不可约表示集合$(\mathbb{C}^{\alpha_M}[G])$。

证明. 对于任意 $Y \in$ 不可约表示集合($\mathbb{C}^{\alpha_M}[G]$)、 $X \in \Delta$，我们可以取 $S \in$ 不可约表示集合($\mathbb{C}[G]$)，使得

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(S, X^* \otimes Y) \neq 0.$$

由 (6.3)，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^{\alpha_M}[G]}(S \otimes X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(S, X^* \otimes Y) \neq 0.$$

由于 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G]$ 是半单的， Y 出现在 $S \otimes X$ 中。因此， $Y \in \Delta$。证明完毕。

□

推论 6.5. 每个简单的 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G]$-模都出现在 M 中。

证明. 令 $\Delta \subseteq \mathrm{Irr}(\mathbb{C}^{\alpha_M}[G])$ 为出现在 M 中的简单 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G]$-模的同构类集合。我们断言 $\Delta = \mathrm{Irr}(\mathbb{C}^{\alpha_M}[G])$。

令 $S \in \mathrm{Irr}(\mathbb{C}[G])$ 且 $W \in \Delta$.。由推论 5.2， $S \otimes W$ 出现在 $V \otimes M$ 中。因此，根据引理 6.3， $S \otimes W$ 的每个不可约子模都出现在 M 中。因此， $S \otimes W$ 的每个不可约子模都属于 Δ。由引理 6.4 可知， $\Delta = \mathrm{Irr}(\mathbb{C}^{\alpha_M}[G])$，所需结论得证。

□

备注 6.6。当 V 是顶点算子代数、 M 是不可约可容许 V-模时，推论 6.5 已在 [DM1, DY] 中得到。顶点代数 V 未必是 $\mathbb{N}$-分次的，因此 [DY] 中定理 5.4 的证明所用的同构 ψ_s 在当前情形下不能直接应用。

定理 6.7. $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G] \otimes V^G$-模分解:

$$M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_M} W_\lambda \otimes M_\lambda$$

在 M 上给出一个对偶对 $(\mathbb{C}^{\alpha_M}[G], V^G)$:

(1) 对任意 $\lambda \in \Lambda_M$， M_λ 均非零。(2) 每个 M_λ 都是不可约 V^G-模。(3) M_λ 和 M_μ 是同构的 V^G-模，当且仅当 $\lambda = \mu$。

证明。(1) 已在推论 6.5 中证明。(2) 和 (3) 的证明由引理 6.1 和定理 4.7 推出。

□

在定理 6.7 中，若 $G =< g >$ 是由 g生成的阶为 n 的循环群，我们便得到此前在 [ALPY1]中得到的以下结果。

推论 6.8. 设 V 是一个顶点算子代数， g 是一个阶为 n的自同构。假设 M 是一个不可约弱 V-模，且满足 $M \cdot g \cong M$。那么 M 是 n 个两两不等价的不可约 $V^{<g>}$-子模的直和。

证明。注意到 $G \cong \mathbb{Z}_n$. 众所周知， $H^2(\mathbb{Z}_n, \mathbb{C}^*) = \{1\}$ ，其中 $\mathbb{C}^*$ 是一个平凡的 $\mathbb{Z}_n$-模（参见 [K]）。因此，对于 $C^2(G, \mathbb{C}^*)$ 中的任意 2-余循环 $C^\alpha[\mathbb{Z}_n] \cong \mathbb{C}[\mathbb{Z}_n]$ α , $C^{\alpha_M}[\mathbb{Z}_n]$恰有 n个互不等价的一维简单模。结论现在由定理 6.7 得出。

□

7 对偶性 III

本节我们讨论一个 σ-扭曲的 V-模有限集，并进一步推广第 6 节中的对偶性结果。

我们采用 [DY] 中第 6 节的设定。令 $\mathcal{S}$ 为一组两两不等价的不可约 σ-扭模。假设 $\mathcal{S}$ 是 G-稳定的。那么对任意 $M \in \mathcal{S}$ 和 $h \in G$，存在 $N \in \mathcal{S}$ 使得 $N \cong M \cdot h$。因此，存在一个线性同构 $\phi_N(h) : N \to M$，使得

$$\phi_N(h)Y_N(u,z) = Y_M(hu,z)\phi_N(h) \tag{7.1}$$

对所有 $u \in V$ 都成立。这意味着 M、N 作为 V^G-模是同构的。由于 $\mathcal{S}$ 中的每个 σ-扭模都是不可约的，因此存在 $\alpha_N(g,h) \in \mathbb{C}^*$，使得

$$\phi_M(g)\phi_N(h) = \alpha_N(g,h)\phi_N(gh).$$

此外，对 g、h、$k \in G$，有

$$\alpha_N(g,hk)\alpha_N(h,k) = \alpha_M(g,h)\alpha_N(gh,k).$$

Then

$$\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S}) = \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}\mathcal{S} = \bigoplus_{g\in G, M\in\mathcal{S}} \mathbb{C}(g \otimes e(M))$$

是一个结合代数，其乘法为

$$g \otimes e(M) \cdot h \otimes e(N) = \alpha_N(g,h)gh \otimes e(M \cdot h)e(N)$$

以及单位元 $\sum_{M\in\mathcal{S}} 1 \otimes e(M)$ [DY]。

设 $\mathcal{M} = \bigoplus_{M\in\mathcal{S}} M$。我们定义 $\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S})$ 在 $\mathcal{M}$ 上的作用如下：对于 $M, N \in \mathcal{S}$, $w \in N$, $g \in G$，令

$$(g \otimes e(M))w = \delta_{M,N}\phi_N(g)w$$

其中 $\phi_N(g) : N \to N \cdot g^{-1}$。在此作用下，$\mathcal{M}$ 成为一个 $\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S})$-模。此外，由 (7.1)，$\mathcal{M}$ 实际上是一个 $\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S}) \otimes V^G$-模。

对于 $M \in \mathcal{S}$，令 $G_M = \{g \in G \mid M \cdot g \cong M\}$ 为 M 的稳定子。令 $\mathcal{O}_M$ 为 M 在 G 作用下的轨道。令 $G = \cup_{j=1}^k G_M g_j$ 为一个右陪集分解，其中$g_1 = 1$。那么 $G = \cup_{j=1}^k g_j^{-1} G_M$ 是一个左陪集分解。按照 [DY], , 我们定义 $\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S})$ 的若干子空间如下：

$$\begin{aligned} S(M) &= \text{Span}\{g \otimes e(M) \mid g \in G_M\}, \\ D(M) &= \text{Span}\{g \otimes e(M) \mid g \in G\} \text{ and} \\ D(\mathcal{O}_M) &= \text{Span}\{g \otimes e(M \cdot g_j) \mid j = 1,\dots,k, g \in G\}. \end{aligned}$$

将 $\mathcal{S}$ 分解为轨道 $\mathcal{S} = \cup_{j\in J}\mathcal{O}_j$ 的不交并。设 M^j 是 $\mathcal{O}_j$. 的一个表示，则 $\mathcal{O}_j = \{M^j \cdot g \mid g \in G\}$，且 $\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S}) = \bigoplus_{j\in J} D(\mathcal{O}_{M^j})$。

下面的定理出自 [DY]。我们为完备性给出了一个新的证明 .

定理 7.1。沿用上文的记号，我们有

(1) $S(M)$ 是一个与 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G_M]$ 同构的半单结合代数，其中 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G_M]$ 是带有 2-余循环 α_M 的扭群代数。
(2) 函子 $W \mapsto \mathrm{Ind}_{S\ M}^{D(M)\ ()}W = D(M) \otimes_{S(M)} W$和 $X \mapsto (1 \otimes e(M))X$ 给出了 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G_M]$-模范畴与 $D(\mathcal{O}_M)$-模范畴之间的等价。特别地， $D(\mathcal{O}_M)$ 是半单的，简单的 $D(\mathcal{O}_M)$-模恰好是 $\mathrm{Ind}_{S\ M}^{D(M)\ ()}W$，其中 W遍历简单的 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G_M]$-模。

(3) $\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S}) = \bigoplus_{j\in J} D(\mathcal{O}_{M^j})$ 是代数直和。特别地， $\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S})$ 是半单结合代数，简单的 $\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S})$-模恰好是 $\mathrm{Ind}_{D(M^j)\,S(M^j)}W$，其中 W遍历简单的 $\mathbb{C}^{\alpha_{M^j}}[G_{M^j}]$-模，且 $j \in J$。

证明。(1) 的证明是标准的（另见 [DY, K]）。(3) 由 (2) 得出。

现在证明 (2)。设 X 是任意一个 $D(\mathcal{O}_M)$-模。对于 $N \in \mathcal{O}_M$，令 $X_N = (1 \otimes e(N))X$。容易看出，对于任意 $N \in \mathcal{O}_M$ 和 $X = \bigoplus_{N\in\mathcal{O}_M} X_N$， X_N 是一个 $S(N)$-模。我们还注意到，若 S 是 X_M 的一个 $S(M)$-子模，那么对于任意 $g \in G$，$(g \otimes e(M))S$ 是 $X_{M\cdot g^{-1}}$ 的一个 $S(M \cdot g^{-1})$-子模。此外，由于 $\phi_M(g)\colon M \to M \cdot g^{-1}$ 是线性同构，因此 S 是简单 $S(M)$-模，当且仅当 $(g \otimes e(M))S$ 是简单 $S(M \cdot g^{-1})$-模。

由于 $S(M)$ 是半单的，写作 $X_M = \bigoplus_{i\in I} S_i$，其中每个 S_i 都是一个简单的 $S(M)$-模。对于 $i \in I$， $D(\mathcal{O}_M)S_i$ 是由 S_i 生成的 X 的一个 $D(\mathcal{O}_M)$-子模。注意，对于任意 $g \in G$ 和 $h \in G_M$，我们有

$$(gh \otimes e(M))S_i = \alpha_M(g,h)^{-1}(g \otimes e(M))(h \otimes e(M))S_i = (g \otimes e(M))S_i.$$

So

$$\begin{aligned} D(\mathcal{O}_M)S_i &= \sum_{g\in G, M\in\mathcal{O}_M} (g \otimes e(M))S_i \\ &= \sum_{g\in G} (g \otimes e(M))S_i \\ &= \bigoplus_{j=1}^{k} (g_j^{-1} \otimes e(M))S_i \end{aligned}$$

由于对于任意 $g \in G$，$(g\otimes e(M))S_i$ 都是一个简单的 $S(M\cdot g^{-1})$-模，我们得出 $D(\mathcal{O}_M)S_i$ 是一个简单的 $D(\mathcal{O}_M)$-模。

由于 $\phi_M(g)\colon M \to M \cdot g^{-1}$ 是一个线性同构，对于任意 $g \in G$,

$$X_{M\cdot g^{-1}} = \bigoplus_{i\in I} (g \otimes e(M))S_i.$$

因此 $X = \bigoplus_{i\in I} D(\mathcal{O}_M)S_i$ 和 $D(\mathcal{O}_M)$ 是半单的。我们还得出， X 由 X_M 和 $X_M = 0$ 生成，当且仅当 $X = 0$.

为完成（2）的证明，我们必须证明：（a）若 S 是一个 $S(M)$-模，则 $(1 \otimes e(M))(D(M) \otimes_{S(M)} S) \cong S$；（b）若 X 是一个 $D(\mathcal{O}_M)$-模，则 $D(M)\otimes_{S(M)} X_M \cong X$。（a）显然。对于（b），我们定义一个线性映射 $\rho\colon D(M)\otimes_{S(M)}X_M \to X$，使得对 $g \in G$ 和 $x \in X_M$，有 $\rho((g\otimes e(M))\otimes x) = \phi_M(g)(x)$。容易看出， ρ 是一个 $D(\mathcal{O}_M)$-模同态。

由于 X 由 X_M 生成，因此 ρ 是满射。显然， ρ: $(D(M) \otimes_{S(M)} X_M)_M \cong X_M \to X_M$ 是一个同构。因此，$(\ker(\rho))_M = 0$。于是，$\ker(\rho) = 0$，且 ρ 是一个同构。证明完毕。 □

注意，若 W是一个简单的 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G_M]$-模，则 $\mathrm{Hom}^{\mathbb{C}^{\alpha_M}[G_M]}(W, M)$ 是一个 V^{G_M}-模。特别地，它是一个 V^G-模。容易看出， $D(M) \otimes_{S(M)} M$ 可通过定义 $v_n(x \otimes w) = x \otimes v_n w$ （其中 $v \in V^G$、$n \in \mathbb{Z}$ 和 $x \otimes w \in D(M) \otimes_{S(M)} M$.）获得一个 V^G-模结构。显然， $D(\mathcal{O}_M)$ 的作用与 V^G在 $D(M) \otimes_{S(M)} M$上的作用彼此交换。因此， $D(M) \otimes_{S(M)} M$是一个 $D(\mathcal{O}_M) \otimes V^G$-模。根据第4节中的讨论，

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{O}_M)}(D(M) \otimes_{S(M)} W, D(M) \otimes_{S(M)} M)$$

是一个 V^G-模。

引理 7.2. 设 W是一个简单的 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G_M]$-模，则

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^{\alpha_M}[G_M]}(W, M) \text{ and } \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S})}(D(M) \otimes_{S(M)} W, \mathcal{M})$$

是同构的 V^G-模。

证明。证明分为几个步骤。

断言 1:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^{\alpha_M}[G_M]}(W, M) \text{ and } \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{O}_M)}(D(M) \otimes_{S(M)} W, D(M) \otimes_{S(M)} M)$$

是同构的 V^G-模。

定义一个映射

$$\theta : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^{\alpha_M}[G_M]}(W, M) \to \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{O}_M)}(D(M) \otimes_{S(M)} W, D(M) \otimes_{S(M)} M)$$

由 $\theta(f) = \mathrm{Id} \otimes f \text{for } f \in$同态$^{\mathbb{C}^{\alpha_M}[G_M]}(W, M)$ 给出。由于函子 $D(M) \otimes_{S(M)} (-)$ 根据定理 7.1 是范畴等价， θ 是线性同构。此外，对于任意$v \in V^G$、$n \in \mathbb{Z}$和 $x \otimes w \in D(M) \otimes_{S(M)} W$，我们有

$$\begin{aligned}(v_n\theta(f))(x \otimes w) &= (v_n(\mathrm{Id} \otimes f))(x \otimes w)) \\ &= v_n((\mathrm{Id} \otimes f)(x \otimes w)) = v_n(x \otimes f(w)) = x \otimes v_n f(w);\end{aligned}$$

and

$$\theta(v_n f)(x \otimes w) = (\mathrm{Id} \otimes v_n f)(x \otimes w) = x \otimes (v_n f)(w) = x \otimes v_n f(w).$$

因此， θ 是一个 V^G-模同构，正如所需。

我们也可以将定理 6.7 中的 G 替换为 G_M.，从而直接看出这一结论。我们可以假设 $W = W_\lambda$，其中 $\lambda \in \Lambda_M$.。那么，$\mathrm{Hom}^{\mathbb{C}^{\alpha_M}[G_M]}(W, M) = M_\lambda$是一个不可约$V^{G_M}$-模，并且 $M = \oplus_{\mu \in \Lambda_M} W_\mu \otimes M_\mu$.。因此

$$D(M) \otimes_{S(M)} M = \oplus_{\mu \in \Lambda_M} (D(M) \otimes_{S(M)} W_\mu) \otimes M_\mu.$$

由定理 7.1 可知， $D(M) \otimes_{S(M)} W_\mu$是互不等价的简单 $D(\mathcal{O}_M)$-模，因此断言成立。

断言 2： $D(M)\otimes_{S(M)}M$ 与 $\bigoplus_{X\in\mathcal{O}_M}X$ 是同构的 V^G-模。

定义一个映射

$$\rho : D(M)\otimes_{S(M)}M\to\bigoplus_{X\in\mathcal{O}_M}X$$

by

$$\rho((g\otimes e(M))\otimes x)=\phi_M(g)(x)$$

对于 $g\in G$、$x\in M$。根据定理 7.1 (2) 的证明， ρ 是一个 $\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S})$-模同构（另见 [DY，命题 6.2]）。由于对于任意 $g\in G$、$v\in V^G$ 和 $n\in\mathbb{Z}$， $v_n\phi_M(g)=\phi_M(g)v_n$，我们看到 ρ 是一个 V^G-模同构，正如所要求的。

断言 3:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^{\alpha_M}[G_M]}(W,M)\ \text{ and }\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S})}(D(M)\otimes_{S(M)}W,\mathcal{M})$$

是同构的 V^G-模。

注意，如果 $N\notin\mathcal{O}_M$，根据定理 7.1 (3) 和断言 2，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S})}(D(M)\otimes_{S(M)}W,\bigoplus_{X\in\mathcal{O}_N}X)&\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S})}(D(M)\otimes_{S(M)}W,D(N)\otimes_{S(N)}N)\\&=0.\end{aligned}$$

因此，作为 V^G-模，我们有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^{\alpha_M}[G_M]}(W,M)\\&\cong\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{O}_M)}(D(M)\otimes_{S(M)}W,D(M)\otimes_{S(M)}M)\\&\cong\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{O}_M)}(D(M)\otimes_{S(M)}W,\bigoplus_{X\in\mathcal{O}_M}X)\\&\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S})}(D(M)\otimes_{S(M)}W,\mathcal{M}),\end{aligned}$$

正如预期。 □

引理 7.3. 设 X 是 $\mathcal{M}$ 的一个有限维 $\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S})$-子模，且 f 是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S})}(X,\mathcal{M})$ 中的任意一个元素。那么存在 v^1、$\cdots$、$v^n\in V^G$ 以及 i_1、$\cdots$、$i_n\in\mathbb{Z}$，使得

$$f=v^1_{i_1}+\cdots+v^n_{i_n}.$$

证明. 令 $X_M=(1\otimes e(M))X$，其中 $M\in\mathcal{S}$.。则 $X_M\subseteq X\cap M$ 且 $X=\bigoplus_{M\in\mathcal{S}}X_M$.。对于任意 $x\in X$，我们有 $f((1\otimes e(M))x)=(1\otimes e(M))f(x)\in M$.。也就是说，对于任意 $M\in\mathcal{S}$， $f(X_M)\subseteq M$。因此，

$$f\in\bigoplus_{M\in\mathcal{S}}\mathrm{Hom}(X_M,M).$$

注意， $\mathcal{M}$ 是由两两不等价的不可约 $\mathcal{U}(V[\sigma])$-模构成的直和，且这些模均为可数维。由推论 3.3 和推论 2.5，存在一些 $u^1,\cdots,u^n\in V$和$i_1,\cdots,i_n\in\frac{1}{T}\mathbb{Z}$，使得

$$f=u^1_{i_1}+\cdots+u^n_{i_n}.$$

由于 $f \in$ 同态$_{\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S})}(X, \mathcal{M})$，对任意 $g \in G$ 和任意 $M \in \mathcal{S}$，都有$(g \otimes e(M \cdot g))f = f(g \otimes e(M \cdot g))$。因此，对任意 $g \in G$和 $M \in \mathcal{S}$，有 $\phi_{M\cdot g}(g)f = f\phi_{M\cdot g}(g)$。对任意$g \in G$ 和 $M \in \mathcal{S}$，将 f限制到 M，由 (7.1) 可知

$$f = \phi_{M\cdot g}(g)f\phi_{M\cdot g}(g)^{-1} = \phi_{M\cdot g}(g)u^1_{i_1}\phi_{M\cdot g}(g)^{-1} + \cdots + \phi_{M\cdot g}(g)u^n_{i_n}\phi_{M\cdot g}(g)^{-1}$$
$$= (gu^1)_{i_1} + \cdots + (gu^n)_{i_n}.$$

对于 $i = 1$、$\cdots$、n，令 $v^i = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(gu^i) \in V^G$。现在，我们有

$$f = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}((gu^1)_{i_1} + \cdots + (gu^n)_{i_n}) = v^1_{i_1} + \cdots + v^n_{i_n}.$$

如果对于某个 k有 $i_k \notin \mathbb{Z}$，由于 $v^k \in V^G$，我们有 $v^k_{i_k} = 0$。因此，按照要求，我们可以假设对于所有 k都有 $i_k \in \mathbb{Z}$。 □

回顾一下，$\mathcal{S} = \cup_{j\in J}\mathcal{O}_j$和 M^j是 $\mathcal{O}_j$.的一个表示。为方便起见，令 $G_j = G_{M^j}$、Λ_j为 $\mathbb{C}^{\alpha_{M^j}}[G_{M^j}]$的不可约特征集合，$W_{j,\lambda}$为具有特征 $\lambda \in \Lambda_j$的不可约$\mathbb{C}^{\alpha_{M^j}}[G_{M^j}]$-模，$M^j_\lambda$为$W_{j,\lambda}$在 M和$W^j_\lambda =$诱导$_{D(M^j)S(M^j)}W_{j,\lambda}$.中的重数空间。于是 M^j具有如下分解:

$$M^j = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda_j} W_{j,\lambda} \otimes M^j_\lambda$$

作为 $\mathbb{C}^{\alpha_{M^j}}[G_j] \otimes V^{G_j}$-模，并且根据定理 6.7，每个 M^j_λ都是不可约 V^{G_j}-模。根据上述讨论和引理 7.2，$\mathcal{M}$ 具有如下分解

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{j\in J,\lambda\in\Lambda_j} W^j_\lambda \otimes M^j_\lambda$$

作为 $\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S}) \otimes V^G$-模。

最后，我们有

定理 7.4. $\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S}) \otimes V^G$-模分解

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{j\in J,\lambda\in\Lambda_j} W^j_\lambda \otimes M^j_\lambda$$

在 $\mathcal{M}$ 上给出了一个对偶对 $(\mathcal{A}_\alpha(G,\mathcal{S})\ V^G)$:

(1) 对任意 $j \in J$ 和 $\lambda \in \Lambda_j$，M^j_λ 均非零。(2) 每个 M^j_λ 都是不可约的 V^G-模。(3) $M^{j_1}_{\lambda_1}$ 和 $M^{j_2}_{\lambda_2}$ 是同构的 V^G-模，当且仅当 $j_1 = j_2$ 和 $\lambda_1 = \lambda_2$。

特别地，所有不可约的 σ-扭曲 V 模都是有限个不可约 V^G-模的直和。

证明。(1) 立即由定理 6.7 (2) 得出。(2) 和 (3) 由引理 7.3 和定理 4.7 得出。

□

以下推论重现了 [ALPY2] 中给出的一个近期结果。

推论 7.5. 设 M 是一个不可约的 σ-扭曲 V-模。那么 M 是一个不可约 V^G-模，当且仅当 $G_M = \{1\}$.

证明. 设 $\mathcal{S} = \{M \cdot g \mid g \in G\}$.。注意到 $\mathcal{A}_\alpha(G, \mathcal{S}) = D(\mathcal{O}_M)$。由定理 7.4 可知， M 是不可约 V^G-模，当且仅当 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G_M] \cong \mathbb{C}$；这显然等价于 $G_M = \{1\}$.

□

参考文献

[ALPY1] D. Adamovi´c、C. H. Lam、V. Pedic´c、N. Yu，关于循环轨道顶点代数中Whit- taker型模的不可约性，《代数杂志》539（2019年），1-23。[ALPY2] D. Adamovi´c、C. H. Lam、V. Pedic´c、N. Yu，关于Whittaker模的不可约性：扭曲模与非阿贝尔轨道，arXiv:2212.14137。[B] R. E. Borcherds，顶点代数、Kac-Moody代数与Monster，《美国国家科学院院刊》83（1986），3068-3071。[CM] S. Carnahan和M. Miyamoto，不动点顶点算子子代数的正则性，arXiv:1603.05645。[DJX] C. Dong、X. Jiao和F. Xu，量子维数与量子伽罗瓦理论，《美国数学学会汇刊》365（2013），6441-6469。[DLM0] C. Dong、H. Li和G. Mason，顶点算子代数的紧自同构群，IMRN 18（1996年），913-921。[DLM1] C. Dong、H. Li和G. Mason，顶点算子代数的扭曲表示，《数学年刊》310（1998），571–600。[DLM2] C. Dong、H. Li和G. Mason，顶点算子代数与结合代数，《代数杂志》206（1998），67–96。[DLM3] C. Dong、H. Li和G. Mason，顶点算子代数与结合代数的扭曲表示，《国际数学研究通知》8（1998），389–397。[DLM4] C. Dong、H. Li和G. Mason，轨形理论中迹函数的模不变性与广义月光，《数学物理通讯》214（2000），1-56。[DM1] C. Dong和G. Mason，关于量子伽罗瓦理论，《杜克数学杂志》86（1997），305–321。[DM2] C. Dong和G. Mason，紧李群的量子伽罗瓦理论，《代数杂志》214（1999），92–102。[DNR] C. Dong、S. Ng和L. Ren，轨形理论与最小模扩张，arXiv:2108.05225[DRX] C. Dong、L. Ren和F. Xu，关于轨形理论，《数学进展》321（2017年），1-30。[DRY] C. Dong、L. Ren和M. Yang，超轨道理论，《数学进展》405（2022年），1-34。[DY] C. Dong和G. Yamskulna，顶点算子代数、广义双代数与对偶对，《数学杂志》241（2002年），397-423。

[DYa] C. Dong和C. Yang，顶点算子超代数的 G-扭曲结合代数，《代数杂志》606（2022年），323-340。[EGNO] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych和V. Ostrik，张量范畴，《数学调查与专著》第205卷，美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2015年。[GW] R. Goodman、N.R. Wallach，《对称性、表示与不变量》，数学研究生教材第255卷，施普林格，多德雷赫特，2009年。[HY] J. T. Hartwig、N. Yu，自由玻色轨形顶点算子代数上的简单Whittaker模，《美国数学会会刊》147（2019年），3259-3272。[HMT] A. Hanaki、M. Miyamoto和D. Tambara，有限群的量子伽罗瓦理论，《杜克数学杂志》97（1999年），541–544。[K] G. Karpilovsky，《群表示》第2卷，《数学研究》第177卷，北荷兰出版社，1993年。[Lang] S. Lang，《代数》，第3版，数学研究生教材第211卷，（纽约：施普林格出版社，2002年）。[Li1] H. Li，简单顶点算子代数是非退化的，《代数杂志》267（2003年），199-211。[Li2] H. Li，扭曲顶点算子的局部系统、顶点算子超代数与扭曲模，《当代数学》193（1996年），203-236。[LL] J. Lepowsky、H. Li，《顶点算子代数及其表示导论》，数学进展第227卷，施普林格，2004年。[MT] M. Miyamoto和K. Tanabe，轨形模型V的$A_{g,n}(V)$一致乘积与 G-扭曲Zhu代数，《代数杂志》274（2004年），80-96。[T] K. Tanabe，由阶2自同构作用的秩1海森堡顶点算子代数的不动点子代数的简单弱模与Whittaker向量，《美国数学会会刊》145（2017年），第10期，4127-4140。[YY] C. Yang、M. Yang，$\mathbb{Z}$-分次顶点算子超代数的结合代数及其应用，预印本。[Z] Y. Zhu；顶点算子代数特征标的模不变性。《美国数学会杂志》9，1996年，237–302。