arXiv:2302.09494v1 [math.MG] 19 Feb 2023

一维 RCD 空间总满足正则 Weyl 定律

AKEMI IWAHASHI、YU KITABEPPU、AKARI YONEKURA

Abstract. Ambrosio、Honda和Tewodrose证明了，在紧致有限维 RCD 空间中，正则 Weyl 定律等价于一个与球的测度的无穷小行为相关的温和条件。虽然该条件似乎对所有此类空间都成立，但Dai、Honda、Pan和Wei最近表明，对于任意整数 n 至少为 2，存在一个 n 维紧致 RCD 空间不满足正则 Weyl 定律。在这篇短文中，我们证明一维 RCD 空间总满足正则 Weyl 定律。

1. Introduction

1911年，H. Weyl证明了有界区域$\Omega \subset \mathbb{R}^n$([23])中狄利克雷拉普拉斯算子的特征值分布满足一个渐近公式；具体而言，设$\{\lambda_i\}_i$为（负）狄利克雷拉普拉斯算子$-\Delta$的所有特征值构成的序列，并令$N(\lambda)$为特征值的计数函数，即 $N(\lambda) := \#\{i ; \lambda_i \leq \lambda\}$。已知 λ_i 为正数，且 $\lambda_i \to \infty$。于是有

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{n/2}} = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\mathcal{H}^n(\Omega),$$

其中 ω_n 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积， $\mathcal{H}^n$ 是 n 维 Hausdorff测度。这一结果已推广到许多其他情形（简要历史及该定理的推广可参见 [15] ）。这里我们关注非光滑情形。在 [3], 中，Ambrosio、Honda和Tewodrose证明了以下定理。

定理 1.1. 对于本质维数为 n 的紧有限维 RCD 空间 $(X, d, \mathfrak{m})$（定义见定义2.13），Weyl 定律

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{n/2}} = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\mathcal{H}^n(X) \tag{1.1}$$

成立当且仅当

$$\lim_{r\to+0} \int_X \frac{r^n}{\mathfrak{m}(B_r(x))}\,\mathfrak{m}(dx) = \int_X \lim_{r\to+0} \frac{r^n}{\mathfrak{m}(B_r(x))}\,\mathfrak{m}(dx). \tag{1.2}$$

我们给出一些评述。有限维 RCD 空间 $(X, d, \mathfrak{m})$ 是一个度量测度空间，其里奇曲率在合成意义下有下界，维数有上界（精确定义见定义 2.6）。在 (1.2) 的条件下，尽管参考测度 $\mathfrak{m}$ 一般并非 $\mathcal{H}^n$ ，但 (1.1) 右侧出现了 n 维 Hausdorff测度。

由于已知 $\lim_{r\to+0} r^n/\mathfrak{m}(B_r(x)) \in (0, \infty)$ $\mathfrak{m}$-a.e.([3])，(1.2) 似乎对所有RCD空间都成立。然而，Dai、Honda、Pan 和 Wei 证明了以下结论。

定理1.2（[11]）。对于任意 $\beta \in (2,\infty)$，存在一个本质维数为 2 的紧致 RCD$(-1, N_\beta)$ 空间 $(X, d, \mathfrak{m})$，使得

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{\beta/2}} = \frac{c}{\Gamma(\beta+1)}\mathcal{H}^\beta(\mathcal{S}) \in (0,\infty),$$

其中，$\mathcal{S} \subset X$ 是奇异集，c 是一个典范常数。

关于奇异集的定义，参见定理2.12；[11] 典范常数 c的明确表达式也见该定理。一个值得注意的事实是，计数函数的极限不同于通常的情形。此外，他们还给出了一个更病态的例子。

定理1.3（[11]）。存在一个紧致的 RCD$(-1, 10)$ 空间，使得

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda \log \lambda} = \frac{1}{4\pi}.$$

在这个例子中，计数函数的渐近行为甚至不具有多项式增长。

受这些定理的启发，(1.1) 被称为正则 Weyl 定律。因此，一个自然的问题随之提出：

Q：正则 Weyl 定律是否适用于一维RCD空间?

以下是主定理。

定理1.4。设 $(X, d, \mathfrak{m})$ 是一个非平凡紧致 RCD(K, N) 空间，其中 $K \in \mathbb{R}$,$N \in (1,\infty)$。那么以下条件等价；

(1) $\dim_{\mathrm{ess}}(X, d, \mathfrak{m}) = 1$，(2) $X = [0, \ell]$ or $S^1(r)$ 对于 $\ell, r > 0$，(3) $N(\lambda) \sim \lambda^{1/2}$，(4) $\lim_{\lambda\downarrow 0} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{1/2}} = \frac{\omega_1}{2\pi}\mathcal{H}^1(X) = \frac{1}{\pi}\mathcal{H}^1(X)$，(5) $\lim_{\lambda\to\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{(1+\alpha)/2}} = 0$ 对于 $0 < \alpha \le 1$。

该定理完整回答了这个问题。相反，对于维数至少为 2 的 RCD 空间，正则 Weyl 定律总是成立；而对于所有一维RCD空间，正则 Weyl 定律也总是成立。

2. Preliminaries

设 (Y, d_Y) 为一个度量空间。我们用 $C_{bs}(Y)$ 表示定义在Y 上且具有有界支撑的所有连续函数构成的集合。对于 $L > 0$，若任意 $y_0, y_1 \in Y$ 都满足 $|g(y_0) - g(y_1)| \le L d_Y(y_0, y_1)$，则称函数 $g\colon Y \to \mathbb{R}$ 为一个 L-利普希茨函数。我们用 LIP(Y) 表示 Y 中所有利普希茨函数构成的集合。对于一般函数$f\colon Y \to \mathbb{R}$，其在 $y \in Y$处的局部利普希茨常数定义为

$$\mathrm{lip} f(y) := \begin{cases} \limsup_{z\to y} \frac{|f(z)-f(y)|}{d_Y(z,y)} & \text{if } y \text{ is not isolated,} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们用 $\mathcal{P}(Y)$ 表示 Y 上的所有博雷尔概率测度构成的集合。我们定义

$$\mathcal{P}_2(Y) := \left\{ \mu \in \mathcal{P}(Y)\ ;\ \int_Y d_Y^2(\ ^\exists o, y)\, \mu(dy) < \infty \right\}.$$

对于任意两个博雷尔概率测度 $\mu, \nu \in \mathcal{P}(Y)$，它们之间的耦合 $\xi \in \mathcal{P}(Y \times Y)$ 定义为

$$\begin{cases} \xi(A \times Y) = \mu(A) \\ \xi(Y \times A) = \nu(A) \quad \text{for any Borel subset } A \subset Y. \end{cases}$$

μ 与 ν 之间所有耦合的集合记为 $\mathsf{Cpl}(\mu,\nu)$。该集合非空，因为 $\mu\otimes\nu\in\mathsf{Cpl}(\mu,\nu)$。

定义 2.1（L^2-Wasserstein 空间）。给定 $\mu,\nu\in\mathcal{P}_2(Y)$，它们之间的 L^2-Wasserstein 距离 $W_2(\mu,\nu)$ 定义为

$$W_2(\mu,\nu):=\inf\left\{\|d\|_{L^2(\xi)}\ ;\ \xi\in\mathsf{Cpl}(\mu,\nu)\right\}.$$

已知 W_2 是 $\mathcal{P}_2(Y)$ 上的度量。度量空间 $(\mathcal{P}_2(Y)\ W_2)$ 称为 L^2-Wasserstein 空间。

已知 $(\mathcal{P}_2(Y)\ W_2)$ 是完备可分的，当且仅当 (Y,d_Y) 也是如此。

2.1. 测地空间上的凸函数。设 (Y,d_Y) 为度量空间。若对于任意两个点 $y_0,y_1\in Y$，都存在一条连接它们的连续曲线 $\gamma:[0,1]\to Y$，使得……，则称 (Y,d_Y) 为测地空间。

$$d_Y(\gamma_s,\gamma_t)=|s-t|\,d_Y(y_0,y_1)$$

对任意 s、$t\in[0,1]$ 均成立。给定 $K\in\mathbb{R}$、$N\in(1,\infty)$，我们定义 $t\in[0,1]$ 的畸变系数 $\sigma_K^{(t)}{}_{,N}$：

$$\sigma_{K,N}^{(t)}(\theta):=\begin{cases}\infty & \text{if } K\theta^2\geq N\pi^2,\\ \frac{\sin(t\theta\sqrt{K/N})}{\sin(\theta)\sqrt{K/N}} & \text{if } 0<K\theta^2<N\pi^2,\\ t & \text{if } K\theta^2=0,\\ \frac{\sinh(t\theta\sqrt{-K/N})}{\sinh(\theta\sqrt{-K/N})} & \text{if } K\theta^2<0.\end{cases}$$

利用畸变系数，我们定义函数的凸性。对于给定的函数 $g:\ Y\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $\mathcal{D}(g):=\{y\in Y;\ g(y)<\infty\}$。

定义 2.2（(K,N)-凸）。若函数 $f:\ Y\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 是 (K,N)-凸的，则对任意 y_0、$y_1\in Y$，存在一条连接它们的测地线 $\gamma:[0,1]\to Y$，使得

$$\begin{aligned}&\exp\left(-\frac{1}{N}f(\gamma_t)\right)\\&\geq\sigma_{K,N}^{(1-t)}(d_Y(y_0,y_1))\exp\left(-\frac{1}{N}f(y_0)\right)+\sigma_{K,N}^{(t)}(d_Y(y_0,y_1))\exp\left(-\frac{1}{N}f(y_1)\right)\end{aligned}$$

对任意 $t\in[0,1]$。

可以证明，每个 (K,N)-凸函数在测地线的内部都是局部利普希茨的。因此，根据拉德马赫定理，区间上的 (K,N)-凸函数几乎处处可微。以下结果是本文的一条关键命题，见 [8]（参见 [7]）。

命题2.3（[8]）。设 $I:=(a,b)$ 是 $a<b$的区间，且 f是 $K<0$ 上关于 I的一个（K, $N-1$）-凸函数。那么任意 $x_0<x_1\in I$,

(2.1)

$$\left(\frac{\sinh((b-x_1)\sqrt{-K/N-1})}{\sinh((b-x_0)\sqrt{-K/N-1})}\right)^{N-1}\leq\frac{e^{-f(x_1)}}{e^{-f(x_0)}}\leq\left(\frac{\sinh((x_1-a)\sqrt{-K/N-1})}{\sinh((x_0-a)\sqrt{-K/N-1})}\right)^{N-1}.$$

2.2. RCD 空间。若三元组（$X, d, \mathfrak{m}$）满足：(X, d) 是完备可分度量空间，且 $\mathfrak{m}$ 是 X上的局部有限博雷尔测度，则称其为度量测度空间。若存在等距映射 $f\colon \operatorname{supp} \mathfrak{m}_X \to \operatorname{supp} \mathfrak{m}_Y$，使得 $f_*\mathfrak{m}_X = \mathfrak{m}_Y$，则称两个度量测度空间（$X, d_X, \mathfrak{m}_X$）和（$Y, d_Y, \mathfrak{m}_Y$）彼此同构。在这种情况下，我们记（$X, d_X, \mathfrak{m}_X$）$=$（$Y, d_Y, \mathfrak{m}_Y$）。对于度量测度空间（$X, d, \mathfrak{m}$），（$X, \mathfrak{m}$）是一个 σ-有限测度空间。因此拉东-尼科迪姆定理成立，也就是说，如果 $\mu \in \mathcal{P}(X)$ 关于 $\mathfrak{m}$绝对连续，记作$\mu \ll \mathfrak{m}$，则存在一个 $L^1(\mathfrak{m})$ 函数 ρ，使得 $\mu = \rho\mathfrak{m}$。从现在起，我们总是假设存在常数 $C > 0$，使得

$$\int_X e^{-Cd^2(x_0,x)}\, \mathfrak{m}(dx) < \infty \tag{2.2}$$

对于一点 $x_0 \in X$。相对熵泛函 $\mathsf{Ent}_\mathfrak{m}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 定义为

$$\mathsf{Ent}_\mathfrak{m}(\mu) := \begin{cases} \int_{\{\rho>0\}} \rho \log \rho \, d\mathfrak{m} & \text{if } \mu = \rho\mathfrak{m} \ll \mathfrak{m} \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由 (2.2)，对于任意 $\mu \in \mathcal{P}_2(X)$，有 $\mathsf{Ent}_\mathfrak{m}(\mu) > -\infty$。

定义 2.4（$\mathsf{CD}_e(K, N)$ 空间，[12]）。设 $K \in \mathbb{R}, N \in (1, \infty)$。满足 (2.2) 的度量测度空间 $(X, d, \mathfrak{m})$ 称为 $\mathsf{CD}_e(K, N)$ 空间，若 $\mathsf{Ent}_\mathfrak{m}$ 是 (K, N)-凸的。

对于 $f \in L^2(\mathfrak{m})$，我们将 f 的切格能量 $\mathsf{Ch}(f)$ 定义为

$$\mathsf{Ch}(f) := \frac{1}{2} \inf \left\{ \liminf_{n\to\infty} \int_X (\operatorname{lip} f_n)^2 \, d\mathfrak{m} \,;\, f_n \xrightarrow{L^2(\mathfrak{m})} f,\, f_n \in \mathrm{LIP}(X) \right\}.$$

已知对于任意 $f \in \mathcal{D}(\mathsf{Ch})$，存在一个 $L^2(\mathfrak{m})$-函数 $|df|$，使得 $2\mathsf{Ch}(f) = \int_X |df|^2 \, d\mathfrak{m}$。我们定义巴拿赫空间 $W^{1,2}(X, d, \mathfrak{m}) := L^2(\mathfrak{m}) \cap \mathcal{D}(\mathsf{Ch})$，并赋予范数

$$\|f\|_{1,2}^2 := \|f\|_{L^2(\mathfrak{m})}^2 + \||df|\|_{L^2(\mathfrak{m})}^2,$$

称为 $(X, d, \mathfrak{m})$ 上的索об列夫空间。

定义 2.5（无穷小希尔伯特性，[13]）。设 $(X, d, \mathfrak{m})$ 是一个度量测度空间。若 $W^{1,2}(X, d, \mathfrak{m})$ 是希尔伯特空间，则称 $(X, d, \mathfrak{m})$ 具有无穷小希尔伯特性。

根据无穷小希尔伯特性，我们定义 $f, g \in \mathcal{D}(\mathsf{Ch})$ 的微分的内积如下：

$$\int_X \langle df, dg \rangle \, d\mathfrak{m} := \frac{1}{2} \left(\mathsf{Ch}(f+g) - \mathsf{Ch}(f-g) \right).$$

定义 2.6（RCD 空间）。设 $(X, d, \mathfrak{m})$ 是满足体积增长条件 (2.2) 的度量测度空间，且 $K \in \mathbb{R}$, $N \in (1, \infty)$。若满足以下两个条件，则称 $(X, d, \mathfrak{m})$ 为 $\mathrm{RCD}(K, N)$ 空间；

(1) $(X, d, \mathfrak{m})$ 是 $\mathsf{CD}_e(K, N)$ 空间；(2) $(X, d, \mathfrak{m})$ 具有无穷小希尔伯特性。

具有 $\mathrm{Ric} \geq K$ 的 n 维黎曼流形在 $n \leq N$ 时是 $\mathrm{RCD}(K, N)$ 空间；而里奇极限空间，即维数有上界且里奇曲率有下界的流形的测度Gromov–Hausdorff极限，也属于 RCD 空间。参见定理2.10。

注2.7（历史评述）。度量测度空间里奇曲率下界的综合性概念，最早由 Sturm [21, 22] 和 Lott、Villani [18]独立引入（[18]针对有限 N的 $\mathrm{CD}(K, \infty)$ 和 $\mathrm{CD}(0, N)$，[21]针对 $\mathrm{CD}(K, \infty)$,

[22]针对有限 N的 CD(K,N)）。为获得张量性和局部化性质，Bacher 和 Sturm 引入了约化曲率-维数条件 CD$^*(K,N)$ [6]。非黎曼芬斯勒流形也可以是 CD 空间。为排除这类空间，Gigli 定义了无穷小希尔伯特性 [13]，随后 Ambrosio、Gigli、Savar´e 为紧度量测度空间定义了黎曼曲率维数条件 RCD(K,∞) [1]，；Ambrosio、Gigli、Mondino、Rajala 又为 σ-有限情形定义了相同概念 [2]。对于有限 N，Erbar、Kuwada、Sturm [12] 以及 Ambrosio、Mondino、Savar´e [4] 独立定义了 RCD$^*(K,N)$ 空间。在本质非分支假设下（定义见 [20] ），CD 条件与 CD* 条件彼此等价[10]。满足定义 2.6 中条件的度量测度空间称为 RCD$^*(K,N)$ 空间。然而，根据 [10],，我们现在将这些空间称为 RCD(K,N) 空间。

为了强调 N是有限的，我们称 RCD(K,N) 空间为有限维空间。

注2.8. RCD(K,N) 条件是里奇曲率($\geq K$)下界和维数($\leq N$)上界的合成概念。实际上，RCD(K,N) 空间（$X,d,\mathfrak{m}$）对于 $K'\leq K$和 $N'\geq N$也满足 RCD(K',N') 条件。

对于 RCD(K,N) 空间（$X,d,\mathfrak{m}$），（$X,ad,b\mathfrak{m}$）是一个 RCD$(a^{-2}K,N)$ 空间，其中 $a,b>0$。

设（$X,d,\mathfrak{m}$）是一个 RCD(K,N) 空间。

定义 2.9（拉普拉斯算子）。若存在一个 $L^2(\mathfrak{m})$ 函数 h，使得函数 $f\in\mathcal{D}(\mathrm{Ch})$ 属于 $\mathcal{D}(\Delta)$，则

$$\int_X \langle df,dg\rangle\, d\mathfrak{m} = -\int_X hg\, d\mathfrak{m}$$

对任意 $g\in\mathcal{D}(\mathrm{Ch})$ 均成立。在这种情况下，f的拉普拉斯算子记作 $\Delta f:=h$。

拉普拉斯算子是$L^2(\mathfrak{m})$上稠密定义的非正自伴算子。当 $(X,d,\mathfrak{m})$ 是紧致有限维 RCD 空间时，$-\Delta$ 的谱全由特征值构成，且由于预解算子是紧算子，零特征值的重数为 1。我们将非零特征值记作 $0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq$

$\cdots\to\infty$，并计入重数。

2.3. RCD 空间上的无穷小结构。设 $\{(X_i,d_i,\mathfrak{m}_i,x_i^0)\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ 是一族带基点度量测度空间。若满足以下条件，我们称 $(X_i,d_i,\mathfrak{m}_i,x_i^0)$ 在测度Gromov–Hausdorff意义（简称 mGH）下收敛到 $(X_\infty,d_\infty,\mathfrak{m}_\infty,x_\infty^0)$；存在正数列 $\varepsilon_i\downarrow 0$, $R_i\uparrow\infty$，以及一列 Borel 映射 $\varphi_i:\ B_{R_i}(x_i^0)\to X_\infty$

(1) $|d_i(x,y)-d_\infty(\varphi_i(x)\ \varphi_i(y))|<\varepsilon_i$对于任意 $i\in\mathbb{N}$、任意 $x,y\in B_{R_i}(x_i^0)$。并且$B_{R_i-\varepsilon_i}(\varphi_i(x_i))\subset B_{\varepsilon_i}(\varphi_i(B_{R_i}(x_i^0)))$，(2) $\varphi_i(x_i^0)\to x_\infty^0$，(3) $(\varphi_i)_*\mathfrak{m}_i\rightharpoonup\mathfrak{m}_\infty$ 与 $C_{bs}(X_\infty)$ 对偶。

在这种情况下，我们将 $(X_i,d_i,\mathfrak{m}_i,x_i^0)$ 记为 $\xrightarrow{mGH}(X_\infty,d_\infty,\mathfrak{m}_\infty,x_\infty^0)$。RCD条件在测度Gromov–Hausdorff收敛下保持稳定，并且具有相同 RCD 条件的一组带基点度量测度空间关于测度Gromov–Hausdorff收敛是序列预紧的（见 [14]）。

定理2.10（[12,14]）。设 $\{(X_i,d_i,\mathfrak{m}_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是一列 RCD(K_i,N) 空间，且 $x_i^0\in\mathrm{supp}\ \mathfrak{m}_i$。假设 $(X_i,d_i,\mathfrak{m}_i,x_i^0)\xrightarrow{mGH}(X_\infty,d_\infty,\mathfrak{m}_\infty,x_\infty^0)$，并假设$K_i\to K$。则 $(X_\infty,d_\infty,\mathfrak{m}_\infty)$ 是一个 RCD(K,N) 空间。此外，任意一列 RCD(K,N) 空间均存在一个在 mGH 意义下收敛的子列。

设 $(X,d,\mathfrak{m})$ 是一个 RCD(K,N) 空间。给定 $r>0$, $d_r:=r^{-1}d$ 以及 $\mathfrak{m}_r^x$，对$x\in \operatorname{supp}\mathfrak{m}$ 的定义如下:

$$\mathfrak{m}_r^x:=\left(\int_{B_r(x)}1-\frac{d(x,\cdot)}{r}\,d\mathfrak{m}\right)^{-1}\mathfrak{m}.$$

由于（$(X,d_r,\mathfrak{m}_r^x)$是一个 RCD（r^2K,N）空间，结合注2.8与定理2.10，我们能够找到一个收敛子列 $\{(X,d_{r_i},\mathfrak{m}_{r_i}^x,x)\}_i$。因此，我们得到如下定义。

定义2.11（切锥）。对于给定点 $x\in\operatorname{supp}\mathfrak{m}$，我们将 x 处的切锥定义为

$$\begin{aligned}&\text{切线}(X,d,\mathfrak{m},x)\\&:=\left\{(Y,d_Y,\mathfrak{m}_Y,y)\,;\,(X,d_{r_i},\mathfrak{m}_{r_i}^x,x)\xrightarrow{mGH}(Y,d_Y,\mathfrak{m}_Y,y)\text{ for a sequence }r_i\downarrow 0\right\}.\end{aligned}$$

我们通常将其简记为 $\mathsf{Tan}(X,x)$。

ℓ维正则集 $\mathcal{R}_\ell$ 定义为

$$\mathcal{R}_\ell:=\left\{x\in X\,;\,\mathsf{Tan}(X,x)=\{(\mathbb{R}^\ell,d_E,\underline{\mathcal{L}^\ell},0)\}\right\},$$

其中，d_E 是标准的欧几里得距离，$\underline{\mathcal{L}^\ell}$ 是 $\mathbb{R}^\ell$上的归一化勒贝格测度，这意味着，

$$\int_{B_1(0)}1-|x|\;d\underline{\mathcal{L}^\ell}(dx)=1.$$

已知，对于 RCD(K,N) 空间，$\mathcal{R}_\ell=\emptyset$当 $\ell>[N]$时成立。

Brue 和 Semola 证明了以下结果。

定理2.12（[5]）。设 $(X,d,\mathfrak{m})$ 是一个 RCD(K,N) 空间。那么存在一个整数 n，使得 $\mathfrak{m}(X\setminus\mathcal{R}_n)=0$。

定义2.13（本质维数）。我们称定理2.12中的整数 n 为本质维数，并记作 $\dim_{\mathrm{ess}}(X,d,\mathfrak{m})$，且 $\mathcal{S}:=X\setminus\mathcal{R}_n$ 是 X中的奇异集。

注2.14（豪斯多夫维数与本质维数）。在 [22], 中，Sturm 证明了 RCD(K,N) 空间的豪斯多夫维数至多为 N。根据正则集上的测度性质（见 [3]），显然 $\dim_{\mathrm{ess}}\le\dim_H$。这两种维数相等的问题此前一直悬而未决。然而，最近 Pan 和 Wei 证明，存在一个 RCD(K,N) 空间，其豪斯多夫维数严格大于本质维数（[19]）。

定理2.12并不保证不存在属于另一维数正则集的点（高维正则点不存在已在[16]中证明）。一维情形比其他维数的情况简单得多。

定理 2.15（[8,9,17]）。设$(X,d,\mathfrak{m})$是一个RCD(K,N)空间。那么以下条件彼此等价;

(1) $\mathcal{R}_1\neq\emptyset$, (2) $\dim_{\mathrm{ess}}(X,d,\mathfrak{m})=1$, (3) (X,d)与 $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{\ge0}$, $[0,\ell]$或 $S^1(r)$ 等距，其中 $\ell>0$, $r>0$。

此外，参考测度 $\mathfrak{m}$ 与 $\mathcal{H}^1$ 等价（记为 $\mathfrak{m}\sim\mathcal{H}^1$），其形式为 $\mathfrak{m}=e^{-f}\mathcal{H}^1$，且其密度函数 f 是 $(K,N-1)$-凸的。因此，$h:=e^{-f}$ 满足 (2.1)。

回顾一下，若 σ 和 τ 同时满足 $\sigma \ll \tau$ 和 $\tau \ll \sigma$，则称这两个测度等价。

注2.16. 密度函数的（K, N）-凸性已在 [17]中得到证明。凸性的改进版本由 [7, 10] 证明。密度函数$h:= e^{-f}$ 是连续的。

2.4. 有限维紧致RCD空间上的 Weyl 定律。本小节中，我们始终假设度量测度空间（$X, d, \mathfrak{m}$）是一个紧致RCD（K, N）空间。如前所述，$-\Delta$ 的所有谱都是特征值，且$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \to \infty$ 成立。我们将计数函数 N（λ）定义为

$$N(\lambda) := \#\{i\ ;\ \lambda_i \leq \lambda\}.$$

Ambrosio、Honda和Tewodrose [3] 证明了以下结果。

定理2.17（[3] 参见 [24]）。设（$X, d, \mathfrak{m}$）是一个紧致RCD空间，且 $\dim_{\mathrm{ess}}$（$X, d, \mathfrak{m}$）$=n$。则

$$\int_X \lim_{r\to+0} \frac{r}{\mathfrak{m}(B_r(x))}\,\mathfrak{m}(dx) = \lim_{r\to+0} \int_X \frac{r}{\mathfrak{m}(B_r(x))}\mathfrak{m}(dx) < \infty$$

当且仅当

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{n/2}} = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\mathcal{H}^n(\mathcal{R}_n).$$

注 2.18。独立地，[24] 也证明了一个类似的结果。

对于 $k \in \mathbb{N}$，定义子集 $\mathcal{R}_k^*$ 如下：

$$\mathcal{R}_k^* := \left\{ x \in \mathcal{R}_k\ ;\ {}^{\exists}\lim_{r\downarrow 0} \frac{\mathfrak{m}(B_r(x))}{\omega_k r^k} \in (0,\infty) \right\}.$$

已知 $\mathfrak{m}(\mathcal{R}_k \setminus \mathcal{R}_k^*) = 0$ （见 [3]）。为了证明主要结果，我们需要以下结果。

定理 2.19（[3]）。设 $(X, d, \mathfrak{m})$ 是一个紧 RCD(K, N) 空间，且 $k = \dim_{\mathrm{ess}}(X, d, \mathfrak{m})$。则有

$$\liminf_{t\to+0} \left(t^{k/2} \sum_i e^{-\lambda_i t} \right) \geq \frac{1}{(4\pi)^{k/2}} \mathcal{H}^k(\mathcal{R}_k^*) > 0,$$

其中，$\mathcal{H}^k$ 是 (X, d) 上的 k 维 Hausdorff测度。

所谓的阿贝尔定理对我们的主要结果也很重要。

定理 2.20（阿贝尔定理，参见 [3]）。设 ν 是 $[0, \infty$ 上一个非负且 σ-有限的博雷尔测度。假设存在 $\gamma \in [0, \infty)$ 和 $C \in [0, \infty)$，使得

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\nu([0,a])}{a^\gamma} = C.$$

Then

$$\lim_{t\to+0} t^\gamma \int_{[0,\infty)} e^{-tx}\, d\nu(x) = C\Gamma(\gamma+1).$$

在下一节中，我们将上述定理用于 $\nu = \sum_i \delta_{\lambda_i}$。注意

$$\int_{[0,\infty)} e^{-tx}\, d\nu(x) = \sum_i e^{-\lambda_i t}$$

在这种情况下。

3. Proof of the main theorem

现在设 $(X, d, \mathfrak{m})$ 是一个紧致的 $\mathsf{RCD}(K, N)$ 空间，满足 $\mathfrak{m}(X) = 1$。不失一般性，为简洁起见，我们可以假设 $K < 0$ 和 $-K = N - 1$。

(1) 与 (2) 的等价性在 [17] 中得到证明。(4) 蕴含 (3)、(3) 蕴含 (5) 都是显然的。

(2) $\Rightarrow$ (4)：当 $X = S^1(r)$ 时，$\mathfrak{m} = h\mathcal{H}^1$ 的密度函数 h 是连续的（见注 2.16）。由于 $\mathfrak{m} \sim \mathcal{H}^1$ 且 h 的连续性，h 永不为零。令 $c := \inf h > 0$，$C := \sup h < \infty$。由于

$$0 < \frac{r}{\mathfrak{m}(B_r(x))} h(x) = \frac{r h(x)}{\int_{B_r(x)} h(t)\, dt} \le \frac{r h(x)}{2rc} \le \frac{C}{2c} < \infty$$

成立，我们有

$$\lim_{r \to +0} \int_X \frac{r}{\mathfrak{m}(B_r(x))}\, \mathfrak{m}(dx) = \int_X \lim_{r \to +0} \frac{r}{\mathfrak{m}(B_r(x))}\, \mathfrak{m}(dx) < \infty \tag{3.1}$$

根据控制收敛定理。

我们考虑 $X = [0, \ell]$ 的情形。不失一般性，可以假设 $\ell = \pi$。当密度函数 h 对于 $\mathfrak{m} = h\mathcal{H}^1$ 具有正的最小值时，$X = S^1$ 中的类似论证可推出该结论。因此，我们假设 $h(0) = h(\pi) = 0$。取一个小的正数 $r > 0$ 并将其固定。对于 $x \in [0, r)$，我们有

$$\begin{aligned} h(t(x+r))^{1/N-1} &\ge \sigma^{(1-t)}_{K,N-1}(x+r) h(0)^{1/N-1} + \sigma^{(t)}_{K,N-1}(x+r) h(x+r)^{1/N-1} \\ &= \frac{\sinh(t(x+r))}{\sinh(x+r)} h(x+r)^{1/N-1}. \end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}(B_r(x)) &= \int_0^{x+r} h(y)\, dy = (x+r) \int_0^1 h(t(x+r))\, dt \\ &\ge (x+r) \int_0^1 \frac{\sinh^{N-1}(t(x+r))}{\sinh^{N-1}(x+r)} h(x+r)\, dt. \end{aligned}$$

因此

$$0 < \frac{r}{\mathfrak{m}(B_r(x))} \le \frac{r \sinh^{N-1}(x+r)}{(x+r) h(x+r)} \left(\int_0^1 \sinh^{N-1}(s(x+r))\, ds \right)^{-1}.$$

我们有

$$\begin{aligned} &\frac{r h(x)}{\mathfrak{m}(B_r(x))} \\ &\le \frac{r h(x) \sinh^{N-1}(x+r)}{(x+r) h(x+r)} \left(\int_0^1 \sinh^{N-1}(s(x+r))\, ds \right)^{-1} \\ &= \frac{r}{x+r} \frac{h(x)}{h(x+r)} \frac{\sinh^{N-1}(x+r)}{\int_0^1 \sinh^{N-1}(s(x+r))\, ds}. \end{aligned}$$

利用 $\sinh$ 的泰勒展开，对于充分小的 $z > 0$，我们有 $\sinh^{N-1}(s(x+r)) \ge s^{N-1}(x+r)^{N-1}$ 以及 $\sinh^{N-1} z \le 2^{N-1} z^{N-1}$。此外，将 (2.1) 应用于 $(0, x+2r)$ 上的 h，可得

$$\frac{h(x)}{h(x+r)} \le \frac{\sinh^{N-1}((x+2r)-x)}{\sinh^{N-1}((x+2r)-(x+r))} = \frac{\sinh^{N-1}(2r)}{\sinh^{N-1}(r)} \le \frac{(4r)^{N-1}}{r^{N-1}} = 4^{N-1}.$$

此外，我们还得到

$$\begin{aligned}&\sinh^{N-1}(x+r)\left(\int_0^1\sinh^{N-1}(s(x+r))\,ds\right)^{-1}\\&\le 2^{N-1}(x+r)^{N-1}\left(\frac{(x+r)^{N-1}}{N}\right)^{-1}\\&\le N2^{N-1}.\end{aligned}$$

最后，我们有

$$\frac{rh(x)}{\mathfrak{m}(B_r(x))}\le N8^{N-1}.$$

另一方面，对于 $x\in(r,\pi/2)$，我们有

$$\begin{aligned}&\mathfrak{m}(B_r(x))=\int_{x-r}^{x+r}h(y)\,dy=\int_0^1 h\left((1-t)(x-r)+t(x+r)\right)\cdot 2r\,dt\\&\ge 2r\int_0^1\left(\sigma_{K,N-1}^{(1-t)}(2r)h(x-r)^{1/N-1}+\sigma_{K,N-1}^{(t)}(2r)h(x+r)^{1/N-1}\right)^{N-1}dt\\&\ge 2r\int_0^1\sigma_{K,N-1}^{(t)}(2r)^{N-1}h(x+r)\,dt\\&=\frac{2rh(x+r)}{\sinh^{N-1}(2r)}\int_0^1\sinh^{N-1}(2tr)\,dt\\&\ge\frac{2rh(x+r)}{(4r)^{N-1}}\int_0^1(2tr)^{N-1}\,dt\\&\ge\frac{2rh(x+r)}{N2^{N-1}}.\end{aligned}$$

将 (2.1) 应用于 $(x-r,x+2r)$ 上的 h，得到估计

$$\frac{h(x)}{h(x+r)}\le\left(\frac{\sinh((x+2r)-x)}{\sinh((x+2r)-(x+r))}\right)^{N-1}=\frac{\sinh^{N-1}(2r)}{\sinh^{N-1}(r)}\le\frac{(4r)^{N-1}}{r^{N-1}}=4^{N-1}.$$

Then

$$\begin{aligned}\frac{rh(x)}{\mathfrak{m}(B_r(x))}&\le\frac{rh(x)N2^{N-1}}{2rh(x+r)}=\frac{N2^{N-1}}{2}\cdot\frac{h(x)}{h(x-r)}\\&\le\frac{N2^{N-1}}{2}\cdot 4^{N-1}\le N8^{N-1}.\end{aligned}$$

上界 $N8^{N-1}$ 既不依赖于 $x\in(0,\pi/2)$，也不依赖于 $r>0$。我们在 $x=\pi$ 附近采用同样的论证。于是，由控制收敛定理，

$$\lim_{r\downarrow 0}\int_X\frac{r}{\mathfrak{m}(B_r(x))}\,\mathfrak{m}(dx)=\int_X\lim_{r\downarrow 0}\frac{r}{\mathfrak{m}(B_r(x))}\,\mathfrak{m}(dx)<\infty.\tag{3.2}$$

在这两种情形下，$X=S^1(r)$、$[0,\ell]$，结合 (3.1)、(3.2) 和 [3] 中的定理 4.3，可得 (4)。

(5) ⇒ (1)：结合假设与阿贝尔定理，我们得到

$$\lim_{t\to+0}t^{\frac{1+\alpha}{2}}\sum_i e^{-\lambda_i t}=0.$$

设 $k = \dim_{\mathrm{ess}}(X, d, \mathfrak{m})$。由定理 2.19 可得

$$\lim_{t\to+0} t^{\frac{1+\alpha}{2}} \sum_i e^{-\lambda_i t} = 0 < \frac{1}{(4\pi)^{k/2}} \mathcal{H}^k(\mathcal{R}_k^*) \leq \liminf_{t\to+0} t^{\frac{k}{2}} \sum_i e^{-\lambda_i t}.$$

这意味着 $1+\alpha > k$。由于 $\alpha \leq 1$ 和 k 是整数，因此 k 必须为 1。

Acknowledgement

作者谨向本田正平教授致谢，感谢他向我们提出这个问题，并给予我们宝贵的意见和富有成果的讨论。Y.K. 部分得到了 JSPS KAKENHI Grant Numbers JP18K13412 和 JP22K03291 的资助。

References

[1] L. Ambrosio、N. Gigli 和 G. Savare, *Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below*, 《Duke Math. J.》（），第–期，**163** 2014 7, 1405 1490, 10 1215 00127094 DOI . / - 2681605。MR3205729

[2] L. Ambrosio、N. Gigli、A. Mondino 和 T. Rajala, *Riemannian Ricci curvature lower bounds in metric measure spaces with σ-finite measure*, 《Trans. Amer. Math. Soc.》（），第7期，4661 4701，10 1090 0002 9947 2015 06111 – DOI . /S - - -X。MR 3335397

[3] L. Ambrosio、S. Honda 和 D. Tewodrose, *Short-time behavior of the heat kernel and Weyl's law on * K N spaces*, 《Ann. Global Anal. Geom.》（），第–期，DOI 10 1007 10455 017 9569 3746517 . /s - - -x。MR L. Ambrosio、A. Mondino 和 G. Savare, *Nonlinear diffusion equations and curvature conditions in metric measure spaces*, 《Mem. Amer. Math. Soc.》（），第v期，DOI 10 1090 1270 4044464 . /memo/ 。MR E. Brue 和 D. Semola, *Constancy of the dimension for K N spaces via regularity of Lagrangian flows*, 《Comm. Pure Appl. Math.》（），第–期，DOI 10 1002 21849 4156601 . /cpa. 。MR K. Bacher 和 K.-T. Sturm, *Localization and tensorization properties of the curvature-dimension condition for metric measure spaces*, 《J. Funct. Anal.》（），第–期，DOI 10.1016/j.jfa.2010.03.024，MR2610378（2011i:53050）。

[7] F. Cavalletti, *Monge problem in metric measure spaces with Riemannian curvature-dimension condition*, 《Nonlinear Anal.》（），–151，DOI . /j.na. . . . MR3160530

[8] F. Cavalletti 和 A. Mondino, *New formulas for the Laplacian of distance functions and applications*, 《Anal. PDE》（），第–期，DOI . /apde. . . . MR4175820

[9] F. Cavalletti 和 A. Mondino, *Sharp and rigid isoperimetric inequalities in metric-measure spaces with lower Ricci curvature bounds*, 《Invent. Math.》（），第–期，DOI 10 1007 00222 016 0700 6 3648975 . /s - - - 。MR F. Cavalletti 和 E. Milman, *The globalization theorem for the curvature-dimension condition*, 《Invent. Math.》（），第–期，DOI . /s - - - 。MR 4309491

[10] X. Dai、S. Honda、J. Pan 和 G. Wei, *Singular Weyl's law with Ricci curvature bounded below*, arXiv: . . 2208 13962

[11] M. Erbar、K. Kuwada 和 K.-T. Sturm, *On the equivalence of the entropic curvature-dimension condition and Bochner's inequality on metric measure spaces*, 《Invent. Math.》（2015 3, 993 1071, 10 1007 00222 014 0563 7 3385639），第–期，DOI . /s - - - 。MR N. Gigli, , 《Mem. Amer. Math. Soc.》 *On the differential structure of metric measure spaces and applications*, 《Trans. Amer. Math. Soc.》 **236** 2015 1113, +91 10 1090 1113 3381131（），第vi期，DOI . /memo/ 。MR N. Gigli、A. Mondino 和 G. Savare, *Convergence of pointed non-compact metric measure spaces and stability of Ricci curvature bounds and heat flows*, 《Proc. Lond. Math. Soc.》（）**111** 2015 5, 1071 1129, 10 1112 047 3477230（），第–期，DOI . /plms/pdv 。MR V. Ivrii, , 《Bull. Math. Sci.》（），第3期，379–452，DOI 10 1007 13373 016 0089 3556544 . /s - - -y。MR Y. Kitabeppu, *A sufficient condition to a regular set being of positive measure on RCD spaces*, 《Potential Anal.》 **51** 2019 2, 179 196, 10 1007 11118 018 9708 4 3983504（），第–期，DOI . /s - - - 。MR Y. Kitabeppu 和 S. Lakzian, *Characterization of low dimensional RCD* K N spaces*, 《Anal. Geom. Metr. Spaces》4（2016），第1期，187–215，DOI 10.1515/agms-2016-0007。MR3550295

[18] J. Lott 和 C. Villani, *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport*, 《《数学年刊》（2）169（2009），第3期，903–991，DOI 10.4007/annals.2009.169.903。MR2480619（2010i:53068）[19] J. Pan 和 G. Wei, *Examples of Ricci limit spaces with non-integer Hausdorff dimension*, 《几何与泛函分析》 **32** 2022 3, 676 685, 10 1007 00039 022 00598 4 4431126 （），第–期，[20] *Non-branching geodesics and optimal maps in strong CD K ∞* DOI . /s - - - 。MR T. Rajala 和 K.-T. Sturm, （，） - *spaces* **50** 2014 3 4, 831 846, ，《《微积分与偏微分方程》》（），第–期，DOI 10 1007 00526 013 0657 3216835 . /s - - -x。MR K.-T. Sturm, [21] *On the geometry of metric measure spaces. I*, 《数学学报》196 1，65 2006 10 1007 11511 006 0002 8 2237206 2007 53051（），第–131，DOI . /s - - - 。MR（k: a）[22] K.-T. Sturm, *On the geometry of metric measure spaces. II*, 《数学学报》196 1，133 2006 177，10 1007 11511 006 0003 7 2237207 2007 53051（），第–期，DOI . /s - - - 。MR（k: b）.[23] H Weyl, *Uber die asymptotische Verteilung der Eigenwerte*, G¨ottingen科学学会数学—物理类通讯，1911（1911），110–117。[24] H.-C. Zhang 和 X.-P. Zhu, *Weyl's law on RCD^*（K，N） metric measure spaces*, 《《分析与几何通讯》》27（2019），第8期，1869–1914，DOI 10.4310/CAG.2019.v27.n8.a8。MR4060869

KUMAMOTO UNIVERSITY*Email address*, Akemi Iwahashi:
211d8001@st.kumamoto-u.ac.jp*Email address*, Yu Kitabeppu:
ybeppu@kumamoto-u.ac.jp*Email address*, AkariYonekura:
216d8018@st.kumamoto-u.ac.jp