arXiv:2302.09573v1 [math.OA] 19 Feb 2023

L^1 代数与傅里叶代数的同态

M. Anoussis、G. K. Eleftherakis、A. Katavolos

Abstract. 我们研究连续代数同态 ϕ 从局部紧群 F 的傅里叶代数 $A(F)$ 到局部紧群 G 的傅里叶-斯蒂尔切斯代数 $B(G)$能否延拓为相应 L^∞ 代数之间的弱*连续映射。若 ϕ 完全有界且 F 可 amen，则该同态由分段仿射映射 $\alpha : Y \to F$ 诱导，其中 $Y \subseteq G$。我们证明，ϕ 可延拓当且仅当 α 是一个 *open* 映射。

我们还研究压缩同态ϕ： $L^1(F) \to M(G)$的对偶问题。我们证明，ϕ 诱导群的冯·诺依曼代数之间的弱*连续同态，当且仅当自然关联的映射 θ (Greenleaf [1965], Stokke [2011])是一个*proper* 映射。

1. Introduction

本文研究与局部紧群相关的代数之间的同态可扩张到包含它们的冯·诺依曼代数的条件。

若 G 是一个局部紧群，则群代数 $L^1(G)$ 和测度代数 $M(G)$ 都通过卷积作用于 $L^2(G)$；它们的弱星闭包是该群的冯·诺依曼代数 $VN(G)$。因此，一个自然的问题是确定：从 $L^1(F)$ 到 $M(G)$ 的代数同态在什么条件下会诱导相应冯·诺依曼代数之间的 w*连续映射。

群 G 的傅里叶代数和傅里叶-斯蒂尔切斯代数也通过（逐点）乘法作用于 $L^2(G)$，它们的 w* 闭包是 $L^\infty(G)$ 的乘法代数。因此，关于从 $A(F)$ 到 $B(G)$ 的代数同态的相应问题也很自然。

局部紧群的傅里叶代数和傅里叶-斯蒂尔切斯代数 G由 Eymard 在 [9] 中引入，此后一直是非交换调和分析领域的主要研究对象。

回顾一下，傅里叶-斯蒂尔切斯代数 $B(G)$ 是由酉表示定义的所有系数函数 $s \to (\pi(s)\xi,\ \eta)$，$(\xi,\ \eta \in H_\pi)$ 的集合

Key words and phrases. 傅里叶代数、群代数、代数同态、分段仿射映射。
2010 *Mathematics Subject Classification.* 43A20, 43A22, 43A30。

(π, H_π) 的 G，而 G 的傅里叶代数 $A(G)$ 由 G 的左正则表示 $s \to \lambda_s$ 在 $L^2(G)$ 上的系数组成，定义为 $\lambda_s\xi(t) := \xi(s^{-1}t)$。

当 G 是阿贝尔群时，傅里叶代数与对偶群 $\hat{G}$ 的群代数 $L^1(\hat{G})$ 等距同构，而傅里叶-斯蒂尔切斯代数 $\hat{}$ 与测度代数 $M(G)$ 等距同构。这些同构是通过傅里叶变换实现的。

调和分析中的一个重要问题是确定所有同态 $\phi : A(F) \to B(G)$，其中 F 和 G 是局部紧群。

有界同态 $\phi : A(F) \to B(G)$ 总具有如下形式：$\phi(u) = \phi_\alpha(u) := \chi_Y (u\circ\alpha)$，其中 $Y \subseteq G$ 是一个开子集，$\alpha : Y \to F$ 是一个连续映射。

Cohen [5] 完全刻画了局部紧阿贝尔群之间的同态 $L^1(F) \to M(G)$，并以对偶群 $\hat{}\hat{}$ G 和 F 之间的分段仿射映射来描述。鉴于上述注，Cohen 的结果表明，对于阿贝尔群，同态 $A(F) \to B(G)$ 可以完全用分段仿射映射 $\alpha : G \to F$ 来刻画。为得到这一结果，他采用了幂等元在 $B(G)$ 中的刻画，并在 [4] 中证明了这一刻画。该结果揭示了群 G 的开陪集环所起的根本作用。Host [11] 将 $B(G)$ 中幂等元的刻画推广到了一般的局部紧群。

Ilie 和 Spronk 利用傅里叶代数的自然算子空间结构（它是该群的冯·诺依曼代数的预对偶），证明了若 F 可 amen，则有界同态 $\phi : A(F) \to B(G)$ 由上述连续分段仿射映射 α 诱导 [13, 6]。这推广了 Cohen 的结果。

Pham 在 [17]，中刻画了压缩同态 $\phi : A(F) \to B(G)$。然而，一般情形仍未解决。

在本文的第一部分，我们证明，若 F 和 G 是局部紧第二可数群，且同态 ϕ_α 由混合连续分段仿射映射 α （见定义 2.2）诱导，则 ϕ_α 可延拓为从 $L^\infty(F)$ 到 $L^\infty(G)$ 的 w*-w* 连续映射，当且仅当 α 是开映射。对于可 amen 的 F，我们考察的映射严格包含 Ilie 和 Spronk [13]的结果所涵盖的映射。

作为比较，值得注意的是，Ilie 和 Stokke 刻画了由分段仿射映射所诱导的从 $A(F)$ 到 $B(G)$ 的映射，这些映射可扩张为从 $B(F)$ 到 $B(G)$ 的映射，且对于相应的弱星拓扑连续。

在本文的第二部分，我们研究对偶问题：给出必要且充分的条件，使得从 $L^1(F)$ 到测度代数 $M(G)$ 的压缩同态能够诱导相应冯·诺依曼代数之间的弱*连续同态。

我们注意到，当 F 和 G 为阿贝尔群时，同态 $\phi : L^1(F) \to M(G)$ 可由上述 Cohen 的结果刻画。

为说明我们对对偶问题的处理方法，考虑阿贝尔群 F 和 G之间的连续同态 $\theta : F \to G$ 。那么，由 $\phi(f) = \theta_* f$（将 f视为测度）定义的映射ϕ: $L^1(F) \to M(G)$ 是连续同态。对其作傅里叶变换，得到一个形式为 $u \mapsto u \circ \theta$ 的同态 $A(F) \to B(G)$。由第一部分的结果可知，此映射可延拓为从 $L^\infty(F)$ 到 $L^\infty(G)$ 的 w*-w* 连续映射，当且仅当 θ 是开映射。但已知，[7, 定理 8] 指出，映射 θ 是开映射，当且仅当 θ 是真映射。因此，再次作傅里叶变换后，我们得出，映射 ϕ 诱导一个 w*-连续的 *-同态 $VN(F) \to VN(G)$，当且仅当 θ是真映射。详情见第 3 节。

这一结果表明，对于一般的局部紧群，也应存在类似的条件。

局部紧群上的压缩同态 ϕ: $L^1(F) \to M(G)$ F 以及 G 由 Greenleaf 刻画 [10]。Stokke 给出了更详细的描述 [20]。

这类同态的结构比上述特殊情形更为复杂。尽管如此，我们将在第 4 节证明，对于存在 w*连续诱导映射，仍有一个既必要又充分的真性条件。

因此，我们为 Stokke 的一项结果给出了新的证明： [21], 上述真性条件等价于扩展映射的 w*-连续性 φ： $M(F) \to M(G)$。

我们的方法依赖于算子代数方法，并利用傅里叶代数与群的冯·诺依曼代数之间的对偶性。

记号 我们用 (ξ, η) 表示希尔伯特空间中的标量积（对 ξ 线性），用 $\langle x^*, x\rangle$ 表示巴拿赫空间 X 中的向量 x 与其对偶空间中的线性泛函 x^* 之间的双线性配对。符号 $\mu \ll \nu$ 表示测度 μ 和 ν 的绝对连续性（即每个 ν-零测集都是 μ-零测集）。对于局部紧群 G，我们用 $g \mapsto \lambda_g$ 或 λ_g^G 表示其左正则表示，并用 $\mu \mapsto \lambda^G(\mu)$ $\mu \in M(G)$ 表示其“积分形式”（见第 4 节）。

2. Homomorphisms between Fourier Algebras which extend to the corresponding masas.

设 G 和 F 为局部紧第二可数群，其 Haar 测度分别为 μ 和 ν。我们关注同态 ϕ： $A(F) \to B(G)$ 满足哪些条件时，可以将其扩张为从 $L^\infty(F)$ 到 $L^\infty(G)$ 的映射。考虑有界同态 ϕ： $A(F) \to B(G)$，并令

$$Y = \{t \in G : \exists u \in A(F),\ \ \phi(u)(t) \neq 0\}.$$

那么 Y 是一个开集，并且存在连续映射 α： $Y \to F$，使得对于所有 $u \in A(F)$，我们有

$$\phi(u)(t) = \phi_\alpha(u)(t) := \begin{cases} u(\alpha(t)), & t \in Y \\ 0, & t \in G \setminus Y \end{cases}$$

参见 [16, 第 101]。

命题 2.1. 如果 ϕ 可扩张为一个从 $L^\infty(F)$ 到$L^\infty(G)$的 w*连续映射，那么该扩张必然是一个 $*$-同态，而且事实上，在有界可测函数上的定义公式与上文相同。因此，在博雷尔子集 $E \subseteq F$ 上由 $\alpha_*\mu(E) =\mu(\alpha^{-1}(E))$ 定义的测度 $\alpha_*\mu$ 满足 $\alpha_*\mu \ll \nu$。

反过来，若 $\alpha_*\mu \ll \nu$，则上述公式定义了一个必然是 w*-连续的同态 $\phi : L^\infty(F) \to L^\infty(G)$，它扩张了 ϕ。

证明。 将该扩张记为 ϕ。首先注意，该公式

$$\tilde{\phi}(u)(t) = \begin{cases} u(\alpha(t)), & t \in Y \\ 0, & t \in G \setminus Y \end{cases}$$

对所有 $u \in C_0(F)$ 都成立。事实上，由于 $A(F)$ 在 $C_0(F)$ 中稠密，存在 $A(F)$ 中的一个序列 (u_n)，一致收敛到 u。

现在令 $V \subseteq F$ 为一个开集。存在一个有界函数序列 $(u_n) \subseteq C_0(F)$，其支撑包含于 V，使得对于所有 $s \in F$，都有 $u_n(s) \to \chi_V(s)$，其中 χ_V 表示 V 的示性函数。由控制收敛定理，该序列在弱星拓扑下收敛到 χ_V。由于 ϕ 是 w*连续的，我们有

$$\tilde{\phi}(\chi_V)(t) = \begin{cases} \chi_V(\alpha(t)), & \text{for a.a. } t \in Y \\ 0, & \text{for a.a. } t \in G \setminus Y \end{cases} \tag{2.1}$$

所有博雷尔集 $V \subseteq F$ 使得 $\phi(\chi_V)$ 满足 (2.1)，显然构成一个 σ-代数。由于它包含所有开集，因此它等于博雷尔 σ-代数。

因此

$$\tilde{\phi}(u)(t) = \begin{cases} u(\alpha(t)), & \text{for a.a. } t \in Y \\ 0, & \text{for a.a. } t \in G \setminus Y \end{cases} \tag{2.2}$$

当 u 是某个博雷尔集的示性函数时，上式成立，因此（由线性性和 $\|\cdot\|_\infty$-连续性）对 $L^\infty(F)$ 中的所有函数都成立。

现在显然 $\tilde{\phi}$ 是一个 *-同态。

现在，如果 $E \subseteq F$ 是任意博雷尔集，那么 $\phi(\chi_E) = \chi_{\alpha^{-1}(E)}$ 必须属于 $L^\infty(G)$。由此可知，如果 $\nu(E) = 0$，那么 $\mu(\alpha^{-1}(E))$必定为零。这表明$\alpha_*\mu \ll \nu$。

反过来，若 $\alpha_*\mu \ll \nu$ 则 (2.2) 显然定义了一个 *-同态 ϕ 从$L^\infty(F)$ 到 $L^\infty(G)$。为证明 ϕ 是 w*连续的，设 $\{E_i\}$ 是 F 的两两不相交的博雷尔子集族，并且 $E := \cup_i E_i$。于是

$$\tilde{\phi}(\sum_i \chi_{E_i}) = \tilde{\phi}(\chi_{\cup_i E_i}) = \tilde{\phi}(\chi_E) = \chi_{\alpha^{-1}(E)}$$

$$= \chi_{\cup_i \alpha^{-1}(E_i)} = \sum_i \chi_{\alpha^{-1}(E_i)} = \sum_i \tilde{\phi}(\chi_{E_i}) .$$

由此可知，对于任意非负的 $h \in L^1(G)$，正线性泛函 $u \to \langle \phi(u)\ h\rangle$ 完全可加，因而是 w*连续的；因此，对于任意 $h \in L^1(G)$，线性泛函 $u \to \langle \tilde{\phi}(u)\ h\rangle$ 是 w*连续的，从而 $\tilde{\phi}$是 w*连续的。□

注 2.2. 扩张的 *w**-连续性这一假设不能省略。

事实上，设 ϕ：$A(F) \to B(G)$ 如上所述，且 $Y \neq G$，并设 ϕ：$L^\infty(F) \to L^\infty(G)$ 为由 (2.2) 定义的映射。若 F 不是紧的，则 $L^\infty(F)$ 中由 $A(F)$ 生成的理想是真理想。设 δ：$L^\infty(F) \to \mathbb{C}$ 是一个非零同态，且在该理想上为零。那么映射 ϕ_1：$u \to \phi(u)+\delta(u)\chi_{G\setminus Y}$是从 $L^\infty(F)$ 到 $L^\infty(G)$ 的 *-同态，它扩张了 ϕ，但不满足上述公式。

本节将证明，对于某一类自然产生的连续映射 α，条件 $\alpha_*(\mu) \ll \nu$ 成立，当且仅当 α 是开映射。

以下是 [1]的定理 3.5：

定理 2.3。设 G 和 F 是局部紧第二可数群，分别配备哈尔测度 μ 和 ν，且 θ： $G \to F$ 是连续同态。以下条件等价：

(i) $\theta_*(\mu) \ll \nu$*(ii)* $\theta(G)$ 是 F的开子群。

定义 2.1。设 G 和 F 是局部紧群， K 是G 的子群， C 是 G中 K 的左陪集。若存在同态（分别为反同态） θ：$K \to F$ 以及元素 $s_0 \in F$、$t_0 \in G$，使得 $C = t_0^{-1}K$ 并且对于映射 α： $C \to F$ 成立，则称其为仿射（分别为反仿射）

$$\alpha(t) = s_0\theta(t_0 t)$$

对所有 $t \in C = t_0^{-1}K$均成立。

推论 2.4。设 G 和 F 是局部紧第二可数群，分别配备哈尔测度 μ 和 ν。设 C 是 G 中开子群 K的一个陪集，且 α： $C \to F$ 是连续仿射映射或反仿射映射。以下条件等价：

(i) 测度 $\alpha_*\mu$ 满足 $\alpha_*\mu \ll \nu$。*(ii)* $\alpha(C)$ 是 F的开子集。

证明。 我们证明仿射映射的推论。反仿射映射的证明类似。记

$$\alpha = l_{s_0} \circ \theta \circ l_{t_0},$$

其中 l_x 表示 x的左平移。显然， $\alpha(C)$ 是开集，当且仅当 $\theta(K)$ 是开集；并且 $\alpha_*\mu \ll \nu$ 当且仅当 $\theta_*\mu_K \ll \nu$，其中 μ_K是 μ 在 K上的限制。由于 K 是开集， μ_K 是 K的哈尔测度，由定理 2.3可得所需结果。□

我们将需要以下混合分段仿射映射的定义，它是对 [19]中定义的修改。注意，我们已将映射的连续性纳入定义。

若 G 是局部紧群，则 G 的开陪集环$\Omega_0(G)$是包含所有开陪集的最小子集环。

定义 2.2。设 G 和 F 是局部紧群，Y 是 G. 的一个既开又闭（*clopen*）子集。若存在互不相交的既开又闭集 $\{Y_i\colon\ i=1,...,m\}\subseteq\Omega_0(G)$，使得 $Y=\cup_{i=1}^m Y_i$，以及 G 的开陪集 C_i，使得 $Y_i\subseteq C_i$，并且存在仿射或反仿射的连续映射 $\alpha_i\colon C_i\to F$，使得 $\alpha|_{Y_i}=\alpha_i|_{Y_i}$.，则称映射 $\alpha:\ Y\to F$ 为混合分段仿射 映射。

如果所有 $\alpha_i\colon C_i\to F$ 都是仿射映射，则称 α 为分段仿射映射。

请注意，第二可数局部紧空间是可度量化的。

定理 2.5。设 G 和 F 是局部紧第二可数群，且$Y\subseteq G$ 是一个既开又闭集。设 $\alpha:\ Y\to F$ 是一个混合分段仿射映射，并且m、Y_i、C_i、α_i对于 $i=1,2,.....,\ m$ 如定义 *2.2* 所述。以下各项等价：

(1) $\alpha_*\mu_Y\ll\nu$*(2)* 集合 $\alpha_i(C_i)\ i=1$、.....、m
在 F.中是开集

证明。（*1*）蕴含（*2*）：设 $i=1,.....,\ m$。我们证明 $\alpha_i(C_i)$ 是开集。由于 $\alpha_i(C_i)$ 是一个陪集，只需证明 $\nu(\alpha_i(C_i))>0$。但是，如果 $\nu(\alpha_i(C_i))=0$，那么 $\nu(\alpha_i(Y_i))=0$，因此 $\alpha_*\mu_{Y_i}(\alpha_i(Y_i))=\mu Y_i=0$。由于$Y_i$ 是开集，矛盾。

(2) 推出 *(1)*：先假设 $m=1$，因此 α 是连续仿射映射或反仿射映射的限制。若 $\alpha(C)$ 是开集，则由推论 2.4，$\alpha_*\mu_C\ll\nu$，从而更有 $\alpha_*\mu_Y\ll\nu$。

对于一般情形，假设集合 $\alpha_i(C_i)$ 是开集。由刚刚证明的特殊情形，对每个 i，都有 $\alpha_{i*}\mu_{Y_i}\ll\nu$。由于 $\sum\alpha_{i*}\mu_{Y_i}=\alpha_*\mu_Y$，可得 $\alpha_*\mu_Y\ll\nu$。□

注 2.6。注意，条件 $\alpha_i(C_i)\ i=1,...,m$ 在F 中是开集，等价于条件 α 是开映射。

事实上，设 $i\in\{1,\dots,m\}$。存在 G 的一个开子群 K_i、$t_i\in G$、$s_i\in F$，以及一个连续同态或反同态 $\theta_i\colon K_i\to F$，使得 $C_i=t_i^{-1}K_i$ 且对所有 $t\in C_i$，$\alpha_i(t)=s_i\theta_i(t_it)$。由于 $\alpha_i(C_i)$ 在 F 中是开集，子群 $\theta_i(K_i)$ 在 F 中也为开集，因此由引理 3.4] 可知，θ_i 是开映射，进而 α_i 也是开映射。

因此，如果 $V\subseteq Y$ 是一个开集，那么对每个 i，集合 $\alpha(V\cap Y_i)$ 都是开集，因为它等于 $\alpha_i(V\cap Y_i)$；由此可知，$\alpha(V)=\cup_i\alpha(V\cap Y_i)$ 是开集。□

定理 2.7。设 G 和 F 是局部紧第二可数群，且$Y\subseteq G$ 是一个既开又闭集。设 $\alpha:Y\to F$ 是一个混合分段仿射映射（定义 *2.2*）。以下条件等价：

(1) 映射 $\phi_\alpha: A(F) \to B(G)$ 可扩张为一个从 $L^\infty(F)$ 到 $L^\infty(G)$的有界 w^*-连续同态。*(2)* α 是一个开映射。

证明。*(1)* 推出 *(2)*：假设映射 ϕ_α 可扩张为一个从 $L^\infty(F)$ 到 $L^\infty(G)$ 的有界w^*-连续同态。对于 $i = 1, \ldots, m$以及 $u \in A(F)$，令

$$\phi_i(u)(t) = \begin{cases} \phi_\alpha(u)(t), & t \in Y_i \\ 0, & t \in G \setminus Y_i \end{cases}$$

(注意到 ϕ_i 将 $A(F)$ 映射到 $B(G)$，因为 Y_i 的示性函数属于 $B(G)$）。显然， ϕ_i 可扩张为一个从 $L^\infty(F)$ 到 $L^\infty(G)$ 的映射，因此由命题2.1， $\alpha_{i*}(\mu_{Y_i}) \ll \nu$。

因此，由定理2.5 和注2.6可得， α 是一个开映射。

(2) 推出 *(1)*：反过来，假设 α 是一个开映射。那么 $\alpha_*\mu_Y \ll \nu$。

事实上， α 在每个 Y_i 上的限制都与 $\alpha_i|_{Y_i}$一致。因此， $\alpha_i|_{Y_i}$ 是开映射。但 α_i 是仿射或反仿射，因此对于某些 s、 t，有 $\alpha_i(x) = s\theta(tx)$，其中 tC_i 是 G 的子群，且 $\theta: tC_i \to F$ 是连续同态（或反同态）。当 θ 是同态时， $\alpha_i(Y_i) = s\theta(tY_i)$，所以$\theta(tY_i)$必须是 F中的开集；因此 $\theta(tC_i)$是一个包含非空开集的群，故必为开集，从而 $\alpha(C_i) = s\theta(tC_i)$是开集。因此，由定理 2.5可得所述结论。反同态的情形类似。

因此，该映射

$$\phi_0 : L^\infty(F, \nu) \to L^\infty(Y, \mu_Y): \quad \phi_0(u) = u \circ \alpha$$

是一个弱星连续 *-同态。空间 $L^\infty(Y, \mu_Y)$是 $L^\infty(G, \mu)$的直和项，且嵌入 $\iota: L^\infty(Y, \mu_Y) \to L^\infty(G, \mu)$是 w^*-˜连续的。因此 $\phi := \iota \circ \phi_0$ 是 w^*-连续的，并且显然延拓了 ϕ_α。 □

Ilie 和 Stokke 在 [14]中证明了一个相关结果：若 $Y \subseteq G$ 是一个开集， $\alpha: Y \to F$ 是一个分段仿射映射，且 ϕ_α 相应的映射˜从 $A(F)$ 到 $B(G)$，那么 ϕ_α 可扩展为映射 $\phi: B(F) \to B(G)$，且该映射关于相应的弱星拓扑连续，当且仅当 α 是一个开映射。

3. The dual problem for locally compact abelian groups

设 E 和 H 是局部紧阿贝尔群，且 $\omega: E \to H$ 是一个连续同态。由我们在第 2 节中的结果可知，映射 $u \to u\circ\omega: A(H) \to B(E)$ 可扩展为一个弱星连续 *-同态$L^\infty(H) \to L^\infty(E)$，当且仅当 ω 是开映射。

在下一节中，我们将研究一般局部紧群的对偶问题：在什么条件下，同态 $L^1(H) \to M(E)$ 会诱导一个 w*连续 *-同态 $VN(H) \to VN(E)$。

命题 3.2讨论了阿贝尔群情形下会发生什么。我们将其列出，作为定理4.14（当然，它是该定理的一个特例）的动机。这是定理2.7 以及以下结果的推论：

定理 3.1。 [7, 定理 8] 设 E 和 H 是局部紧阿贝尔ˆ ˆ群，且 $\omega : E \to H$ 是连续同态。若 E 和 H 分别是ˆ ˆ对偶群，我们用 $\hat{}\omega : H \to E$ 表示对偶映射（由 $\hat{}\omega(\gamma) = \gamma \circ \omega\hat{}$给出，其中 $\gamma \in H$）。

以下条件等价：*(i)* 映射 ω：
$E \to H$ 是开映射ˆ ˆ*(ii)* 映射 $\hat{}\omega$：
$H \to E$ 是真映射。

下文中，若 $\theta : F \to G$ 是可测映射，对于 $f \in L^1(F)$，我们用$\theta_*(f) \in M(G)$ 表示由 $\theta_*(f)(A) = \int_{\theta^{-1}(A)} f(t)dt, \quad A \subseteq G$Borel 给出的测度。

命题 3.2。 若 F 和 G 是局部紧阿贝尔群，则形如 $f \mapsto \theta_*(f)$ 的同态 ϕ: $L^1(F) \to M(G)$，其中 θ: $F \to G$ 是连续群同态，当且仅当 θ 是真映射时，诱导出弱星连续 *-同态$VN(F) \to VN(G)$。

证明。 回顾一下，对于阿贝尔群 F，映射 $u \to \hat{}u$ （其中 $\hat{}u$ 是 u 的傅里叶变换）是从 $A(F)$ 到$L^1(\hat{}F)$ 的等距代数同构，并且

$$u(x) = \int_{\hat{F}} \hat{u}(\eta)\eta(x)d\eta$$

对所有 $x \in F$ 都成立（积分是相对于 F 上经过适当归一化的 ˆ哈尔测度进行的）。该同构的对偶映射

$$L^1(\hat{F}) \to A(F) : \hat{u} \mapsto u$$

是一个弱星连续同构 ω^F: $VN(F) \to L^\infty(\hat{}F)$，满足对每个$x \in F$,

$$VN(F) \ni \lambda_x^F \mapsto g_x^F \in L^\infty(\hat{F})$$

其中

$$g_x^F(\eta) = \eta(x), \quad \eta \in \hat{F}.$$

ˆ ˆ ˆ 假设 θ 是真同态。那么 θ： $G \to F$ 是开映射，因此根据定理2.7映射

$$\hat{\phi} : A(\hat{F}) \to L^\infty(\hat{G}) : \hat{\phi}(u) = u \circ \hat{\theta}$$

ˆ ˆ 可扩展为一个 w*连续映射 $L^\infty(F) \to L^\infty(G)$，仍用同一符号表示。考虑复合映射

$$\psi : VN(F) \overset{\omega^F}{\to} L^\infty(\hat{F}) \overset{\hat{\phi}}{\to} L^\infty(\hat{G}) \overset{(\omega^G)^{-1}}{\to} VN(G).$$

对于每个 $x \in F$，这给出

$$\psi : \lambda_x^F \to g_x^F \to g_x^F \circ \hat{\theta} \to \lambda_{\theta(x)}^G$$

因为 $g_x^F \circ \hat{\theta} = g_{\theta(x)}^G$；事实上，对于每个 $\gamma \in \hat{G}$,

$$g_{\theta(x)}^G(\gamma) = \gamma(\theta(x)) = g_x^F(\gamma \circ \theta) = (g_x^F \circ \hat{\theta})(\gamma).$$

Thus

$$\psi(\lambda_x^F) = \lambda_{\theta(x)}^G$$

对所有 $x \in F$均成立，因此，由于 ψ 是w*连续的,

$$\psi(\lambda^F(\mu)) = \lambda^G(\theta_*(\mu))$$

对所有 $\mu \in M(F)$均成立。这表明映射

$$\theta_* : L^1(F) \to M(G) : f \mapsto \theta_*(f),$$

该映射延拓为从 $M(F)$ 到 $M(G)$ 的映射，并按如下意义诱导出映射 ψ:
$\psi \circ \lambda^F = \lambda^G \circ \theta_*$。

反之，设映射 θ_*： $L^1(F) \to M(G)$，其中 θ： $F \to G$是一个连续群同态，诱导出一个 w^*-连续同态

$$\psi : VN(F) \to VN(G) \text{ such that } \lambda_x \mapsto \lambda_{\theta(x)} \quad \text{for } x \in F.$$

则复合映射

$$\hat{\phi} : L^\infty(\hat{F}) \overset{(\omega^F)^{-1}}{\to} VN(F) \overset{\psi}{\to} VN(G) \overset{\omega^F}{\to} L^\infty(\hat{G})$$

是一个 w^*-连续同态，并且对每个 $x \in F$ 都满足

$$\hat{\phi} : g_x^F \to \lambda_x^F \to \lambda_{\theta(x)}^G \to g_x^F \circ \hat{\theta}\,.$$

由于 $\{g_x^F$ 的 w*-闭线性张成： $x \in F\}$ 是 $L^\infty(\hat{F})$，因此可得

$$\hat{\phi}(f) = f \circ \hat{\theta}$$

$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ 对所有 $f \in L^\infty(F)$ 。由于 θ： $G \to F$ 是一个连续同态，我们有 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$，即 ϕ 的限制将 $A(F)$ 映射到 $B(G)$。应用定理 2.7，我们看到同态

$$\hat{\theta} : \hat{G} \to \hat{F}$$

是开映射，因此根据定理 3.1， θ 是真映射。 □

我们证明了，若 F 和 G 是阿贝尔局部紧群，且 ϕ： $L^1(F) \to M(G)$ 是形如 $\phi(f) = \theta_*(f)$、其中 θ 是连续同态 $F \to G$ 的同态，则 ϕ 诱导一个 w*连续 *-同态 ψ: $VN(F) \to VN(G)$，当且仅当 θ 是真映射。这一结果表明，对于不一定是阿贝尔群的 F 和 G，也应存在类似的条件。Greenleaf [10] 已证明，压缩同态 ϕ： $L^1(F) \to M(G)$ 的形式比我们在命题 3.2 中考虑的形式更一般。尽管如此，我们将在下一节证明，一般情形下仍存在一个真性条件，它是诱导映射 ψ 存在的充要条件。

4. The dual problem for arbitrary locally compact groups

本节研究同态 $\phi: L^1(F) \to M(G)$ 所应满足的条件，使得相应的卷积代数之间的同态诱导出一个弱*连续同态 $\psi: VN(F) \to VN(G)$。

我们先介绍一些预备知识。

设 G 是一个局部紧群。G 上复测度的空间 $M(G)$ 是 $C_0(G)$ 的对偶；对偶性由下式给出

$$\langle \mu, f \rangle = \int_G f d\mu, \quad f \in C_0(G), \mu \in M(G).$$

空间 $M(G)$ 在如下乘法下构成一个巴拿赫代数

$$\langle \mu * \nu, f \rangle = \int_G \int_G f(ts) d\mu(t) d\nu(s), \quad f \in C_0(G).$$

我们称网 $(\mu_i) \subseteq M(G)$ 在 so拓扑下收敛到 $\mu \in M(G)$，如果

$$\|\mu_i * f - \mu * f\|_{L^1} \to 0 \quad \text{for all } f \in L^1(G).$$

我们将需要以下简单事实：

引理 4.1. 映射 $\lambda: M(G) \to VN(G)$ 是包含映射$\iota : A(G) \to C_0(G)$的对偶。

证明。元素 $u \in A(G)$是 $VN(G)$上的向量泛函，即属于预对偶 $(VN(G))_*$，其形式为 $\langle T, u \rangle = (T\xi, \eta)$，其中 $\xi, \eta \in L^2(G)$。特别地

$$\langle \lambda(\mu), u \rangle = (\lambda(\mu)\xi, \eta) = \int_G (\lambda_t \xi, \eta) \, d\mu(t).$$

但泛函 u 定义了一个函数 $\iota(u) \in C_0(G)$，其定义为 $\iota(u)(s) := \langle \lambda_s, u \rangle = (\lambda_s \xi, \eta)$（通常将函数 $\iota(u)$记为 u，即把泛函与函数视为同一对象）。我们有

$$\langle \mu, \iota(u) \rangle = \int \iota(u)(t) d\mu(t) = \int_G (\lambda_t \xi, \eta) \, d\mu(t) = \langle \lambda(\mu), u \rangle .$$

对所有 $u \in A(G)$ 和所有 $\mu \in M(G)$，这一关系均成立，并表明$\lambda = \iota^*$。□

命题 4.2. 设 F 是一个局部紧群。那么映射

$$\lambda : (M(F), w^*) \to (VN(F), w^*) \quad and \quad \lambda : (M(F), so) \to (VN(F), w^*)$$

是连续的。

证明。第一个断言由引理 4.1得出。

对于第二个断言，由于恒等映射 $\iota: M(F) \to M(F)$ 是so-w^*-连续的，命题 [20, 2.2], 复合映射 $\lambda = \lambda \circ \iota: M(F) \to VN(F)$ 是 so-w^*-连续的。□

以下命题的证明见 [13, 推论 3.11]。

命题 4.3. 设 F 和 G 为局部紧群，$\theta: F \to G$ 为连续同态，并且对每个 $u \in A(G)$都有 $\rho(u) = u \circ \theta$。那么：θ 是真，当且仅当 $\rho(A(G)) \subseteq A(F)$。

命题4.4。 [20, 命题2。2] 任意有界同态 $\varphi_0 : L^1(F) \to M(G)$ 都有唯一的 so-w^*-连续扩张为一个同态 $\varphi: M(F) \to M(G)$。

因此，以下只需考虑测度代数之间的 so-w^*-连续同态。

定义4.1。 设 F 和 G 为局部紧群，并且

$$\varphi : M(F) \to M(G)$$

是一个 so-w^*-连续同态。我们称 φ 具有延拓性质，如果存在一个 w^*-连续同态 $\psi: VN(F) \to VN(G)$ 使得 $\psi \circ \lambda^F = \lambda^G \circ \varphi$.

注意，由 [20, 命题5.5] 可知，so-w^* 连续压缩同态 $\varphi: M(F) \to M(G)$ 是一个 $*$-同态。

为使表述清晰，我们从保幺同态的情形开始，因为在这种情况下，构造“符号” θ 更为直接。

4.1. 幺情形。 本小节中，我们假设 $\varphi: M(F) \to M(G)$ 是一个压缩的保幺 $*$-同态。

引理4.5。 设 F 和 G 是局部紧群，并且

$$\varphi : M(F) \to M(G)$$

是一个 so-w^*-连续压缩的保幺 $*$-同态 $(\varphi(\delta_{e_F}) = \delta_{e_G})$。那么存在必然唯一的连续同态

$$\theta : F \to G,\ \beta : F \to \mathbb{T}$$

使得

$$\varphi(\delta_x^F) = \beta(x)\delta_{\theta(x)}^G,\ x \in F.$$

证明。 将 [10, 定理 3.1.8] 应用于群 $\{\varphi(\delta_x^F)\} \subseteq$ 球$(M(G))$，对于每个 $x \in F$，我们都有 $\varphi(\delta_x^F) = b\delta_g^G$，其中 $b \in \mathbb{T}$ 和 $g \in G$。我们按以下规则定义映射

$$\theta : F \to G, \quad \beta : F \to \mathbb{T}$$

按以下规则

$$\theta(x) = g \text{ and } \beta(x) = b \Leftrightarrow \varphi(\delta_x^F) = b\delta_g^G .$$

利用 φ 是保幺且乘法的这一事实，很容易验证 θ 和 β 定义良好，且都是群同态。我们有

$$\varphi(\delta_x^F) = \beta(x)\delta_{\theta(x)}^G,\ \ x \in F.$$

由于 φ 是 so-w^*-连续的，同态 θ 和 β 都是连续的。这由 [20, 引理 41] 得出。为完整起见，我们给出一个简短的证明：

假设 $x_i \to x$. 我们将证明 $\beta(x_i) \to \beta(x)$ 且 $\theta(x_i) \to \theta(x)$。由于 $w^*\text{-}\lim \delta_{x_i}^F = \delta_x^F$，根据 [10, 引理 1.1。2] 我们有 $so\text{-}\lim \delta_{x_i}^F = \delta_x^F$，因此 $w^*\text{-}\lim \varphi(\delta_{x_i}^F) = \varphi(\delta_x^F)$。于是

$$w^*\text{-}\lim_i \beta(x_i)\delta_{\theta(x_i)}^G = \beta(x)\delta_{\theta(x)}^G.$$

取 $(\delta_{\theta(x_j)})$ 的一个子网 $(\delta_{\theta(x_i)})$，其收敛于，设为 μ.。由于 $\{\beta(x_j)\}$ 位于一个紧集内，如有必要取子网后，我们可以假设 $\beta(x_j) \to b$ 对某个 $b \in \mathbb{T}$ 成立。我们有

$$\mu = w^*\text{-}\lim_j \delta_{\theta(x_j)} = w^*\text{-}\lim_j \frac{1}{\beta(x_j)}\beta(x_j)\delta_{\theta(x_j)} = \frac{1}{b}\beta(x)\delta_{\theta(x)}.$$

由于 μ 是正测度，是 $(\delta_{\theta(x_j)})$ 的极限，因此我们有

$$\beta(x) = b \text{ and } \delta_{\theta(x)} = \mu.$$

我们证明了 $(\delta_{\theta(x_i)})$ 的每个收敛子网都收敛于 $\delta_{\theta(x)}$.。由此可得 $w^*\text{-}\lim \delta_{\theta(x_i)} = \delta_{\theta(x)}$，因此

$$\theta(x_i) \to \theta(x).$$

类似的论证表明，$\beta(x_i) \to \beta(x)$。 □

定理 4.6. 设 F 和 G 是局部紧群，并且

$$\varphi : M(F) \to M(G)$$

是一个保幺压缩的 so-w^*-连续同态。以下条件等价：

(i) 映射 φ 具有延拓性质。
(ii) 同态 θ 是真映射。

证明. $(i) \Rightarrow (ii)$
假设存在一个弱星连续映射 $\psi\colon VN(F) \to VN(G)$，使得$\psi \circ \lambda^F = \lambda^G \circ \varphi$。对于所有 $x \in F$，我们有

$$\psi(\lambda_x^F) = \psi \circ \lambda(\delta_x^F) = \lambda \circ \varphi(\delta_x^F) = \lambda(\beta(x)\delta_{\theta(x)}^G) = \beta(x)\lambda_{\theta(x)}^G.$$

因此，若 $\psi_*\colon A(G) \to A(F)$ 是 ψ 的预对偶，那么对于所有 $u \in A(G)$，我们有

$$\langle \lambda_x^F, \psi_*(u)\rangle = \langle \psi(\lambda_x^F), u\rangle = \langle \beta(x)\lambda_{\theta(x)}^G, u\rangle = \beta(x)(u \circ \theta)(x)$$

因此，映射 $x \to \beta(x)(u\circ\theta)(x)$ 属于 $A(F$。由于映射 $x \to \beta(x)$ 属于傅里叶-斯蒂尔切斯代数 $B(F)$（β 是一个表示），因此可得$u \circ \theta \in A(F)$。根据命题 4.3， θ 必定是一个真同态。

$(ii) \Rightarrow (i)$
反过来，假设 θ 是一个真同态。那么对于所有 $u \in A(G)$

映射 $u\circ\theta$ 属于 $A(F)$，映射 $F\to\mathbb{C}$ 也属于 $x\mapsto\beta(x)(u\circ\theta)(x)$。因此我们可以定义

$$\rho : A(G)\to A(F) \text{ by } \rho(u)(x)=\beta(x)(u\circ\theta)(x),\ x\in F.$$

那么，$\psi=\rho^*\colon VN(F)\to VN(G)$ 是一个弱*连续 *-同态，满足

$$\psi(\lambda_x^F)=\beta(x)\lambda^G_{\theta(x)}.$$

因此我们有

$$(\psi\circ\lambda^F)(\delta_x^F)=\psi(\lambda_x^F)=\beta(x)\lambda^G_{\theta(x)}=\lambda^G(\beta(x)\delta^G_{\theta(x)})=(\lambda^G\circ\varphi)(\delta_x^F)$$

对所有 $x\in F$ 均成立。

由于映射 $\lambda^F\colon M(F)\to VN(F)$ 是 $so\text{-}w^*$-连续的，$\psi\circ\lambda^F$是 $so\text{-}w^*$-连续的；此外，$\varphi\colon M(F)\to M(G)$ 是 $so\text{-}w^*$-连续的，且 $\lambda^G\colon M(G)\to VN(G)$ 是 w^*-连续的，因此 $\lambda^G\circ\varphi$ 也是 $so\text{-}w^*$-连续的。但是，由 $b\in\mathbb{T}, x\in F\}$构成的 $\{b\delta_x^F$ 的凸包在球 $M(F)$ 中稠密（见引理 1.1.3]）。因此，由前一个等式可得 $\psi\circ\lambda^F=\lambda^G\circ\varphi$. □

4.2. **一般情形**。为了处理不一定保幺的压缩 *-同态，我们需要做一些准备。

注记 4.7. 设 G_0 是一个局部紧群，$K\subseteq G_0$ 是一个带有归一化 *Haar* 测度 m_K 的正规紧子群。若 $\varepsilon: K\to\mathbb{T}$ 是 K 的连续特征，则测度 εm_K 定义了 $M(G_0)$ 中的一个压缩幂等元（这可由定义直接推出）。因此，$P_0:=\lambda^{G_0}(\varepsilon m_K)$ 是 $VN(G_0)$中的一个正交投影。

引理 4.8。设 G_0 是一个局部紧群，$K\subseteq G_0$ 是一个正规紧子群，其归一化 *Haar* 测度为 m_K。若 $\pi: G_0\to G_0/K$ 是商映射，且 $Q_0\in VN(G_0)$ 表示投影 $Q_0=\lambda^{G_0}(m_K)\in VN(G_0)$，则存在一个 *-同构 $j_0: VN(G_0)Q_0\to VN(G_0/K)$，使得 $j_0(\lambda_g^{G_0}Q_0)=\lambda_\pi^{G_0/K}(g)$。

证明。根据 [9, 命题 3.25]，映射 $u\mapsto u\circ\pi: A(G_0/K)\to A(G_0)$ 的对偶是一个 w*连续的满射 *-同态

$$\psi : VN(G_0)\to VN(G_0/K)$$

满足 $\psi(\lambda_g^{G_0})=\lambda_\pi^{G_0/K}(g)$，对所有 $g\in G$ 均成立。

该映射的核是理想 $J=VN(G_0)Q^\perp$，其中 Q 是到希尔伯特空间上的投影

$$L^2_K(G_0)=\{f\in L^2(G_0): f(kx)=f(x),\ \forall x\in G_0,\ k\in K\}.$$

由此可知，ψ诱导出一个从 $VN(G_0)/J=VN(G_0)Q$到 $VN(G_0/K)$ 的同构，满足 $\lambda_g^GQ\mapsto\lambda_\pi^{G_0/K}(g)$ 对所有 $g\in G$ 都成立。这个映射就是所声称的同构 j_0，因为投影 Q 实际上是 Q_0。

事实上，由 [9, 3.2], ，空间 $L^2_K(G_0)$ 与所有满足 $f=f*m_K=m_K*f$ 的 $f\in L^2(G_0)$ 的空间重合，因为 K 是正规群，等价地，$f=\lambda(m_K)f$ 或 $f=Q_0(f)$。因此 $Q=Q_0$，证毕。□

引理 4.9。 设 G_0 是一个局部紧群， K 是 G_0 的一个紧正规子群， ε 是 K 的一个连续特征， m_K 是 K 的归一化 *Haar* 测度，并且

$$A_\varepsilon = \{u \in A(G_0) : u(gk) = u(g)\varepsilon^{-1}(k) : \forall g \in G_0, k \in K\}.$$

于是存在一个等距满射 j_ε： VN（G_0）λ（εm_K） $\to A_\varepsilon^*$，使得

$$\langle j_\varepsilon(\lambda_g\lambda(\varepsilon m_K)), u\rangle = u(g) \quad for\ all\ \ u \in A_\varepsilon,\ g \in G_0.$$

证明。 设 $P_0 = \lambda(\varepsilon m_K)$。给定 $u \in A(G_0)$，映射

$$\psi(u) : VN(G_0) \to \mathbb{C} : T \mapsto \langle TP_0, u\rangle$$

是 w*连续的，因而定义了 $A(G_0)$ 的一个元素。

因此，映射 ψ： $A(G_0) \to A(G_0)$ 是映射 $T \mapsto TP_0$ 的预对偶。我们声称，对于所有 $g \in G_0$,

$$\psi(u)(g) = \int_K u(gk)\varepsilon(k)dm_K(k)\,.$$

事实上，对于所有 $g \in G_0$,

$$\begin{aligned}\langle \lambda_g P_0, u\rangle &= \langle \lambda(\delta_g)\lambda(\varepsilon m_K), u\rangle = \langle \lambda(\delta_g * \varepsilon m_K), u\rangle \\ &= \int_{G_0} u(t)d(\delta_g * \varepsilon m_K)(t) = \iint u(ts)d\delta_g(t)d(\varepsilon m_K)(s) \\ &= \int_K u(gk)\varepsilon(k)dm_K(k)\,.\end{aligned}$$

但如果 $u \in A_\varepsilon$ ，那么这个积分等于 $u(g)$，因此 $\langle \lambda_g P_0, u\rangle = \langle \lambda_g, u\rangle$ ，于是

$$\langle TP_0, u\rangle = \langle T, u\rangle$$

对所有 $T \in VN(G_0)$ 和 $u \in A_\varepsilon$。

由此可知，映射 j_ε 将 $TP_0 \in A(G_0)^*$ 映到其在A_ε 上的限制，是满射。

我们证明它是单射。若对所有 $u \in A_\epsilon$ 都有 $\langle TP_0, u\rangle = 0$，那么对所有 $v \in A(G_0)$

$$\langle TP_0, v\rangle = \langle (TP_0)P_0, v\rangle = \langle TP_0, \psi(v)\rangle = 0$$

（因为 P_0 是幂等的），因此 $TP_0 = 0$。 □

在本小节中，我们假设 φ： $M(F) \to M(G)$ 是一个 so-w*-连续压缩 *-同态。以下内容可见于 [10, 第 4 节。2]以及 [10, 定理 3.1。8]: 设

$$\Gamma = \{\varphi(\delta_x^F) : x \in F\}.$$

这是 $M(G)$ 中在卷积运算下的一个子群。其单位元为 εm_K ，其中 m_K 是紧子群 K 上的归一化 Haar 测度，将其视为 $M(G)$ 的一个元素；而 ε 是 K. 的一个连续特征。此外，

存在一个子群 G_{00}，使得对于所有 $x \in F$，都存在 $(b,g) \in \mathbb{T}\times G_{00}$，使得

$$\varphi(\delta_x^F) = b\delta_g * \varepsilon m_K.$$

群 K 是 G_{00} 的正规子群，因此也是其闭包 $G_0 := G_{00}.$ 的正规子群。群 $\overline{G_0}$ 是 G 的局部紧子群。

以下引理的证明可由 [20,引理 5。2]或 [10, 命题 3.1。6]。

引理 4.10。 *(i)* 对每个 $g \in G_0$，我们有 $\varepsilon m_K * \delta_g = \delta_g * \varepsilon m_K.$

(ii) 如果 $x \in K$ 那么

$$\varepsilon(x)\delta_x * \varepsilon m_K = \varepsilon m_K.$$

在下文中，我们将使用记号

$$G'_{00} = \{(b,g) \in \mathbb{T}\times G_{00} : b\delta_g * \varepsilon m_K \in \Gamma\}$$
$$G' = \mathbb{T}\times G, \quad G'_0 = \overline{G'_{00}},$$
$$K' = \{(\varepsilon(g), g) : g \in K\}.$$

（另见 [10, 引理 3.1.11]），并将 $m_{K'}$ 记为紧群 K', 的归一化 Haar 测度，视为 $M(G'_0)$ 中的一个元素。Greenleaf[10, 定理 3.1.10] 证明了 K' 是 G'_{00} 的正规子群，并且若$\pi' : G'_0 \to G'_0/K'$ 是商映射，则存在一个连续同态

$$\theta' : F \to G'_0/K'$$

满足

$$\theta'(x) = \pi'(b,g) \iff \varphi(\delta_x^F) = b\delta_g^G * \varepsilon m_K. \tag{4.1}$$

由于投影 $(b,g) \mapsto g$ 将 K' 映射到 K，它诱导出一个连续同态

$$\tilde{\nu} : G'_0/K' \to G_0/K : \pi'(b,g) \mapsto \pi(g)$$

其中 $\pi : G_0 \to G_0/K$ 是商映射。

映射 $\tilde{\nu}$ 是真映射：事实上，若 $L \subseteq G_0/K$ 是一个紧集，则

$$\tilde{\nu}^{-1}(L) \subseteq \{\pi'(b,g) : \pi(g) \in L\} \subseteq \mathbb{T}\times\pi^{-1}(L).$$

由于 π 是真映射，且 $\tilde{\nu}^{-1}(L)$ 是 $\mathbb{T}\times\pi^{-1}(L)$ 的闭子集，我们得出 $\tilde{\nu}^{-1}(L)$ 是一个紧集。

定义映射

$$\theta := \tilde{\nu}\circ\theta' : F \to G_0/K$$

并注意到显然

$$\theta(x) = \pi(g) \iff \varphi(\delta_x^F) = b\delta_g^G * \varepsilon m_K \tag{4.2}$$

对于某个 $b \in \mathbb{T}$。

注意到 $\theta = \tilde{\nu}\circ\theta'$ 是连续的，因为根据 [10, 命题 4.2。1]，映射 θ' 是连续的。

引理 *4.11. </style}*映射 θ 是真映射，当且仅当 θ' 是真映射。

证明. </style}若 θ' 是真映射，则 θ 也是真映射，因为 $\theta = \tilde{\nu} \circ \theta'$ 是真映射的复合映射。

假设 θ 是真。令 $L \subseteq G_0'/K'$ 为一个紧集。则$\theta'^{-1}(L) \subseteq \theta'^{-1}(\tilde{\nu}^{-1}(\tilde{\nu}(L)) = \theta^{-1}(\tilde{\nu}(L)))$。由于 θ 是真且 $\tilde{\nu}$ 连续，$\theta^{-1}(\tilde{\nu}(L))$是紧集，因此其闭子集 $\theta'^{-1}(L)$也是紧集。□

我们将使用以下内容

记号 $P_0 = \lambda^{G_0}(\varepsilon m_K) \in VN(G_0)$，以及 $Q_0' = \lambda^{G_0'}(m_{K'}) \in VN(G_0')$。注意，这些都是中心投影（注4.7 和引理 4.10(i)）。

引理 4.12. 存在一个弱星连续 *-同态

$$j' : VN(G_0')Q_0' \to VN(G_0)P_0 \tag{4.3}$$
$$such\ that \quad \lambda^{G_0'}_{(b,g)} Q_0' \mapsto b\lambda^{G_0}_g P_0\,,\ (b,g) \in G_0'\,.$$

证明。 我们将 G_0 的元素记作 $t = (\beta(t)\ g(t))$。对于 $u \in A(G_0)$，定义

$$\sigma(u)(t) = \langle \lambda(\beta(t)\delta_{g(t)} * \varepsilon m_K), u\rangle = \beta(t)\langle \lambda^{G_0}_{g(t)} P_0, u\rangle. \tag{4.4}$$

在引理 4.9 中，我们已看到，对所有 $u \in A(G_0)$，映射

$$G_0 \to \mathbb{C} : g \mapsto \int_K u(gk)\epsilon(k)dk = \langle \lambda^{G_0}_g P_0, u\rangle$$

属于 $A(G_0)$。因此，根据 [9, 命题 3.25(i)], , 映射 $(b,g) \mapsto \int_K u(gk)\varepsilon(k)dk$属于 $A(G_0')$。函数 β 属于傅里叶-斯蒂尔切斯代数 $B(G_0')$，因为 $t \to \beta(t)$ 是一个表示；这表明 $\sigma(u)$ 属于傅里叶代数 $A(G_0')$。

将关系式 (4.4) 改写为

$$\langle \lambda_{(b,g)}, \sigma(u)\rangle = \langle b\lambda^{G_0}_g P_0, u\rangle$$

我们看到映射的对偶

$$\sigma : A(G_0) \to A(G_0') : u \to \sigma(u)$$

是一个满足以下条件的连续映射

$$\sigma^* : VN(G_0') \to VN(G_0) : \lambda^{G_0'}_{(b,g)} \mapsto b\lambda^{G_0}_g P_0.$$

我们断言

$$P_0 = \lambda^{G_0}(\varepsilon m_K) = \sigma^*(\lambda^{G_0'}(m_{K'})) = \sigma^*(Q_0').$$

事实上，注意到 $m_{K'} = m_K \circ \iota^{-1}$ 其中 $\iota : K \to K'$ 是群同态 $g \mapsto (\varepsilon(g)\ g)$。设 m_K 是如下形式的 w*-极限

$$m_K = \lim_j \sum_{i=1}^{n_j} a_i^j \delta^K_{g_i^j}.$$

Then

$$\varepsilon m_K = \lim_j \sum_{i=1}^{n_j} a_i^j \varepsilon(g_i^j)\delta_{g_i^j}^K \quad \text{and} \quad m_{K'} = \lim_j \sum_{i=1}^{n_j} a_i^j \delta_{(\varepsilon(g_i^j),g_i^j)}^{K'}.$$

Thus

$$\begin{aligned}
\lambda^{G_0}(\varepsilon m_K) &= \lim_j \left(\sum_{i=1}^{n_j} a_i^j \varepsilon(g_i^j)\lambda_{g_i^j}^{G_0} \right) \\
&= \lim_j \left(\sum_{i=1}^{n_j} a_i^j \varepsilon(g_i^j)\lambda_{g_i^j}^{G_0} \right) \lambda^{G_0}(\varepsilon m_K) \quad \text{since } \lambda^{G_0}(\varepsilon m_K) \text{ is idempotent} \\
&= \lim_j \sum_{i=1}^{n_j} a_i^j \sigma^*(\lambda_{(\varepsilon(g_i^j),g_i^j)}^{G_0'}) \\
&= \lim_j \sigma^* \left(\sum_{i=1}^{n_j} a_i^j \lambda_{(\varepsilon(g_i^j),g_i^j)}^{G_0'} \right) = \sigma^*(\lambda^{G_0'}(m_{K'}))
\end{aligned}$$

这就证明了该断言。

由此可知，线性映射

$$j' : VN(G_0')Q_0' \to VN(G_0)P_0 : \ \lambda_{(b,g)}^{G_0'} Q_0' \mapsto \sigma^*(\lambda_{(b,g)}^{G_0'}), \ (b,g) \in G_0' .$$

是 w*连续的。它是一个 *-同态这一点由 (4.3) 得出，因为 Q_0'和 P_0 都是中心投影。□

引理 4.13。 设 $VN_{G_0}(G) = \text{span}\{\lambda_g^G : g \in G_0\}^{w*} \subseteq \mathcal{B}(L^2(G))$。映射

$$\gamma : VN(G_0) \to VN_{G_0}(G) : \lambda_g^{G_0} \mapsto \lambda_g^G$$

扩张为一个 w*连续*同构，将中心投影$P_0 = \lambda^{G_0}(\varepsilon m_K)$ 映射到中心投影 $P = \lambda^G(\varepsilon m_K) \in VN_{G_0}(G)$ 。

证明。第一条结论是 Herz限制定理 [16,命题 2.6。6]的推论。

事实是， P 和 P_0 是中心投影，这由引理4.10 (i) 可知。

$P_0 = \lambda^{G_0}(\varepsilon m_K)$ 在此映射下的像显然是 $P = \lambda^G(\varepsilon m_k)$。

事实上，由于 $K \subseteq G_0$，测度 εm_K 支撑于 G_0，因此 $P = \int \lambda_g^G d(\varepsilon m_K)(g)$ 属于 $VN_{G_0}(G)$，故

$$\gamma(P_0) = \int \gamma(\lambda_g^{G_0}) d(\varepsilon m_K)(g) = \int \lambda_g^G d(\varepsilon m_K)(g) = P .$$

□

定理 4.14。设 F 和 G 是局部紧群，且

$$\varphi : M(F) \to M(G)$$

是一个压缩的 so-w^*连续同态。以下各项等价：

(i) 映射 φ 具有延拓性质。*(ii)* 同态 $\theta : F \to G_0/K$ （见（4.2））是真映射。*(iii)* 映射 φ 是 *w**连续的。

证明。$(i) \Rightarrow (iii)$
若 φ 具有延拓性质，则存在一个 w^*连续同态 m

$$\psi : VN(F) \to VN(G)$$

满足

$$\lambda^G \circ \varphi = \psi \circ \lambda^F.$$

为了证明 φ 是 w*连续的，只需（根据 Krein-Smulian 定理）证明：若 $(\mu_i) \subseteq \text{ball}(M(F))$ 是一个网，且 $\text{w*-lim}_i \mu_i = 0$，则 $\text{w*- lim}_i \varphi(\mu_i) = 0$.

由于 $\lambda^G \circ \varphi : M(F) \to VN(G)$ 是弱星-弱星连续的，因此我们有 $\lim_i \lambda^G \circ \varphi(\mu_i) = 0$ 在 $VN(G)$ 的弱星拓扑中收敛，即 $\langle \lambda^G \circ \varphi(\mu_i)\ f \rangle \to 0$ 对所有 $f \in A(G)$ 均成立。由引理 4.1，这意味着

$$\int_G f d\varphi(\mu_i) \to 0,\ \forall f \in A(G).$$

由于网 $(\varphi(\mu_i))$ 有界，且 $A(G)$ 在 $C_0(G)$ 中一致稠密，因此

$$\int_G f d\varphi(\mu_i) \to 0,\ \forall f \in C_0(G).$$

因此 $\text{w*-lim}_i \varphi(\mu_i) = 0$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$
假设 φ 是 w^* 连续的。考虑 *-同态

$$\psi_0 := \lambda^G \circ \varphi : M(F) \to VN(G).$$

根据命题 4.2，此映射是 w*连续的。根据（4.1），对所有 $x \in F$ 我们有

$$\psi_0(\delta_x^F) = \lambda^G(b\delta_g * \varepsilon m_k) = b\lambda_g^G P \quad \text{when} \quad \pi'(b, g) = \theta'(x)$$

（回忆一下 $P = \lambda^G(\varepsilon m_K)$）。
注意，ψ_0 的取值形式为 $b\lambda_g^G P$，其中 $g \in G_0$，因此

$$\psi_0(M(F)) \subseteq VN_{G_0}(G)P \subseteq VN_{G_0}(G).$$

根据引理4.13，存在一个弱星连续同构 $\gamma^{-1} : VN_{G_0}(G) \to VN(G_0)$，使得

$$\gamma^{-1}(\lambda_g^G P) = \lambda_g^{G_0} P_0$$

（其中 $P_0 = \lambda^{G_0}(\varepsilon m_K)$）。因此，复合映射

$$\zeta := \gamma^{-1} \circ \psi_0 : M(F) \to VN(G_0)P_0$$

是一个定义良好的 w*连续 *-同态，满足

$$\zeta(\delta_x^F) = b\lambda_g^{G_0} P_0 \ \text{ when } \ \pi'(b, g) = \theta'(x).$$

回顾（引理 4.9）， $VN(G_0)P_0$ 的预对偶是 A_ε。 ζ的预对偶是映射 ζ_*: $A_\varepsilon \to C_0(F)$，它对所有 $u \in A_\varepsilon$和 $x \in F$都满足，

$$\zeta_*(u)(x) = \langle \zeta(\delta_x^F), u\rangle = \langle b\lambda_g^{G_0} P_0, u\rangle \quad \text{when } \pi'(a,g) = \theta'(x).$$

但根据引理4.9，我们有

$$\langle \lambda_g^{G_0} P_0, u\rangle = u(g)$$

对 $g \in G_0$成立；因此对所有 $u \in A_\varepsilon$ 和 $x \in F$,

$$\zeta_*(u)(x) = bu(g) \text{ when } \pi'(b,g) = \theta'(x). \tag{4.5}$$

现在反设 θ 不是真映射。那么存在一个紧集 $\tilde{L} \subset G_0/K$，使得 $\theta^{-1}(\tilde{L})$不是紧集。令 $L = \pi^{-1}(\tilde{L})$。注意， L 在 G_0.中是紧的

取非零的 $u \in A_\varepsilon$ 和 $g_0 \in G_0$ ，使得 $|u(g_0)| = 2\delta > 0$。对每个 $h \in G_0$ ，函数 $u_h(s) := \lambda(hg_0^{-1})u(s)$属于 A_ε ，且 $|u_h(h)| = |\lambda(hg_0^{-1})u(h)| = |u(g_0)| = 2\delta$。因此，存在包含$h$ 的开集 V_h ，使得对每个 $k \in V_h$都有 $|u_h(k)| \geq \delta > 0$ 。由于 $h \in L\}$ ： L是紧集 L的开覆盖，取有限子覆盖可得有限个函数 u_1、……、 $u_n \in A_\varepsilon$，使得如果

$$L_i = \{g \in L : |u_i(g)| \geq \delta\}$$

那么 $L = \cup_{i=1}^n L_i$.

若 $x \in \theta^{-1}(\tilde{L})$，则 $\theta(x) \in \tilde{L}$ ，因此 $\pi^{-1}(\{\theta(x)\}) \subseteq L$。所以存在 $g \in L_i$ 使得 $\pi(g) = \theta(x)$，从而对某个 $b \in \mathbb{T}$，有 $\pi'(b,g) = \theta'(x)$。因此，由（4.5），

$$|\zeta_*(u_i)(x)| \geq \delta.$$

因此，若令

$$M_i = \{x \in \theta^{-1}(\tilde{L}) : |\zeta_*(u_i)(x)| \geq \delta\}, \quad 1 \leq i \leq n$$

则有

$$\theta^{-1}(\tilde{L}) = \bigcup_{i=1}^n M_i\,.$$

由于 $\theta^{-1}(\tilde{L})$ 并非紧集，所以某个集合 M_i 并非紧集。但对于所有 $x \in M_i$， $|\zeta_*(u_i)(x)| \geq \delta$，这与 $\zeta_*(u_i) \in C_0(F)$ 的事实矛盾。

$(ii) \Rightarrow (i)$

假设 θ 是一个真同态。根据引理 4.11， θ' 也是真。根据命题 4.3，映射 $u \mapsto u \circ \theta'$ 将 $A(G_0'/K')$ 映到 $A(F)$，因此其对偶是一个 w^*-连续同态 ψ_1: $VN(F) \to VN(G_0'/K')$，将 λ_x^F 映到 $\lambda_{\theta' x}^{G_0'/K'}$ ( ) ·。回顾一下（引理 4.8）， $VN(G_0'/K')$ 与 $VN(G_0')\lambda^{G_0'}(m_{K'})$ 同构。因此我们可以假设

$$\psi_1 : VN(F) \to VN(G_0')\lambda^{G_0'}(m_{K'})$$

映到 λ_x^F 到 $\lambda^{G_0'}{}_{(b,\ g)}\lambda^{G_0'}(m_{K'})$ 当 $\pi'(b,\ g)\ =\theta'(x)$。我们还要回顾一下该 w^*连续同态（4.3）

$$j' : VN(G_0')\lambda^{G_0'}(m_{K'}) \to VN(G_0)\lambda^{G_0}(\varepsilon m_K) = VN(G_0)P_0$$
$$\lambda^{G_0'}_{(b,g)}\lambda^{G_0'}(m_{K'}) \mapsto b\lambda_g^{G_0}P_0\,.$$

与 w*连续*同构 γ 复合： $VN(G_0) \to VN_{G_0}(G)$:$\lambda_g^{G_0} \mapsto \lambda_g^G$(它将 P_0 映射到 P)，我们得到一个 *-同态

$$\gamma \circ j' : VN(G_0')\lambda^{G_0'}(m_{K'}) \to VN(G)P$$
$$\lambda^{G_0'}_{(b,g)}\lambda^{G_0'}(m_{K'})) \mapsto b\lambda_g^G P\,.$$

最后，与 ψ_1 复合，我们得到一个 w*连续 *-同态

$$\psi := \gamma \circ j' \circ \psi_1 : VN(F) \to VN(G)$$

当 $\varphi(\delta_x^F) = b\delta_g^{G_0} * \varepsilon m_K$ 时，将 λ_x^F映射到 $b\lambda_g^G P$。

根据 ψ 的构造，我们有

$$(\lambda^G \circ \varphi)(\delta_x^F) = b\lambda_g^G\lambda^G(\varepsilon m_K) = \psi(\lambda_x^F) = (\psi \circ \lambda^F)(\delta_x^F)$$

对所有 $x \in F$成立。现在，采用与定理 4.6证明结论中相同的稠密性论证，可得 ($\lambda^G \circ \varphi)(\mu) = (\psi \circ \lambda^F)(\mu)$ 对所有 $\mu \in M(F)$ 均成立，这意味着 φ 具有延拓性质。□

注 4.15。本节的重点是延拓性质与映射的真性之间的等价性 θ。注意，等价性$(ii) \iff (iii)$ 也在 [21, 命题 34]中得到了证明。我们采用了不同的方法，因为我们依赖算子代数方法，并利用傅里叶代数与群的冯·诺依曼代数之间的对偶性；这种方法凸显了延拓性质的作用。

References

[1] M. Anoussis, G.K. Eleftherakis, A. Katavolos,《局部紧群的合成性质：保持与传递》, *Monatshefte fur Math.*, 即将出版。doi: 10 1007 00605 022 01736 8 . /s - - - ,

[2] D. P. Blecher and C. Le Merdy *Operator Algebras and TheirModules—An Operator Space Approach*, 牛津大学出版社, 2004 doi:10.1093/acprof:oso/9780198526599.001.0001[3] Bourbaki,

N. *Éléments de mathématique. Fascicule XXIX. Livre VI: Intégration. Chapitre 7: Mesure de Haar. Chapitre 8: Convolution et représentations* .《科学与工业纪事》, 第1306号。Hermann，巴黎，1963年。[4] Cohen,

P. J. *Amer. J.* 关于 Littlewood 猜想与幂等测度。( ), – . doi: . /[5] Cohen P. J. 2372731 , 关于群代数同态。

Amer. J. Math. 82 1960 191 212 10 2307 *Amer. J. Math. 82* (1960), 213 226 10 2307 2372732 – . doi: . / , 重新审视傅里叶代数的完全有界同态。 [6] Daws M.

Group Theory 25 2022 3, 579 600 10 1515 2021 0040 *J.* ( ), no. – . doi: . /jgth- -[7] Dunkl C. F. and Ramirez D. E. , , 群上的同态及测度代数中某些诱导映射。 *Trans. Amer. Math. Soc. 160* (1971), 475–485. doi:10.1090/S0002-9947-1971-0283129-7

[8] 关于群同态的合成性质与张递性质。 *Bulletin of the London Mathematical Society 53*, 1 (2021), 300–314。doi: 10 1112 12424 。/blms., 局部紧群的傅里叶代数。
[9] Eymard P. ` *Bull. Soc. Math.* ( ), – 。doi: 。/ *France 92* 1964 181 236 10 24033 1607 bsmf.[10] Greenleaf F.P. 群代数的范数递减同态。 *Pacific J. of*, ( ), - 。 *Mathematics 15* 4 1965 1187 1218 projecteuclid.org/euclid.pjm/ 1102995276
[11] Host B. ´ ` [, B(G) 中的幂等元定理。B(G) 中的幂等元定理] *Bull. Soc. Math. France 114* (1986), no. 2, 215–223。[12] Ilie, M. 关于傅里叶代数同态。 *J. Funct. Anal. 213*, 1 (2004), 88–110。doi: 10 1016 2004 04 013 。/j.jfa. . ., , , 傅里叶代数的完全有界同态。 *J. Funct. Anal. 225*,
[13] Ilie M. and Spronk N. 2 2005 480 499 10 1016 2004 11 011 ( ), – 。doi: 。/
[14] Ilie M. and Stokke R. * j.jfa. . ., , , 傅里叶–斯蒂尔切斯代数的弱*-连续同态。 *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 145*, 1 (2008), 107–120。doi: 10 1017 0305004108001199 。/S ,
[15] Kaniuth E. *A course in commutative Banach algebras*, 第 246 *Graduate Texts* 卷，选自 。 *in Mathematics* 2009 10 1007 978 0 387 72476 Springer, New York, 。doi: 。/ - - - - 8
[16] Kaniuth E. and Lau , , , A. T.-M. *Fourier and Fourier-Stieltjes algebras on locally* , 第 卷，选自 。 *compact groups* 231 *Mathematical Surveys and Monographs* 美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州， 2018 10 1090 231 。doi: 。/surv/，傅里叶代数与傅
[17] Pham H. L. 里叶–斯蒂尔切斯代数的可容性质：综述。载于 *Banach algebras 2009*， *Banach Center Publ.* 第91 卷。波兰科学院数学研究所，华沙， 2010， 365 383 10 4064 91 0 22 第 – 页。doi: 。/bc - -，卷积代
[20] Stokke R. 数的同态。 *J. Funct. Anal. 261* (2011), no. 12, 3665 3695 10 1016 2011 08 014 – 。
[21] Stokke R. doi: 。/j.jfa. . .，测度代数与傅里叶代数的压缩同态。*Studia Math. 209* (2012), no. 2, 135–150。
10.4064/sm209-2-3M. Anoussis, Department of Mathematics, University of the Aegean, 832 00Karlovassi, Greece*Email address*: mano@aegean.grG. K. Eleftherakis, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Uni-versity of Patras, 265 00 Patra, Greece*Email address*: gelefth@math.upatras.grA. Katavolos, Department of Mathematics, National and Kapodistrian Uni-versity of Athens, 1578 84 Athens, Greece*Email address*: akatavol@math.uoa.gr