arXiv:2302.09589v1 [math.GR] 19 Feb 2023

群中的广义挠元

RAIMUNDO BASTOS、CSABA SCHNEIDER 和 DANILO SILVEIRA

Abstract. 若一个群元素的有限个共轭元的乘积等于单位元，则称其为广义挠元。我们证明，在幂零群或 FC 群中，广义挠元都是挠元。此外，我们利用有限群 G 的特征标表计算其元素的广义阶。

1. Introduction

对于群 G中的一对元素 x 和 y，我们用 $x^y = y^{-1}xy$ 表示 x 被 y 共轭所得的共轭元。 x的阶记作 $o(x)$，它是满足 $x^k = 1$的最小正整数 k；如果不存在这样的 k，则其阶为无穷。若 $o(x)$有限，则称 x 为挠元。 G 的所有挠元构成的集合记为 $\mathsf{T}(G)$。若存在 g_1、.....、$g_k \in G$，使得

$$x^{g_1}x^{g_2}\dots x^{g_k} = 1.$$

我们将 G 中所有广义挠元组成的集合记为 $\mathsf{T}_\bullet(G)$。 $x \in \mathsf{T}_\bullet(G)$ 的广义阶记作 $o_\bullet(x)$，定义为满足以下条件的最小正整数 n：存在 $x^{g_1}\cdots x^{g_n} = 1$ $g_1, \dots, g_n \in G$。因此，例如，单位元的广义阶为一。若 G 的广义指数为 k，记作 $\exp_\bullet(G) = k$，则 $\mathsf{T}_\bullet(G) = G$，且 k 是使得 G 中所有元素的广义阶都不超过 k 的最小正整数。

注意，若 G 的一个元素 x 是挠元，则 $o_\bullet(x) \leq o(x)$。因此 $\mathsf{T}(G) \subseteq \mathsf{T}_\bullet(G)$。然而，反向包含关系并不成立。例如，在无限二面体群 D_∞ 中，我们有

$$T(D_\infty) = \{g \mid g^2 = 1\} \quad \text{while} \quad \mathsf{T}_\bullet(D_\infty) = D_\infty.$$

此外，还存在所有元素都是广义挠元的有限生成无挠群（参见 [KM22，第 3. 11], Gor- chakov [Gor67] 或 Goryushkin [Gor73]题）。Osin [Osi10，推论 1.2]

2010 年数学主题分类。20E45、20F12、20F14、20C15。关键词与短语：广义挠、挠、交换子、有限群、特征标理论。

构造了一个恰好具有两个共轭类的无挠二生成群 G （特别地，$\exp_\bullet(G) = 2$）。近来，多篇论文研究了纽结群中的广义挠元（进一步的结果参见 [IMT21], [IMT23], [MT17], [NR16] 及其中的参考文献）。

在第2节中，我们重点研究广义挠是挠的群。我们将证明，这一结论适用于 FC 群（即共轭类有限的群），如下述定理所述。

THEOREM 1.1. 若 G 是 FC 群，则 $\mathrm{T}_\bullet(G) = \mathrm{T}(G)$。

在第3节中，我们改编 Arad、Stavi 和 Herzog [ASH85] 的一些已知结果，从而根据共轭类给出有限群广义指数的界。基于 [ASH85],的结果，我们还介绍了一种实用方法，用于计算特征标表已知的群的广义阶。

在第4节中，我们将证明以下定理，该定理表明，广义挠元的某些幂位于下中心列的较深位置。

THEOREM 1.2. 设 x 是群 G的一个元素。

(1) 若 $o_\bullet(x) = k$，则对于任意正整数 m，$x^{k^m} \in \gamma_m(G)$。

(2) 若 G 是幂零群，则 $\mathrm{T}_\bullet(G) = \mathrm{T}(G)$。

2. GENERALIZED TORSION ELEMENTS

注意，若 G 是阿贝尔群，则对所有$g \in G$，$o_\bullet(g) = o(g)$。然而，若 G 是非阿贝尔群，则 $o_\bullet(g)$未必等于 $o(g)$。例如，在对称群 S_n中，所有元素都与其逆元共轭，因此对所有 n，S_n 的广义指数为 2。于是，取 n-循环 $\sigma = (12\cdots n) \in S_n$，可得$o_\bullet(\sigma) = 2$，而 $o(\sigma) = n$，这表明广义阶为 2 的元素可以具有任意大的阶。

根据推论 4.4，若 G 是指数为 p 的有限 p-群，则对所有 $g \in G$，$o_\bullet(g) = o(g)$。值得一提的是，若 G 是有限群，则 $o_\bullet(x)$未必整除 G 的阶（参见例3.4）。尽管如此，以下结果仍成立。

PROPOSITION 2.1. 设 G 是一个有限群。

(1) 如果 G 有一个广义阶为 2 的元素，那么 G 的阶为偶数。

(2) G 可以嵌入一个广义指数为 2 的有限群中。

证明。(1) 假设非平凡元素 $x \in G$ 的广义阶为 2。根据定义，存在 G 中的元素 g，使得 $xx^g = 1$。如果 $g \in Z(G)$，那么 x的阶为 2，因此 G 的阶为偶数。因此，接下来我们可以假设 $g \notin Z(G)$。映射

$$\rho_g : G \to G, \quad y \mapsto y^g$$

是 G 的元素的置换。由于 $\rho_g(x) = x^{-1}$ 且 $\rho_g(x^{-1}) = x$，我们可以将 $\rho_g \in \mathrm{Sym}(G)$ 写成不相交循环的乘积，其中一个循环是 (x, x^{-1})。考虑到 $\mathrm{Sym}(G)$ 中的不相交循环总是可交换的，ρ_g 的阶为偶数。现在，映射

$$\rho : G \to \mathrm{Aut}(G), \quad y \mapsto \rho_y$$

是一个同态，其核与 $Z(G)$ 重合。由于 $g \notin Z(G)$ 且 ρ_g 的阶为偶数，G 的阶为偶数。

(2) 设 $n = |G|$。根据凯莱定理 [Rob96, 1.6.8]，可知 G 可以嵌入对称群 S_n。此外，正如该结果之前所观察到的，$\exp_\bullet(S_n) = 2$。□

回忆一下，若群元素 $x \in G$ 满足 $x^{-1} \in x^G$，则称其为实元素。特别地，非平凡元素 $x \in G$ 的广义阶为 2，当且仅当存在 $g \in G$ 使得 $xx^g = 1$；也就是说，$x^{-1} = x^g \in x^G$。因此，x 是实元素，当且仅当 $o_\bullet(x) = 2$。

接下来的结果汇总广义挠元的一些基本性质。

Proposition 2.2. 设 G 是一个群。

(1) 若 H 是 G的子群，则 $\mathrm{T}_\bullet(H) \subseteq \mathrm{T}_\bullet(G)$。(2) 若 K 是一个群，且 $\varphi\colon G \to K$ 是一个同态，则 $(\mathrm{T}_\bullet(G))^\varphi \subseteq \mathrm{T}_\bullet(K)$。(3) $\mathrm{T}_\bullet(G)$是 G 的正规（且特征）子集。(4) 若 $x \in \mathrm{T}_\bullet(G) \cap Z(G)$，则 $x \in \mathrm{T}(G)$。此外，若 G 是阿贝尔群，则 $\mathrm{T}_\bullet(G) = \mathrm{T}(G)$。

证明。(1) 若 $x \in \mathrm{T}_\bullet(H)$，则存在 $h_1, \ldots, h_k \in H$ 使得

$$1 = x^{h_1} \cdots x^{h_k}$$

因此，$x \in \mathrm{T}_\bullet(G)$。

(2) 若 $x \in \mathrm{T}_\bullet(G)$，则存在 $g_1, \ldots, g_r \in G$ 使得

$$1 = x^{g_1} \cdots x^{g_r}.$$

由于 φ 是同态，因此可得

$$1 = (x^\varphi)^{g_1^\varphi} \cdots (x^\varphi)^{g_r^\varphi}$$

因此，$x^\varphi \in \mathrm{T}_\bullet(K)$。

(3) 给定一个元素 $g \in G$，由 g 的共轭作用在 G 上诱导出一个自同构。现在，结论由前一条得出。

(4) 若 $x \in \mathbf{T}_\bullet(G) \cap Z(G)$，则存在 $g_1, \ldots, g_r \in G$，使得

$$1 = x^{g_1} \cdots x^{g_r} = \underbrace{x \cdots x}_{r \text{ times}} = x^r.$$

特别地，$x \in \mathbf{T}(G)$。 □

现在我们可以证明定理 1.1。

定理 1.1 的证明。显然，$\mathbf{T}(G) \subseteq \mathbf{T}_\bullet(G)$。任取一个元素 $x \in \mathbf{T}_\bullet(G)$。

于是，存在 $g_1, \ldots, g_k \in G$，使得 $x^{g_1} x^{g_2} \cdots x^{g_k} = 1$。特别地，根据构造，$x \in \mathbf{T}_\bullet(H)$，其中 $H = \langle x, g_1, \ldots, g_k \rangle$。由于 G 是一个 FC 群，H 也是如此。因此，$x, g_1, \ldots, g_k$ 在 H 中的所有中心化子都具有有限指数。由于有限个有限指数子群的交集本身也具有有限指数 [Rob96, 1.3.12],中心 $Z(H)$ 是 H 的生成元的中心化子的交集，因此它在 H 中具有有限指数。因此，H 是中心有限群。设 $n = |H : Z(H)|$。定义映射 $\theta^* : H \to H$ 如下:

$$\begin{array}{rccc} \theta^* & : & H & \longrightarrow & H \\ & & h & \longmapsto & h^n. \end{array}$$

根据 Schur 定理 [Rob96, 10.1.3], θ^* 是 H的自同态。由命题 2.2(3)，$x^n = x^{\theta^*} \in \mathbf{T}_\bullet(H)$。由于 $\mathrm{Im}(\theta^*) \leqslant Z(H)$，$x^n$是一个挠元（命题 2.2(4)），因此 x 也是一个挠元。□

我们将以下结果作为一个推论得到；这个结果与 Dietzmann 引理 [Rob96, 14.5.7] 有些相似：若 $X \subseteq G$ 是由挠元组成的有限正规集，则 $\langle X \rangle$ 是有限的。

Corollary 2.3. 在群 G中，由广义挠元组成的有限正规子集生成一个有限正规子群。

证明。设 $X = \{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq \mathbf{T}_\bullet(G)$ 是 G的有限正规子集，并令 $N = \langle X \rangle$。由于 X 是正规集，所有共轭类x_i^N至多含有 k个元素，因此中心 $Z(N) = \bigcap_{i=1}^k C_N(x_i)$ 的指数有限。若 $g \in N$，则 $Z(N) \leq C_N(g)$，从而 $C_N(g)$ 的指数有限；也就是说，共轭类 g^N 是有限的。因此，N 是一个 FC 群。

根据定理 1.1，$X \subseteq \mathbf{T}(G)$。因此，Dietzmann 引理表明，$N$ 是一个有限正规子群。□

3. The generalized order in a finite group

在本节中，我们将有限群中元素$g \in G$ 的广义阶 $o_\bullet(g)$ 与 G的特征标联系起来。这也为在已知不可约特征标的群中计算广义阶提供了一种实用方法。在本节中，设 G 是一个有限群，并令 C_1、C_2、……、C_m 为 G的共轭类，使得 $C_1 = \{1\}$。如果共轭类 C 满足 $C^{-1} = C$，则称其为实的；否则， C 是非实的。沿用 [ASH85], 的记号，我们用 λ 表示与 $\{1\}$ 不同的实共轭类的数量，用2μ表示非实共轭类的数量（该数量总是偶数）。因此， G 的共轭类数量 m 可写为 $m = 1 + \lambda + 2\mu$。

下述命题的两个断言已在 [ASH85]的引理 7.3 和 7.4 中证明。

Proposition 3.1. 设 G 是一个有限群，且令 $g \in G$。

(1) $o_\bullet(g)$小于或等于G 中包含 g的幂的共轭类数。(2) $o_\bullet(g) \leq 2\mu + 2$。

有限群 G 中元素 g 的广义阶可以利用 G的特征标表计算。设 Irr(G)表示 G的不可约特征标集合。对于共轭类 $C \subseteq G$ 以及 $k \geq 1$, 令$\alpha_{C,\,k}$表示满足 $g_1 \cdots g_k = 1$的 k元组 $(g_1, \ldots, g_k) \in C^k$ 的数量。也就是说，$\alpha_{C,\,k}$统计了单位元可写成 C中元素乘积的方式数。对于 $g \in C$，我们有

$$o_\bullet(g) = \min\{k \geq 1 \mid \alpha_{C,k} > 0\}.$$

以下引理见于 [ASH85，引理 10.10]；另见 [Sha09，公式 (1)]。

Theorem 3.2. 使用上一段中的记号，

$$\alpha_{C,k} = \frac{|C|^k}{|G|} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \frac{\chi(g)^k}{\chi(1)^{k-2}}. \tag{1}$$

定理 3.2 为特征标表已知的有限群中的元素计算广义阶提供了一种计算效率较高的方法。

Example 3.3. 假设 G 是 GAP [GAP22] 中 18 阶群里的第 3 个群。该群 G 有 9 个共轭类和 9 个不可约表示。假设 C 是按照 GAP 给出的编号排列的第 8 个共轭类。那么可以

利用 (1) 计算得到 $\alpha_{C,\ 1} = \alpha_{C,\ 2} = 0$，但 $\alpha_{C,\ 3} = 243$。因此，单位元 $1 \in G$ 可以表示为乘积 $g_1g_2g_3$，其中 $g_i \in C$有 243 种方式，特别地，对于所有 $g \in C$，都有 $o_\bullet(g) = 3$。

Example 3.4. 假设 G 是铃木群 Sz(8)，并假设 C 是 GAP 编号中的第 3 个共轭类。使用 GAP，我们计算得出 $\alpha_{C,\ 1} = \alpha_{C,\ 2} = 0$，但 $\alpha_{C,\ 3} = 196{,}560$。因此，$G$ 的单位元可以写成 196,560 种形式，即表示为乘积 $g_1g_2g_3$，其中 $g_i \in C$。特别地，对于所有 $g \in C$，都有 $o_\bullet(g) = 3$。有趣的是，196,560 与 24 维 Leech 格的接吻数相同，也等于该格模形式第一个非恒定项的系数；参见 [CS99，第 2] 节。

Corollary 3.5. 设 G 为一个有限群。若 H 是 G的无核子群，则 $\exp_\bullet(G) \leq 2^{|G:H|-1}$。

证明。设 R 为 H 的所有右陪集的集合。g 中的每个元素通过右乘法 $(Hx)g = H(xg)$ 在 R 上诱导一个置换。由于 H 是无核的，G 嵌入对称群 S_n 中，其中 $n = |G\colon H|$。Liebeck 和 Pyber 的一个重要结果 [LP97，定理 2] 表明，S_n 的任意子群的共轭类数至多为 2^{n-1}。现在，由命题 3.1(1)即可得到结论。□

已知许多有限非阿贝尔单群的广义指数小于或等于 3（见 [VG10，定理 3] 以及 [ASH85，第 1 章和第 2] 章）。在 [Sha09，定理 2.6]，中，Shalev 证明了：若 G 是一个有限非阿贝尔单群，并且随机选取 $x \in G$，那么 $(x^G)^3 = G$ 的概率当 $|G| \to \infty$. 时趋于 1。这些事实支持以下猜想。

Conjecture 3.6. 有限非阿贝尔单群的广义指数至多为 3。

4. Relations between generalized torsion and the terms of the lower central series

我们递归地定义群 G 中元素x_1、x_2、.....的权为 1、2、.....的交换子如下。元素 x_1、x_2、.....是权为 1 的交换子，$[x_i, x_j] = x_i^{-1}x_j^{-1}x_ix_j$，$i \neq j$ 是权为 2 的交换子；若 c_1 和 c_2 分别是权为 w_1 和 w_2 的交换子，则 $[c_1, c_2]$ 是权为 $w_1 + w_2$ 的交换子。在这里，c_1 和 c_2 分别称为左子交换子和右子交换子。交换子 $[c_1, c_2]$ 的首项定义为 c_1 的首项，而权为 1 的交换子 x 的首项当然就是

x。如果省略括号，则交换子默认为左范数形式，例如 $[x_1, x_2, x_3] = [[x_1, x_2], x_3]$。群 G 的下中心列项 $\gamma_i(G)$ 递归定义为 $\gamma_1(G) = G$ 和 $\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G)\ G]$，其中 $i \geq 1$。特别地，$\gamma_2(G) = G'$ 是交换子（或导出）子群。众所周知，$\gamma_i(G)$ 是由群 G 中所有权为 i 的交换子生成的 G 的子群。

我们引用以下众所周知的引理（见 [Rob96，引理 5.1.5 及习题 5.1.4]，以及 [Hup67，第三章第 9 节4]）。本文其余部分将使用该引理，且经常不作明确引用。

LEMMA 4.1. 对于群 G 中的元素 x、y、z 以及正整数 k，以下恒等式成立：

(1) $xy = yx[x, y]$
(2) $x^y = x[x, y]$
(3) $[xy, z] = [x, z][x, z, y][y, z]$
(4) $[x^k, y] = [x, y]^{x^{k-1}}[x, y]^{x^{k-2}} \cdots [x, y]^x[x, y]$
(5) $x^k y^k = (xy)^k c_2^{\binom{k}{2}} \ldots c_i^{\binom{k}{i}} \ldots c_{k-1}^k c_k$, *where* $c_i \in \gamma_i(\langle x, y\rangle)$ *for each non-negative integer* i.

上面的（5）称为 Hall-Petrescu 公式。

LEMMA 4.2. 设 $k \geq 2$，且 x、g_1、……、g_k 是群 G 中的元素。

（1）我们有

$$x^{g_1} x^{g_2} \cdots x^{g_k} = x^k \sigma_2$$

其中 σ_2 是权重至少为 2 的交换子的乘积，而元素 x 是 σ_2的所有因子的首项。

(2) 若 $o_\bullet(x) = k$，则 $x^k = c_1 \cdots c_r$，其中每个 $c_i = [c_{i,1}, c_{i,2}]$ 都是一个权重至少为 2 的交换子，且$c_{i,2}$的首项是 x。

(3) 若 $o_\bullet(x) = k$，且 c_m 是一个权重为 m、某个项中含有 x 的交换子，则 c_m^k 是权重至少为 $m+1$ 的交换子的乘积，并且 x 出现在 c_m^k的所有因子的某个项中。

(4) 若 $o_\bullet(x) = k$，且 σ_m 是权重至少为 m 的交换子的乘积，其所有因子的某个项中都含有 x，则 σ_m^k 是权重至少为 $m+1$ 的交换子的乘积，并且 x 出现在其所有因子的某个项中。

(5) 若 $o_\bullet(x) = k$，则 $(x^{g_1} x^{g_2} \cdots x^{g_k})^{k^m} = x^{k^{m+}} \sigma_{m+1}$，其中 σ_{m+1}是权至少为 $m+1$ 的交换子的乘积，且元素 x 出现在 σ_{m+1}的所有因子的某个项中。

证明。(1) 我们对 k. 进行归纳法。若 $k = 2$，则

$$x^{g_1} x^{g_2} = x[x, g_1]x[x, g_2] = x^2[x, g_1][x, g_1, x][x, g_2].$$

假设结论对 $k \geq 2$ 成立，则有

$$(x^{g_1}x^{g_2}\cdots x^{g_k})x^{g_{k+1}} = (x^k\sigma_2)x[x, g_{k+1}] = x^{k+1}\sigma_2[\sigma_2, x][x, g_{k+1}],$$

其中， σ_2 是权重至少为 2 的交换子的乘积，且元素 x 是 σ_2各因子中的第一项。现在，对交换子 $[\sigma_2, x]$多次应用引理 4.1(3)，即可得到结论。

(2) 如果 $o_\bullet(x) = k$，那么存在元素 g_1、.....、 $g_k \in G$，使得 $1 = x^{g_1}x^{g_2}\cdots x^{g_k}$。根据前一项，我们可以写成

$$1 = x^{g_1}x^{g_2}\cdots x^{g_k} = x^k\sigma_2,$$

其中， σ_2 是权重至少为 2 的交换子的乘积，且元素 x 是 σ_2所有因子中的第一项。因此， $x^k = \sigma_2^{-1}$。

(3) 我们对 m使用归纳法。根据第 (2) 项，基本步骤 $m = 1$ 成立。假设对于不超过m的所有正整数，结论均成立。设 c_{m+1} 是一个权为 $m + 1$ 的交换子，其中 x 出现在某一项中。写作 $c_{m+1} = [c_i, c_j]$，其中 c_i、 c_j 分别是权为 i 和 j 的交换子，并且 $i + j = m + 1.$。不失一般性，我们可以假设 x 出现在左侧子交换子 c_i中。根据引理 4.1(4)，我们得到

$$\begin{aligned}[c_i^k, c_j] &= [c_i, c_j]^{c_i^{k-1}}[c_i, c_j]^{c_i^{k-2}}\cdots[c_i, c_j]^{c_i}[c_i, c_j] \\ &= ([c_i, c_j][c_i, c_j, c_i^{k-1}])\cdots([c_i, c_j][c_i, c_j, c_i])[c_i, c_j] \\ &= [c_i, c_j]^k\sigma_{m+2}\end{aligned}$$

其中， σ_{m+2} 是权至少为 $m + 2$ 的交换子之积，且所有因子的某个条目中都含有x 。根据归纳假设， c_i^k 是权至少为 $i + 1$ 的交换子之积，并且其所有因子的某个条目中都出现 x，例如 $c_i^k = c_{i,1}\cdots c_{i,r}$。由于

$$c_{m+1}^k = [c_i, c_j]^k = [c_i^k, c_j]\sigma_{m+2}^{-1},$$

对 $[c_i^k, c_j] = [c_{i,1}\cdots c_{i,r}, c_j]$ 多次应用引理 4.1(3)即可得到该结果。

(4) 我们对 σ_m 的因子数 r 进行归纳。基本步骤 $r = 1$ 由前一项得出。假设对于不超过 $r \geq 1$ 的所有正整数，该结果均成立，并令 $\sigma_m = \tau_1\cdots\tau_r\tau_{r+1}$，其中每个 τ_i 都是权至少为 m 的交换子，且 x 位于某个条目中。由引理 4.1(5)，我们可以推得

$$\sigma_m^k = (\tau_1\cdots\tau_r\tau_{r+1})^k = (\tau_1\cdots\tau_r)^k\tau_{r+1}^k\sigma_{m+1}$$

其中， σ_{m+1} 是由权至少为 $m + 1$ 的交换子构成的乘积，且x出现在每个因子的某个条目中。因此，对（$\tau_1\cdots\tau_r$）^{k}和 τ_{r+1}^k应用归纳假设，即可得出结论。

（5）我们通过对 m使用归纳法来证明第（5）项。首先，我们证明基本步骤 $m=1$。根据第（1）项，我们可以写成 $x^{g_1}x^{g_2}\cdots x^{g_k}=x^k\sigma_2$。由引理 4.1 的第（1）和第（5）部分，我们有

$$(x^{g_1}x^{g_2}\cdots x^{g_k})^k=(x^k\sigma_2)^k=x^{k^2}\tilde{\sigma_2}$$

其中， $\tilde{\sigma_2}$ 是权重至少为 2 的交换子的乘积，且元素 x 出现在所有因子的某个项中。

现在，假设结论对所有不超过 $m\geq 1$的正整数都成立。由归纳假设，我们得到

$$(x^{g_1}x^{g_2}\cdots x^{g_k})^{k^{m+1}}=((x^{g_1}x^{g_2}\cdots x^{g_k})^{k^m})^k=(x^{k^{m+1}}\sigma_{m+1})^k$$

其中， σ_{m+1} 是权重至少为 $m+1$ 的交换子的乘积，且元素 x 出现在所有因子的某个项中。由引理 4.1(5)，我们可以推得 $(x^{k^{m+1}}\sigma_{m+1})^k=x^{k^{m+2}}\sigma_{m+1}^k\sigma_{m+2}$，其中 σ_{m+2} 是权重至少为 $m+2$ 的交换子的乘积，且元素x出现在所有因子的某个项中。因此，对 σ_{m+1}^k应用第 (4) 项即可得到结论。□

现在我们可以证明定理 1.2 了。

证明。(1) 设 x 是具有广义阶 $o_\bullet(x)=k$的群 G 中的一个元素。因此，存在 G 中的元素 $g_1,\ldots,g_k$，使得$x^{g_1}x^{g_2}\cdots x^{g_k}=1$。由引理 4.2 (5)，对每个正整数 m，有

$$1=(x^{g_1}x^{g_2}\cdots x^{g_k})^{k^{m-1}}=x^{k^m}\sigma_m$$

其中 σ_m 是权至少为 m的交换子的乘积。因此，$x^{k^m}\in\gamma_m(G)$。

(2) 设 G的幂零类为 c。我们需要证明 $\mathbf{T}_\bullet(G)\subseteq\mathbf{T}(G)$。任取 $x\in\mathbf{T}_\bullet(G)$。由前一项

$$x^{k^{c+1}}\in\gamma_{c+1}(G)=\{1\}.$$

由于 $x\in\mathbf{T}_\bullet(G)$ 是任意选取的，我们得出 $\mathbf{T}_\bullet(G)\subseteq\mathbf{T}(G)$。□

若群 G 在 G 上存在一个全序，使得 $a\leq b$意味着对于所有 $a,b,x,y\in G$，都有 $xay\leq xby$，则称该群是可序的。已知无挠幂零群是可序的；参见 [Blu72]。

Remark 4.3. 如果 G 是可序群，那么 $\mathbf{T}_\bullet(G)=\{1\}$。众所周知，反过来通常并不成立（见 [Blu72]）。由前面的结果可推得，如果 G 是幂零群且满足 $\mathbf{T}_\bullet(G)=\{1\}$，那么 G 是可序的。

Corollary 4.4. 若 x 是幂零 p-群 G中的一个元素，则 p整除 $o_\bullet(x)$。

证明。设 c 为 G的幂零类。由于 G 是一个 p-群，我们得到 x 是一个广义挠元。令 $o_\bullet(x) = k$，由定理 1.2(1)可知 $x^{k^{c+1}} = 1$。因此，p 整除 k^{c+1}，所以，p 整除 k。□

REMARK 4.5. 前述结果无法改进。一般而言，如果G 是一个 p-群且满足 $g \in G$，那么 $o_\bullet(g)$不一定是 p次幂。令 G 为 GAP 小群库中阶为 81 的第 8 个群。则G 包含广义挠阶为 6 的元素。

ACKNOWLEDGEMENTS

本研究得到 DPI/UnB 和 FAPDF（巴西）的部分资助。第二作者感谢 CNPq 项目“科研生产力”（项目编号：308212/2019-3）和 Universal（项目编号：421624/2018-3 和 402934/2021-0）的经费支持，以及 Fapemig 项目 Universal（项目编号：APQ-00971-22）的资助。第三作者得到 FAPEMIG RED-00133-21 的部分资助。

REFERENCES

[ASH85] Z. Arad、J. Stavi 和 M. Herzog。群中共轭类的幂与乘积。载于《群中共轭类的乘积》，《数学讲义》第 1112 卷，第 6–51 页。Springer，柏林，1985 年。[Blu72] V. V. Bludov。一个带有严格孤立单位元的不可序群例子。《代数与逻辑》，11：619–632，736，1972 年。[CS99] J. H. Conway 和 N. J. A. Sloane。《球堆积、格与群》，《数学科学基础》第 290 卷。施普林格出版社，纽约，第三版，1999 年。[GAP22] GAP 群。《GAP——群、算法与程序设计》，4.12.2 版，gap-system.org，2022 年。[Gor67] Ju. M. Gorˇcakov。一个 G-周期无挠群的例子。《代数与逻辑》论文集，6(3)：5–7，1967 年。[Gor73] A. P. Gorjuˇskin。一个有限生成的 G-周期无挠群的例子。《西伯利亚数学杂志》，14：204–207，239，1973 年。[Hup67] B. Huppert。《有限群 I》，《数学科学基础》第 134 卷，施普林格出版社，柏林—纽约，1967 年。[IMT21] Tetsuya Ito、Kimihiko Motegi 和 Masakazu Teragaito。广义挠与 Dehn 填充。《拓扑学应用》，301：论文编号 107515，14 页，2021 年。[IMT23] Tetsuya Ito、Kimihiko Motegi 和 Masakazu Teragaito。任意大秩双曲 3-流形群的广义挠。《伦敦数学学会通报》（待刊），arxiv.org/abs/2112.00418，2021 年。[KM22] E. I. Khukhro 和 V. D. Mazurov。群论中的未解决问题。《Kourovka 笔记本》，arxiv.org/1401.0300，第 26 次修订，2022 年。[LP97] Martin W. Liebeck 和 L´aszl´o Pyber。有限群共轭类数目的上界。《代数杂志》，198(2)：538–562，1997 年。

[MT17] Kimihiko Motegi 和 Masakazu Teragaito。广义挠元与三维流形群的双序性。《加拿大数学通报》，60(4)：830–844，2017 年。[NR16] Geoff Naylor 和 Dale Rolfsen。纽结群中的广义挠。《加拿大数学通报》，59(1)：182–189，2016 年。[Osi10] Denis Osin。相对双曲群上的小消去与嵌入定理。《数学年刊》（第 2 辑），172(1)：1–39，2010 年。[Rob96] Derek J. S. Robinson。《群论教程》，《数学研究生教材》第 80 卷。施普林格出版社，纽约，第二版，1996 年。[Sha09] Aner Shalev。词映射、共轭类与非交换华林型定理。《数学年刊》（第 2 辑），170(3)：1383–1416，2009 年。[VG10] E. P. Vdovin 和 A. A. Gal't。有限单群的强实性。《西伯利亚数学杂志》，51(4)：610–615，2010 年。

(R. Bastos) Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Campus Universitário Darcy Ribeiro, 70910-900 Brasilia, DF, Brazil, bastos@mat.unb.br

（C. Schneider） Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, 31270-901 Belo Horizonte, MG, Brazil, csaba@mat.ufmg.br, schcs.github.io/WP/

(D. Silveira) Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas, Universidade Federal de Ouro Preto, 35931-008 Ouro Preto, MG, Brazil, danilo.sancao@ufop.edu.br