arXiv:2302.09613v1 [math.CV] 19 Feb 2023

H^p-范数估计： α-调和函数的偏导数与施瓦茨引理

´ADEL KHALFALLAH 和 MIODRAG MATELJEVIC

Abstract. 设 $\alpha > -1$ 且 $1 \le p \le \infty$。令 $f = P_\alpha[F]$ 为定义在 $\mathbb{D}$ 上的 α-调和映射，其边界 F 绝对连续且 $F \in L^p(0, 2\pi)$，其中$\dot{F}(e^{i\theta}) := \frac{dF}{(e^{i\theta})\, d\theta}$。本文研究 f_z 和 $f_{\overline{z}}$ 在空间 $\mathcal{H}^p_{\mathcal{G}}(\mathbb{D})$（广义 Hardy 空间）中的归属。我们证明，若 $\alpha > 0$，则 f_z 和 $f_{\overline{z}}$ 均属于 $\mathcal{H}^p_{\mathcal{G}}(\mathbb{D})$。若 $\alpha < 0$，则 f_z 和 $f_{\overline{z}} \in \mathcal{H}^p_{\mathcal{G}}(\mathbb{D})$ 当且仅当 f 是解析函数。最后，我们研究 α-调和函数的 Schwartz 引理。

1. Preliminaries

我们用 $\mathbb{D}$ 表示单位圆盘，用 $\mathbb{U} := \partial\mathbb{D}$ 表示单位圆。对于 $z = x + iy \in \mathbb{C}$，两个复微分算子定义为

$$u_z = \partial_z(u) = \frac{1}{2}(u_x - iu_y) \text{ and } u_{\bar{z}} = \overline{\partial}_z(u) = \frac{1}{2}(u_x + iu_y),$$

其中 u 是定义在 $\mathbb{D}$上的复值函数。

1.1. α-调和函数。

对于 $\alpha > -1$，我们用 Δ_α 表示与所谓标准权函数 $w_\alpha(z) = (1 - |z|^2)^\alpha$相对应的加权拉普拉斯算子，即对于 $z \in \mathbb{D}$,

$$\Delta_{\alpha,z} = \partial_z w_\alpha(z)^{-1} \overline{\partial}_z. \tag{1.1}$$

形式为 (1.1) 的加权拉普拉斯算子最早由 Garabe-dian 在 [4] 中系统研究。

设 $g \in \mathcal{C}(\mathbb{D})$ 且 $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{D})$。我们特别关注以下定义在 $\mathbb{D}$ 中的非齐次 α-调和方程:

$$\Delta_\alpha(f) = g. \tag{1.2}$$

我们还考虑函数 f 所满足的方程 (1.2) 对应的狄利克雷边值问题,

$$\begin{cases} \Delta_\alpha(f) = g & \text{in } \mathbb{D}, \\ f = f^* & \text{on } \mathbb{T}. \end{cases} \tag{1.3}$$

这里，边界数据 f^*是定义在 $\mathbb{T}$上的一个分布，即 $f^* \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$，而 (1.3) 中的边界条件理解为当 $r \to 1^-$时， $f_r \to f^* \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$，其中

$$f_r(e^{i\theta}) := f(re^{i\theta}), \quad r \in [0, 1).$$

21-2-2023 2010年数学主题分类。主要分类：30C62，31A05；次要分类：30H10，30H20。关键词和短语：泊松积分， α-调和映射，Hardy 空间，Bergman 空间。

若 (1.2) 中的 $g \equiv 0$ ，则称 (1.2) 的解为 α-调和函数。显然，0-调和函数就是调和函数。

在 [14], Olofsson 和 Wittsten 证明，若一个 α-调和函数 f 满足

$$\lim_{r\to 1^-} f_r = f^* \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}) \ \ (\alpha > -1),$$

则它具有泊松型积分的形式

$$f(z) = \mathcal{P}_\alpha[f^*](z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_\alpha(ze^{-i\theta}) f^*(e^{i\theta}) d\theta \tag{1.4}$$

在 $\mathbb{D}$ 中，其中

$$P_\alpha(z) = \frac{(1-|z|^2)^{\alpha+1}}{(1-z)(1-\overline{z})^{\alpha+1}}$$

是 $\mathbb{D}$ 中的 α-调和泊松核。

此外,

$$P_\alpha(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_{\alpha,k}(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

其中

$$e_{\alpha,k}(z) = z^k, \quad k \geq 0,$$

and

$$e_{\alpha,-k}(z) = \frac{1}{B(k,\alpha+1)}\left(\int_0^1 t^{k-1}(1-t|z|^2)^\alpha dt\right)\overline{z}^k, \quad k \geq 1,$$

见 [14]。

特别地，我们得到

$$e_{\alpha,k}(z) = \mathcal{P}_\alpha[e^{ik\theta}](z), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

此外，我们有

$$\overline{\partial} e_{\alpha,-k}(z) = \frac{1}{B(k,\alpha+1)}(1-|z|^2)^\alpha\, \overline{z}^{k-1}, \quad k \geq 1, \tag{1.5}$$

其中 B 是贝塔函数，见 [14,引理 1.1]。

回顾

$$M_\alpha(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{U}} |P_\alpha(ze^{-it})| dt.$$

映射 M_α 在 $[0,1)$ 上递增，且

$$\lim_{r\to 1} M_\alpha(r) = c_\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha/2+1)}. \tag{1.6}$$

参见 [10, 13] ， 了解相关讨论。

1.2. 广义 Hardy 空间。

对于 $p \in (0,\infty]$，广义 Hardy 空间 $\mathcal{H}^p_{\mathcal{G}}(\mathbb{D})$ 由所有从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{C}$ 的可测函数组成，这些函数满足：对所有 $r \in (0,1)$，$M_p(r,f)$ 存在，且 $\|f\|_p < \infty$，其中

$$M_p(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{\frac{1}{p}}$$

and

$$\|f\|_p = \begin{cases} \sup\{M_p(r,f) : \ 0 < r < 1\} & \text{if } p \in (0,\infty), \\ \sup\{|f(z)| : \ z \in \mathbb{D}\} & \text{if } p = \infty. \end{cases}$$

经典 Hardy 空间 $\mathcal{H}^p(\mathbb{D})$（分别为 $h^p(\mathbb{D})$）是 $\mathcal{H}^p_{\mathcal{G}}(\mathbb{D})$ 中所有在 $\mathbb{D}$ 上解析（分别为调和）的元素所构成的集合。（参见 [2, 3]）。显然，对每个 $p \in (0,\infty]$，都有 $\mathcal{H}^p_{\mathcal{G}}(\mathbb{D}) \subset L^p(\mathbb{D})$。我们用 $h^p_\alpha(\mathbb{D})$ 表示相应的、针对 α-调和函数的 Hardy 空间。

用 $L^p(\mathbb{T})$（$p \in [1,\infty]$）表示所有从 $\mathbb{T}$ 到 $\mathbb{C}$ 的可测函数 F 构成的空间，且满足

$$\|F\|_p = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(e^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} & \text{if } p \in [1,\infty), \\ \sup\{|F(e^{i\theta})| : \ \theta \in [0,2\pi)\} & \text{if } p = \infty. \end{cases}$$

众所周知，如果 F 绝对连续，那么它就有界变差。这意味着对几乎所有 $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$，导数 $\dot{F}(e^{i\theta})$ 存在，其中

$$\dot{F}(e^{i\theta}) := \frac{dF(e^{i\theta})}{d\theta}.$$

本文考虑以下问题：

对于 $\alpha > -1$，边界函数 F 需满足什么条件，才能保证其 α-调和延拓 $f = \mathcal{P}_\alpha[F]$ 的偏导数，即 f_z 和 $f_{\overline{z}}$，属于空间 $\mathcal{H}^p_{\mathcal{G}}(\mathbb{D})$（或 $L^p(\mathbb{D})$），其中 $p \in [1,\infty]$?

值得注意的是，[15]中研究了调和函数的一个类似问题，并在 [1, 9]中得到了改进。

定理 A。（[15, 定理 1.2]，[1, 定理 1.1]）设 $f = P[F]$ 是 $\mathbb{D}$ 中的调和映射，且 $F \in L^p(\mathbb{T})$，其中 F 是一个绝对连续函数。

（1）若 $p \in [1,\infty)$，则 f_z 和 $\overline{f_{\overline{z}}}$ 均属于 $L^p(\mathbb{D})$。（2）若 $p = \infty$，则存在一个调和映射 $f = P[F]$，满足 $F \in L^\infty(\mathbb{T})$，使得 f_z 和 $\overline{f_{\overline{z}}}$ 均不属于 $L^\infty(\mathbb{D})$。

此外，在满足 f 的某些附加条件时，他们证明了对于 $p \in [1,\infty]$，偏导数属于 $H^p(\mathbb{D})$。

定理 B. ([15, 定理 1.3],[1, 定理 1.2]) 假设 $p \in [1,\infty]$ 且 $f = P[F]$ 是 $\mathbb{D}$ 中的一个 (K,K')-椭圆映射，满足 $F \in L^p(\mathbb{T})$，其中 F 是一个绝对连续函数，$K \geq 1$ 且 $K' \geq 0$。那么 f_z 和 $\overline{f_{\overline{z}}}$ 都属于 $H^p(\mathbb{D})$。

在 [1], 中，作者证明了定理 B 对调和椭圆映射同样成立，而调和椭圆映射比调和拟正则映射更一般。

在 [9], 中，我们对前两个定理进行了改进，并证明对于 $1 < p < \infty$，无须对 f附加任何条件， f_z 和 $\overline{f_{\bar{z}}}$ 均属于 $H^p(\mathbb{D})$。

定理 C. [9] 设 F是定义在 $\mathbb{U}$ 上的绝对连续函数，且 $f = P[F]$是定义在 $\mathbb{D}$ 上的调和映射，并且属于 $F \in L^p(\mathbb{T})$。

(1) 若 $p \in (1, \infty)$，则 f_z 和 $\overline{f_{\bar{z}}}$ 均属于 $\mathcal{H}^p(\mathbb{D})$。此外，存在常数$A_p$ 使得

$$\max(\|f_z\|_p, \|\overline{f_{\bar{z}}}\|_p) \leq A_p \|\dot{F}\|_p.$$

(2) 若 $p = 1$ 或 $p = \infty$，则 f_z 和 $\overline{f_{\bar{z}}}$ 均属于 $\mathcal{H}^p(\mathbb{D})$，当且仅当 $H(F) \in L^p(\mathbb{U})$。此外，

$$2iz f_z(z) = P[\dot{F} + iH(\dot{F})](z),$$

其中， $H(F)$表示 F的希尔伯特变换。

2. Main results

假设 设 $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$， f 关于 θ 的极坐标偏导数为:

$$\partial_\theta f = i(z f_z - \bar{z} f_{\bar{z}}). \tag{2.1}$$

2.1. 角导数的估计 $\partial_\theta f$， f 是 α-调和的。

定理 2.1. 设 $\alpha > -1$ 和 $1 \leq p \leq \infty$。令 $f = P_\alpha[F]$ 为定义在 $\mathbb{D}$ 上的 α-调和映射，其边界 F 绝对连续，且 $F \in L^p(0, 2\pi)$。那么

$$\partial_\theta f = \mathcal{P}_\alpha[\dot{F}] \in h^p_\alpha(\mathbb{D})$$

and

$$\|\partial_\theta f\|_p \leq c_\alpha \|\dot{F}\|_p,$$

其中 c_α 定义于 (1.6) 中。

Proof. 假设 f 是 α-调和函数，且

$$f = \mathcal{P}_\alpha[F],$$

与 F 绝对连续，且 $F \in L^p(0, 2\pi)$，其中 $p \geq 1$。

$$f(z) = \mathcal{P}_\alpha[F](z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{U}} P_\alpha(ze^{-it}) F(e^{it})\, dt.$$

对于 $z = re^{i\theta}$，我们有

$$\partial_\theta P_\alpha(ze^{-it}) = -\partial_t P_\alpha(ze^{-it}).$$

通过分部积分，我们得到

$$\partial_\theta f = \mathcal{P}_\alpha[\dot{F}]. \tag{2.2}$$

利用詹森不等式，我们得到

$$|\partial_\theta f(re^{i\theta})|^p \leq M_\alpha^{p-1}(r) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P_\alpha(ze^{-it})| |\dot{F}(e^{it})|^p\, dt.$$

利用 Fubini 定理，我们得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\partial_\theta f(re^{i\theta})|^p d\theta \le M_\alpha^p(r)\|\dot{F}\|_{L^p}^p.$$

因此，

$$\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\partial_\theta f(re^{i\theta})|^p d\theta \le c_\alpha^p\|\dot{F}\|_{L^p}^p.$$

对于 $p=\infty$，显然有

$$|\partial_\theta f(re^{i\theta})| \le M_\alpha(r)\|\dot{F}\|_\infty \le c_\alpha\|\dot{F}\|_\infty.$$

因此，我们得到了所需的结果。 □

引理 2.1. 设 $\alpha > -1$ 和 $f = \mathcal{P}_\alpha[F]$ 是 $\mathbb{D}$ 上的 α-调和映射，且边界函数 F 绝对连续。则

$$\overline{z}\overline{\partial}f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{(1-|z|^2)^\alpha}{(1-\overline{z}e^{it})^{\alpha+1}}\,\dot{F}(e^{it})\,dt. \tag{2.3}$$

Proof. 令 $\alpha > -1$，通过简单计算可得

$$\overline{\partial}P_\alpha(z) = \frac{\alpha+1}{(1-\overline{z})^2}\left(\frac{1-|z|^2}{1-\overline{z}}\right)^\alpha = (\alpha+1)\frac{(1-|z|^2)^\alpha}{(1-\overline{z})^{\alpha+2}}.$$

由于 $f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_\alpha(ze^{-it})F(e^{it})\,dt$，我们得到

$$\overline{\partial}f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\partial}[P_\alpha(ze^{-it})]F(e^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\partial}P_\alpha(ze^{-it})e^{it}F(e^{it})\,dt.$$

因此，

$$\overline{\partial}f(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}}{(1-\overline{z}e^{it})^{\alpha+2}}\,F(e^{it})\,dt.$$

利用分部积分，我们得到

$$\overline{\partial}f(z) = -\frac{1}{\overline{z}}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{(1-|z|^2)^\alpha}{(1-\overline{z}e^{it})^{\alpha+1}}\dot{F}(e^{it})\,dt. \tag{2.4}$$

□

记

$$I_\alpha(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|1-\overline{z}e^{it}|^{\alpha+1}}dt,$$

其中 $r=|z|$.

引理 2.2. [8, 命题 1.1] 设 $r\in[0,1)$。

(1) 若 $\alpha>0$，则

$$I_\alpha(r) \le \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma^2(\alpha/2+1/2)}.$$

(2) 若 $-1<\alpha<0$，则

$$I_\alpha(r) \le \frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma^2(1/2-\alpha/2)}(1-r^2)^\alpha.$$

命题 2.1. 假设 $\alpha > -1$ 且 $1 \le p \le \infty$。设 $f = \mathcal{P}_\alpha[F]$ 是定义在 $\mathbb{D}$ 上的 α-调和映射，且 F 绝对连续并满足 $F \in L^p(0, 2\pi)$。那么

$$M_p(r, \overline{z}\overline{\partial} f(z)) \le I_\alpha(|z|)\|\dot{F}\|_p.$$

我们使用方程 (2.4)，并应用詹森不等式来估计函数 $\overline{z}\overline{\partial} f(z)$ 的平均值。

证明。利用 (2.4)，我们有

$$|\overline{z}\overline{\partial} f(z)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|1-\overline{z}e^{it}|^{\alpha+1}}\,|\dot{F}(e^{it})|\,dt. \tag{2.5}$$

利用詹森不等式，得到

$$|\overline{z}\overline{\partial} f(z)|^p \le I_\alpha^{p-1}(r)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|1-\overline{z}e^{it}|^{\alpha+1}}\,|\dot{F}(e^{it})|^p\,dt.$$

应用富比尼定理，得到

$$M_p^p(r, \overline{z}\overline{\partial} f(z)) \le I_\alpha^p(|z|)\|\dot{F}\|_p^p. \tag{2.6}$$

□

推论 1. 若 $\alpha > 0$ 且 $f = \mathcal{P}_\alpha[F]$ 且 F 绝对连续，使得 $F \in L^p$ 且 $1 \le p \le \infty$。则 $\overline{z}\overline{\partial} f \in H_g^p(\mathbb{D})$ 且

$$\|\overline{z}\overline{\partial} f(z)\|_p \le \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma^2(\alpha/2+1/2)}\|\dot{F}\|_p.$$

证明. 设 $\alpha > 0$，由命题 2.1 和引理 2.2 可推得

$$M_p(r, \overline{z}\overline{\partial} f(z)) \le I_\alpha(r)\|\dot{F}\|_p \le \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma^2(\alpha/2+1/2)}\|\dot{F}\|_p.$$

因此

$$\|\overline{z}\overline{\partial} f(z)\|_p \le \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma^2(\alpha/2+1/2)}\|\dot{F}\|_p.$$

□

结合前述结果与恒等式

$$iz\partial = \partial_\theta + i\overline{z}\bar{\partial}, \tag{2.7}$$

我们得到第一个主要结果

定理 2.2. 设 $\alpha \in (-1, \infty)$，其中 $\alpha \ne 0$，并设 $f = P_\alpha[F]$ 且 F 是绝对连续的，使得 $F \in L^p$ 且 $1 \le p \le \infty$。

(1) 如果 $\alpha > 0$，那么 $\overline{\partial} f$ 和 ∂f 属于 $H_{\mathcal{G}}^p(\mathbb{D}) \subset L^p(\mathbb{D})$。(2) 如果 $\alpha \in (-1, 0)$，那么对于 $p < -\frac{1}{\alpha}$，∂f 和 $\bar{\partial} f$ 属于 $L^p(\mathbb{D})$。(3) 对于 $\alpha \in (-1, 0)$ 和 $p \ge -\frac{1}{\alpha}$，存在 f 个 α-调和函数，使得 ∂f 和 $\bar{\partial} f \notin L^p(\mathbb{D})$，此外，$\partial f$ 和 $\bar{\partial} f \notin H_{\mathcal{G}}^1(\mathbb{D})$。

证明。(1) 和 (2) 是前述讨论、命题 2.1 以及引理 2.2 的直接推论。

(3) 设 $\alpha \in (-1, 0)$，并考虑 $H(e^{i\theta}) = e^{-i\theta}$。我们有 $e_{\alpha,-1}(z) = P_\alpha[H](z)$，且

$$\overline{\partial} e_{\alpha,-1}(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha.$$

因此 $\overline{\partial} e_{\alpha,-1} \notin L^p(\mathbb{D})$，对于 $p \geq -\frac{1}{\alpha}$ 和 $\overline{\partial} e_{\alpha,-1} \notin H^1_{\mathcal{G}}(\mathbb{D})$。 □

我们的第二个主要结果如下

定理 2.3. 设 $\alpha \in (-1, 0)$，并设 $f = \mathcal{P}_\alpha[F]$ 和 F 是绝对连续的，满足 $F \in L^p$，其中 $1 \leq p \leq \infty$。那么，$\overline{\partial} f$ 或 ∂f 属于 $H^p_{\mathcal{G}}(\mathbb{D})$，当且仅当，$f$ 是解析的。

证明. 考虑 f 的级数展开

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} e_{\alpha,-n}(z) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

对于 $n \geq 1$，令

$$f_n(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(ze^{it}) e^{int} dt, \quad z \in \mathbb{D}.$$

由此可得

$$f_n(z) = a_{-n} e_{\alpha,-n}(z).$$

因此

$$\bar{\partial} f_n(z) = a_{-n} \bar{\partial} e_{\alpha,-n}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\partial} f(ze^{it}) e^{i(n-1)t} dt.$$

首先，假设 $\overline{\partial} f \in H^p_{\mathcal{G}}(\mathbb{D})$，那么由 (1.5) 可得 $a_{-n}(1-|z|^2)^\alpha$ 有界，这意味着对于 $n \geq 1$，$a_{-n} = 0$，且 f 是解析的。

在 $\partial f \in H^p_{\mathcal{G}}(\mathbb{D})$ 的情形下，我们可推出 $\overline{\partial} f \in H^p_{\mathcal{G}}(\mathbb{D})$。事实上，由 (2.7) 和定理 2.1 可得

$$iz\overline{\partial} f(z) = iz\partial f(z) - \partial_\theta f(z) \in H^p_{\mathcal{G}}(\mathbb{D}).$$

反过来，假设 f 是解析的，那么 $f = P_0[F]$，且 $f'(z) = -\frac{i}{z}\partial_\theta f(z) = -\frac{i}{z} P[\dot{F}] \in H^p(\mathbb{D})$. □

3. Schwartz Lemma for α-harmonic functions

解析函数的施瓦茨引理在复分析中发挥着重要作用，并已推广到各种函数空间。

Heinz [6] 将其推广到复值调和函数类。也就是说，如果 f 是一个从 $\mathbb{D}$ 到其自身的复值调和函数，且满足 $f(0) = 0$，那么对于 $z \in \mathbb{D}$，

$$f(z)| \leq \frac{4}{\pi} \arctan |z|.$$

Hethcote [7] 改进了 Heinz 的结果，去除了假设 $f(0) = 0$，即，设 f 是从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}$ 的调和函数，则

$$\left| f(z) - \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} f(0) \right| \leq \frac{4}{\pi} \arctan |z|.$$

Li 等人 [11], 针对 α-调和方程$\Delta_\alpha(f) = g$的解，提出了一个施瓦茨型引理，其条件为 $\alpha \geq 0$。对于 $g = 0$，他们得到

定理 D. [11,定理 2.1]设 $\alpha \geq 0$且 $f^* \in \mathcal{C}(\mathbb{U})$，并且 $f = P_\alpha[f^*]$是 α-调和函数，定义在 $\mathbb{D}$ 上，满足 $f(0) = 0$。那么

$$|f(z)| \leq 2^\alpha \frac{4}{\pi} |f^*|_\infty \arctan |z|.$$

在证明中，作者使用了假设 $P_\alpha[|f^*|](0) = 0$，而不是 $P_\alpha[f^*](0) = 0$。显然，假设 $P_\alpha[|f^*|](0) = 0$意味着 $f^* = 0$，因此 $f = 0$。为弥补这一缺漏，作者在 [12], 中证明了以下定理

定理 E. [12,定理 1.1]设 $f^* \in \mathcal{C}(\mathbb{U})$ 且 $f = P_\alpha[f^*]$。

(a) 若 $\alpha \geq 0$，则

$$|f(z)| \leq 2^{\alpha+1} \frac{|f|_\infty}{\pi} \arctan\left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \tan\frac{c\pi}{2}\right).$$

(b) 若 $\alpha < 0$，则

$$|f(z)| \leq 2^{1-\alpha} \frac{|f|_\infty}{\pi} (1-|z|^2)^\alpha \arctan\left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \tan\frac{c\pi}{2}\right),$$

其中 $c = \frac{P_\alpha[|f^*|](0)}{|f^*|_\infty}$。

我们认为，对于涉及 $f(0)$ 而非 $P_\alpha[|f^*|](0)$ 的 α-调和函数，给出施瓦茨型引理更为自然。

本节旨在按照 Hethcote [7] 的思路，证明一个从单位圆盘到其自身的 α-调和函数的施瓦茨型引理。

Let

$$g_\alpha(z) := \left(\frac{1-|z|^2}{1-\overline{z}}\right)^\alpha,$$

so

$$P_\alpha(z) = \left(\frac{1-|z|^2}{1-\overline{z}}\right)^\alpha \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} = g_\alpha(z) P(z), \tag{3.1}$$

其中

$$P(z) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2},$$

是经典的泊松核。

Let

$$|g_\alpha(r)|_\infty = \sup_{0\leq\theta\leq 2\pi} |g_\alpha(re^{i\theta})|.$$

可以验证

$$|g_\alpha(r)|_\infty \leq 2^\alpha, \quad \text{for} \quad \alpha \geq 0, \tag{3.2}$$

and

$$|g_\alpha(r)|_\infty \le (1-r)^\alpha, \quad \text{for} \quad \alpha < 0. \tag{3.3}$$

令 $f:\ \mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 是一个从单位圆盘映射到自身的 α-调和映射。那么，我们可以写成 te

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{U}} P_\alpha(ze^{-it}) f^*(e^{it})\, dt,$$

其中 f^*是 f的边界函数，且 $|f^*|_\infty \le 1$.

Let

$$G_\alpha(z) := g_\alpha[f](z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{U}} g_\alpha(ze^{-it}) f^*(e^{it})\, dt = \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{U}} \frac{f^*(e^{it})}{(1-\overline{z}e^{it})^\alpha}\, dt.$$

注记，在 $\alpha = 0$的情形下， $G_0(z) = f(0)$。

引理 3.1. 设 $\alpha > -1$ 和 f 是从单位圆盘到单位圆盘的 α-调和函数。则

$$\left| f(z) - \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} G_\alpha(z) \right| \le \frac{4}{\pi} |g_\alpha(|z|)|_\infty \arctan|z|.$$

特别地

(1) 若 $\alpha \ge 0$，则

$$\left| f(z) - \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} G_\alpha(z) \right| \le \frac{2^{\alpha+2}}{\pi} \arctan|z|.$$

(2) 若 $\alpha < 0$，则

$$\left| f(z) - \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} G_\alpha(z) \right| \le \frac{4}{\pi} (1-|z|)^\alpha \arctan|z|.$$

证明。我们有

$$\left| f(z) - \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} G_\alpha(z) \right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{U}} \left| P(ze^{-it}) - \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} \right| \left| g_\alpha(ze^{-it}) f^*(e^{it}) \right| dt$$

$$\le \frac{4}{\pi} |f^*|_\infty |g_\alpha(|z|)|_\infty \arctan|z|.$$

事实上，由 Hethcote [7], 可得 $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{U}} \left| P(ze^{-it}) - \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} \right| dt \le \frac{4}{\pi} \arctan|z|$. 结论由不等式 (3.2) 和 (3.3) 得出。□

引理 3.2。设 $\alpha > -1$ 和 $r \in [0,1)$。则

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{U}} \left| (1-re^{it})^{-\alpha} - 1 \right| dt \le \left| (1-r)^{-\alpha} - 1 \right|.$$

Proof. 令 $u(r,t) = (1-re^{it})^{-\alpha}$. 由于 $u_r(r,t) = \alpha e^{it}(1-re^{it})^{-\alpha-1}$，且 $-\alpha - 1 < 0$，我们有

$$|u_r(r,t)| \le |\alpha|(1-r)^{-\alpha-1}, \quad r \in [0,1] \text{ and } t \in \mathbb{R}.$$

接下来，利用 $u(r,t) - u(0,t) = \int_0^r u_x(x,t)dx$，我们得到

$|u(r,t) - u(0,t)| \le \int_0^r |u'_x(x,t)|dx \le \int_0^r |\alpha|(1-x)^{-\alpha-1}dx = \frac{|\alpha|}{\alpha}((1-r)^{-\alpha}-1)$,
因此

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{U}} \left|(1-re^{it})^{-\alpha}-1\right| dt \le \left|(1-r)^{-\alpha}-1\right|.$$

□

结合前两个引理，我们得到本节的主要结果。

定理 3.1. 设 $\alpha > -1$ 和 $f\colon \mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 是一个 α-调和函数。则 (1) 如果

$$\alpha \ge 0, \ then$$

$$\left|f(z) - \frac{(1-|z|^2)^{\alpha+1}}{1+|z|^2}f(0)\right| \le \frac{2^{\alpha+2}}{\pi}\arctan|z| + 2^{\alpha+1}(1-|z|)\left(1-(1-|z|)^{\alpha}\right).$$

(2) 如果 $\alpha < 0$, 则

$$\left|f(z) - \frac{(1-|z|^2)^{\alpha+1}}{1+|z|^2}f(0)\right| \le \frac{4}{\pi}(1-|z|)^{\alpha}\arctan|z| + \left((1-|z|)^{\alpha}-1\right).$$

证明. 设

$$H_\alpha(z) := \frac{G_\alpha(z)}{(1-|z|^2)^\alpha} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{U}} \frac{f^*(e^{it})}{(1-\overline{z}e^{it})^\alpha}\,dt.$$

and

$$K_\alpha(z) := H_\alpha(z) - f(0).$$

注意到

$$f(z) - \frac{(1-|z|^2)^{\alpha+1}}{1+|z|^2}f(0) = \left(f(z) - \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}G_\alpha(z)\right) + \frac{(1-|z|^2)^{\alpha+1}}{1+|z|^2}K_\alpha(z).$$

利用前面的引理，可得:

(1) 若 $\alpha \ge 0$, 则

$$\left|f(z) - \frac{(1-|z|^2)^{\alpha+1}}{1+|z|^2}f(0)\right| \le \frac{2^{\alpha+2}}{\pi}|f^*|_\infty \arctan|z| + \frac{(1-|z|^2)^{\alpha+1}}{1+|z|^2}|K_\alpha(z)|$$

$$K_\alpha(z) = H_\alpha(z) - f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{U}}\left[(1-\overline{z}e^{it})^{-\alpha}-1\right]f^*(e^{it})\,dt.$$

Thus

$$|K_\alpha(z)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{U}}\left|(1-|z|e^{it})^{-\alpha}-1\right| dt \le (1-r)^{-\alpha}-1.$$

(2) 首先，我们注意到

$$\frac{(1-|z|^2)^{\alpha+1}}{1+|z|^2} \le (1-|z|^2)^\alpha \le (1-|z|)^\alpha.$$

$\alpha < 0$ 的情形与前一种情形类似。 □

利用 $p \in (0,1)$ 和 $x, y \ge 0$ 的恒等式

$$(x+y)^p \le x^p + y^p$$

以及函数 $(1-x)^\alpha$ 的凸性，我们得到 $(1-x)^\alpha \ge 1-\alpha x$，其中 $\alpha \ge 1$ 和 $x \in [0,1]$。

推论 2. 设 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 是一个 α-调和函数。

(1) 若 $0<\alpha\le 1$，则

$$\left|f(z)-\frac{(1-|z|^2)^{\alpha+1}}{1+|z|^2}f(0)\right|\le 2^{\alpha+1}\left(\frac{2}{\pi}\arctan|z|+|z|^{\alpha}\right).$$

(2) 若 $\alpha\ge 1$，则

$$\left|f(z)-\frac{(1-|z|^2)^{\alpha+1}}{1+|z|^2}f(0)\right|\le 2^{\alpha+1}\left(\frac{2}{\pi}\arctan|z|+\alpha|z|\right).$$

最后，我们给出 H_α 的幂级数展开，因为它是反解析函数。

由于

$$\frac{1}{(1-\overline{z}e^{it})^{\alpha}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}\,\overline{z}^{n}e^{int},$$

我们推得

$$H_\alpha(z)=\frac{G_\alpha(z)}{(1-|z|^2)^{\alpha}}=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}\widehat{f^*}(-n)\,\overline{z}^{n},$$

其中

$$\widehat{f^*}(-n)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{U}}f^*(e^{it})e^{int}\,dt.$$

这里我们利用了 f 具有如下级数展开

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{f^*}(-n)e_{\alpha,-n}(z)+\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f^*}(n)z^{n},$$

参见 [14, 第 5] 节。

References

1. S.L. Chen、S. Ponnusamy、X.T. Wang：《关于〈调和映射与调和拟正则映射偏导数的范数估计〉的注记》。《几何分析杂志》31，11051–11060（2021） 2. P. Duren，《 H^p 空间理论》，第2版，Dover出版社，米尼奥拉，纽约州，2000。 3. P. Duren，《平面调和映射》，剑桥大学出版社，2004。 4. P. R. Garabedian，《共形映射中出现的一个偏微分方程》，《太平洋数学杂志》，4（1951），482–524。 5. H. Hedenmalm、B. Korenblum 和 K. Zhu，《Bergman空间理论》，施普林格，纽约，2000。 6. E. Heinz：《关于单叶调和映射》。《太平洋数学杂志》9，101–105（1959）。 7. H.W. Hethcote：《调和函数的施瓦茨引理类比》。《国际数学教育科学与技术杂志》8(1)，65–67（1977） 8. A. Khalfallah、M. Mateljevi´c、M. Mhamdi：《具有一般Poisson表示的映射的一些性质》。《地中海数学杂志》18(5)，1-19（2021） 9. A. Khalfallah、M. Maleljevi´c，《单位圆盘上调和函数偏导数的估计》，已提交 10. P. Li、X. Wang 和 Q. Xiao，《单位圆盘中 α-调和函数的若干性质》，《数学月刊》，184（2017），627–640。 11. P. Li；A. Rasila 和 Z. Wang，《关于 α-调和方程解的性质》。《复变函数与椭圆方程》65，第12期，1981–1997（2020）

12. Li, M., Chen, X.《 α-调和方程解的施瓦茨引理》。《Bull. Malays. Math. Sci. Soc.》45，2691–2713（2022）。 13. A. Olofsson，《单位圆盘中一族泊松型核的微分算子》，《J. Anal. Math.》，123（2014），227–249。 14. A. Olofsson 和 J. Wittsten，《单位圆盘中标准加权拉普拉斯算子的泊松积分》，《J. Math. Soc. Japan》，65（2013），447–486。 15. J. F. Zhu，《调和映射与调和拟正则映射偏导数的范数估计》，《几何分析杂志》，31，5505–5525（2021）

Department of Mathematics, King Fahd University of Petroleum and Minerals, Dhahra

N

31261, Saudi Arabia电子邮件地址：khelifa@kfupm.edu.saM. Mateljević,
Faculty of mathematics, University of Belgrade, Studentski Trg 16,Belgrade,
Republic of Serbia电子邮件地址：miodrag@matf.bg.ac.rs